F.X. EDER

MODERNE MESSMETHODEN DER PHYSIK

TEIL 3

DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

F. X. EDER

MODERNE MESSMETHODEN DER PHYSIK

TEIL 3



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

FRANZ X. EDER · MODERNE MESSMETHODEN DER PHYSIK

HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON ROBERT ROMPE UND ERNST SCHMUTZER

BAND 3

MODERNE MESSMETHODEN DER PHYSIK

VON

PROF. DR.-ING. FRANZ XAVER EDER

Technische Hochschule München
und
Zentralinstitut für Tieftemperaturforschung
der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

TEIL III

ELEKTROPHYSIK

Mit 887 Abbildungen im Text

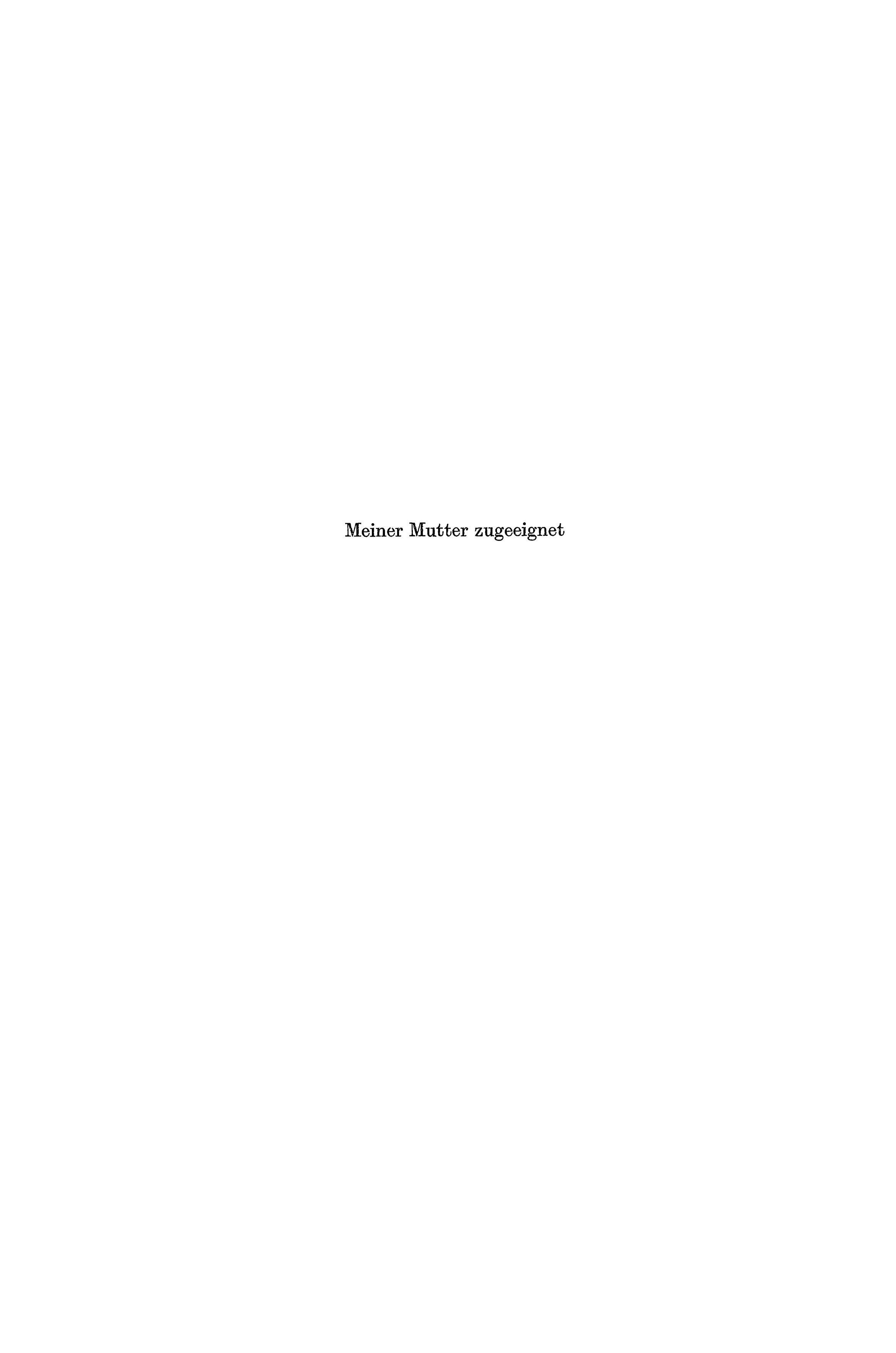


VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

BERLIN 1972

ES 18 B 1, 6
Verantwortlicher Verlagslektor: Dipl.-Phys. G. Zahn

Printed in the German Democratic Republic
Lizenz-Nr. 206 · 435/73/72
Satz und Druck: Druckerei „Maxim Gorki", 74 Altenburg



Meiner Mutter zugeeignet

VORWORT

Der vorliegende, nach einer längeren Pause erscheinende dritte Band der „Modernen Meßmethoden der Physik", der sich mit den experimentellen Methoden der Elektrophysik befaßt, nimmt auch in der Reihenfolge der fünf Bände des Gesamtwerkes eine zentrale Stellung ein. Die in den vergangenen zwanzig Jahren beobachtete Entwicklung in der experimentellen Technik der physikalischen Forschung zeigt die zunehmende Tendenz, nichtelektrische Größen mittels elektrischer Verfahren zu messen. Dabei kommt den elektrischen Meßmethoden ihre große Überlegenheit den unmittelbaren Verfahren gegenüber zugute, d. h. ihre sehr große Genauigkeit, die Möglichkeit der Fernmessung und laufenden Registrierung und schließlich die mögliche Verarbeitung der gewonnenen Meßdaten unmittelbar nach ihrer Erfassung in elektronischen Tischrechnern. Dieser Wandel der physikalischen Arbeitsmethoden wirkt sich besonders auffällig auf dem kommerziellen Sektor aus: nicht nur von den bekannten großen Herstellern wird heute ein breites Programm hervorragender Geräte und Meßinstrumente auf dem Markt angeboten, sondern auch kleine Spezialbetriebe gehen auf die speziellen Anforderungen des Experimentalphysikers ein und stellen in kleinen Serien komplizierte Geräte her, in denen neueste Entdeckungen praktisch verwirklicht sind. Als prägnante Beispiele können komplette Mößbauer-Effekt-Apparaturen oder supraleitende Quanteninterferometer angeführt werden, deren gemeinsames Merkmal ihre außerordentlich hohe Auflösung bildet. Auf dem Sektor der Meßdatenverarbeitung stellen die heute in großer Vielfalt und preisgünstig angebotenen Operationsverstärker eine große Hilfe beim Aufbau komplizierter elektronischer Geräte für den Experimentierbetrieb dar.

Diese von den Fortschritten in der Kern- und Raumfahrttechnik stimulierte Entwicklung führt zwangsläufig bei der Darstellung der einzelnen Meßmethoden zu einer Verflechtung und zu unvermeidbaren inhaltlichen Überschneidungen einzelner Abschnitte mit den bereits erschienenen Bänden. Auch aus diesem Grund ist dieser Band umfangreicher als die bereits vorliegenden Bücher.

Im einzelnen werden in den ersten Abschnitten Instrumente und Verfahren zur Messung der elektrischen Grundgrößen behandelt, Verstärker- und Gleichrichterelemente in Theorie und Anwendung besprochen und die Grundlagen für die Erzeugung, Verstärkung und Diskriminierung von Wechselspannungssignalen dargestellt. Mit Hilfe dieses Rüstzeugs werden Verfahren zur Messung des elektrischen Widerstandes (§ 9), der Kapazität (§ 10) und der Induktivität (§ 14) im gesamten Frequenzbereich diskutiert. Ausführlich wird auf die Messung der magnetischen Feldgrößen und Stoffeigenschaften (§§ 11 und 12) sowie auf die Erzeugung von Magnetfeldern (§ 13) eingegangen, wobei die jüngste Entwicklung auf dem Gebiet der supraleitenden Magnete und bei der Erzeugung hoher Impulsfelder besonders hervorgehoben wird. Die restlichen Abschnitte über elektrische Maschinen, spezielle Stromquellen und elektro-

chemische Meßmethoden sind auf die Interessen des Experimentalphysikers zugeschnitten.

Wie in den bereits vorliegenden Bänden habe ich mich bemüht, Grundlagen der Meßverfahren und erprobte oder aussichtsreiche moderne Methoden in bewußt kurzer Form darzustellen und darüber hinaus dem Leser durch ausgewählte Literaturhinweise neueren Datums weitere Ausführungsbeispiele nachzuweisen. Zahlenangaben über Stoffeigenschaften werden nur in dem Umfang gebracht, wie sie die Auswahl der speziellen Meßverfahren erfordern.

Für die redaktionelle Zusammenarbeit bin ich dem Verlag, insbesondere dem Lektorat Physik, für die sorgfältige Ausstattung und Drucklegung dem Verlag und der Druckerei zu großem Dank verpflichtet. Besondere Anerkennung gebührt Herrn Professor Dr. H. Jancke und seinen Mitarbeitern für die Durchsicht des Manuskripts, wertvolle Ergänzungen und die genaue Berücksichtigung der noch nicht zum Gemeingut gewordenen SI-Einheiten. Meine Frau hat in immerwährendem Fleiß das Manuskript angefertigt und mit großer Sorgfalt Korrekturen gelesen, wofür ihr mein besonderer Dank gilt.

Ich hoffe auf eine günstige Aufnahme des Werkes, Tolerierung der noch vorhandenen Mängel und freundliche Hinweise für ihre Beseitigung.

München, im Juni 1972 Franz X. Eder

INHALTSVERZEICHNIS

§ 1 ELEKTRISCHE MASSSYSTEME UND EINHEITEN [*1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9*]

Wie in den anderen physikalischen Disziplinen werden auch in der Elektrodynamik die Gesetzmäßigkeiten quantitativ durch *Grundgrößen* beschrieben, die durch zweckmäßige Grundmeßverfahren eingeführt und definiert werden. Die für diese Grundgrößen vereinbarten Maßeinheiten werden als *Grundeinheiten* bezeichnet. Alle übrigen für die Beschreibung physikalischer Eigenschaften erforderlichen Größen sind aus den Grundgrößen *abgeleitete Größen*, die durch *abgeleitete Einheiten* gemessen werden. Ein System von Grundeinheiten und abgeleiteten Einheiten, die durch Definitionsgleichungen miteinander verknüpft sind, wird *Maßsystem* genannt.

1.1 Dimensionssysteme der Elektrodynamik

In der feldtheoretischen Darstellung der Elektrodynamik wird neben den drei mechanischen Grundgrößen — Länge, Masse, Zeit — als vierte eine elektrische Grundgröße — Stromstärke — benutzt. Daneben wurden bisher noch vielfach — vor allem in der theoretischen Physik — Dimensionssysteme mit *drei* (mechanischen) Grundgrößenarten zur Darstellung der Gesetzmäßigkeiten verwendet.

1.11 Rationale und nichtrationale Definition der Größen

Ein weiteres Unterscheidungsmerkmal für die Definition der elektrodynamischen Größen, die Alternative *rational* oder *nichtrational*, ist geometrisch bedingt. Zur Klarstellung des Unterschieds legt man z. B. die elektrische Ladung Q zugrunde, von der ein elektrischer Fluß Ψ ausgeht. Wird mit $\boldsymbol{D}$ die elektrische Verschiebungsdichte bezeichnet, so nennt man die Einführung dieser Größen

rational, wenn $$\Psi = \oint \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = Q,$$

und *nichtrational*, wenn $$\Psi = \oint \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = 4\pi Q.$$

Analog gilt für das Durchflutungsgesetz die Unterscheidung:

rational, wenn $$\oint \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \Sigma I,$$

nichtrational, wenn $$\oint \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 4\pi\Sigma I,$$

wobei $\boldsymbol{H}$ die Feldstärke und I die Stromstärke bedeutet.

Sind die Grundgrößen rational miteinander verknüpft, wie es im jetzt gebräuchlichen Dimensionssystem mit vier Grundgrößenarten der Fall ist, so erscheint in den Bestimmungsgleichungen eine etwa vorhandene Symme-

trie des Feldverlaufs in expliziter Form: bei Kugelsymmetrie im ersten Fall wird die elektrische Verschiebungsdichte $\boldsymbol{D} = Q/4\pi r^2$ oder im zweiten Fall die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H} = I/2\pi r$ für Zylindersymmetrie, d. h. für den gestreckten Leiter.

Bei nichtrationaler Einführung der Größen treten solche Symmetriefaktoren bei der Kugel- und Zylinderkonfiguration nicht, wohl aber beim ebenen Problem auf. Die nichtrationale Schreibweise findet sich noch im CGS-System (s. § 1.31) als Folge der nichtrationalen Schreibweise des Coulombschen Gesetzes in Analogie zum Newtonschen Massenanziehungsgesetz.

1.12 Darstellung in drei Grundgrößen

Da in diesem Buch nur das *Internationale Einheitensystem* (SI, s. § 1.2) benutzt wird, genügen für die Beschreibung der Dreier-Größen, die dem CGS-System zugrunde liegen, folgende Hinweise:

Bei der *elektrostatischen* Einführung der elektrodynamischen Größen wird aus der Kraftwirkung zwischen zwei Ladungsgrößen Q_{s1} und Q_{s2} entsprechend der Definitionsgleichung

$$F = \frac{Q_{s1}\, Q_{s2}}{a^2} \tag{1/1}$$

die Größenart Q gefunden und auf die mechanischen Grundgrößen Länge (L), Masse (M) und Zeit (T) zurückgeführt. Die Ladung Q erhält nach Gl. (1/1) das Dimensionsprodukt $\mathsf{L}\sqrt{\mathsf{F}} = \mathsf{L}^{3/2}\mathsf{M}^{1/2}\mathsf{T}^{-1}$ und bildet die Basis für die Ableitung der übrigen elektrodynamischen Größen.

Bei der *elektromagnetischen* Einführung der Größen wird von der Kraft F zwischen zwei magnetischen Polstärken p_{m1} und p_{m2} im Abstand a ausgegangen, die man analog zu Gl. (1/1) aus

$$F = \frac{p_{m1}\, p_{m2}}{a^2} \tag{1/2}$$

berechnet. Im mechanischen Dimensionssystem ergibt sich daraus für die magnetische Polstärke das Dimensionsprodukt $\mathsf{L}\sqrt{\mathsf{F}} = \mathsf{L}^{3/2}\mathsf{M}^{1/2}\mathsf{T}^{-1}$, wie im Fall der elektrostatischen Festlegung. Alle übrigen Größenarten lassen sich aus p_m ableiten.

1.13 Darstellung in vier Grundgrößen

Durch die Einführung einer elektrischen Größe als Grundgrößenart, z. B. für die elektrische Ladung oder die Stromstärke, gelangt man zusammen mit den drei mechanischen Grundgrößen zum heute gebräuchlichen Dimensionssystem der Elektrodynamik, das — wie auch in diesem Buch — in der Elektrotechnik ausschließlich angewandt wird und auf vier Grunddimensionen beruht. Von den grundsätzlich möglichen Dimensionssystemen, in denen als vierte Grundgröße die Ladung (Q), Stromstärke (I), Dielektrizitätskonstante (ε) oder Permeabilität (μ) gewählt werden kann, sind praktisch das Länge-Masse-Zeit-Stromstärke(LMTI)- und das Länge-Zeit-Spannung-Stromstärke-

(LTUI)-System in Gebrauch, die durch die Dimensionsgleichung $\mathsf{U} = \mathsf{L^2MT^{-3}I^{-1}}$ ineinander übergeführt werden können.

Das dem Internationalen Einheitensystem (SI) zugrunde liegende LMTI-System definiert z. B. über das Durchflutungsgesetz die Größenart $\boldsymbol{H}$ in rationaler Einführung:

$$\oint \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = I \quad \text{mit} \quad \dim(\boldsymbol{H}) = \mathsf{L^{-1}I}.$$

Aus dem Induktionsgesetz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = -U \quad \text{ergibt sich:} \ \dim(\boldsymbol{B}) = \mathsf{MT^{-2}I^{-1}}.$$

Aus $\boldsymbol{B}/\boldsymbol{H} = \mu_0\mu_r$ (die Relativpermeabilität μ_r ist dimensionslos) findet man für μ_0 die Dimension $\mathsf{LMT^{-2}I^{-2}}$.

Zur Angabe der Größen im LTUI-System werden ebenfalls SI-Einheiten verwendet. Die Darstellung in diesem System hat lediglich den Vorzug, daß die Dimensionen für eine Reihe von Größen übersichtlicher und symmetrisch werden, z. B.: $\dim(\mu_0) = \mathsf{L^{-1}TUI^{-1}}$ und $\dim(\varepsilon_0) = \mathsf{L^{-1}TU^{-1}I}$ (vgl. *Tabelle1*).

1.14 Beziehungen zwischen Systemen mit drei und vier Grunddimensionen

Die in § 1.12 beschriebenen elektrischen und magnetischen Größenarten auf der Basis von drei mechanischen Grundgrößen lassen sich durch größenmäßige Verknüpfungsrelationen auf die Systeme mit vier Grunddimensionen zurückführen. In *Tabelle 1.1* sind die Dimensionen elektrischer und magnetischer Größenarten in den oben näher bezeichneten Dreier- und Vierer-Dimensionssystemen zusammengestellt. Die in Spalte 3 angegebenen Definitionsgleichungen beziehen sich auf das LMTI-System. Die dazugehörigen quantitativen Verknüpfungsrelationen für die Größen sind in *Tabelle 1.3* aufgeführt.

1.2 Grundeinheiten des Internationalen Einheitensystems [*1.10*]

Als *Einheit* wird bekanntlich die Vergleichsgröße bezeichnet, mit der die experimentell bestimmte Größe gleicher Art gemessen wird, wobei aus dem Verhältnis Größe/Maßeinheit der Zahlenwert (die Maßzahl) hervorgeht (vgl. Bd. I, § 1.71).

Als Grundeinheiten eines kohärenten Einheitensystems für den praktischen Gebrauch in Physik und Technik sind von der 10. Generalkonferenz für Maß und Gewicht 1954 die folgenden Einheiten angenommen worden:

für die Länge	das Meter (m)
für die Masse	das Kilogramm (kg)
für die Zeit	die Sekunde (s)
für die Stromstärke	das Ampere (A)
für die thermodynamische Temperatur	das Kelvin (K)
für die Lichtstärke	die Candela (cd)

Tabelle 1.1 Dimensionen von elektrischen und magnetischen Größen in Maßsystemen mit drei bzw. vier Grundgrößen

Größenart	Formel-zeichen	Definitions-gleichung	Dreier-System (LMT)			Vierer-System	
			elektrostat.	elektromagn.	symmetrisch	LMTI (SI)	LTUI
1	2	3	4	5	6	7	8
El. Stromstärke	I		$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	I	I
El. Spannung	U	$U = P/I$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	U
El. Feldstärke	$\boldsymbol{E}$	$\int \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = U$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$LMT^{-3}I^{-1}$	$L^{-1}U$
El. Verschiebung	$\boldsymbol{D}$	$\int \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = Q$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-3/2}M^{1/2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-2}TI$	$L^{-2}TI$
Diel. Konstante	ε	$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$	1	$L^{-2}T^2$	1	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$	$L^{-1}TU^{-1}I$
El. Ladung	Q	$Q = \int I\,\mathrm{d}t$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{1/2}M^{1/2}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	TI	TI
Kapazität	C	$C = Q/U$	L	$L^{-1}T^2$	L	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	$TU^{-1}I$
El. Widerstand	R	$R = U/I$	$L^{-1}T$	LT^{-1}	$L^{-1}T$	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	UI^{-1}
Spezif. Widerstand	ϱ	$\varrho = \boldsymbol{E}/\boldsymbol{J}$	T	L^2T^{-1}	T	$L^3MT^{-3}I^{-2}$	LUI^{-1}
Magn. Spannung	V	$V = \int \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	I	I
Magn. Feldstärke	$\boldsymbol{H}$	$\oint \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = I$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-1}I$	$L^{-1}I$
Magn. Induktion	$\boldsymbol{B}$	$\Phi = \int \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}$	$L^{-3/2}M^{1/2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$MT^{-2}I^{-1}$	$L^{-2}TU$
Permeabilität	μ	$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$	$L^{-2}T^2$	1	1	$LMT^{-2}I^{-2}$	$L^{-1}TUI^{-1}$
Magn. Fluß	Φ	$U = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$	$L^{1/2}M^{1/2}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	TU
Magnetisierung	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B}/\mu_0 - \boldsymbol{H}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-1/2}MT^{-1}$	$L^{-1}I$	$L^{-1}I$
Magn. Leitwert	Λ	$\Lambda = \Phi/V$	$L^{-1}T^2$	L	L	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	TUI^{-1}
Induktivität	L	$L = \Phi/I$	$L^{-1}T^2$	L	L	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	TUI^{-1}
Poynting-Vektor	$\boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$	MT^{-3}	MT^{-3}	MT^{-3}	MT^{-3}	$L^{-2}UI$

Von der 11. Generalkonferenz für Maß und Gewicht wurde 1960 für dieses System die Bezeichnung „Système International d'Unités" — *Internationales Einheitensystem* — (Abkürzung: SI) festgelegt. Seine kohärenten Einheiten werden SI-Einheiten genannt. Das SI ist inzwischen von den internationalen Fachorganisationen (IUPAP, IEC, ISO) übernommen und zum Gebrauch empfohlen worden. Es ist in vielen Ländern bereits gesetzlich zugelassen und wird in zunehmendem Maße als alleingültiges Einheitensystem eingeführt. In der Deutschen Demokratischen Republik wurde die gesetzliche Einführung schon 1958 vorgenommen [*1.11*]; in der Verordnung vom 31. 5. 1967 [*1.12*] und einer neuen Tafel der gesetzlichen Einheiten [*1.13*] wurden die Beschlüsse der letzten Generalkonferenzen berücksichtigt. In der Bundesrepublik Deutschland wurde das SI mit dem Einheitengesetz vom 2. 7. 1969 [*1.14*] gesetzliches Maßsystem.

1.21 *Das Meter* (m)

wurde auf der 11. Generalkonferenz für Maß und Gewicht mit Hilfe einer Lichtwellenlänge neu definiert; damit wurde etwa 1/10 der Meßunsicherheit des internationalen Meterprototyps aus dem Jahre 1889 erreicht, der außerdem als Strichmaß aus einer Platinlegierung zeitlichen Veränderungen durch mögliche Rekristallisationsvorgänge unterworfen war. Als „primärer Standard" für das *Wellenlängen-Meter* wird die orangefarbene Spektrallinie beim Übergang $5d_5 - 2p_{10}$ des Krypton-Nuklids ^{86}Kr benutzt und deren Vakuumwellenlänge λ_0 mit dem Meter verglichen; es gilt:

$$1\ \mathrm{m} = 1\,650763{,}73\ \lambda_0 .$$

1.22 *Das Kilogramm* (kg)

als Grundeinheit der Masse wird auf Grund der Beschlüsse der 1. und 3. Generalkonferenz für Maß und Gewicht (1889 und 1901) durch die Masse des internationalen Kilogrammprototyps dargestellt; dieser Prototyp ist ein Zylinder aus Pt-10% Ir, dessen Masse ungefähr der eines Würfels von 0,1 m Kantenlänge aus Wasser maximaler Dichte entspricht (s. a. Bd. I, § 4.61).

1.23 *Die Sekunde* (s)

als Grundeinheit der Zeit ist von der 10. Generalkonferenz in Übereinstimmung mit der Int. Astron. Union (IAU) als „Ephemeriden"-Sekunde definiert worden, die dem 31556925,974ten Teil des tropischen Jahres für 1900, Januar 0, 12 Uhr Ephemeridenzeit entspricht. Da diese Definition nicht mehr den hohen Genauigkeitsansprüchen von Physik und Technik entspricht, ist 1967 von der 13. Generalkonferenz die Neudefinition der Sekunde als atomares Frequenzetalon beschlossen worden, wonach die Frequenz beim Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes des Caesium-Nuklids ^{133}Cs als Standard nutzbar gemacht wird. Einer Sekunde entspricht das 9192631770fache der Periodendauer der entsprechenden Cs-Strahlung. Näheres s. Bd. I, § 3.62.

1.24 *Das Ampere* (A)

ist als Grundeinheit der elektrischen Stromstärke 1948 von der 9. Generalkonferenz wie folgt definiert worden: 1 Ampere ist die Stärke eines konstanten elektrischen Stromes, der durch zwei geradlinige, parallele, unendlich lange Leiter von der magnetischen Permeabilität 1 und vernachlässigbarem Querschnitt fließt, wenn bei einem Leiterabstand von 1 m im Vakuum je 1 m Länge der Doppelleitung die elektrodynamisch hervorgerufene Kraft $F = 2 \cdot 10^{-7}$ m kg $s^{-2} = 2 \cdot 10^{-7}$ N beträgt.

Diese Definition ist ein Spezialfall des Biot-Savartschen Gesetzes

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{l}{a} I_1 I_2, \tag{1/3}$$

angewandt auf zwei Leiter der Länge l im Abstand a, durch welche die Ströme I_1 und I_2 fließen. Für $I_1 = I_2 = 1$ A, $F = 2 \cdot 10^{-7}$ N und $a = 1$ m ergibt sich aus Gl. (1/3) die magnetische Feldkonstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2 = $= 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. Diese Beziehung ist mit der obigen Definition des Ampere gleichwertig.

1.3 Einheitensysteme der Elektrodynamik

Entsprechend der Darstellung der elektrodynamischen Größen mittels drei oder vier Grundgrößenarten nach §§ 1.12 und 1.13 lassen sich das CGS-System mit drei Grundeinheiten und das MKSA-System mit einer zusätzlichen, elektrischen Grundeinheit unterscheiden; das letztere wurde in der Elektrotechnik unter dem Namen Giorgi-System eingeführt und wird jetzt als Teil des SI ausschließlich benutzt.

1.31 *CGS-System*

Das CGS-System beruht auf den drei Grundgrößen Länge, Masse, Zeit, wobei als Einheiten formal L = cm, M = g und T = s verwendet werden.

Elektrostatische Einheiten (esE) sind aus Gl. (1/1) abgeleitet, womit die elektrische Ladung die Einheit cm$^{3/2}$ g$^{1/2}$ s^{-1} bekommt (vgl. *Tabelle 1.1*).

Elektromagnetische Einheiten (emE) werden aus Gl. (1/2) gewonnen, womit die magnetische Polstärke p die Einheit cm$^{3/2}$ g$^{1/2}$ s^{-1} erhält. Die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$ wird aus der Definitionsgleichung $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{F}/p$ abgeleitet; ihre Einheit ist cm$^{-1/2}$ g$^{1/2}$ s^{-1}. Da in diesem Einheitensystem die magnetische Permeabilität μ dimensionslos ist, erhält die Einheit der magnetischen Induktion $\boldsymbol{B}$ dieselbe Dimension. Diese sowie weitere häufig gebrauchte Einheiten dieses Systems haben eigene Namen erhalten:

magnetische Spannung:	1 Gilbert (Gb) = 1 cm$^{1/2}$ g$^{1/2}$ s^{-1},
magnetische Feldstärke:	1 Oersted (Oe) = 1 cm$^{-1/2}$ g$^{1/2}$ s^{-1},
magnetische Induktion:	1 Gauß (G) = 1 cm$^{-1/2}$ g$^{1/2}$ s^{-1},
magnetischer Fluß:	1 Maxwell (Mx) = 1 cm$^{3/2}$ g$^{1/2}$ s^{-1}.

Die genannten Einheiten sind seit 1958 in der DDR nicht mehr gesetzlich zugelassen.

Das *Gaußsche System* mit symmetrisch eingeführten Größen verwendet für die elektrischen Einheiten das esE-System, für die magnetischen das emE-System. Dielektrizitätskonstante ε und magnetische Permeabilität μ sind dimensionslos und erhalten im Vakuum den Wert Eins. In den Beziehungen zwischen magnetischen und elektrischen Größen tritt die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 als Faktor auf.

Das bisher in der theoretischen Physik, Atom- und Kernphysik vielfach benutzte CGS-System besitzt nur noch historisches Interesse, liefert bei der Aufstellung von Dimensionsgleichungen oft unübersehbare Schwierigkeiten und wird in diesem Buch nicht verwendet. Um die oft noch in der Literatur vorkommenden Größenangaben in CGS-Einheiten auf Angaben in MKSA-Einheiten umrechnen zu können, werden in *Tabelle 1.3* die Verknüpfungsrelationen für die wichtigsten Größenarten aufgeführt.

1.32 MKSA-System [1.1, 1.3, 1.4]

Setzt man in die LMTI-Darstellung des § 1.13 für $\mathsf{L} = \mathrm{m}$, $\mathsf{M} = \mathrm{kg}$, $\mathsf{T} = \mathrm{s}$ und $\mathsf{I} = \mathrm{A}$, so erhält man die kohärenten Einheiten des MKSA-Systems, das als Teilsystem des SI (s. § 1.2) in der DDR und BRD gesetzlich ist.

In *Tabelle 1.2* sind die wichtigsten Größen, ihre Einheiten und Beziehungen zusammengestellt.

1.33 msVA-System [1.2]

Setzt man im LTUI-System (vgl. *Tabelle 1.1*) formal $\mathsf{L} = \mathrm{m}$, $\mathsf{T} = \mathrm{s}$, $\mathsf{U} = \mathrm{V}$ und $\mathsf{I} = \mathrm{A}$ ein, so erhält man die kohärenten Einheiten des msVA-Systems, das mit dem MKSA-System identisch ist, wenn die Masseneinheit kg des MKSA-Systems durch die Einheit $\mathrm{V\,m^2\,kg\,s^{-3}\,A^{-1}} = \mathrm{W/A}$ als Grundeinheit ersetzt wird.

Ein derartiges System mit zwei elektrischen Grundeinheiten war vor 1948 erforderlich, da die elektrischen Einheiten damals unabhängig von den mechanischen Einheiten festgelegt waren. Das bis 1948 international übliche $\mathrm{msV_{int}A_{int}}$-System basierte auf der Stromstärkeeinheit *internationales Ampere* ($\mathrm{A_{int}}$) und der Widerstandseinheit *internationales Ohm* (Ω_{int}), die 1908 in London international vereinbart und gesetzlich festgelegt wurden. Die Spannungseinheit *internationales Volt* ($\mathrm{V_{int}}$) war durch das Ohmsche Gesetz $\mathrm{V_{int}} = \Omega_{\mathrm{int}} \cdot \mathrm{A_{int}}$ definiert.

Die *Darstellung* der Grundeinheiten $\mathrm{A_{int}}$ (Abscheidung von 1,11800 mg Silber je Sekunde aus wäßriger Silbernitratlösung) und Ω_{int} (Widerstand einer Hg-Säule von 14,4521 g Masse und 106,300 cm Länge bei konstantem Querschnitt) ist heute nur noch historisch gerechtfertigt. Im Jahre 1948 wurden auf Empfehlung der 9. Generalkonferenz anstelle der „internationalen" Einheiten die „absoluten" Einheiten $\mathrm{A_{abs}} = \mathrm{A}$, $\mathrm{V_{abs}} = \mathrm{V}$ und $\Omega_{\mathrm{abs}} = \Omega$ eingeführt.

Die 1948 bekanntgegebenen Umrechnungsfaktoren zwischen den entsprechenden Einheiten lauten:

$$\Omega_{\mathrm{int}}/\Omega = p = 1{,}00049;$$
$$\mathrm{V_{int}/V} = pq = 1{,}00034;$$
$$\mathrm{A_{int}/A} = q = 0{,}99985.$$

Tabelle 1.2 MKSA-Einheitensystem der Elektrodynamik

Größe	Einheit Benennung	Kurzzeichen	Beziehung zu den Grundeinheiten
El. Stromstärke	Ampere	A	Grundeinheit
El. Ladung	Coulomb	C	$1\,C = 1\,s\,A$
El. Verschiebung	Coulomb je Quadratmeter	C/m^2	$1\,C/m^2 = 1\,m^{-2}\,s\,A$
El. Verschiebungsfluß	Coulomb	C	$1\,C = 1\,(C/m^2)\,m^2 = 1\,s\,A$
El. Leistung	Watt	W	$1\,W = 1\,J/s = 1\,m^2\,kg\,s^{-3}$
El. Arbeit	Joule	J	$1\,J = 1\,N\,m = 1\,m^2\,kg\,s^{-2}$
El. Spannung	Volt	V	$1\,V = 1\,W/A = 1\,m^2\,kg\,s^{-3}\,A^{-1}$
El. Feldstärke	Volt je Meter	V/m	$1\,V/m = 1\,m\,kg\,s^{-3}\,A^{-1}$
El. Kapazität	Farad	F	$1\,F = 1\,C/V = 1\,m^{-2}\,kg^{-1}\,s^4\,A^2$
El. Dipolmoment	Coulombmeter	C m	$1\,C\,m = 1\,m\,s\,A$
El. Polarisation	Coulomb je Quadratmeter	C/m^2	$1\,C/m^2 = 1\,m^{-2}\,s\,A$
El. Widerstand	Ohm	Ω	$1\,\Omega = 1\,V/A = 1\,m^2\,kg\,s^{-3}\,A^{-2}$
Spezif. el. Widerstand	Ohmmeter	Ω m	$1\,\Omega\,m = 1\,m^3\,kg\,s^{-3}\,A^{-2}$
El. Leitwert	Siemens	S	$1\,S = 1/\Omega = 1\,m^{-2}\,kg^{-1}\,s^3\,A^2$
El. Leitfähigkeit	Siemens je Meter	S/m	$1\,S/m = 1\,m^{-3}\,kg^{-1}\,s^3\,A^2$
Magn. Fluß	Weber	Wb	$1\,Wb = 1\,V\,s = 1\,m^2\,kg\,s^{-2}\,A^{-1}$
Magn. Induktion	Tesla	T	$1\,T = 1\,Wb/m^2 = 1\,kg\,s^{-2}\,A^{-1}$
Magn. Feldstärke	Ampere je Meter	A/m	$1\,A/m = 1\,m^{-1}\,A$
Magn. Spannung	Ampere	A	$1\,A = 1\,(A/m)\,m = 1\,A$
Induktivität	Henry	H	$1\,H = 1\,Wb/A = 1\,m^2\,kg\,s^{-2}\,A^{-2}$
Magn. Polstärke (nach Coulomb)	Weber	Wb	$1\,Wb = 1\,N\,m/A = 1\,m^2\,kg\,s^{-2}\,A^{-1}$
Magn. Moment (nach Coulomb)	Webermeter	Wb m	$1\,Wb\,m = 1\,m^3\,kg\,s^{-2}\,A^{-1}$
Magn. Polarisation	Tesla	T	$1\,T = 1\,Wb/m^2 = 1\,kg\,s^{-2}\,A^{-1}$
Magn. Leitwert	Henry	H	$1\,H = 1\,Wb/A = 1\,m^2\,kg\,s^{-2}\,A^{-2}$

1.34 Darstellung der Grundeinheiten des MKSA-Systems

Die Grundeinheit *Ampere* wird durch die Definition des § 1.24 festgelegt, wobei die durch Gl. (1/3) gegebene Meßvorschrift vermittels *Stromwaagen* realisiert wird. Die aufeinander wirkenden Leiterstücke besitzen die Form von Schraubenlinien (Zylinderspulen) oder flachen Kreisringen bekannter Geometrie. Die elektrodynamische Stromkraft wird durch Wägung (vgl. Bd. I, § 4), d. h. durch Vergleich mit dem Produkt aus einer bekannten Masse und der Fallbeschleunigung gemessen. Näheres s. § 2.371.

Die abgeleitete Einheit *Volt* stellt diejenige Spannung zwischen zwei Punkten eines homogenen metallischen Leiters konstanter Temperatur dar, in dem der konstante Strom von 1 A die Leistung von 1 W umsetzt. Der entsprechende Widerstand dieses Leiterabschnitts stellt die Einheit *Ohm* dar.

Tabelle 1.3 Verknüpfungsrelationen zwischen Dreier- und Vierer-Größen

Größenart	Vierer-Größe	nicht-rationale Dreier-Größe		
		elektrostat. (e)	elektromagn. (m)	symmetrisch (s)
El. Stromstärke	I	$= I_e\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$	$= I_m\sqrt{4\pi/\mu_0}$	$= I_s\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$
El. Spannung	U	$= U_e/\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$	$= U_m/\sqrt{4\pi/\mu_0}$	$= U_s/\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$
El. Feldstärke	$\boldsymbol{E}$	$= \boldsymbol{E}_e/\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$	$= \boldsymbol{E}_m/\sqrt{4\pi/\mu_0}$	$= \boldsymbol{E}_s/\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$
El. Verschiebung	$\boldsymbol{D}$	$= \boldsymbol{D}_e\sqrt{\varepsilon_0/4\pi}$	$= \boldsymbol{D}_m/\sqrt{4\pi\mu_0}$	$= \boldsymbol{D}_s\sqrt{\varepsilon_0/4\pi}$
El. Polarisation	$\boldsymbol{P}$	$= \boldsymbol{P}_e\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$	$= \boldsymbol{P}_m\sqrt{4\pi/\mu_0}$	$= \boldsymbol{P}_s\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$
El. Moment	$\boldsymbol{p}$	$= \boldsymbol{p}_e\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$	$= \boldsymbol{p}_m\sqrt{4\pi/\mu_0}$	$= \boldsymbol{p}_s\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$
El. Ladung	Q	$= Q_e\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$	$= Q_m\sqrt{4\pi/\mu_0}$	$= Q_s\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$
Kapazität	C	$= C_e\cdot 4\pi\varepsilon_0$	$= C_m\cdot 4\pi/\mu_0$	$= C_s\cdot 4\pi\varepsilon_0$
El. Widerstand	R	$= R_e/4\pi\varepsilon_0$	$= R_m\,\mu_0/4\pi$	$= R_s/4\pi\varepsilon_0$
Spezif. el. Widerstand	ϱ	$= \varrho_e/4\pi\varepsilon_0$	$= \varrho_m\mu_0/4\pi$	$= \varrho_s/4\pi\varepsilon_0$
Magn. Spannung	V	$= V_e/\sqrt{4\pi/\varepsilon_0}$	$= V_m/\sqrt{4\pi\mu_0}$	$= V_s/\sqrt{4\pi\mu_0}$
Magn. Feldstärke	$\boldsymbol{H}$	$= \boldsymbol{H}_e/\sqrt{4\pi/\varepsilon_0}$	$= \boldsymbol{H}_m/\sqrt{4\pi\mu_0}$	$= \boldsymbol{H}_s/\sqrt{4\pi\mu_0}$
Magn. Induktion	$\boldsymbol{B}$	$= \boldsymbol{B}_e/\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$	$= \boldsymbol{B}_m\sqrt{\mu_0/4\pi}$	$= \boldsymbol{B}_s\sqrt{\mu_0/4\pi}$
Magn. Fluß	Φ	$= \Phi_e/\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$	$= \Phi_m\sqrt{\mu_0/4\pi}$	$= \Phi_s\sqrt{\mu_0/4\pi}$
Magnetisierung	$\boldsymbol{M}$	$= \boldsymbol{M}_e\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$	$= \boldsymbol{M}_m\sqrt{4\pi/\mu_0}$	$= \boldsymbol{M}_s\sqrt{4\pi/\mu_0}$
Magn. Moment	$\boldsymbol{m}$	$= \boldsymbol{m}_e\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$	$= \boldsymbol{m}_m\sqrt{4\pi/\mu_0}$	$= \boldsymbol{m}_s\sqrt{4\pi/\mu_0}$
Magn. Leitwert	Λ	$= \Lambda_e/\varepsilon_0$	$= \Lambda_m\mu_0$	$= \Lambda_s\mu_0$
Induktivität	L	$= L_e/4\pi\varepsilon_0$	$= L_m\mu_0/4\pi$	$= L_s\mu_0/4\pi$
Poynting-Vektor	$\boldsymbol{S}$	$= \boldsymbol{S}$	$= \boldsymbol{S}$	$= \boldsymbol{S}$

$\varepsilon_0 = 8{,}85419\cdot 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$; $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{H\,m^{-1}}$.

Zur *Darstellung* der Widerstandseinheit (vgl. § 9.31) werden heute Präzisionskapazitäten und -induktivitäten von reproduzierbarer Geometrie verwendet und wird der Blindwiderstand bei bekannter Frequenz gemessen.

1.4 Praktische Benutzung des MKSA-Systems

Wie bereits in § 1.13 erwähnt wurde, ist es oft bequemer, bei Dimensionsgleichungen die Dimension der Spannung (U) wie eine Grunddimension zu verwenden. In diesem Buch wird hiervon Gebrauch gemacht. Außerdem werden neben den Einheiten des MKSA (kohärenten SI-Einheiten) deren mit Vorsätzen gebildete dezimale Vielfache und Teile verwendet. Die Verwendung der Einheit Zentimeter erleichtert den schnellen Vergleich mit den Zahlenangaben in der ausländischen Literatur, in der häufig noch die CGS-Einheiten gebraucht werden. So gilt z. B. $1\,\mathrm{A/cm} \triangleq \frac{4\pi}{10}\,\mathrm{Oe}$ bei der Zahlenangabe der magnetischen Feldstärke.

§ 2 SPANNUNGS- UND STROMMESSUNG (GLEICHSTROM)

Die Messung von Gleichspannungen bzw. Gleichstrom ist eine der wichtigsten elektrischen Aufgaben und liefert auch für viele Nieder- und Hochfrequenzinstrumente die Grundlagen. Ihre Wirkungsweise beruht auf der Anwendung der Grundgesetze der Elektrostatik und Elektrodynamik; die zahlreichen Bauformen lassen sich auf wenige physikalische Prinzipien zurückführen. *Elektrometer* (§ 2.1) werden bevorzugt für Spannungs- und Ladungsmessungen angewandt, bei denen die Spannungsquelle hohen Innenwiderstand aufweist; ihre Wirkungsweise beruht auf der Ausnutzung elektrostatischer Kräfte. Für die Messung von Gleichströmen wird fast ausschließlich das *Drehspulinstrument* (§ 2.2) benutzt, das durch einfache Schaltmaßnahmen sowohl als Spannungsmesser und Mikroamperemeter als auch zur Messung sehr großer Ströme verwendet wird.

Für genaueste Strom- und Spannungsmessungen werden die oben aufgeführten Instrumente vielfach als *Nullindikatoren* in Kompensationsschaltungen benutzt (§ 2.3). Ferner gehören hierher die Meßverfahren für die *elektrische Feldstärke* (§ 2.4), *Integrationsgeräte*, wie *Zähler* (§ 2.5), und *Registriergeräte* (§ 2.6).

Zusammenfassende Literatur: Hdb. Exp.-Phys., Bd. X (1928); Hdb. Phys., Bd. XXIII (1967); Precision Electrical Measurements (Nat. Phys. Lab. Teddington, 1956); Kohlrausch, Praktische Physik, Bd. 2 (1968). Monografien über elektrische Meßtechnik [*2.14*, *2.20*, *2.88*, *2.133*, *2.142*, *2.175*, *2.181*].

2.1 Elektrostatische Instrumente [*2.91*, *2.126*, *2.134*]

Elektrostatische Instrumente beruhen auf Kraftwirkungen im elektrischen Feld; ihre Unterteilung in Faden-, Nadel-, Blättchen- und Quadrantenelektrometer stellt Konstruktionsmerkmale dar und gibt den Hinweis auf die Art der mechanischen Rückstellkraft. Diese wird beim Fadenelektrometer durch die mechanische Spannung des Fadens, beim Blättchenelektrometer durch die am Goldblättchen angreifende Schwerkraft und bei den anderen Elektrometertypen durch die Torsion des Aufhängefadens erzeugt. Der Unterschied zwischen *Elektrometer* und *Elektroskop* liegt darin, daß beim Elektroskop nur die Meßspannung am Instrument liegt, während beim Elektrometer Hilfsspannungen zur Erhöhung der Empfindlichkeit angewandt werden.

Zu den Elektrometern sind auch Röhren- und Transistorverstärker mit sehr hohem Eingangswiderstand (§ 2.33) und im weiteren Sinn hochohmige Gleichspannungsverstärker mit einem Schwingkondensator im Eingangskreis zu rechnen, mit dem die Meßspannung in eine entsprechende Wechselspannung umgeformt wird (§ 2.34). Beide Arten von Röhren- bzw. Halbleiterelektrometern sind hinsichtlich Empfindlichkeit und Nullpunktkonstanz den empfindlichsten Elektrometern mindestens ebenbürtig und bezüglich Einstelldauer und Erschütterungsunempfindlichkeit überlegen.

2.11 *Theorie der elektrostatischen Instrumente* [*2.66, 2.91, 2.202*]

Alle elektrostatischen Instrumente bestehen aus einem Gehäuse, in dem mehrere feste, oft mit Hilfsspannungen versehene Elektroden und eine oder mehrere bewegliche Elektroden angeordnet sind, welche den Meßausschlag erzeugen. Befinden sich diese Elektroden auf den Potentialen $V_1, V_2, \ldots, V_n$, so gilt für die elektrostatische Energie dieses aus n Leitern bestehenden Systems:

$$W = \frac{1}{2}\,(c_{11} V_1^2 + 2 c_{12} V_1 V_2 + \ldots) = \frac{1}{2}\,\Sigma_1\, Q_i V_i. \qquad (2/1)$$

Die Teilkapazitäten c_{11}, c_{12}, c_{13} usf. ergeben sich aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= c_{11} V_1 + c_{12} V_2 + \ldots c_{1n} V_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Q_n &= c_{n1} V_1 + c_{n2} V_2 + \ldots c_{nn} V_n, \end{aligned}\right\} \qquad (2/2)$$

wenn Q_i die Ladungen auf den Leitern sind. Als Teilkapazität c_{11} wird bekanntlich die elektrische Ladung auf dem Leiter 1 definiert, wenn alle anderen Leiter geerdet sind und auf ihm das Potential der Größe 1 herrscht; es gilt immer $c_{ji} = c_{ij}$.

Wenn die Teilkapazitäten Funktionen einer Koordinate x und die Potentiale $V_i = \text{const}$ sind, berechnet sich die Kraft F, die x zu vergrößern sucht, aus der Beziehung (2/1) zu

$$F = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_{11}}{\partial x}\, V_1^2 + 2\,\frac{\partial c_{12}}{\partial x}\, V_1 V_2 + \ldots\right). \qquad (2/3)$$

In allen Ausschlaginstrumenten wird diese Kraft durch eine Rückstellkraft kompensiert; kennt man F und die Werte von c_{ij} in Gl. (2/3) als Funktion von x, so läßt sich daraus die Spannungsempfindlichkeit des Meßgerätes berechnen.

Die *Ladungsempfindlichkeit* S_q erhält man aus Gl. (2/2) mit

$$Q_i = c_{i1} V_1 + c_{i2} V_2 + c_{i3} V_3 + \ldots,$$

woraus für die Ladung der beweglichen Elektrode (Nadel, Faden, Platte) folgt:

$$\frac{1}{S_q} = \frac{\partial Q_i}{\partial x} = c_{i1}\,\frac{\partial V_1}{\partial x} + V_1\,\frac{\partial c_{i1}}{\partial x} + \ldots \qquad (2/4)$$

Anwendung auf das Elektroskop. Besonders einfach läßt sich diese Theorie auf das *Elektroskop* anwenden, das nach Abb. 2.1 nur aus zwei Leitern, dem Gehäuse G und z. B. einem Doppelblättchen B besteht. Dieses wird durch einen Isolator I im Gehäuse gehalten und spreizt sich beim Anlegen einer Spannung. Gleichung (2/1) vereinfacht sich zu $W = c\,V^2/2$, wenn c die Kapazität des Elektrometersystems gegen G bedeutet. Die Größe c ist eine Funktion des Ausschlags α und kann als lineare Funktion $c = c_0 + b\,\alpha$ angesetzt werden. Damit ergibt sich für die auslenkende Kraft F nach Gl. (2/3) $\partial W/\partial\alpha = b\,V^2/2$.

Nimmt man die Rückstellkraft proportional zu α an, so wird $k\alpha = b\,V^2/2$, woraus sich die *Spannungsempfindlichkeit* zu

$$S_v = 1/\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right) = \frac{b\,V}{k} \tag{2/5}$$

ergibt. Die *Ladungsempfindlichkeit* des Elektroskops findet man nach Gl. (2/4) zu

$$\frac{1}{S_q} = c\frac{\partial V}{\partial \alpha} + V\frac{\partial c}{\partial \alpha}. \tag{2/6}$$

Da $\partial V/\partial \alpha$ durch Gl. (2/5) gegeben und $\partial c/\partial \alpha = b$ ist, ergibt sich daraus

$$S_q = \frac{b\,V}{ck + V^2 b^2}. \tag{2/7}$$

Für die meisten Elektroskope ist $b^2 V^2 < ck$, so daß man angenähert schreiben kann:

$$S_q = \frac{b\,V}{ck} = \frac{S_v}{c}. \tag{2/7a}$$

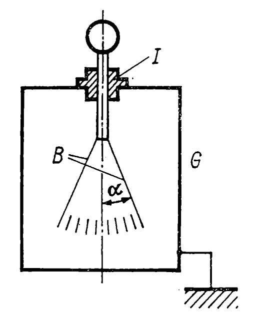


Abb. 2.1 Elektroskop

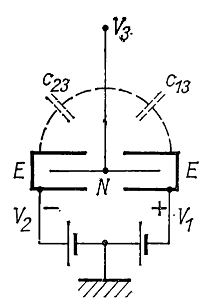


Abb. 2.2 Elektrometer

Maximale Ladungsempfindlichkeit wird nach Gl. (2/7) für $ck = V^2 b^2$ erreicht; ihr Wert errechnet sich zu

$$S_{q\max} = \frac{1}{2\sqrt{ck}} = \frac{1}{2\,V b}. \tag{2/8}$$

Die wirksame Kapazität c' des Elektroskops ergibt sich in diesem Optimalfall durch Einsetzen der Gln. (2/8) und (2/5) in (2/7a) zu

$$c' = S_v/S_{q\max} = 2c; \tag{2/9}$$

d. h., eine erhöhte Spannungsempfindlichkeit hat eine schnell anwachsende Kapazität und damit eine Abnahme der Ladungsempfindlichkeit zur Folge.

Anwendung auf die Elektrometer. Elektrometer bestehen aus der beweglichen Nadel N (s. Abb. 2.2) und meist aus zwei festen, symmetrisch geformten Leitern E, die an gleichen, aber entgegengesetzten Potentialen V_1 und V_2

liegen. Die zu messende Potentialdifferenz V_3 bzw. die zu messende Ladung wird der Nadel zugeführt; die Nadel soll symmetrische Form besitzen, so daß mechanische und elektrische Nullage zusammenfallen. Von den 27 Termen der Gl. (2/3) sind alle bis auf zwei sehr klein oder Null; die verbleibenden Ausdrücke sind gleich groß und ergeben

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = V_1 V_3 \frac{\partial c_{13}}{\partial \alpha}, \tag{2/10}$$

wenn c_{13} die Kapazität zwischen Nadel und einem der Leiter ist.

Die differentielle Kapazitätsänderung $\partial c_{13}/\partial \alpha$ in Gl. (2/10) ist für viele Elektrometer eine komplizierte Funktion des Ausschlags; lediglich für den speziellen Fall der Quadranten- und Duantenelektrometer (s. § 2.13) läßt sich angenähert für c_{13} eine lineare Funktion der Form $c_{13} = c_{13}^0 + b\alpha$ ansetzen. Das auf die Nadel ausgeübte Drehmoment ergibt sich aus Gl. (2/10) zu

$$M = V_1 V_3 b \tag{2/11}$$

und wird vom Aufhängefaden mit dem Gegendrehmoment $M_d = k\alpha$ aufgenommen. Da $V_1 = V_2 = \text{const}$, ergibt sich die *Spannungsempfindlichkeit* zu

$$S_v = \frac{\alpha}{V_3} = \frac{b}{k} V_1. \tag{2/12}$$

Aus Gl. (2/11) geht hervor, daß sich der gleiche Ausschlag ergibt, wenn die Meßspannung an einen der festen Leiter E und die Festspannung an N gelegt werden.

Die Ladung der Nadel beträgt

$$Q_3 = c_{13} V_1 + c_{23} V_2 + c_{33} V_3,$$

worin c_{33} die Kapazität des beweglichen Systems gegen Erde bedeutet. Zur Berechnung der *Ladungsempfindlichkeit* geht man von einer Ladung q aus, die der Nadel zugeführt wird:

$$q = c_{13} V_1 + c_{23} V_2 + (c' + c_{33}) V_3,$$

wobei c' die mit der Nadel verbundene äußere Kapazität der Meßanordnung bedeutet. Die Ladungsempfindlichkeit ergibt sich mit

$$\frac{1}{S_q} = \frac{\partial q}{\partial \alpha} = c_{13} \frac{\partial V_1}{\partial \alpha} + V_1 \frac{\partial c_{13}}{\partial \alpha} + c_{23} \frac{\partial V_2}{\partial \alpha} + V_2 \frac{\partial c_{23}}{\partial \alpha} + (c' + c_{33}) \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} + V_3 \frac{\partial c_{33}}{\partial \alpha} \tag{2/13}$$

zu

$$S_q = \frac{V_1 b}{2 V_1^2 b^2 + (c' + c_{33}) k}, \tag{2/13a}$$

wenn man berücksichtigt, daß $\partial c_{33}/\partial \alpha = 0$, $\partial c_{13}/\partial \alpha = -\partial c_{23}/\partial \alpha = b$, $V_2 = -V_1$ und $\partial V_1/\partial \alpha = \partial V_2/\partial \alpha = 0$. Verändert man die an den festen

Elektroden liegende Hilfsspannung $V_1 = -V_2$, so findet man das *Maximum* der Ladungsempfindlichkeit zu

$$S_{q\,\max} = \frac{1}{2\sqrt{2(c' + c_{33})k}} = \frac{1}{4 V_0 b}, \tag{2/13b}$$

entsprechend einer optimalen Vorspannung $V_0 = \sqrt{ck/2}/b$.

Von Interesse ist ferner noch die *effektive Kapazität* des Meßsystems

$$c_{\text{eff}} = \frac{\partial Q_3}{\partial \alpha} \frac{1}{\partial V_3/\partial \alpha}, \tag{2/14}$$

die sich für den Fall der maximalen Ladungsempfindlichkeit durch Einsetzen der Gln. (2/13) und (2/13a) zu

$$(c_{\text{eff}})_{\max} = 2(c' + c_{33}) \tag{2/14a}$$

ergibt.

Die *Schwingungsdauer* der Elektrometer ist nicht konstant, sondern hängt von der Hilfsspannung $V_1 = -V_2$ ab. Mit Hilfe der Gl. (2/13) findet man $2V_1 b + (c' + c_{33})\,\partial V_3/\partial\alpha = 0$ oder, integriert,

$$V_3 = -\frac{2V_1 b}{c' + c_{33}}\,\alpha. \tag{2/15}$$

Setzt man diesen Wert in Gl. (2/11) ein, so ergibt sich der Ausdruck

$$-M = \frac{2V_1^2 b^2}{c' + c_{33}}\,\alpha + k\alpha. \tag{2/16}$$

Aus der Differentialgleichung für die ungedämpfte Schwingung der Nadel

$$I\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} + \left(\frac{2V_1^2 b^2}{c' + c_{33}} + k\right)\alpha = 0,$$

worin I das Trägheitsmoment der Nadel ist, errechnet sich die ungedämpfte *Schwingungsdauer* zu

$$T = 2\pi\{I/(2V_1^2 b^2/(c' + c_{33}) + k\}^{1/2}. \tag{2/17}$$

Im Fall der maximalen Ladungsempfindlichkeit, die nach Gl. (2/13a) für $2V_1^2 b^2 = k(c' + c_{33})$ erreicht wird, findet man

$$T_0 = 2\pi\sqrt{I/2k)}, \tag{2/17a}$$

d. h. eine um rund 40% geringere Schwingungsdauer als im Fall ohne Hilfsspannung. In Abb. 2.3. sind die auf die maximale Empfindlichkeit bezogenen

Größen c_{eff}, S_q, S_v und T abhängig von V_1/V_0 aufgetragen. Setzt man den Wert für k aus Gl. (2/17a) in die Beziehung (2/13a), ein, so findet man mit

$$S_{q\max} = \frac{T}{2\pi\sqrt{cI}} \tag{2/18}$$

einen Ausdruck für die Ladungsempfindlichkeit als Funktion von T und $c = c' = +c_{33}$.

2.12 Fadenelektrometer [2.103, 2.198]

Unter *Faden-* und *Saitenelektrometern* versteht man Instrumente, deren bewegliches Organ („Nadel") aus einem sehr dünnen, gespannten Faden (Pt-Draht, versilberter Quarzfaden) besteht. Als feste Elektroden sind zwei parallele Schneiden symmetrisch zum Faden angebracht, die meist an einer festen Vorspannung liegen. Neben diesen *Einfadenelektrometern* werden solche mit zwei Fäden und andere mit Fäden in Schlingenform benutzt.

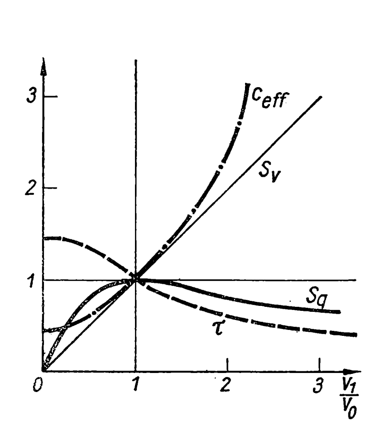


Abb. 2.3 Elektrometerempfindlichkeit, Kapazität und Schwingungsdauer als Funktion der Hilfsspannung

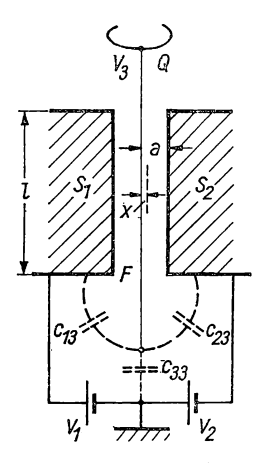


Abb. 2.4 Prinzip des Einfadenelektrometers

Das *Einfadenelektrometer* nach WULF ist schematisch in Abb. 2.4 dargestellt; der dünne Faden F ist parallel und symmetrisch zu den Schneiden S_1 und S_2 angebracht und wird durch einen isolierenden Quarzbügel Q gespannt. Beide Schneiden liegen auf einer Vorspannung V_1 bzw. $V_2 = -V_1$, während die zu messende Spannung V_3 dem Faden zugeführt wird.

Um die Spannungsempfindlichkeit zu bestimmen, wendet man die Gln. (2/3) oder (2/10) an und erhält mit $c_{13} = 2\pi\varepsilon_0 l/\ln(2a/r)$ den Ausdruck

$$\frac{\partial W}{\partial x} = V_1 V_3 \frac{\partial c_{13}}{\partial x} = V_1 V_3 \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln(2a/r)} \cdot \frac{1}{a} = -V_1 V_3 \frac{c_{13}}{2a}, \tag{2/19}$$

wenn l die Schneidenlänge, a den Schneidenabstand und r den Fadenradius bedeuten. Die durch Gl. (2/19) gegebene elektrostatische Anziehungskraft ist bei kleinen Auslenkungen x über die Saitenlänge etwa konstant. Vergleicht man die Auslenkung einer gleich langen durch die Kraft S gespannten Saite mit einer gleichmäßig verteilten Last f, d. h.

$$x = \frac{f l^2}{8S}, \tag{2/20}$$

mit Gl. (2/19), so erhält man

$$\frac{\partial W}{\partial x} = V_1 V_3 \frac{\pi \varepsilon_0 l}{\ln(2a/r)} \frac{1}{a} = \frac{8S}{l} x \tag{2/19a}$$

und nach Gl. (2/12) die *Spannungsempfindlichkeit* des Fadenelektrometers zu

$$S_v = \frac{x}{V_3} = V_1 \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln(2a/r)} \frac{l^2}{8Sa} = V_1 c_{13} \frac{l}{16aS}. \tag{2/21}$$

Zur Berechnung der *Ladungsempfindlichkeit* geht man von Gl. (2/13) aus und erhält:

$$\frac{1}{S_q} = \frac{\partial q}{\partial x} = 2 V_1 c_{13}/2a + (c' + c_{33}) \frac{1}{S_v}$$

$$= \frac{2 V_1 c_{13}}{2a} + (c' + c_{33}) \frac{16aS}{V_1 c_{13} l}$$

und daraus

$$S_q = \frac{V_1 c_{13} l}{V_1^2 c_{13}^2 l/a + (c' + c_{33})\, 16aS}. \tag{2/22}$$

Durch Einsetzen von Gl. (2/21) in (2/22) folgt:

$$S_q = \frac{S_v}{\dfrac{V_1 c_{13} S_v}{a} + (c' + c_{33})}. \tag{2/22a}$$

Da bei spannungsempfindlichen Instrumenten $V_1 c_{13} S_v/a \ll c' + c_{33}$, wird in diesem Fall

$$S_q \approx \frac{S_v}{c' + c_{33}}. \tag{2/22b}$$

Darin stellt c' die mit dem Faden verbundene äußere Kapazität und c_{33} die Eigenkapazität des Fadens dar.

Die erzielbare Spannungsempfindlichkeit bei einer Fadenlänge von 6 cm, einer Fadendicke von 2 μm, einem Schneidenabstand von 0,5 cm errechnet sich für eine Hilfsspannung von 100 V zu 0,2 cm/V, wenn man S zu 10 mp wählt. Die Einstellzeit des Elektrometerfadens für kleine Auslenkungen berechnet sich aus der Fadenspannung S, der Masse ϱ des Fadens pro cm Länge und der Fadenlänge l zu

$$T_1 = 2l \sqrt{\varrho/S}. \tag{2/23}$$

Durch Einsetzen von S aus Gl. (2/23) in Gl. (2/21) findet man die Spannungsempfindlichkeit S_v als Funktion der Eigenschwingungsdauer T_1 zu

$$S_v = V_1 c_{13} \frac{T_1^2}{64 l a \varrho}, \tag{2/24}$$

d. h. ein Ergebnis, das auch für Nadel- und Drehspulgalvanometer (s. § 2.21) gefunden wird.

Das in Abb. 2.5 dargestellte Einfadenelektrometer nach WULF besitzt einen Faden F von etwa 6 cm Länge und 2 µm Durchmesser (Wollaston-Draht oder versilberter Quarzfaden), der am unteren Ende durch den Quarzfaserbügel Q

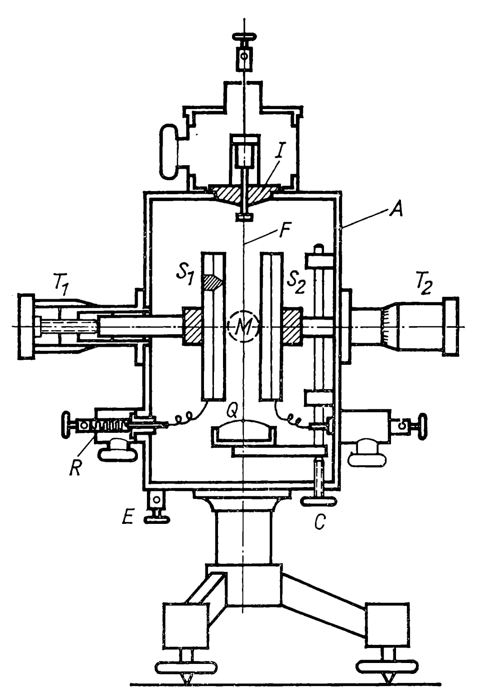


Abb. 2.5 Einfadenelektrometer nach WULF

(10 µm Durchmesser) gespannt wird. Am oberen Ende wird F in einer Isolierdurchführung I gehalten. Zur Regulierung der Fadenspannung kann die Halterung des Quarzbügels in einer Führung am Instrumentengehäuse A in senkrechter Richtung durch die Einstellschraube C verstellt werden. Die abgeschrägten Schneiden S_1 und S_2 können durch Mikrometerschrauben T_1 und T_2 genau justiert werden. In die Spannungszuführungen zu den Schneiden sind Hochohmwiderstände R eingebaut, um bei Berührung des Fadens mit einer Schneide ein Durchbrennen zu verhindern. Die Auslenkung des Fadens wird mit einer Vergrößerung von etwa 100 durch das Mikroskop M mit Okular-

skala von 100 Teilen betrachtet. An die beiden Schneiden wird die Hilfsspannung $V_1 = -V_2$ von 50···200 V angelegt, wobei durch ein hochohmiges Einstellpotentiometer, dessen Mittelabgriff geerdet ist, die Hilfsspannungen symmetriert werden. Beim Kommutieren der Hilfsspannung darf der Faden keinen Ausschlag zeigen. Durch Verändern der elastischen Fadenspannung kann S_v zwischen 0,3 und 1000 Skt/V geändert werden. Bei kleinen Empfindlichkeiten beträgt die Kapazität $c' + c_{33}$ etwa 2 pF; die größte Ladungsempfindlichkeit liegt bei 20 Skt/10^{-12} C. Anstelle der visuellen Beobachtung des Elektrometerfadens ist in vielen Fällen dessen Lichtprojektion auf eine Mattscheibe vorzuziehen; s. WULFSON [*2.199*].

Beim *Zweifadenelektrometer* nach WULF (Abb. 2.6) werden zwei parallel angeordnete Wollaston-Fäden F benutzt, deren Abstand a nur einige 10^{-2} cm beträgt. Am unteren Ende sind diese Fäden gemeinsam durch einen vorge-

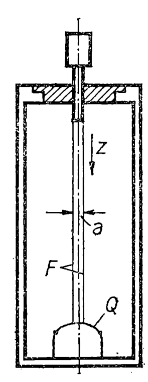


Abb. 2.6 Zweifadenelektrometer

spannten Quarzbügel Q gehalten. Die Spannung wird aus dem Fadenabstand im Meßmikroskop bestimmt. Zuleitungsstift und Bügel sind an den Schmalseiten eines rechteckigen Metallrahmens befestigt und in ein Metallgehäuse gesetzt.

Zur Berechnung der Empfindlichkeit geht man von der Kapazität des Doppelfadens

$$c = \frac{\pi \varepsilon_0 l}{\ln (a/r)}$$

aus (a Abstand, l Länge, r Radius der Fäden) und findet nach Gl. (2/3) für die abstoßende Kraft pro cm Länge den Ausdruck

$$f = \frac{\partial W}{\partial a} = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial c}{\partial a} = \frac{V^2 \pi \varepsilon_0}{4a \ln (a/r)}. \tag{2/25}$$

Diese wird wie beim Einfadenelektrometer durch die rücktreibende Kraft der gespannten Saiten kompensiert, wobei nach Gl. (2/20)

$$a_0 + x = \frac{f l^2}{8 S}$$

zu setzen ist. Im Gegensatz zum Einfadenelektrometer wird x von gleicher Größenordnung wie a und f eine Funktion des Abstandes z von den Fadenenden. Aus Gl. (2/25) geht hervor, daß der Ausschlag eine quadratische Funktion der Spannung V, d. h. unabhängig vom Vorzeichen, wird. Es ist daher auch für Wechselspannungsmessungen geeignet.

Für den üblichen Wert von $l \approx 8$ cm erhält man eine Spannungsempfindlichkeit von 0,5 Skt/V bei einer Kapazität von etwa 3 pF. Zwischen 60 und 250 V (Endausschlag) ist die Skala fast linear. Die Ladungsempfindlichkeit beträgt etwa 0,1···0,2 Skt/10^{-12} C.

Von VONNEGUT und MCCRAIG [*2.187*] wird ein empfindliches Elektrometer angegeben, das zwischen zwei parallelen Meßplatten einen sehr dünnen, einseitig eingespannten Quarzfaden besitzt, dessen Auslenkung abgelesen wird. Vor jeder Messung muß der Faden durch Eintauchen in Wasser oder Quecksilber aufgeladen werden.

Beim *Schlingenelektrometer* nach KOLHÖRSTER ist die Saite durch eine U-förmig gebogene Quarzschlinge ersetzt, deren Enden an den Zuführungsstift für die Meßspannung angekittet sind. Als Schneiden dienen zwei schwenkbare Drahtbügel zum Anlegen der Hilfsspannung. Bei einer Kapazität von etwa 3 pF beträgt die Spannungsempfindlichkeit maximal 300 Skt/V.

Das in Abb. 2.7 dargestellte Perucca-Elektrometer [*2.139*] besitzt als Meßsystem einen Quarzfaden Q, dessen ausgezogenes Ende angewinkelt und als Zeiger Z ausgebildet ist. Ein zweiter Quarzfaden dient als Verstrebung; beide Fäden sind an einem dünnen Torsionsfaden F befestigt, der elastisch von einem Quarzbügel gespannt wird. Die als Platten P_1 und P_2 ausgebildeten Hilfs-

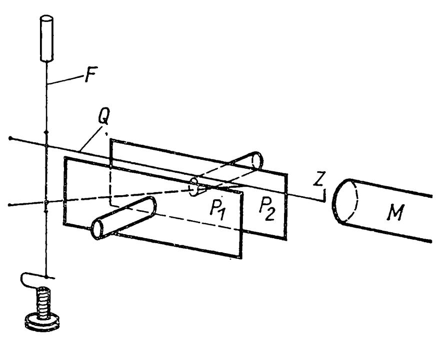


Abb. 2.7 Perucca-Elektrometer

elektroden können mikrometrisch justiert werden. Der Ausschlag wird durch das Mikroskop M bei 500facher Vergrößerung gemessen. Bei einer Schwingungsdauer von 2 s und mit einer Hilfsspannung von $\pm$ 20 V lassen sich folgende Empfindlichkeiten erreichen: $S_v = 2000$ Skt/V; $S_q = 100$ Skt/10^{-12} C.

2.13 Blättchenelektrometer

Das Meßsystem eines *Blättchenelektrometers* (Abb. 2.8) besteht aus einem sehr dünnen Metallstreifen B aus Al oder Au, der von der festen Elektrode, dem Blatthalter A, abgestoßen wird. Im Vergleich zum Zweifadenelektrometer

wird durch das größere Verhältnis von Breite zu Länge des Blättchens die Größe $\partial c/\partial a$ nach Gl. (2/25) relativ groß, d. h. die Spannungsempfindlichkeit hoch. Als rücktreibende Kraft ist die Schwerkraft des Blättchens wirksam; die Rückstellkraft der Befestigungsstelle ist zu vernachlässigen. Die Ausschläge werden mit mäßiger Vergrößerung durch ein Mikroskop beobachtet. Bei einer Kapazität von etwa 3···5 pF lassen sich Empfindlichkeiten von 1 Skt/V erzielen.

Von GOODMAN [2.62] wird zur Messung von Strömen der Größenordnung 10^{-14} A ein *registrierendes Goldblattelektroskop* verwendet, an dessen Ausgang Impulse erzeugt werden, deren Frequenz dem zu messenden Strom pro-

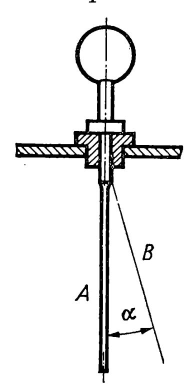


Abb. 2.8 Blättchenelektrometer

portional ist. SCHLENZ und GAST [2.162] beschreiben ein *selbstkompensierendes Blättchenelektrometer*, bei dem die Auslenkung des Blättchens mittels eines kapazitiven Abgriffs gemessen und in eine proportionale Gleichspannung umgesetzt wird. Diese dient zur Anzeige, Kompensation oder Betätigung von Regelvorgängen. Bei einem Eingangswiderstand von 10000 TΩ und einer Eingangskapazität von 2 pF läßt sich eine Empfindlichkeit von ± 1 mV erreichen. Von LÜCKING [2.102] wird ein in der Nullage mechanisch astasierbares Blättchenelektrometer angegeben.

Von SHONKA et al. [2.170] wird ein sehr empfindliches Elektrometer beschrieben, dessen elastischer Quarzfaden zwischen zwei Binanten ausgelenkt wird, an die eine *Wechselspannung* gelegt ist. Durch die Spannungen $u_1 = U_1 \cos \omega t$, bzw. $u_2 = U_2 \cos(\omega t - \varphi)$ wird auf den Faden eine Kraft

$$F = (A_1 U_1^2 - A_2 U_2^2)/2 + A_1 U_1^2/2 \cos 2\omega t - A_2 U_2^2/2 \cos(\omega t - \varphi)$$

ausgeübt, die den Faden zu einer Vibration mit der Frequenz 2ω veranlaßt. Für $A_1 U_1^2 - A_2 U_2^2 = 0$, sowie $\varphi = \pi$ bleibt der Faden in Ruhe; die Größen A_1 und A_2 sind Apparatekonstanten.

Wird an den Faden die zu messende Spannung u_x gelegt, so wirkt auf ihn die Kraft $F' = A_1(u_1 - u_x)^2 - A_2(u_2 - u_x)^2$, woraus sich mit $A_1 = A_2 = A$, $U_1 = U_2 = U$ sowie $\varphi = \pi$ die Größe

$$F' = -4 u_x U A \cos \omega t$$

ergibt. Die Meßspannung u_x ruft demnach eine mit der Frequenz ω periodische Ablenkung hervor, die sich leicht im Ablesemikroskop von derjenigen mit doppelter Frequenz unterscheiden läßt. Es ist daher nicht erforderlich, die Meßanordnung hinsichtlich der Wechselhilfsspannung abzugleichen.

Der versilberte Quarzfaden von 4 µm Dicke ist nur 3 mm lang und besitzt eine Eigenfrequenz von 400 Hz. Die Binanten bestehen aus den Stirnflächen zweier 0,5 mm dicker Drähte, die gegenseitig 1,5 mm entfernt im Abstand von 0,4 mm vom Fadenende senkrecht zu diesem in einem Metallgehäuse isoliert befestigt sind. Es ist als elliptischer Hohlspiegel ausgebildet, in dessen Brennpunkt das mit einem Meßmikroskop zu beobachtende Fadenende liegt, um eine Dunkelfeldbeleuchtung zu ermöglichen. Für $U = 500$ V wird $S_v = 10000$ Skt/V bei einer Eigenkapazität von 1,75 pF und $S_q = 6 \cdot 10^{-15}$ C/Skt erreicht. Wegen der Nichtlinearität des Ausschlages ist das Instrument nur als Nullgerät verwendbar.

2.14 Quadranten- und Nadelelektrometer

Das *Quadrantenelektrometer* von DOLEZALEK, das schematisch in Abb. 2.9 dargestellt ist, besteht aus einer flachen Metalldose, die in vier Quadranten Q geteilt ist. Die isoliert befestigten Quadranten sind paarweise miteinander leitend verbunden. Die zentrisch aufgehängte Nadel N besteht aus zwei dünnen

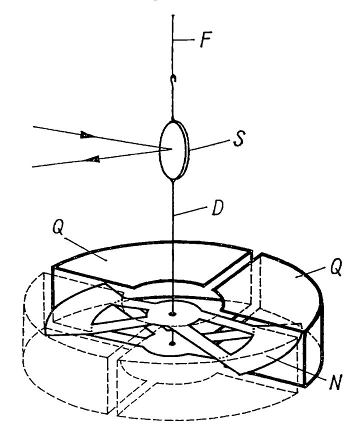
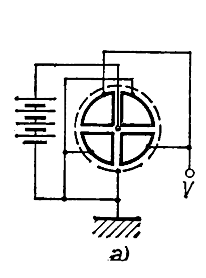


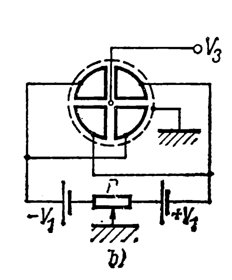
Abb. 2.9 Quadrantenelektrometer nach DOLEZALEK

Al-Folien, die an den Rändern verklebt, in der Mitte jedoch aus Stabilitätsgründen auseinandergedrückt sind. Die Nadel wird von einem dünnen Al-Draht D gehalten, der mit einem Ablesespiegel S versehen und an einem feinen Quarzfaden F (5···10 µm) aufgehängt ist. Das Meßsystem ist auf einer justierbaren Platte aufgebaut und von einem zylindrischen Metallgehäuse mit Beobachtungsfenster umgeben.

Die Hilfsspannung wird bei der *Quadrantenschaltung* (Abb. 2.10a) an die Nadel gelegt, während die zu messende Spannung einem Quadrantenpaar zugeführt und das zweite geerdet wird. Bei der in Abb. 2.10b gezeigten *Nadel-*

schaltung wird die Hilfsspannung $\pm V_1$ an die beiden Quadrantenpaare gelegt und die Symmetrierung mit dem geerdeten Potentiometer R ausgeführt. Besser ist es, beide Batterien V_1 über die Hochohmwiderstände R' und das Potentiometer R mit geerdetem Mittelabgriff zu verbinden (Abb. 2.10c).





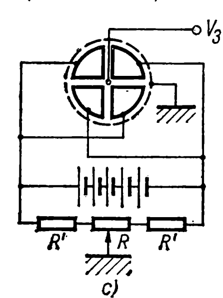


Abb. 2.10 Elektrometerschaltungen

Die gewählte Nadelform liefert den gewünschten linearen Verlauf der Teilkapazität $c_{13} = c_{13}^0 - b\alpha$. Bezeichnet man mit R den Nadelradius, mit h ihren Abstand von der Innenfläche der Quadranten und mit d deren Innentiefe, so wird $b = 2\varepsilon_0 R^2 d/(d-h)h$ und das auf die Nadel ausgeübte Drehmoment

$$M = V_1 V_3 b = \frac{2 V_1 V_3 \varepsilon_0 R^2 d}{h(d-h)} = k\alpha. \tag{2/26}$$

Daraus erhält man nach Gl. (2/12) die *Spannungsempfindlichkeit*

$$S_v = \frac{2 V_1 \varepsilon_0 R^2 d}{h(d-h)} \tag{2/27}$$

und nach Gl. (2/13a) die *Ladungsempfindlichkeit*

$$S_q = \frac{2 V_1 \varepsilon_0 R^2 dh(d-h)}{2(2 V_1 \varepsilon_0 R^2 d)^2 + (c' + c_{33}) R h^2 (d-h)}. \tag{2/28}$$

Für die optimale Vorspannung V_{10} findet man nach Gl. (2/13b) das Maximum der Ladungsempfindlichkeit zu

$$S_{q\,\max} = \frac{1}{4 V_{10} b} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2(c' + c_{33})k}} \tag{2/28a}$$

mit

$$V_{10} = \frac{h(d-h)}{2\varepsilon_0 R^2 d} \sqrt{k(c' + c_{33})/2}\,.$$

Nach den Gln. (2/27) und (2/28) sollten bei einer vorgegebenen Hilfsspannung die Empfindlichkeiten konstant sein. Dies ist jedoch nicht der Fall, da mit wachsendem V_1 die Schwingungsdauer nach Gl. (2/17) zunimmt, bis schließlich die Nadelstellung instabil wird. Die Nadel sollte mit Hilfe des Torsionskopfes so justiert werden, daß $h \approx d/2$ wird und symmetrisch in zwei benachbarte

Quadranten hineinragt. Bei geerdeter Nadel darf diese nicht ausschlagen, wenn die Hilfsspannung an- oder abgeschaltet wird. Für sehr genaue Messungen werden die Meßspannungen kommutiert und die Quadrantenpaare vertauscht.

Bei den üblichen Ausführungsformen ($R = 2{,}5$ cm und $V_1 = 100\cdots200$ V) wird $S_v \approx 1000$ Skt/V und $T_0 = 20$ s. In der Quadrantenschaltung erreicht man bei einer Kapazität von 20···80 pF $S_q = 10\cdots40$ Skt/10^{-12} C. In der *idiostatischen* Schaltung (Abb. 2.11) wird keine Hilfsspannung benutzt; Nadel und ein Quadrantenpaar sind geerdet, während am anderen Quadrantenpaar die Meßspannung angelegt wird. Da der Ausschlag vom Vorzeichen der Spannung unabhängig ist, wird diese Schaltung bei der Messung von *Wechselspannungen* (s. § 6.315) angewandt.

Beim Compton-Elektrometer [*2.30*] kann ein Quadrant senkrecht verschoben werden; durch Verdrehen der Nadelflügel läßt sich eine zusätzliche Astasierung und damit ein S_v von $5 \cdot 10^4$ Skt/V erzielen.

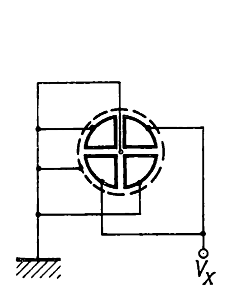


Abb. 2.11 Idiostatische Schaltung

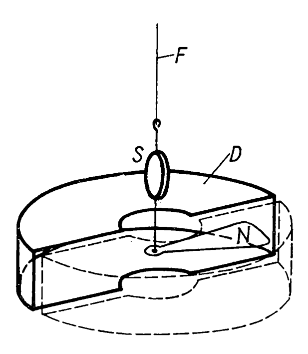


Abb. 2.12 Hoffmann-Elektrometer

Größte Ladungsempfindlichkeit erreicht das *Duantenelektrometer* nach Hoffmann [*2.76, 2.202*], dessen Meßsystem vereinfacht in Abb. 2.12 dargestellt ist. Die beiden Duanten D von nur 2,5 cm Innendurchmesser sind isoliert in einer Kupferkammer montiert. Die Nadel N ist ein kleiner einseitiger Flügel aus dünnstem Pt-Blech, der an einem Wollaston-Draht F von 3 μm Dicke aufgehängt ist und einen kleinen Spiegel S trägt. Die Nadel hängt nur 1···2 mm über den plangeschliffenen Duantenflächen; das Gehäuse wird zur Vermeidung störender Ionisation evakuiert. Sehr empfindliche Systeme besitzen maximales S_v von $2 \cdot 10^4$ Skt/V und ein S_q von $6 \cdot 10^3$ Skt/10^{-12} C, d. h., 1000 Elementarladungen rufen einen Ausschlag von 1 mm hervor.

Von Schilling und Kraeger [*2.161*] wird ein tragbares Quadrantenelektrometer beschrieben, dessen Nadel aus Duraluminium in Edelsteinen gelagert ist und zur Rückstellung eine Spiralfeder aufweist. Bei einer Kapazität von 18 pF und einer Hilfsspannung von ± 90 V wird für 400 V der Vollausschlag erreicht. Ein logarithmisch anzeigendes Quadrantenelektrometer nach Waidelich [*2.190*] mit exponentiellem Nadelschnitt ist in Quadrantenschaltung zwischen 10 und 1000 V geeignet.

Das Nadelelektrometer nach LINDEMANN [*2.100*] der Abb. 2.13 besteht aus 8 quadratischen „Quadranten“ Q, in deren Schlitz von 0,2 cm Breite die 1 cm lange vergoldete Glasnadel N schwingt, die an den ebenfalls vergoldeten Torsionsfaden F aus Quarz (6 μm Dicke) gekittet ist. Quadranten und U-förmiger Halter H sind durch Quarzglasstäbchen isoliert. Bei einer Schwingungsdauer $T = 1$ s und einer Kapazität von 2 pF wird mit einer Hilfsspannung von $\pm$ 100 V ein $S_v = 500$ Skt/V erreicht.

2.15 Zeigerelektrometer

Das elektrostatische Meßprinzip mit seinen im Vergleich zu den elektrodynamischen Instrumenten sehr kleinen Richtkräften wird zur Messung hoher Spannungen bei der Konstruktion technischer Geräte verwirklicht. Der Vorteil des hochohmigen Eingangswiderstandes und der geringen Kapazität wirkt

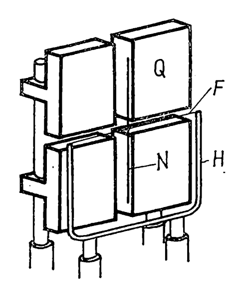


Abb. 2.13 Lindemann-Elektrometer

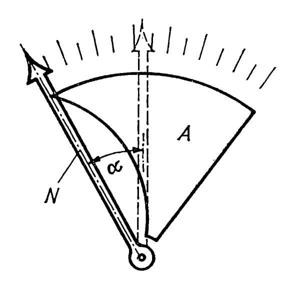


Abb. 2.14 Elektrostatisches Zeigervoltmeter

sich vor allem bei Spannungsmessungen in Gasentladungen sowie bei Messungen von Ionisationsströmen und im HF-Bereich aus. Es sind elektrostatische Voltmeter mit Spannbandaufhängung oder Edelsteinlagerung des sehr leichten Meßsystems im Handel, wobei der Ausschlag mit einem materiellen oder Lichtzeiger festgestellt wird.

Beim Lichtzeiger-Elektrometer [*2.141*] besteht das Meßsystem aus plattenförmigen Quadranten, zwischen denen die an einem Spannband aufgehängte biskuitförmige Nadel von nur 150 mg Gewicht schwingt. Der Isolationswiderstand der Nadel beträgt 100 TΩ, die Kapazität 30 pF. Das Voltmeter wird mit Meßbereichen zwischen 20 und 260 V hergestellt; der Frequenzeinfluß liegt bis 175 MHz unterhalb von 1%.

Das elektrostatische Voltmeter von HARTMANN & BRAUN besitzt eine feine Nadel als Meßsystem, deren Ende als Zeiger ausgebildet ist und an einem feinen Bronzeband hängt. Die innere Begrenzungskurve der festen Ablenkkammern A (Abb. 2.14) ist eine hyperbolische Spirale, so daß die Skala zwischen 10 und 160 V praktisch linear verläuft. Das Gewicht der Nadel ist so klein gehalten, daß bereits die Luftreibung eine aperiodische Einstellung bewirkt. Um bei Überspannung einen Kurzschluß zwischen den Elektroden zu verhindern, sind diese aus eloxiertem Aluminium hergestellt. Die Kapazität des Instruments beträgt in Nullstellung 10, bei Vollausschlag 12 pF.

Beim *Multizellularvoltmeter* (Abb. 2.15) sind mehrere Meßkammern K übereinander angeordnet, zwischen denen die aus vielen Platten bestehende, in Spitzen gelagerte Nadel N schwingt. Solche Instrumente werden für einen kleinsten Meßbereich von 10 V konstruiert. Das elektrostatische Voltmeter von TRÜB, TÄUBER & Co. [*2.182*] ist in Abb. 2.16 dargestellt und enthält eine Doppelnadel N mit Edelsteinlagerung, deren Richtmoment von einer feinen Spiralfeder erzeugt wird. Das Ablenksystem besteht aus je drei Platten K, deren Schnitt aus der Abbildung hervorgeht. Über dem Meßwerk liegen zwei Schutzwiderstände R_1 und R_2 von 500 kΩ (Gleichspannung) bzw. 1 kΩ für HF-Messungen. Über Anwendungen des elektrostatischen Voltmeters als Wirkleistungs- und Frequenzmesser s. STANEK [*2.179*].

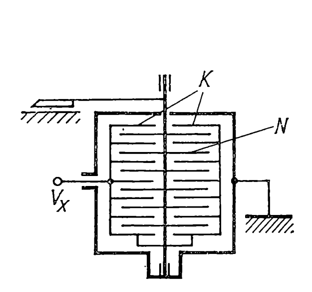


Abb. 2.15 Multizellularvoltmeter

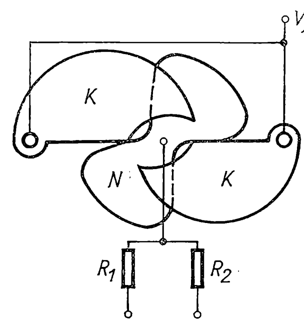


Abb. 2.16 Elektrostatisches Voltmeter von Trüb, Täubner & Co.

2.16 *Elektrostatische Hochspannungsvoltmeter*

Die in § 2.15 behandelten Instrumente lassen sich prinzipiell auch für höhere Spannungen verwenden, sofern die Durchbruchsspannung zwischen den Elektroden nicht überschritten wird. Durch Füllung mit einem gasförmigen oder flüssigen Dielektrikum kann diese merklich erhöht und damit der Meßbereich erweitert werden.

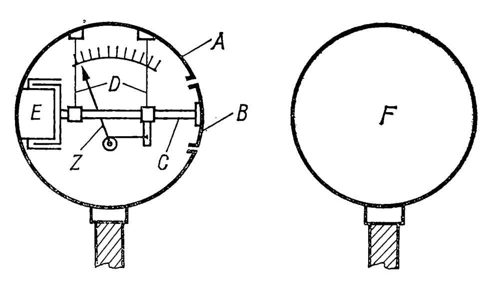


Abb. 2.17 Hochspannungsvoltmeter nach ABRAHAM-VILLARD

Für sehr hohe Spannungen ist das Instrument von ABRAHAM-VILLARD geeignet, dessen Aufbau in Abb. 2.17 gezeigt ist. Das Meßwerk ist in ein kugelförmiges Metallgehäuse A eingebaut, das eine freie Öffnung besitzt, in der die Kalotte B spielt. Diese ist am Ende des waagrechten Stiftes C befestigt,

der an zwei Bändern D im Gehäuse hängt und mit einer Dämpfungsvorrichtung E versehen ist. Die Bewegung des Stiftes wird durch eine dünne Kette auf die Achse des Zeigers Z übertragen. Der Kugel A steht eine zweite, gleich große, F, gegenüber, deren Abstand entsprechend der Höhe der zu messenden Spannung verändert werden kann. Herrscht an der Kalotte B die elektrische Feldstärke E, die von der zu messenden Spannung und vom Abstand der Kugeln abhängt, so berechnet sich die pro cm² wirkende elektrostatische Kraft zu

$$f = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 E^2, \qquad (2/29)$$

wenn ε_0 die absolute Dielektrizitätskonstante des Vakuums bedeutet (s. a. § 2.42). Für $E = 10^4$ V/cm wird $f \approx 0{,}4 \cdot 10^{-2}$ p/cm². Die höchste zu messende Spannung beträgt 600 kV.

Das *Hochspannungsvoltmeter* von STARKE-SCHROEDER [*2.180*], das vereinfacht in Abb. 2.18 dargestellt ist, besteht aus den scheibenförmigen Elektroden A und B mit abgerundeten Rändern. Der Abstand d zwischen den Innen-

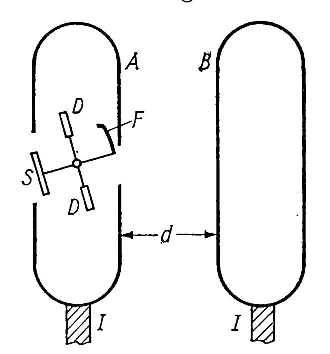




Abb. 2.18 Hochspannungsvoltmeter nach STARKE-SCHROEDER

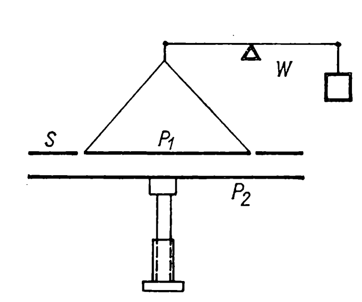


Abb. 2.19 Absolutes Elektrometer nach THOMSON

flächen kann in weiten Grenzen verändert werden. In der hohlen Elektrode A ist das Meßwerk eingebaut, das aus der an einem kurzen Hebelarm befestigten leichten Metallfahne F besteht (7 × 50 mm²) und an einem Spannband so gelagert ist, daß sie unmittelbar hinter einem schmalen Schlitz in A schwingen kann. Als Gegengewicht dient ein kleiner Spiegel S, dessen Drehbewegung durch einen Lichtzeiger auf eine Skala projiziert wird. Durch die elektrostatischen Kräfte wird bei Anlegen der Meßspannung die Fahne aus der Ruhelage gedreht und verdeckt von innen teilweise den Schlitz in A. Durch zwei Flügel D wird eine optimale Dämpfung des Meßsystems bewirkt. Da die Schlitzbreite im Verhältnis zum Elektrodenabstand d klein gewählt ist, ergibt sich kein merklicher Fremdfeldeinfluß. Beide Elektroden sind an hohen Isolatoren I befestigt und können auf einem Schlitten verschoben werden.

Zu den elektrostatischen Hochspannungsvoltmetern sind auch die *absoluten Elektrometer* zu rechnen, die in der Form der *Schutzringelektrometer* (THOMSON) sehr hohe Genauigkeit aufweisen. Das in Abb. 2.19 dargestellte Meßprinzip

beruht darauf, die zwischen den Platten P_1 und P_2 eines ebenen Kondensators nach Gl. (2/29) wirkende Anziehungskraft zu messen, wenn zwischen P_1 und P_2 bei bekanntem Abstand a die Meßspannung angelegt wird. Um Randstörungen auszuschalten, ist um die bewegliche Platte P_1 ein ebener Schutzring S im gleichen Abstand angebracht, der wie P_1 geerdet wird. Die zu messende Spannung liegt an P_2. Bezeichnet man mit A die Fläche der Elektrode P_1, so ist die mit der Waage W oder einer anderen empfindlichen Wägemethode (vgl. Bd. I, § 4) zu messende Kraft

$$F = \varepsilon_0 A V^2/d^2 \tag{2/29a}$$

oder die gesuchte Spannung

$$V = d(F/A\,\varepsilon_0)^{1/2}. \tag{2/29b}$$

Eine moderne Ausführung eines absoluten Voltmeters nach diesem Prinzip wird von Bowdler [*2.13*] beschrieben. Da nach Gl. (2/29a) die auf den Meßvorgang ausgeübte Kraft $F \sim E^2$, lassen sich E und damit F vergrößern, wenn der Meßraum unter hohem Gasdruck steht; als Füllgase werden N_2 oder Freon verwendet. Über ein absolutes Voltmeter bis 30 kV bei 0,25% Anzeigegenauigkeit s. [*2.17*].

2.17 Rotationsvoltmeter

Rotationsvoltmeter gehören strenggenommen nicht zu den elektrostatischen Spannungsmessern; ihr Innenwiderstand ist mit 10 TΩ jedoch so hoch, daß auch bei sehr hohen Spannungen kein nennenswerter Meßstrom fließt. Das

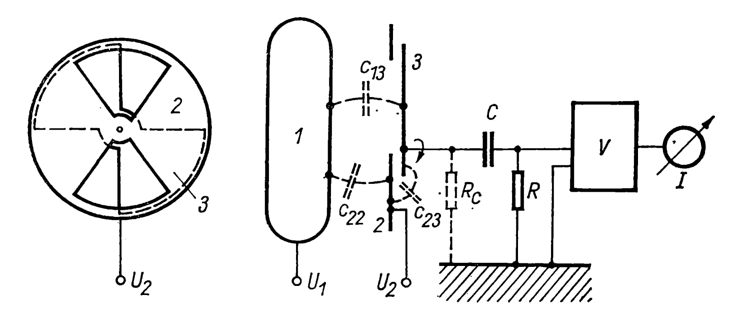


Abb. 2.20 Rotationsvoltmeter nach Knauer

Prinzip des Rotationsvoltmeters wurde zuerst von Schwenkhagen [*2.166*] zur Messung elektrischer Feldstärken angewandt. Es beruht darauf, daß hinter einer Abschirmelektrode mit sektorförmigen Aussparungen eine Influenzelektrode mit gleichgeformten Sektoren rotiert und periodisch dem Feld einer der Abschirmelektrode gegenüberstehenden Hochspannungselektrode ausgesetzt wird. In Abb. 2.20 ist das Ersatzschaltbild des Voltmeters und die Form von Abschirmelektrode *2* und Influenzelektrode *3* dargestellt; die zu messende Spannung U_1 liegt an der Elektrode *1*. Mit den in die Ab-

bildung eingetragenen Teilkapazitäten ergibt sich bei Vernachlässigung der Streukapazitäten die Ladung der Influenzelektrode zu

$$Q_3 = c_{13} U_1 + c_{23} U_2 + c_{33} U_3, \tag{2/30}$$

wenn man mit U_2 die Vorspannung der Elektrode *2* und mit U_3 die Spannung der Influenzelektrode bezeichnet. Differenziert man Gl. (2/30) nach der Zeit, so findet man den Influenzstrom zu

$$i_3 = c_{13} \dot{U}_1 \dot{c}_{13} U_1 + c_{23} \dot{U}_2 + \dot{c}_{23} U_2 + c_{33} \dot{U}_3 + \dot{c}_{33} U_3. \tag{2/31}$$

Mißt man direkt i_3, indem man die Elektrode *3* über ein Wechselstrommeßgerät großer Empfindlichkeit erdet, kann U_3 in Gl. (2/31) vernachlässigt werden. Bei der verbesserten Meßanordnung nach Knauer [*2.89*] wird die auf der Elektrode *3* influenzierte Wechselspannung über das RC-Glied dem Eingang des Verstärkers V zugeführt, gleichgerichtet und im Instrument I angezeigt. Da $U_3 = U_R + U_C = -i_3 R - \frac{1}{C} \int i_3 \, \mathrm{d}t$ und $\dot{U}_3 = -\dot{i}_3 R - i_3/C$, ergibt sich aus Gl. (2/31):

$$\begin{aligned} & i_3 + R \dot{c}_{33} i_3 + R c_{33} \dot{i}_3 + c_{33} i_3/C + \dot{c}_{33} \int i_3 \, \mathrm{d}t/C \\ & = \dot{c}_{13} U_1 + c_{13} \dot{U}_1 + \dot{c}_{23} U_2 + c_{23} \dot{U}_2. \end{aligned} \tag{2/32}$$

Bei der Messung von hohen Gleichspannungen werden $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = 0$; Gl. (2/32) vereinfacht sich zu:

$$i_3 (1 + R \dot{c}_{33} + c_{33}/C) + \dot{i}_3 R c_{33} + \dot{c}_{33} \int i_3 \, \mathrm{d}t/C = \dot{c}_{13} U_1 - \dot{c}_{23} U_2. \tag{2/32a}$$

Es ergibt sich also ein linearer Zusammenhang zwischen Strom i_3 und der zu messenden Spannungsdifferenz U_{12}.

Wie in Abb. 2.20 angedeutet, besteht die Elektrode *3* aus einem Doppelflügel, der hinter der Abschirmelektrode *2* durch einen kleinen Synchronmotor mit 50 U/s angetrieben wird. Der Übertragungskondensator C ist als Zylinderkondensator ausgebildet, dessen Innenbelegung von der Rotorachse gebildet wird. An die Elektrode *3* ist noch der Hochohmwiderstand R_C geschaltet, um ein Aufladen von *3* zu verhindern. Die gesamte Meßanordnung mit Ausnahme des Verstärkers ist in einem Druckkessel untergebracht, der mit Stickstoff, Argon oder Freon bis zu 20 at gefüllt werden kann, um höhere Durchbruchspannungen zwischen den Elektroden zu erzielen. Der Meßbereich läßt sich zwischen 3 V und 300 kV variieren.

Von Devins und Reynolds [*2.36*] ist ein Rotationsvoltmeter angegeben worden, bei dem die aufgeladene Probe an einer festen Influenzierfläche vorbeibewegt wird, deren Oberflächenladung durch einen hochohmigen Verstärker gemessen wird. Als Ladungsempfindlichkeit werden 0,6 nC/cm² angegeben.

Röhrenelektrometer mit sehr hohem Eingangswiderstand sowie solche mit Schwingkondensator s. § 2.33. Von Gast [*2.61*] werden Methoden angegeben, das bei sehr empfindlichen elektrometrischen Messungen störende *Isolatorrauschen* zu verringern sowie den Isolationswiderstand zu vergrößern.

In *Tabelle 2.1* sind für einige Elektrometertypen die wichtigsten Daten zusammengestellt.

Tabelle 2.1 Daten von Elektrometern

Typ	S_v (Skt/V)	S_q (Skt/10^{-14} C)	T (s)
Zweifaden (WULF)	0,5	0,002	0,1
Einfaden	500	0,2	1
PERUCCA	2000	1	10
SHONKA et al.	10000	2	0,002
Quadrant (DOLEZALEK)	1000	0,4	60
COMPTON	5000	2	40
HOFFMANN	20000	60	10
LINDEMANN	500	0,5	1
Röhrenelektrometer	10000	5	—

2.2 Strommeßgeräte [*2.114, 2.120, 2.164*]

Zur Strommessung werden elektromagnetische Geräte benutzt, die man in zwei Hauptklassen einteilen kann: *Drehspulinstrumente*, bei denen sich eine stromdurchflossene, beweglich gelagerte Spule in einem konstanten Magnetfeld dreht, und *Drehmagnetinstrumente*, die einen beweglich gelagerten kleinen Magneten enthalten, der in dem vom Meßstrom in einer festen Spule erzeugten Magnetfeld aus der Ruhelage gedreht wird. In beiden Fällen werden Kraftwirkungen zwischen stromdurchflossenen Leitern und einem Magnetfeld zur Erzeugung des Meßausschlages benutzt. Zur Messung der *Spannung* werden die gleichen Instrumente verwendet; im Gegensatz zu den Strommessern erhält ihr Innenwiderstand durch Verwendung dünndrähtiger Wicklungen und hoher Vorschaltwiderstände große Werte. Für spezielle Meßaufgaben kommen noch andere Gerätetypen, wie Saitengalvanometer, Kreuzspulinstrumente, ballistische sowie Differentialgalvanometer zur Anwendung.

2.21 Allgemeine Galvanometertheorie

2.211 Empfindlichkeit

Fließt ein Strom durch die Spule eines Drehspul- oder Drehmagnetsystems, so wird der bewegliche Teil durch elektromagnetische Kräfte aus der Ruhelage gedreht, bis das mechanische Gegendrehmoment der elastischen Aufhängung oder der Rückstellfeder dem durch den Strom erzeugten Moment das Gleichgewicht hält. Meist ist die auf der Skala abgelesene Auslenkung x dem Meßstrom i proportional, d. h.

$$x = S_i i. \tag{2/33}$$

Der Proportionalitätsfaktor $S_i = x/i$ heißt *Stromempfindlichkeit* des Instruments und hängt, wie in § 2.22 gezeigt wird, von der Konstruktion des Gerätes ab. Bei Zeigerinstrumenten wird die Größe x in Skalenteilen (Skt), bei Galvanometern mit Lichtzeigern in mm auf der Skala gemessen. Die Empfindlichkeit

der Zeigerinstrumente wird in Skt/mA, Skt/μA oder Skt/nA angegeben; bei Lichtzeigerinstrumenten werden die Angaben in mm/m μA bzw. mm/m nA auf den in m gemessenen Skalenabstand bezogen.

Als *Stromkonstante* wird der Kehrwert von S_i bezeichnet, d. h.

$$C_i = \frac{1}{S_i}. \tag{2/34}$$

Legt man an das Meßgerät eine Meßspannung u über einen zusätzlichen Widerstand (der auch Null sein kann), so wird analog zu Gl. (2/33) als *Spannungsempfindlichkeit* der Ausdruck

$$S_u = \frac{x}{u} = \frac{x}{iR} = S_i/R \tag{2/35}$$

definiert, wobei R den Gesamtwiderstand des Meßkreises (Schließungswiderstand) bedeutet. Entsprechend gilt für die *Spannungskonstante*

$$C_u = \frac{1}{S_u} = RC_i; \tag{2/36}$$

S_u wird in Skt/mV oder Skt/μV usf. angegeben und ist im Gegensatz zur Stromempfindlichkeit keine echte Instrumentenkonstante, da sie neben dem *Instrumentenwiderstand* R_i noch den äußeren Widerstand enthält. Meist wird S_u auf den *Grenzwiderstand* R_{gr} bezogen, der den Gesamtwiderstand des Schließungskreises für den Fall *aperiodischer Dämpfung* des Meßsystems angibt.

Wird ein Galvanometer ballistisch benutzt, so besteht zwischen dem zu messenden Stromintegral $\int i \,\mathrm{d}t$ bzw. Spannungsintegral $\int u \,\mathrm{d}t$ und dem beobachteten Maximalausschlag $x_{\max}$ Proportionalität. Die Proportionalitätskonstanten

$$S_{ib} = x_{\max}/\int i \,\mathrm{d}t \quad \text{bzw.} \quad S_{ub} = x_{\max}/\int u \,\mathrm{d}t \tag{2/37}$$

werden *ballistische Stromempfindlichkeit* bzw. *Spannungsempfindlichkeit* genannt.

Beim *Kriechgalvanometer* (s. § 2.25) ist der Ausschlag $x - x_0$ (x_0 = Anfangsausschlag) dem zu messenden Spannungsintegral $\int u \,\mathrm{d}t$ proportional; der Proportionalitätsfaktor

$$S_{uf} = \frac{x - x_0}{\int u \,\mathrm{d}t} \tag{2/38}$$

heißt *fluxmetrische Spannungsstoßempfindlichkeit*. Im Gegensatz zur ballistischen Spannungsempfindlichkeit ist S_{uf} vom Schließungswiderstand weitgehend unabhängig.

Um Zeiger-, Lichtzeigerinstrumente und Galvanometer miteinander bezüglich ihrer Empfindlichkeit vergleichen zu können, werden *normierte* Empfindlichkeiten S' eingeführt, welche die Ausschlagswinkel φ des beweglichen Systems für die Einheit des zu messenden Stroms angeben. Für *Zeigerinstru-*

mente mit der Zeigerlänge y und dem Abstand benachbarter Skalenteile x_0 gilt $x = y\ \varphi/x_0$ und somit

$$S = \frac{y}{x_0} S'.$$

Bei *Lichtzeigerinstrumenten* wird der Lichtstrahl am Spiegel beim Ausschlag φ des Systems um den Winkel 2φ ausgelenkt. Da $x_0 \equiv 1$ mm, wird in diesem Fall

$$S = 2yS',$$

wenn y in m angegeben wird, oder $S_i = 2000 y S_i'$ mit S_i in mm/mμA und S_i' in rad/μA.

2.212 Bewegungsgleichung

Zur Ableitung der Bewegungsgleichungen des Galvanometersystems geht man vom Drehmoment M_i aus, das vom Meßstrom i ausgeübt wird, und setzt an:

$$M_i = qi, \tag{2/39}$$

worin q die dynamische *Galvanometerkonstante* ist. Das von Aufhängeband oder Rückstellfeder ausgeübte, der Größe M_i entgegengerichtete *mechanische Rückstellmoment* M_d ist dem Ausschlagswinkel proportional, und es gilt

$$M_d = -D\varphi, \tag{2/40}$$

wobei D als *spezifisches Richtmoment* oder *Direktionskraft* bezeichnet wird. Durch Gleichsetzen von (2/39) und (2/40) findet man den *statischen* Ausschlag

$$\varphi = \frac{qi}{D}. \tag{2/41}$$

Zur Berechnung des zeitlichen Verlaufs von φ ist neben M_d das *Dämpfungsmoment*

$$M_b = -b\dot{\varphi} \tag{2/42}$$

mit b als *Dämpfungskonstante* sowie das *Moment der Trägheit*

$$M_I = -I\ddot{\varphi} \tag{2/43}$$

mit dem *Trägheitsmoment* I des beweglichen Organs einzuführen. Bei spitzengelagerten Systemen wirkt außerdem der Bewegungsrichtung das Moment der *trockenen Reibung*

$$M_r = -r\,\frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|} \tag{2/44}$$

entgegen. Da zu jedem Zeitpunkt alle auf das Meßsystem wirkenden Momente im Gleichgewicht sein müssen, gilt die Beziehung

$$M_I + M_b + M_d + M_r + M_i = 0,$$

woraus sich die Differentialgleichung des Galvanometersystems ergibt:

$$I\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + D\varphi = qi \pm r. \tag{2/45}$$

Für große Werte von t sind die Einschwingvorgänge abgeklungen, d. h. $\dot{\varphi} = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$, und es ergibt sich als stationärer Ausschlag (vgl. Gl. 2/42)

$$\varphi = \frac{q}{D}\, i \pm \frac{r}{D} = S_i' i + \frac{r}{D}. \tag{2/41 a}$$

Das Glied $\pm r/D$ beschreibt die Unsicherheit der Messung mit Systemen, deren Lagerung ein Reibungsmoment aufweist, wie das bei spitzengelagerten Meßorganen der Fall ist.

2.213 Lösung der Bewegungsgleichung

Neben der partikulären Lösung (2/41 a) der Differentialgleichung (2/45) ist für spezielle Meßprobleme die allgemeine Lösung von Bedeutung. Zu diesem Zweck werden die aus der homogenen Differentialgleichung $I\ddot{\varphi} + \varphi D = 0$ resultierende *ungedämpfte Eigenfrequenz* des Meßsystems

$$\omega_0 = \sqrt{D/I} \tag{2/46}$$

sowie der *Dämpfungsgrad*

$$\alpha = b/2\sqrt{ID} = b/2\omega_0 I = \omega_0 b/2D \tag{2/47}$$

eingeführt. Führt man die Gln. (2/46) und (2/47) in Gl. (2/45) ein, so ergibt sich ohne Reibungsglied und mit dem dimensionslosen Zeitmaßstab

$$\tau = \omega_0 t \tag{2/48}$$

die *normierte Bewegungsgleichung* für das Galvanometer:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2\alpha\frac{d\varphi}{d\tau} + \varphi = \frac{q}{D}\, i = S_i' i. \tag{2/49}$$

Die allgemeine Lösung der Gl. (2/49) lautet:

$$\varphi = C_1 e^{y_1\tau} + C_2 e^{y_2\tau} + S_i' i, \tag{2/50}$$

wobei

$$y_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}; \qquad y_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} \tag{2/51}$$

gesetzt wird. Im folgenden werden für den Ein- und Ausschaltvorgang, für den ballistischen Ausschlag und für Wechselstrom die speziellen Lösungen der Bewegungsgleichung diskutiert.

2.214 Aus- und Einschaltvorgang

Wird das Galvanometer, das bis zum Zeitpunkt $\tau = 0$ vom Strom i durchflossen wird, und den Ausschlag φ_0 besitzt, abgeschaltet, so findet man für die Anfangsbedingungen für $\tau = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $d\varphi/d\tau = 0$ die Integrationskonstan-

ten in Gl. (2/50) zu

$$C_1 = \varphi_0 \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}}; \qquad C_2 = -\varphi_0 \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}}. \tag{2/52}$$

Damit wird der Verlauf des Ausschaltvorgangs durch folgende Gleichung wiedergegeben:

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \mathrm{e}^{-\alpha\tau} \left[\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \mathrm{e}^{\sqrt{\alpha^2-1}\tau} - \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha^2-1}\tau} \right]. \tag{2/53}$$

In Abb. 2.21 ist der Verlauf von φ/φ_0 in Abhängigkeit von τ für verschiedene Dämpfungsgrade α aufgetragen; der *aperiodische Grenzfall* für $\alpha = 1$ unterteilt die Gebiete der periodischen, gedämpften Bewegung für $\alpha < 1$ und einer Kriechbewegung für $\alpha > 1$.

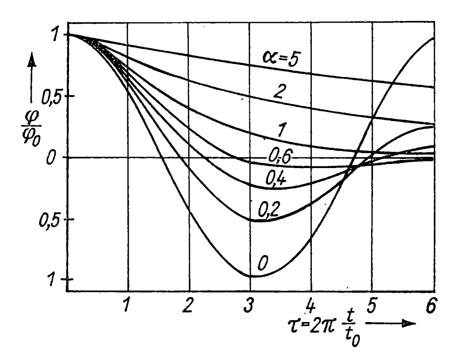


Abb. 2.21 Abschalten eines Galvanometers bei verschiedener Dämpfung

Im Fall des *schwach gedämpften* Galvanometers mit $\alpha < 1$ wird in Gl. (2/53) der Ausdruck $\sqrt{\alpha^2 - 1}$ imaginär; durch Umformen findet man die Lösung:

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \mathrm{e}^{-\alpha\tau} \left(\cos \sqrt{1 - \alpha^2}\tau + \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \sin \sqrt{1 - \alpha^2}\tau \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad \mathrm{e}^{-\alpha\tau} \sin \left(\sqrt{1 - \alpha^2}\tau + \psi'' \right),$$

wobei $\psi'' = \arctan \sqrt{1 - \alpha^2}/\alpha$ ist. Der Ausschlag φ führt eine gedämpfte Sinusschwingung mit der Periode

$$T = T_0/\sqrt{1 - \alpha^2} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}} \tag{2/54}$$

aus, deren Einhüllende durch die Exponentialkurve $\exp(-\tau\alpha)$ gegeben ist. Zwei aufeinanderfolgende Maximal- oder Minimalausschläge verhalten sich

demnach wie

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_3} = \frac{\varphi_2}{\varphi_4} = \cdots \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+2}} = \text{const} = k, \tag{2/55}$$

wobei

$$\ln k = \Lambda = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \tag{2/56}$$

als *logarithmisches Dekrement* bezeichnet wird. Führt man die Größe Λ in Gl. (2/54) ein, so ergibt sich die Schwingungsdauer der gedämpften Galvanometerschwingung zu

$$T = T_0/\sqrt{1 + (\Lambda/2\pi)^2}. \tag{2/54a}$$

Im Falle *aperiodischer Dämpfung* für $\alpha > 1$ wird aus Gl. (2/53)

$$\begin{aligned}\frac{\varphi}{\varphi_0} &= e^{-\alpha\tau}\left(\cosh\sqrt{\alpha^2-1}\,\tau + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}\sinh\sqrt{\alpha^2-1}\,\tau\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\,e^{-\alpha\tau}\sinh\left(\sqrt{\alpha^2-1}\,\tau + \psi'\right),\end{aligned} \tag{2/53b}$$

wobei $\psi' = \arctan\sqrt{\alpha^2 - 1}/\alpha$ ist. Das Galvanometer kehrt in diesem Fall kriechend in die Nullstellung zurück; eine Anwendung dieser Beziehung stellt das Kriechgalvanometer dar (s. § 2.217). Der *aperiodische Grenzfall* für $\alpha = 1$ folgt aus Gl. (2/53a) und liefert die Relation

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = e^{-\tau}(1+\tau), \tag{2/53c}$$

d. h. ein asymptotisches Einschwingen in die Nullage ohne Umkehrpunkt.

Analoge Betrachtungen sind für das *Einschalten* eines Gleichstroms anzustellen, für den die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2/50) aus den Gln. (2/53a—c) folgt, wenn anstelle von φ/φ_0 auf der linken Seite die Größe $1 - \varphi/\varphi_0$ gesetzt wird. Für ein schwach gedämpftes Galvanometersystem ($\alpha < 1$) erhält man ein Überschwingen des stationären Ausschlages, das um so stärker wird, je kleiner der Dämpfungsgrad α ist. In Abb. 2.22 ist für verschiedene Werte von α die Überschwingung $\varphi_ü/\varphi_0$ über τ aufgetragen. Aus Gl. (2/55) folgt für die 1. Überschwingung die Beziehung

$$\frac{\varphi_ü}{\varphi_0} - 1 = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Eng mit der Überschwingung ist der Begriff der *Einstellzeit* des Galvanometers verknüpft. Diese ist als Zeit vom Einschaltaugenblick bis zum Einschwingen in einen um den stationären Ausschlag vorgegebenen Toleranzbereich definiert, der bei genauen Instrumenten $\pm 0{,}5 \cdots \pm 1{,}5\%$ des stationären Ausschlages

beträgt. In die Abb. 2.22 ist der Übersichtlichkeit halber ein Toleranzbereich von $\pm 5\%$ eingetragen; man erkennt, daß bei einem Dämpfungsgrad $\alpha \approx 0{,}8$ die Einstellzeit minimal ist.

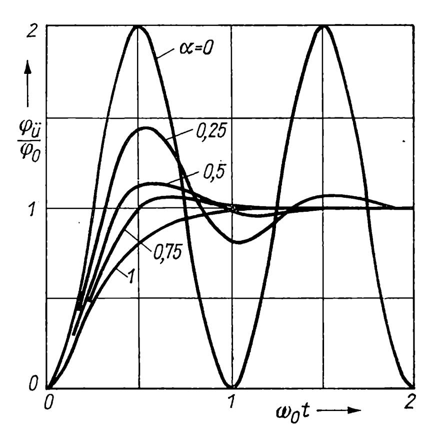


Abb. 2.22 Einschalten eines Galvanometers bei verschiedener Dämpfung

2.215 Periodischer Strom

Bei periodischem Verlauf des Meßstroms ist die Bewegungsgleichung (2/49) durch die inhomogene Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\tau^2} + 2\alpha \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} + \varphi = S_i' i_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\eta\tau} \tag{2/57}$$

zu ersetzen, worin i_0 die Amplitude und $\eta = \omega/\omega_0$ die auf die Eigenfrequenz ω_0 nach Gl. (2/46) bezogene Kreisfrequenz des Meßstroms bedeuten. Gleichung (2/57) findet bei den *elektrodynamischen Oszillografen* (s. § 6.71) sowie bei den *Vibrationsgalvanometern* (s. § 6.34) Anwendung. Der periodische Meßstrom erregt das Meßsystem zu erzwungenen Schwingungen, welche durch den Ausdruck

$$\varphi = \varphi_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\eta(\tau - \tau_v)} \tag{2/58}$$

beschrieben werden können. Mit dem Lösungsansatz (2/58) in Gl. (2/57) ergibt sich der *dynamische Ausschlag*

$$\frac{\varphi_0}{S_i' i_0} = A = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\alpha^2\eta^2}} \tag{2/59}$$

und die *Verzögerungs-* oder *Nacheilzeit* zu

$$\tau_v = \omega_0 t_v = \frac{1}{\eta} \arctan \frac{2\alpha\eta}{1-\eta^2}. \tag{2/60}$$

Die Größe A wird *Vergrößerungsfaktor* oder *Abbildungsmaßstab* genannt und gibt das Verhältnis von dynamischem Ausschlag φ_0 zum stationären Aus-

schlag $S_i' i_0$ an. In Abb. 2.23 ist der Vergrößerungsfaktor A als Funktion von η bei verschiedenen Dämpfungsgraden α aufgetragen; Abb. 2.24 zeigt die Nacheilzeit τ_v als Funktion desselben Parameters.

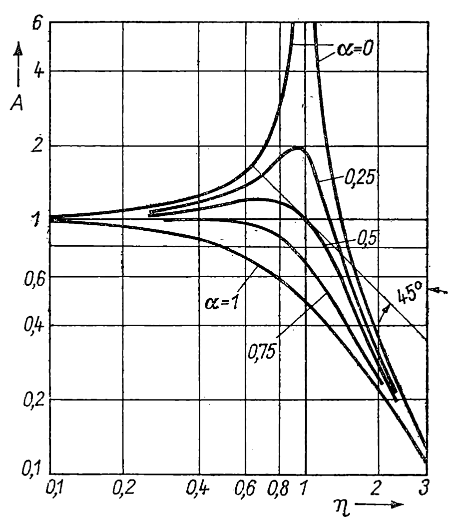


Abb. 2.23 Vergrößerungsfaktor A

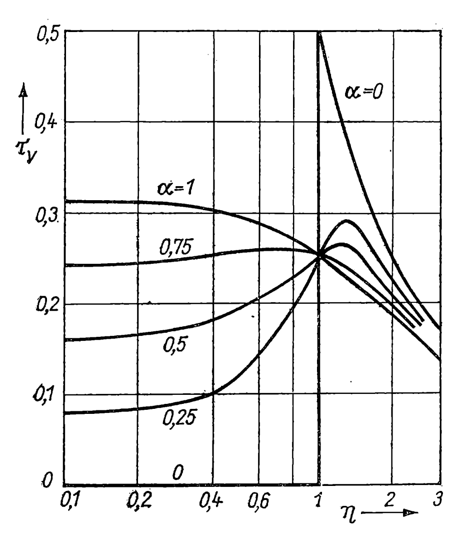


Abb. 2.24 Nacheilzeit τ_v in Abhängigkeit von der Frequenz und vom Dämpfungsgrad

Diese Darstellung ist ausführlich in Bd. I, § 11.1, für mechanische Schwingungen diskutiert und läßt sich sinngemäß auf Galvanometersysteme übertragen. Aus Abb. 2.23 ist zu ersehen, daß mit zunehmender Dämpfung die

Eigenfrequenz abnimmt. Für $\eta \gg 1$ wird der dynamische Ausschlag sehr klein. Eine Abbildungstreue in einem größeren Frequenzbereich erhält man im Bereich $0 < \eta < 0{,}8$, bei optimaler Systemdämpfung, die sich durch Differenzieren von Gl. (2/59) zu $\alpha_{\text{krit}} = 1/\sqrt{2} = 0{,}71$ berechnet. Schleifen- und Spulenoszillografen arbeiten in dem oben bezeichneten Frequenzbereich und mit der kritischen Dämpfung.

Beim *Vibrationsgalvanometer* wird die hohe Resonanzüberhöhung bei kleinstmöglicher Dämpfung ausgenutzt, um eine hohe Stromempfindlichkeit zu erzielen. Bei plötzlichem Einschalten des Wechselstroms erreicht der Resonanzausschlag φ seinen Endwert φ_0 asymptotisch entsprechend der Beziehung $\varphi = \varphi_0(1 - \mathrm{e}^{-\alpha\tau})$; bei großer Resonanzempfindlichkeit ergibt sich eine lange Einschwingzeit.

Eine getreue Abbildung eines beliebigen periodischen Meßstroms

$$i = \Sigma\, a_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\eta_n \tau - \tau_{vn})}$$

ist nur mit einem Meßsystem möglich, bei dem Abbildungsmaßstab A und Verzögerungszeit τ_v im ganzen in Betracht kommenden Frequenzbereich unabhängig von η sind. Nach Abb. 2.24 trifft diese Bedingung annähernd für $\alpha = 0{,}71$ und $0 < \eta < 0{,}6$ zu, wobei $\tau_v \approx 0{,}23\,T_0$ ist.

2.216 Ballistischer Ausschlag

Wird durch ein Galvanometer ein Stromstoß $\int i\,\mathrm{d}t$ geschickt, dessen Dauer kleiner als die Eigenschwingungsdauer des Meßsystems ist, so wird der beobachtete *Maximalausschlag* ein Maß für die Ladung $Q = \int i\,\mathrm{d}t$. Integriert man die Bewegungsgleichung (2/49) über die Dauer des Stromstoßes $\Delta\tau$, so erhält man:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\Delta\tau} + 2\alpha\varphi\Big|_{\Delta\tau} + \int_{\Delta\tau}\varphi\,\mathrm{d}\tau = \frac{q}{D}\int_{\Delta\tau} i\,\mathrm{d}\tau.$$

Für die Auswertung dieser Beziehung wird angenommen, daß $\Delta\tau \ll 1$ und $\varphi = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\tau = 0$ für $\tau = 0$ wird. In guter Näherung können daher Dämpfungs- und Rückstellglied gegenüber $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\tau$ vernachlässigt werden; es ergibt sich:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)_{\tau=0} \approx \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)_{\Delta\tau} = \frac{q}{D}\int_{\Delta\tau} i\,\mathrm{d}t = \frac{q}{D}\,\omega_0 \int_{\Delta\tau} i\,\mathrm{d}t = \frac{q}{D}\,\omega_0 Q. \tag{2/61}$$

Da nach Gl. (2/48) $t = \tau/\omega_0$ ist, folgt aus Gl. (2/61)

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} \approx \frac{\omega_0 q}{D}\,Q = \frac{q}{I}\,Q. \tag{2/61a}$$

Die Anfangsgeschwindigkeit des Systems ist demnach der Ladung Q proportional; den Ausschlag selbst erhält man aus Gl. (2/49) durch Einsetzen der

Beziehung (2/61a). Für die verschiedenen Dämpfungsbereiche lauten die Lösungen analog zu den Gl. (2/53a—c):

$$\varphi = \begin{cases} \left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)_{\tau=0} \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\, \mathrm{e}^{-\alpha\tau} \sin\left(\sqrt{1-\alpha^2}\,\tau\right) & \text{für } \alpha < 1, \quad (2/62\mathrm{a}) \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)_0 \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\, \mathrm{e}^{-\alpha\tau} \sinh\left(\sqrt{\alpha^2-1}\,\tau\right. & \text{für } \alpha > 1, \quad (2/62\mathrm{b}) \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)_0 \tau\mathrm{e}^{-\tau} & \text{für } \alpha = 0. \quad (2/62\mathrm{c}) \end{cases}$$

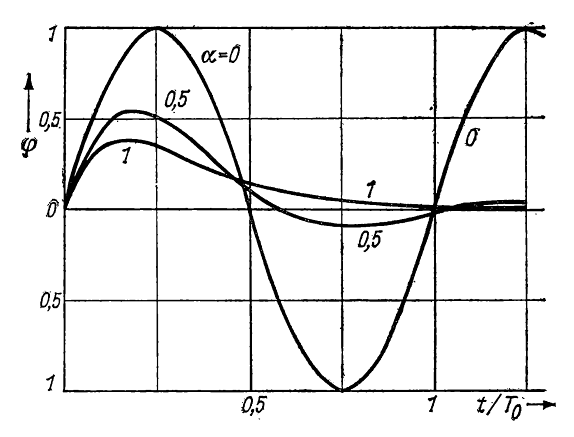


Abb. 2.25 Ballistischer Ausschlag für $d\varphi/dt = 1$

In Abb. 2.25 ist der ballistische Ausschlag für die Anfangsgeschwindigkeit $(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\tau)_0 = 1$ für verschiedene Dämpfungsgrade als Funktion der Zeit t/T_0 dargestellt. Der *Maximalausschlag* $\varphi_{\max}$, den das angestoßene System erreicht, hängt stark vom Dämpfungsgrad ab und nimmt mit wachsendem α ab. Aus den Gln. (2/62a—c) folgt:

$$\varphi_{\max} = \begin{cases} \left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)_0 \exp\left(-\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \arctan\dfrac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right) & \text{für } \alpha < 1, \quad (2/63\mathrm{a}) \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)_0 \cdot \dfrac{1}{\mathrm{e}} & \text{für } \alpha = 1, \quad (2/63\mathrm{b}) \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)_0 \exp\left(-\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} \operatorname{arctanh}\dfrac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}\right) & \\ \quad \approx \left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)_0 \dfrac{1}{2\alpha}. & \text{für } \alpha > 1. \quad (2/63\mathrm{c}) \end{cases}$$

Von Interesse ist ferner die Zeit t_b, in der der Maximalausschlag erreicht wird. Man erhält sie durch Differenzieren der Gln. (2/62) und Nullsetzen von $d\varphi/d\tau$ zu:

$$t_b = \begin{cases} \dfrac{T_0}{2\pi} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \arctan \dfrac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} & \text{für } \alpha < 1, \quad (2/64\text{a}) \\ \dfrac{T_0}{2\pi} & \text{für } \alpha = 1, \quad (2/64\text{b}) \\ \dfrac{T_0}{2\pi} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} \ln \dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}} \approx \dfrac{T_0}{2\pi} \cdot \dfrac{1}{\alpha} \ln 2\alpha & \text{für } \alpha > 1. \quad (2/64\text{c}) \end{cases}$$

Die ballistische Einstellzeit t_b nimmt also mit wachsender Dämpfung ab.

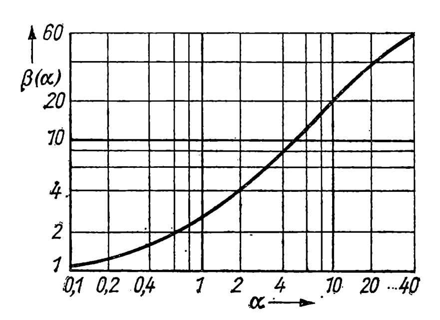


Abb. 2.26 Ballistischer Reduktionsfaktor

Als *ballistische Stoßempfindlichkeit* findet man aus den Gln. (2/61a) und (2/63a—c) den folgenden Ausdruck:

$$S'_{ib} = \frac{\varphi_{\max}}{Q} = \frac{q\,T_0}{2\pi I}\,\frac{1}{\beta}, \qquad (2/65)$$

worin β den *ballistischen Reduktionsfaktor* bezeichnet. Er ergibt sich für verschiedene Dämpfungsgrade zu:

$$\beta = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \arctan \dfrac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right) & \text{für } \alpha < 1, \quad (2/65\text{a}) \\ \text{e} & \text{für } \alpha = 1, \quad (2/65\text{b}) \\ \exp\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} \operatorname{arctanh} \dfrac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}\right) & \text{für } \alpha > 1. \quad (2/65\text{c}) \end{cases}$$

In Abb. 2.26 ist die Größe β als Funktion des Dämpfungsgrades α dargestellt; mit zunehmender Dämpfung sinkt demnach die ballistische Empfindlichkeit.

2.217 Kriechgalvanometer

Aus Abb. 2.25 ist zu entnehmen, daß bei sehr großer Dämpfung ($\alpha \gg 1$) der Instrumentenausschlag mit kleiner Einstellzeit t_b dem Stromstoß folgt und sehr langsam in die Ausgangsstellung zurückkehrt. Der Maximalausschlag braucht nicht sofort abgelesen zu werden, da er sich praktisch nicht mehr ändert. Ein solches Instrument wird *Fluxmeter* genannt, da es vor allem zur Messung der magnetischen Induktion mit Hilfe einer im Feld bewegten Spule benutzt wird.

Nach Gl. (2/63c) findet man für $\alpha \gg 1$ den Maximalausschlag nach einem kurzen Stromstoß von der Dauer $\Delta\tau$ zu

$$\varphi_{\max} - \varphi_0 = \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)_0 \frac{1}{2\alpha},$$

wobei φ_0 den Ausschlag für $t = 0$ bedeutet. Der maximale Ausschlag wird nach Gl. (2/64c) nach Ablauf der Zeit

$$t_b = \frac{T_0}{2\pi} \frac{\ln \alpha}{\alpha}$$

erreicht. Die *Rückkehr* des Ausschlages wird durch die Gl. (2/62c) beschrieben und ergibt sich für große Dämpfung und Beachtung von Gl. (2/63c) zu:

$$\varphi - \varphi_0 = \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)_0 \frac{1}{2\alpha} e^{-\tau/2\alpha} = (\varphi_{\max} - \varphi_0)\, e^{-\tau/2\alpha}. \tag{2/66}$$

Die *Zeitkonstante* für die Rückkehr des Anfangsausschlages beträgt nach Gl. (2/66) $\tau_k = 2\alpha$ oder $t_k = \alpha T_0/\pi$.

Die *fluxmetrische Spannungsstoßempfindlichkeit* berechnet sich aus den Gln. (2/38), (2/64c), (2/65) und (2/65c) für $\alpha \gg 1$ zu:

$$S'_{uf} = \frac{\varphi_{\max} - \varphi_0}{\int u \, dt} = \frac{q T_0}{4\pi I R} \frac{1}{\alpha}, \tag{2/67}$$

oder bei Berücksichtigung der Zeitkonstanten t_k

$$S'_{uf} = \frac{q t k}{4 I R} \frac{1}{\alpha^2} = \frac{q T_0^2}{4\pi^2 I R} \frac{1}{t k}. \tag{2/67a}$$

Eine hohe fluxmetrische Empfindlichkeit wird bei festgehaltener Zeitkonstante t_k mit einer großen (ungedämpften) Schwingungsdauer T_0, d. h. durch ein sehr kleines Richtmoment des Meßsystems, erreicht. Zur *Integration* von Stromstößen wird wegen der sehr viel größeren Stromstoßempfindlichkeit des ballistischen Galvanometers das Fluxmeter nur selten angewandt.

2.22 Drehspulinstrument

2.221 Theorie des Drehspulsystems [*2.72*]

Der Aufbau eines Drehspulgalvanometers ist schematisch in Abb. 2.27 dargestellt. Es besteht aus der rechteckigen Spule *Sp*, die an einem dünnen Torsionsfaden *D* aufgehängt ist und im magnetischen Feld eines zylindrischen Luftspaltes Drehschwingungen ausführen kann. Das Magnetfeld wird von einem Permanentmagneten erzeugt, dessen Polschuhe *N* und *S* den zylindri-

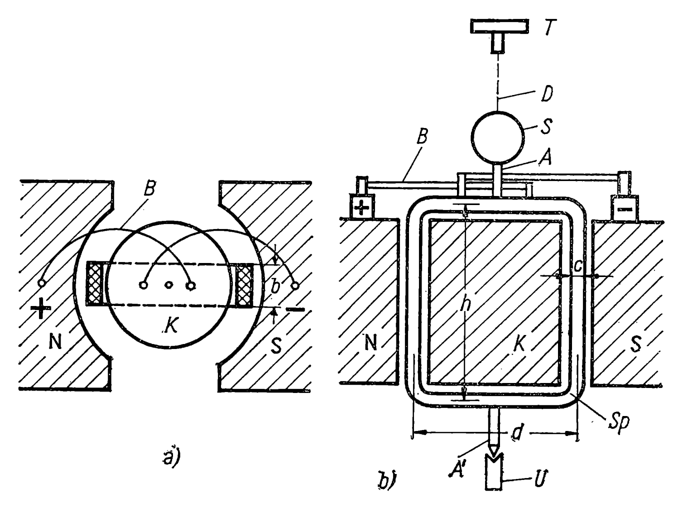


Abb. 2.27 Schema eines Drehspulgalvanometers: Querschnitt (a); Vertikalschnitt (b)

schen Kern *K* aus Weicheisen umfassen. Der Ablesespiegel *S* ist oberhalb der Spule befestigt; mittels des Torsionskopfes *T* kann die Nullstellung justiert werden. Der Meßstrom wird durch sehr dünne, flexible Metallbändchen *B* der Spule zugeführt. Mit Hilfe der nach oben verschiebbaren Arretiervorrichtung *U* kann bei Nichtgebrauch des Instrumentes die untere Spulenachse *A'* festgehalten werden.

Das im Luftspalt erzeugte Magnetfeld ist zylindersymmetrisch und über einen großen Winkelbereich konstant. Bezeichnet man die im Luftspalt herrschende magnetische Induktion mit *B*, mit *N* die Windungszahl der Spule, deren Höhe und Durchmesser mit *h* bzw. *d*, so wird durch den Strom *i* das elektrische Drehmoment

$$M_i = BhdNi = BANi \tag{2/68}$$

ausgeübt. Durch Vergleich mit Gl. (2/39) folgt für die dynamische Galvanometerkonstante der Ausdruck

$$q = BAN. \tag{2/69}$$

Mit den Einheiten für B in T (Tesla $=$ Vs/m²), A in m² ergibt sich für die Größe q die Dimension Wb $= 1$ Nm/A und für die Stromempfindlichkeit nach § 2.211 die Größengleichung

$$S_i' = \frac{q}{\text{N m/A}} \frac{\text{Nm/mm/m}}{D} = \frac{q}{D}\left(\frac{\text{mm/m}}{\text{A}}\right). \tag{2/70}$$

Spulendimensionierung. Um bei vorgegebener Schwingungsdauer des Meßsystems maximale Empfindlichkeit zu erzielen, muß die Größe

$$S_i' = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{BAN}{I} = \frac{BAN}{D} \tag{2/70a}$$

möglichst groß gemacht werden. Das gesamte Trägheitsmoment I der Drehspule mit dem Wickelquerschnitt $a = bc$ (s. Abb. 2.27) setzt sich aus dem Trägheitsmoment I' des Spiegels oder Zeigers und dem der Spule Sp zusammen. Für konstante Windungszahl N und Spulenquerschnitt a wird $S_i' \approx ad$, d. h., optimale Empfindlichkeit wird mit schmalen Spulen erreicht.

Die in Gl. (2/45) auftretende Dämpfungskonstante b hängt vom äußeren Meßkreis des Galvanometers ab, da der bei bewegter Spule induzierte Strom ein gegensinniges Drehmoment zur Folge hat. Für diese *elektromagnetische Dämpfung* erhält man den Ausdruck

$$b = b_0 + \frac{B^2 N^2 A^2}{R} = b_0 + \frac{q^2}{R}, \tag{2/71}$$

wenn b_0 der Dämpfungsanteil ist, der durch nichtelektrische Ursachen und durch das Spulenrähmchen hervorgerufen wird, und R den Gesamtwiderstand des Schließungskreises bedeutet. Damit ergibt sich nach Gl. (2/47) der Dämpfungsgrad

$$\alpha = \frac{1}{2\omega_0 I}\left(b_0 + \frac{q^2}{R}\right) = \alpha_0 + \alpha_r, \tag{2/72}$$

worin α_r den elektrodynamischen Beitrag zur Gesamtdämpfung angibt.

Für $\alpha_0 < \alpha_r$, d. h. $\alpha \approx \alpha_r = 1$, wird der aperiodische Grenzfall erreicht, für den sich aus Gl. (2/72) der kritische Schließungswiderstand zu

$$R_{gr} = \frac{q^2}{2\omega_0 I} = \frac{q^2}{2\sqrt{DI}} \tag{2/73}$$

berechnet, der sich entsprechend

$$R_{\text{gr}} = R_i + R_{\text{agr}}$$

aus dem *Innenwiderstand* R_i und dem *äußeren Grenzwiderstand* R_{agr} zusammensetzt. Durch Einsetzen von Gl. (2/70a) in Gl. (2/35) findet man die *Spannungsempfindlichkeit* S_u' zu

$$S_u' = \frac{BAN}{D(R_i + R_{\text{a}})}, \tag{2/74}$$

wobei $R_i = 2(h + d)N^2\varrho/a$ und ϱ den spezifischen Widerstand des Spulendrahtes bedeutet. Wie leicht zu ersehen ist, wird S_u' maximal, wenn $2N^2(h + d)\varrho/a = R_i = R_a$ ist, d. h., wenn die im Galvanometer und im Außenwiderstand verbrauchten elektrischen Leistungen gleich groß sind (*Anpassung*).

2.222 Normempfindlichkeit

Um verschiedene Drehspulgalvanometer miteinander vergleichen zu können, muß die durch Gl. (2/70a) gegebene Stromempfindlichkeit auf die Schwingungsdauer T_0 des Meßsystems und dessen Innenwiderstand R_i bezogen werden. Da bei optimaler Anpassung $R_i = R_{\text{agr}} = R_{\text{gr}}/2$ ist, findet man bei Berücksichtigung von Gl. (2/73) und Vernachlässigung der von α_0 herrührenden Dämpfung den Ausdruck

$$S_i' = \sqrt{\frac{R_i T_0}{\pi D}}. \tag{2/75}$$

Definiert man als *normale Stromempfindlichkeit* s_i' die eines Galvanometers mit $R_i = 1\,\Omega$ und $T_0 = 10\,\text{s}$, so ergibt sich durch Vergleich mit Gl. (2/75) die *Normstromempfindlichkeit* eines beliebigen Instrumentes zu:

$$s_i' = \frac{S_i'}{\sqrt{R_i}}\sqrt{\frac{10}{T_0}}. \tag{2/76}$$

Da nach Gl. (2/35) $S_u' = S_i'/R$ ist, erhält man die Spannungsempfindlichkeit des Drehspulsystems unmittelbar aus Gl. (2/75) zu

$$S_u' = \sqrt{\frac{T_0}{\pi D R}} \tag{2/77}$$

und für die *Normspannungsempfindlichkeit* den Ausdruck:

$$s_u' = S_u'\sqrt{\frac{10R}{T_0}}, \tag{2/78}$$

wobei $R = R_i + R_a$. Die optimale Dimensionierung der Drehspule ergibt sich im Falle $R_i = R_a$ nach Gl. (2/74) zu

$$S_u' = \frac{BAN}{2DR_i}. \tag{2/74a}$$

Mit $D = 4\pi^2 I/T_0^2$ ergibt sich daraus die Beziehung

$$S_u' = \frac{BAN}{8\pi^2 I R_i}T_0^2, \tag{2/79}$$

wobei die magnetische Induktion B im Luftspalt des Drehspulsystems nach Gl. (2/73) beim angepaßten Instrument eine Funktion von R_{gr} und damit des Innenwiderstandes R_i ist; es gilt dann:

$$B = \frac{1}{NA} \sqrt{\frac{DT_0 R_i}{\pi}}. \tag{2/80}$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gl. (2/79) ein, so findet man die wichtige Beziehung

$$S_u' = \frac{1}{4} (R_i I)^{-1/2} (T_0/\pi)^{3/2}, \tag{2/81}$$

aus der hervorgeht, daß die Drehspule möglichst klein sein und nur wenige Windungen dünnen Drahtes besitzen soll und S_u' mit $T_0^{3/2}$ zunimmt.

2.223 Ballistische Empfindlichkeit

Als *ballistische Stromstoßempfindlichkeit* wurde in § 2.216 der Ausdruck

$$S'_{ib} = \frac{qT_0}{2\pi I} \frac{1}{\beta} \tag{2/65}$$

angegeben, wenn mit β der ballistische Reduktionsfaktor bezeichnet wird, der in Abb. 2.26 (S. 67) dargestellt ist und für $\alpha = 1$ den Wert $\beta = e$ ergibt. Setzt man Gl. (2/69) in die obige Beziehung ein, so ergibt sich:

$$S'_{ib} = \frac{T_0 BAN}{2\pi I} \frac{1}{\beta}. \tag{2/82}$$

Analog findet man für die *ballistische Spannungsstoßempfindlichkeit* den Ausdruck:

$$S'_{ub} = \sqrt{\frac{T_0}{I(R_i + R_{agr})\pi}} \frac{1}{\beta}, \tag{2/83}$$

wobei R_{agr}, der äußere Grenzwiderstand, zusammen mit dem Innenwiderstand des Galvanometers den aperiodischen Grenzfall der Schwingung liefert.

Nach Gl. (2/83) wächst die Empfindlichkeit im Gegensatz zu Gl. (2/82) nur mit der Wurzel aus T_0; diese Eigenschaft ist jedoch in Hinblick auf die große Schwingungsdauer der ballistischen Galvanometer bedeutungslos.

2.224 Fluxmetrische Empfindlichkeit

Nach § 2.216 findet man für das *Kriechgalvanometer* die *fluxmetrische Spannungsstoßempfindlichkeit* zu

$$S'_{uf} = \frac{qT_0}{4\pi IR} \frac{1}{\alpha} \tag{2/67}$$

und erhält mit Gl. (2/69) die Beziehung:

$$S'_{uf} = \frac{BANT_0}{4\pi IR} \frac{1}{\alpha}. \qquad (2/84)$$

Berücksichtigt man nach Gl. (2/72) den Zusammenhang zwischen Schließungswiderstand und kritischer Dämpfung, so wird die fluxmetrische Empfindlichkeit

$$S'_{uf} = \frac{1}{q} = \frac{1}{BAN} \qquad (2/84\,a)$$

von Schließungswiderstand und Dämpfung unabhängig.

Die Rückkehrzeit t_k des Anfangsausschlages ergibt sich mit Gl. (2/72) zu

$$t_k = \frac{\alpha T_0}{\pi} = \frac{q^2}{\omega_0^2 IR} = \frac{B^2 A^2 N^2}{DR}. \qquad (2/85)$$

Da bei vorgegebenem Wert von q die Rückkehrzeit $t_k \sim R^{-1}$ ist, können große Werte von t_k nur mit sehr kleinen Richtmomenten D erzielt werden. Wie aus Gl. (2/84a) hervorgeht, stellen große Werte von t_k und S'_{uf} einander widersprechende Forderungen an das Meßsystem dar.

2.225 Bauelemente [*2.41, 2.111*]

Aus Abb. 2.27 (S. 69) sind die einzelnen Bauelemente eines Drehspulmeßwerks ersichtlich. Für spezielle Anwendungszwecke lassen sich auf Grund der in den vorigen Abschnitten abgeleiteten Beziehungen Hinweise für die Dimensionierung der Meßspule, deren Lagerung und die Luftspaltinduktion entnehmen.

Drehspule. Aus Gl. (2/72) geht hervor, daß die Empfindlichkeit S_i' bei konstanter Windungszahl N mit abnehmenden Abmessungen wächst und ein Optimum mit schlanken Spulen wegen des relativ kleinen Trägheitsmoments I erzielt wird. Da die Luftspaltinduktion mit kleinerem Spalt zwischen Polbohrung und Kern wächst, wird bei empfindlichen Meßsystemen anstelle des rechteckigen Querschnitts der Drehspule ein kreisbogenförmiger verwendet. Der aus mechanischen Gründen erforderliche freie Abstand beiderseits der Spule beträgt bei spitzen- und spannbandgelagerten Systemen 0,3···1 mm, bei bandaufgehängten Spulen 0,5···1,5 mm. Die Drehspule ist meist auf ein Leichtmetallrähmchen als Schutz und Träger für den dünnen Spulendraht gewickelt, wodurch gleichzeitig eine zusätzliche elektromagnetische Dämpfung erzielt wird. Spulen für sehr empfindliche Instrumente werden frei gewickelt und zur Erhöhung der mechanischen Festigkeit in Lack oder Kunststoff getränkt.

Spulendraht. Zur Bewicklung der Spule wird kunstharzisolierter Cu-Draht verwendet, der völlig *eisenfrei* sein muß. Der geringste Fe-Gehalt ruft parasitäre Drehmomente der Spule hervor, da die magnetische Induktion im Luftspalt nie vollkommen homogen ist. Für schnell schwingende Galvanometer wird wegen des kleineren Trägheitsmomentes oft Al-Draht verwendet,

der durch Eloxieren isoliert wird. Die feinsten für den Galvanometerbau benutzten Drähte besitzen 15 μm Durchmesser. Bei vorgegebenem Wicklungsquerschnitt a wird der Spulenwiderstand $R_i \sim r^{-4}$ (Drahtradius r); meist liegen die Spulenwiderstände zwischen 5 und 10000 Ω.

Spitzenlagerung. Robustere Meßsysteme mit einem Meßbereich von 10 μA und darüber werden in gehärteten und geschliffenen Stahlspitzen gelagert, die in Edelsteinlagern geführt sind. Zum mechanischen Schutz der Spitzen ist eine *Arretiervorrichtung* vorgesehen (vgl. Abb. 2.28). Das Richtmoment wird durch zwei Spiralfedern ausgeübt, die gleichzeitig als Stromzuführung dienen. In spitzengelagerten Fluxmetern mit sehr kleinem Richtmoment wird der Strom über dünne Au-Bändchen zugeführt.

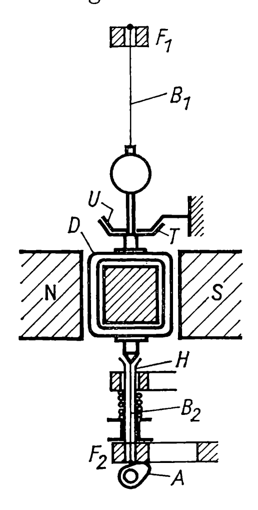


Abb. 2.28 Arretiervorrichtung

Bandaufhängung [*2.21*]. Bei empfindlichen Instrumenten werden die Drehspulen an dünnen Metallbändchen oder -drähten oder feinen Quarzfäden aufgehängt und als Stromzuführung zwei dünne Au- oder Ag-Bändchen benutzt. Dünne Metallbänder mit großem Seitenverhältnis bieten nach Bd. I, § 12.81, bei gleichem Querschnitt den Vorteil des geringeren Richtmoments gegenüber Runddrähten. Als Material für Aufhängebänder werden neben Quarz Platin, Pt—Ni, P-Bronze, Cu—Be-Bronze und Ni—Be-Bronze verwendet.

Spannbandlagerung. Bei der Spannbandlagerung wird die Drehspule durch zwei kürzere Bänder unter elastischer Vorspannung in Achsrichtung gehalten und kann auch bei geringer Schräglage frei im Luftspalt des magnetischen Kreises schwingen. Die in Abb. 2.28 dargestellte Ausführung zeigt die Drehspule D mit den Spannbändern B_1 und B_2, deren Enden an die elastischen Federelemente F_1 und F_2 gelötet sind. Durch Betätigen des Arretierhebels A wird F_2 angehoben, die konisch ausgedrehte Hülse H gegen den unteren kegeligen Achsstumpf von D gedrückt, bis der Arretierteller T sein Widerlager U berührt. In dieser Stellung sind beide Bänder entlastet und wird D zwischen U

und H gehalten. Die beiden Bänder werden als Stromzuführung benutzt, wobei eine Stromdichte von 1 A/mm² zulässig ist.

Magnetfeld. Die Luftspaltinduktion wird in der Regel von *Dauermagneten* erzeugt; für spezielle Schleifenoszillografen und ballistische Instrumente mit magnetischen Induktionen bis zu 2 T werden auch Elektromagnete angewandt. Die mit Dauermagnetkreisen zu erzeugende Luftspaltinduktion liegt zwischen 0,1 und 1,2 T; bei hochempfindlichen Instrumenten beschränkt man sie wegen der durch Fe-Verunreinigungen der Spule möglichen Fehler auf 0,2 T.

Für die Berechnung des magnetischen Kreises eines Drehspulsystems [*2.22, 2.54*] wird die Anordnung nach Abb. 2.29a zugrunde gelegt, die aus dem Kern K, den Polschuhen P aus Weicheisen und dem Dauermagneten M besteht. Der zur Erzeugung der magnetischen Induktion benutzte Dauermagnetwerkstoff wird durch die in Abb. 2.29b dargestellte Entmagnetisierungskurve

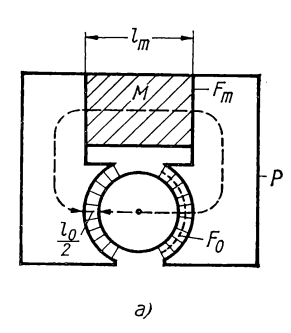


Abb. 2.29a Magnetischer Kreis eines Drehspulinstruments

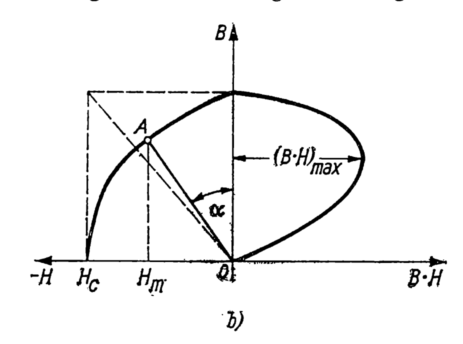


Abb. 2.29b Magnetisierungskurve eines Dauermagnetwerkstoffs

gekennzeichnet, in der über der entmagnetisierenden Feldstärke $-H$ die magnetische Induktion B aufgetragen ist. Bezeichnet man mit den Indices „0“ und „m“ die Feldgrößen im Luftspalt bzw. im Dauermagneten (der Durchflutungsbedarf des restlichen Weicheisenkreises wird vernachlässigt), so gilt nach dem Durchflutungsgesetz:

$$\frac{B_0}{\mu_0} l_0 + H_m l_m = 0, \tag{2/86}$$

wenn μ_0 die magnetische Feldkonstante ist. Aus der Erhaltung des magnetischen Flusses im gesamten magnetischen Kreis folgt für die magnetische Induktion im Luftspalt:

$$B_0 = B_m \frac{A_m}{A_0} \eta, \tag{2/87}$$

worin A_0 und A_m die Querschnitte im Luftspalt bzw. Dauermagneten und der Ausnutzungskoeffizient $\eta < 1$ ein Maß für den magnetischen Streufluß ist. Durch Einsetzen von Gl. (2/87) in (2/86) findet man die Beziehung

$$H_m = -N B_m / \mu_0 \tag{2/88}$$

mit

$$N = \frac{A_m l_0}{A_0 l_m} \eta = \tan \alpha . \qquad (2/89)$$

Die Größe N wird *Entmagnetisierungsfaktor* genannt, der im wesentlichen eine geometrische Größe ist. Gleichung (2/88) stellt eine Gerade mit der Neigung $-\tan \alpha$ durch den Ursprung der Abb. 2.29b dar, welche die Magnetisierungskurve im Punkt A schneidet. Das zugehörige H_m stellt für die vorgegebene Induktion B_m den erforderlichen Durchflutungsbedarf des magnetischen Kreises dar. Multipliziert man Gl. (2/87) mit dem Ausdruck $B_0 = \mu_0 H_m l_m / l_0$, der aus Gl. (2/86) folgt, und setzt für die Volumina $A_m l_m = V_m$ bzw. $A_0 l_0 = V_0$, so ergibt sich:

$$B_0^2 = \eta \frac{V_m}{V_0} B_m H_m \mu_0$$

und daraus die Beziehung:

$$V_m = \frac{1}{\eta} \frac{B_0^2}{\mu_0 H_m B_m} V_0 . \qquad (2/90)$$

Mit Kenntnis der Entmagnetisierungskurve und vorgegebenem Luftspaltvolumen läßt sich daraus die erreichbare Luftspaltinduktion B_0 als Funktion des Magnetvolumens V_m angeben. Dieses ist dem Produkt $H_m B_m$ umgekehrt proportional; eine optimale Ausnutzung des Dauermagnetwerkstoffes ist daher für diejenige magnetische Induktion gegeben, die dem Maximalwert $(HB)_{\max}$ entspricht. In Abb. 2.29b ist (HB) als Funktion von B eingetragen; über Dauermagnetkreise s. auch § 13.51.

Wie aus *Tabelle 12.12* (S. 817) zu entnehmen ist, beträgt das Produkt $(BH)_{\max}$ für den früher bei Drehspulinstrumenten häufig verwendeten W-Stahl (0,5 Cr, 6 W, 93,5 Fe) $4{,}3 \cdot 10^5$ G Oe = 3,4 mJ/cm³, während bei modernen Dauermagnetwerkstoffen, wie *Oerstit 800*, Werte von $(BH)_{\max} = 18$ mJ/cm³ erreicht werden. Gußmagnete mit Vorzugsrichtung der Zusammensetzung Al—Ni—Co—V sowie Pt- und Ag-Legierungen erreichen Werte von 40 mJ/cm³. Wie aus Gl. (2/90) ersichtlich ist, wird $V_m \sim 1/(BH)_{\max}$ für eine vorgegebene Luftspaltinduktion B_0 und muß, um den günstigsten Arbeitspunkt im H-B-Diagramm (Abb. 2.29b) zu erreichen, ein großer Entmagnetisierungsfaktor N nach Gl. (2/88), d. h. ein kleiner Wert von l_m/A_m, gewählt werden. Man kommt daher zu gedrungenen Magneten und zu einer völligen Abkehr von der früher benutzten Hufeisenform des Magnetsystems.

Den letzten Schritt stellt der Übergang zum *Kernmagnetsystem* [*2.78*] dar, bei dem der Polkern als quermagnetisierter Permanentmagnet M (Abb. 2.30) ausgebildet ist, dessen magnetische Induktionslinien durch den Weicheisenring R geschlossen werden. Der Vorteil dieser Anordnung liegt in der erheblichen Raumersparnis, der Vermeidung von Streufeldern und in der Abschirmwirkung des Weicheisenrings gegen äußere Magnetfelder.

Das Aufmagnetisieren der Magnetsysteme wird meist durch ein Stoßfeld bewirkt; durch künstliches Altern mittels mechanischer und thermischer Wechselbeanspruchung wird die natürliche Alterungsrate (0,5% in 10 Jahren) merklich herabgesetzt.

Der *magnetische Nebenschluß* hat den Zweck, die Luftspaltinduktion B_0 zu verringern; dies bedingt nach Gl. (2/70) eine Abnahme der Stromempfindlichkeit sowie nach Gl. (2/75) einen mit $B_0{}^2$ kleiner werdenden Grenzwiderstand R_{gr}. Er wird angewandt, um besonders bei spannungsempfindlichen Galvanometern und bei ballistischen Messungen eine optimale Dämpfungs-

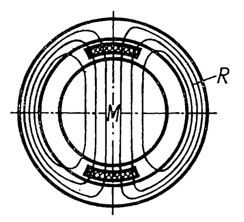


Abb. 2.30 Kernmagnetsystem

anpassung zu erzielen. Hierzu wird ein Teil des magnetischen Flusses über einen Weicheisenschluß mit veränderlichem Luftspalt unter Umgehung der Polflächen abgeleitet. Bei guten Instrumenten ist der magnetische Nebenschluß mit einer ablesbaren Feineinstellung versehen; die erreichbare Feldschwächung beträgt 1 : 4,5.

2.226 Ablesung, Beispiele

Die *Ablesung* empfindlicher Galvanometer wird meist *objektiv* vorgenommen, d. h., ein Leuchtfaden oder ein Strichschatten im hellerleuchteten Feld wird über den Instrumentenspiegel mit einer Linse auf einer Skala abgebildet. Bei der *subjektiven* Ablesung wird durch ein Fernrohr mit Fadenkreuz über den Instrumentenspiegel der Ausschlag an der Skala beobachtet.

Lichtmarkengalvanometer sind Meßinstrumente, bei denen die Beleuchtungs- und Ablesevorrichtung zusammen mit dem Meßwerk in einem tragbaren Gehäuse untergebracht sind. Diese Instrumente besitzen Lichtzeigerlängen zwischen 20 und 50 cm; durch mehrfache Reflexion an fest montierten Spiegelstreifen kann der Lichtzeiger bis auf 150 cm vergrößert werden. Es gibt auch Ausführungen, bei denen das Meßwerk statt eines Spiegels eine kleine durchscheinende Drehskala trägt, die durch eine Projektionsanordnung auf eine feste Marke abgebildet wird [*2.185*].

Zeigergalvanometer mit körperlichem Zeiger, der über einer Spiegelskala schwingt, besitzen eine große Schwingungsdauer und werden meist als ballistische Galvanometer oder Fluxmeter gebraucht. Ein *supraleitendes Drehspulgalvanometer*, bei dem die Drehspule aus einem Supraleiter (z. B. Nb) besteht, wurde von Pippard und Pullan [*2.143*] zur Messung sehr kleiner Thermokräfte bei sehr tiefen Temperaturen konstruiert.

In der folgenden *Tabelle 2.2* sind die wichtigsten Daten verschiedener *Spiegelgalvanometer* zusammengestellt, ohne auf die Fabrikate spezieller Hersteller Bezug zu nehmen.

In *Tabelle 2.3* sind vergleichbare Daten von verschiedenen *Lichtmarkengalvanometern* zusammengestellt.

Tabelle 2.2 Kennzeichen verschiedener Spiegelgalvanometer

Nr.	T_0 s	R_i Ω	R_{agr} Ω	C_i' nA/mm/m	$s_i' \cdot 10^{-8}$	C_u' µV/mm/m	C'_{ub} nVs/mm/m	Magn. Neben-schluß
1	30	50	500	0,16	5,1	0,05	6,5	
2	22	300	6000	0,25	1,55	1,6	55	
3	18	30	52	3,5	0,4	0,29	2,2	
4	12	310	29 k	0,25	2,1	7,5	400	
5	12	60	4,7 k	0,6	1,95	3	150	
6	7	70	0,14···4 k	0,8···3,2	0,4···2	0,7···3,3	22···98	*
7	5	20	310	6	1,67	2	50	
8	4	350	0,15···7 k	0,8···3,2	0,26···1,1	1,6···6,2	—	*
9	3	150	1400	5	0,2	7	—	
10	2,5	330	0,6···10 k	0,9···3,0	0,35···1,2	2,7···9	—	*
11	2	50	500	5	0,63	0,25	—	
12	1,8	200	1500	4	0,42	6,8	—	
13	1,7	60	200	19	0,16	5	—	
14	1,3	55	1···16 k	6···11	0,34···0,7	0,6···1,25	—	*
15	1	1000	15 k	1	1	16	—	

Tabelle 2.3 Daten von Lichtmarkengalvanometern

Nr.	T_0 s	R_i Ω	R_{agr} Ω	C_i' nA/mm/m	s_i'	C_u' µV/mm/m
1	12	15 k	1000 k	0,06	1,25	1,2
2	4	6 k	75 k	1,5	0,14	110
3	4	730	11 k	5	0,12	60
4	4	70	1170	15	0,12	20
5	4	13,5	105	60	0,07	7
6	4	9	9	150	0,04	3
7	3	10 k	90 k	4	0,05	400
8	3	1 k	9 k	5	0,12	50
9	3	150	1400	15	0,1	23
10	3	4	50	200	0,1	6
11	2,5	2500	100 k	0,5	0,8	52
12	2,5	150	5 k	2,6	0,6	14
13	2,5	60	300	20	0,13	3
14	2,5	15	15	100	0,05	3
15	2	1000	15 k	1	0,71	15
16	2	100	1400	25	0,09	38
17	1,3	650	10 k	5	0,22	54
18	1	24	10 k	50	0,13	1,7

Wird eine sehr kleine Einstellzeit des Galvanometers verlangt, wie z.B. beim Aufbau von Regelkreisen oder zum Zwecke der fortlaufenden Registrierung (vgl. § 2.6), so werden schnellschwingende Galvanometer und Registrier-

systeme benutzt. Als *Stiftgalvanometer* werden Registriereinsätze bezeichnet, die, mit Kernmagnetsystemen versehen, sich beliebig in einem gemeinsamen Block zusammensetzen lassen. In *Tabelle 2.4* sind die wichtigsten Daten schnellschwingender Galvanometer sowie von Registriergalvanometern wiedergegeben [*2.73*, *2.101*]. Bei schnellschwingenden Meßsystemen wird oft wie beim Schleifenoszillografen (vgl. § 6.71) die optimale Dämpfung durch eine Ölfüllung erreicht und hängt kaum noch vom Widerstand des äußeren Schließungskreises ab.

Tabelle 2.4 Schnellschwingende Galvanometer und -einsätze

ν_0 Hz	R_i Ω	R_{agr} Ω	C_i' μA/mm/m	C_u' μV/mm/m
1	8	40	0,096	4,6
2,5	75	80	0,16	25
5	330	5000	0,26	1390
10	200	400	0,05	30
14	200	1700	0,1	190
25	970	900	0,48	880
60	970	—	3	290
90	40	160	0,3	60
200	27	80	0,8	86
250	33	90	1,4	175
480	15	100	7,1	820
1000	36	200	10	2360
4000	38	150	250	4700

2.23 Andere Instrumente nach dem Drehspulprinzip

2.231 Differenzgalvanometer [*2.93*]

Bei vielen Drehspulgalvanometern ist die Drehspule mit zwei getrennten Wicklungen ausgerüstet, die durch drei Stromzuführungen an die Meßklemmen geführt sind. Der Vorteil solcher *Doppelspulen* besteht darin, daß in *einem* Instrument hohe Empfindlichkeit sowohl für Spannung als auch für Strom vereinigt werden kann, wenn die Spulen kleinen bzw. großen Innenwiderstand R_i besitzen. Die Anpassung an den aperiodischen Schwingungszustand läßt sich mit Hilfe eines variablen äußeren Widerstandes in der für die Messung nicht benutzten Spule erreichen.

Sind beide auf einem Spulenrähmchen gewickelte Spulen hinsichtlich Widerstand und Windungszahl gleich, spricht man von einem *Differential-* oder *Differenzgalvanometer*. Das Differenzgalvanometer ist vielseitig anwendbar, vor allem für den Vergleich zweier Ströme oder Spannungen (vgl. §§ 2.32 und 9.52). In Abb. 2.31 ist die Anwendung für den Vergleich zweier gleich großer Widerstände R_1 und R_2 dargestellt. Der gemeinsamen Batterie U ist der Widerstand R_a vorgeschaltet, um in der Nähe des Grenzwiderstandes messen zu können. Ist R_{gr} der Grenzwiderstand für beide hintereinandergeschaltete Spulen, so muß wegen der quadratischen Abhängigkeit des R_{gr} von der Windungszahl einer Spule $R_1 = R_2 \geqq R_{gr}/2$ für $R_a = 0$ betragen.

2.232 Kreuzspulinstrument

Das Kreuzspulinstrument besitzt wie das Differenzinstrument (§ 2.231) zwei Spulen, die jedoch nicht in einer Ebene liegen, sondern gegeneinander um den Winkel 2α geneigt sind (vgl. Bd. II, § 1.453). Diese Doppelspule befindet sich, wie in Abb. 2.32 dargestellt ist, in einem inhomogenen Magnetfeld, das von den zylindrisch ausgebohrten Polschuhen N und S und einem Eisenkern K mit elliptischem Querschnitt begrenzt wird. Die Zuleitungen zu den

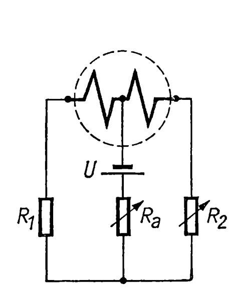


Abb. 2.31 Anwendung des Differentialgalvanometers

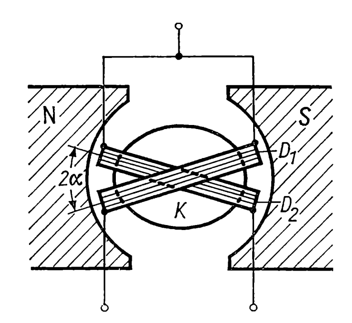


Abb. 2.32 Kreuzspulinstrument

Drehspulen D_1 und D_2 bestehen aus dünnen Bändchen und üben kein merkliches Richtmoment auf die Doppelspule aus. Da im allgemeinen Spulenfläche A und Windungszahl N in beiden Spulen übereinstimmen, findet man mit Gl. (2/68) die Gleichgewichtslage der Spule aus der Beziehung

$$M_1 = B_1 A N i_1 = M_2 = B_2 A N i_2 .$$

Dabei sind i_1 und i_2 die durch D_1 und D_2 fließenden Ströme und B_1 bzw. B_2 die magnetischen Induktionen in den Ebenen von D_1 und D_2. Bezeichnet man mit β den Ausschlag der Doppelspule, so ergibt sich für das Verhältnis der beiden Ströme:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{B_{\alpha+\beta}}{B_{\beta-\alpha}} = \varphi(\beta). \tag{2/91}$$

Der resultierende Ausschlag hängt nur vom Verhältnis der Luftspaltinduktion für die Winkel $\beta + \alpha$ bzw. $\beta - \alpha$ ab und ist daher eine Funktion $\varphi'(i_1/i_2)$ von β. Das Instrument ist um so empfindlicher, je weniger $\varphi(\beta)$ von 1 abweicht, d. h. je homogener B ist.

Bei Verwendung eines *Kernmagnetsystems* (§ 2.225) kann man bei konstantem Luftspalt die magnetische Induktion durch $B(\beta) = B_0 \cos \beta$ ausdrücken und erhält für Gl. (2/91) die Beziehung

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{B_0 \cos(\beta + \alpha)}{B_0 \cos(\beta - \alpha)} = \frac{1 - \tan\beta \tan\alpha}{1 + \tan\beta \tan\alpha} = 1 - 2 \tan\beta \tan\alpha. \tag{2/91a}$$

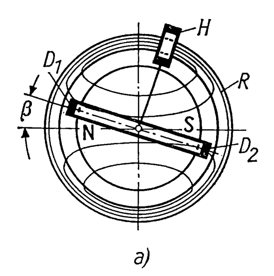
Daraus findet man für den Ausschlag β den Ausdruck

$$\beta = \arctan\left[\frac{i_2 - i_1}{2 i_2 \tan\alpha}\right], \tag{2/92}$$

der besagt, daß β bei konstantem i_1/i_2 um so größer wird, je kleiner α ist. Andrerseits nimmt mit kleiner werdendem α die Einstellzeit T_0 des Systems zu, da das Richtmoment durch die Aufhängung fehlt.

2.223 Das T-Spul-Meßsystem [*2.47*]

Das mit einem Kernmagneten ausgestattete Meßsystem (Abb. 2.33a) besteht aus dem quermagnetisierten Kern $N - S$ mit dem Rückschlußring R aus Weicheisen, wodurch ein konstanter Luftspalt entsteht. Das Meßsystem besitzt zwei gleiche Spulen D_1 und D_2 auf demselben Rähmchen und



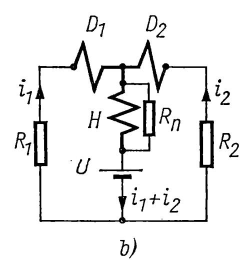


Abb. 2.33 T-Spul-Meßsystem

eine Hilfsspule H, die den Rückschlußring umfaßt und deren Spulenebene senkrecht auf der von $D_1 D_2$ steht. Das Meßgerät ist in der in Abb. 2.33b gezeigten Weise als Quotientenmeßwerk geschaltet: Die beiden zu vergleichenden Widerstände R_1 und R_2, die von den Strömen i_1 und i_2 durchflossen werden, liegen an D_1 und D_2, während die Batterie U an die Hilfsspule H angeschlossen wird. Diese ist durch den Parallelwiderstand R_n überbrückt, wodurch die Empfindlichkeit des Instruments geändert werden kann. Nimmt man wieder eine Luftspaltinduktion $B(\beta) = B_0 \cos\beta$ an, so folgt aus dem Gleichgewicht der auf die Spulenachse wirkenden Momente

$$M = B_0 \sin\beta (i_1 + i_2) K_H + B_0 \cos\beta (i_1 - i_2) K_D = 0$$

der Ausdruck

$$\beta = \text{arc tan} \frac{K_D(i_1 - i_2)}{K_H(i_1 + i_2)} \tag{2/93}$$

für den Ausschlag. Dabei bedeuten K_D bzw. K_H die Instrumentenkonstanten für die Hauptspule und Hilfsspule, welche die jeweilige Windungszahl sowie die Windungsfläche enthalten. Wie aus Gl. (2/93) hervorgeht, kann durch den Nebenschluß R_n die Größe K_H und somit die Empfindlichkeit des Instruments geändert werden.

2.234 Taumelspulgalvanometer [*2.186*]

Das in Abb. 34 dargestellte *Taumelspulmeßwerk* besteht aus einem Topfmagneten M mit ringförmigem Luftspalt, dessen Kern Aussparungen für die Taumelspule hat. Diese setzt sich aus vier quadrantenförmigen Flachspulen D_1 bis D_4 zusammen, deren Enden kreuzweise verbunden und an die vier

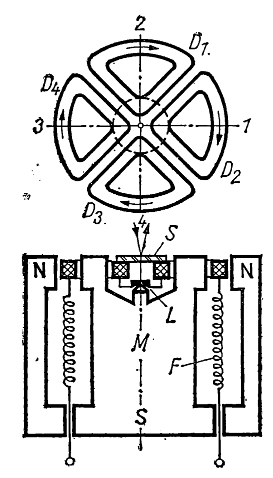


Abb. 2.34 Taumelspulmeßwerk

Zuleitungen F gelegt sind, die gleichzeitig als Rückstellfedern dienen. Der Spulenträger besitzt an der Unterseite einen Lagerstein L und auf der Oberseite einen Spiegel S. Der Lagerstein stützt sich gegen eine gehärtete Lagerspitze ab und wird durch die Zugfedern F in der Nullage gehalten. Legt man an die Doppelspule D_1D_3 eine Spannung, so führt das Meßwerk um die Achse *1—3* eine Drehbewegung aus; wird D_2D_4 vom Strom durchflossen, erfolgt die Drehbewegung um die Achse *2—4*. Ein von S reflektierter Lichtstrahl beschreibt auf dem Bildschirm eine resultierende Bewegung in zwei zueinander senkrechten Koordinaten. Das Meßwerk wird als Koordinatenschreiber angewandt und zur Aufnahme von Hysteresiskurven (vgl. § 12.433), Röhrenkennlinien, Ortskurven elektrischer Netzwerke u. a. benutzt. Hierzu eignen sich auch zwei getrennte Spiegelgalvanometer mit zueinander senkrechten Achsen, deren Spiegel hintereinander vom gleichen Lichtstrahl getroffen werden.

2.24 *Saitengalvanometer*

Beim *Saitengalvanometer* wird die Auslenkung eines sehr dünnen, vom zu messenden Strom durchflossenen Drahtes in einem homogenen, transversalen Magnetfeld beobachtet.

2.241 Theorie des Saitengalvanometers [*2.33*]

In Abb. 2.35 ist das Prinzip des Saitengalvanometers dargestellt. Die vom Strom i durchflossene Saite S von der Länge l wird an den Einspannenden von dem Kräftepaar F gehalten und befindet sich in einem Magnetfeld der In-

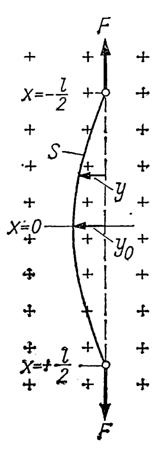


Abb. 2.35 Prinzip des Saitengalvanometers

duktion B. Die resultierende Auslenkung y senkrecht zu B und der X-Koordinate wird durch ein Meßmikroskop beobachtet. Die Differentialgleichung für y ergibt sich aus dem Gleichgewicht folgender Kräfte:

elastische Kraftkomponente $F_e = F \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x$,

Trägheitskraft $F_m = -\varrho A \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}x$,

Reibungskraft $F_b = -b \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x$,

elektromagnetische Kraft $F_i = B i\,\mathrm{d}x$.

Darin bedeuten ϱ und A Dichte bzw. Querschnitt der Saite, b die Dämpfungskonstante und B die magnetische Induktion des Magnetfeldes. Daraus ergibt sich die partielle Differentialgleichung:

$$\varrho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b \frac{\partial y}{\partial t} - F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = B i. \qquad (2/94)$$

Die allgemeinste Lösung der Gl. (2/94) für den Fall, daß die Saite von einem Wechselstrom $i = i_0 e^{j\omega t}$ durchflossen wird, ergibt im stationären Zustand den Ausschlag

$$y = Y(x) e^{j\omega t}, \tag{2/95}$$

wenn $Y(x)$ die *Schwingungsamplitude* am Punkt x der Saite ist. Durch Einsetzen in Gl. (2/94) findet man für Y die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$(-\varrho A \omega^2 + b j \omega) Y - F \frac{d^2 y}{dx^2} = B i_0.$$

Berücksichtigt man die Randbedingung $Y = 0$ für $x = \pm l/2$ und führt die Abkürzung $\alpha = \{(b j \omega - \varrho A \omega^2)/F\}^{1/2}$ ein, so findet man

$$Y = \frac{B i_0}{F \alpha^2} \left(1 - \frac{\cos \alpha x}{\cos \alpha l/2}\right)$$

und für die maximale Auslenkung bei $x = 0$

$$Y_0 = \frac{B i_0}{F \alpha^2} \left(1 - \frac{1}{\cos \alpha l/2}\right).$$

Den meist interessierenden *statischen* Ausschlag für $\omega = 0$, d. h. $\alpha = 0$, findet man durch den Grenzübergang $\omega \to 0$ zu

$$Y_{00} = \frac{B l^2}{8 F} i. \tag{2/96}$$

Die Saite wird dabei in einer Parabel

$$Y(x)_0 = \frac{B i l^2}{8 F} \left(1 - \frac{4 x^2}{l^2}\right)$$

ausgelenkt. Die aus Gl. (2/96) abzuleitende Stromempfindlichkeit

$$S_i' = \frac{B l^2}{8 F} \tag{2/97}$$

ist also der magnetischen Induktion und dem Quadrat der Saitenlänge direkt, der Saitenspannung umgekehrt proportional.

Das *dynamische* Verhalten des Saitengalvanometers ist gekennzeichnet durch das Auftreten von Resonanzstellen, deren Frequenzen im ungedämpften Fall ungerade Vielfache der Grundfrequenz

$$\omega_0 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{F}{\varrho A}} \tag{2/98}$$

sind. Multipliziert man Gl. (2/97) mit ω^2 aus Gl. (2/98), so erhält man:

$$\omega_0^2 S_i' = \frac{\pi B}{8 \varrho A}. \tag{2/99}$$

Der Ausdruck (2/99) ist für ein gegebenes Instrument eine Konstante; hohe Stromempfindlichkeit und kleine Einstellzeit schließen einander aus. Durch Verändern der Saitenspannung F läßt sich die Eigenfrequenz in bestimmten Grenzen ändern. Mit einer optimalen Flüssigkeitsdämpfung kann innerhalb eines Frequenzbereiches $0 < \omega < \omega_0/2$ ein konstanter Amplitudenmaßstab, also eine unverzerrte Aufzeichnung eines Wechselstroms, erreicht werden.

2.242 Ausführung des Saitengalvanometers [*2.46*, *2.104*, *2.117*]

Der Aufbau des Saitengalvanometers ist vereinfacht in Abb. 2.36 dargestellt. Zwischen den parallelen Polschuhen des Permanent- oder Elektromagneten N—S, deren Länge sich über die ganze Saitenlänge erstrecken muß, befindet sich die Saite S. Sie ist am unteren Ende an einem elastischen Bügel B aus versilbertem Quarzglas, am oberen Ende an einer Einstellschraube A

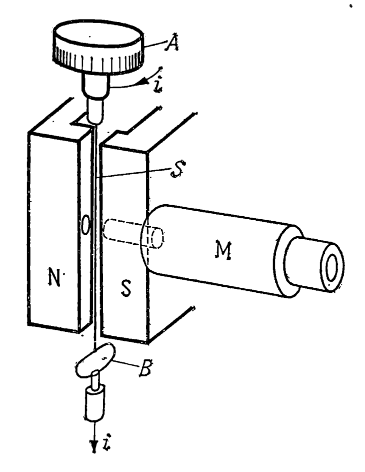


Abb. 2.36 Aufbau eines Saitengalvanometers

zum Verändern der Fadenspannung befestigt. Die Saitenauslenkung wird unter dem Mikroskop M mit einer Vergrößerung von 50···1000 beobachtet. Hierzu ist erforderlich, daß beide Polschuhe in Richtung der Mikroskopachse durchbohrt sind.

Als *Saiten*, die über hohe Zerreißfestigkeit, geringe Dichte und gute elektrische Leitfähigkeit verfügen müssen, werden versilberte *Quarzfäden* von 1···5 μm Durchmesser, Au- und Pt-Drähte sowie solche aus Duraluminium verwendet. Quarzfäden haben neben besten mechanischen Eigenschaften den Nachteil eines hohen elektrischen Widerstandes von etwa 10 kΩ; Pt- und Au-Fäden sind mechanisch weniger vorteilhaft und besitzen auch eine hohe Dichte.

Das Magnetfeld wird meist durch Permanentmagnete erzeugt und besitzt eine magnetische Induktion von 0,5···0,6 T; der Luftspalt beträgt etwa 0,5 mm und muß auf der ganzen Länge sehr genau konstant sein.

Die Stromempfindlichkeit des Saitengalvanometers ist bei kleiner Einstellzeit höher als die eines Drehspulinstruments (vgl. *Tabelle 2.4,* S. 79). In *Tabelle 2.5* sind für verschiedene Eigenschwingungsdauer die Empfindlichkeiten und Stromkonstanten eines Instruments von EDELMANN angegeben, das ein Mikroskop mit 500facher Vergrößerung besitzt.

Tabelle 2.5

Daten eines Edelmann-Saitengalvanometers ($R_i = 10\,\text{k}\Omega$)

T_0(s)	C_i (μA/Skt)	S_i (Skt/μA)	S'_{ib} (Skt/μC)
0,003	0,5	2	—
0,02	0,17	6	—
3,6	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^3$	10^4

Saitengalvanometer haben gegenüber Drehspul- und Drehmagnetgalvanometern den Vorteil, daß Kapazität und Induktivität der Saite sehr klein sind und das Instrument erschütterungsunempfindlich ist. Eigenfrequenz, Empfindlichkeit und Dämpfung können durch Verändern von Saitenspannung und magnetischer Induktion in weiten Grenzen variiert und dem Meßkreis angepaßt werden. Nachteilig sind die geringe mechanische und elektrische Belastbarkeit der Saite und die Nichtlinearität des Ausschlags.

2.25 *Drehmagnetgalvanometer* [*2.81*]

2.251 Theorie des Drehmagnetgalvanometers

Das *Drehmagnetgalvanometer* besteht aus einem kleinen, drehbar aufgehängten oder gelagerten Magnetsystem, das sich im magnetischen Feld einer festen, vom Meßstrom durchflossenen Spule befindet. In Abb. 2.37 ist der Dreh-

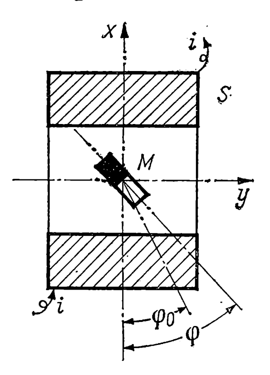


Abb. 2.37 Prinzip des Drehmagnetgalvanometers

magnet M senkrecht zur XY-Ebene gelagert; die Achse der vom Meßstrom i durchflossenen äußeren Spule S soll in der Y-Richtung liegen. Das auf den Drehmagneten ausgeübte Drehmoment M_d hängt von dessen *magnetischem*

Moment M und von der am Ort von M herrschenden, in der XY-Ebene wirkenden magnetischen Feldstärke H_{xy} ab; es gilt

$$M_d = H_{xy} M \sin (H_{xy}, M). \tag{2/100}$$

Das resultierende Magnetfeld H_{xy} setzt sich vektoriell aus dem vom Meßstrom erzeugten Spulenfeld H_i und H_a, der XY-Komponente des äußeren Magnetfeldes, zusammen. Für H_i gilt die Beziehung

$$H_i = Gi,$$

worin G als *Galvanometerfunktion* bezeichnet wird. Die in der XY-Ebene liegende Komponente H_a des *äußeren Magnetfeldes* hängt vom Erdfeld, den Richtmagneten und influenzierten Feldern in der Nähe des Galvanometers ab. Bezeichnet man mit φ_a die Richtung von H_a, so findet man aus Gl. (2/100) die Beziehung

$$M_d = M[H_a \sin (\varphi_a - \varphi) + H_i \cos \varphi]. \tag{2/100a}$$

Für $H_a = 0$ soll sich das Magnetsystem infolge der Richtwirkung des Aufhängefadens in den Winkel φ_0 einstellen; für die Auslenkung $\varphi - \varphi_0$ muß ein *mechanisches Drehmoment*

$$M_m = -D(\varphi - \varphi_0)$$

angelegt werden, wenn D die Direktionskraft des Fadens ist. Da im Gleichgewicht $M_d + M_m = 0$, ergibt sich die wichtige Beziehung

$$D(\varphi - \varphi_0) + MH_a \sin (\varphi - \varphi_0) = MGi \cos \varphi. \tag{2/101}$$

Für $i = 0$ findet man aus Gl. (2/101) die Gleichgewichtslagen des Drehmagneten; übersichtlicher ist es, $\varphi_0 = \varphi_a = 0$ zu setzen, d. h., die Drehmagnetachse bei $i = 0$ und das äußere Magnetfeld H_a senkrecht zur Spulenachse auszurichten.

Tangentenbussole. Kann man die Direktionskraft D vernachlässigen, so folgt aus Gl. (2/101)

$$\tan \varphi = \frac{G}{H_a} i, \tag{2/102}$$

d. h., der Ausschlag wird unabhängig vom magnetischen Moment M des Drehmagneten. Die Anordnung läßt sich zur Messung der Horizontalkomponente H_a des Erdfeldes benutzen (vgl. § 11.2).

2.252 Stromempfindlichkeit und Dämpfung

Für kleine Ausschläge φ des Magnetsystems und unter der Voraussetzung $\varphi_0 = \varphi_a = 0$ folgt aus Gl. (2/101) die Beziehung

$$(D + MH_a)\varphi = MGi,$$

d. h. ein linearer Zusammenhang zwischen Ausschlag φ und Meßstrom i. Durch Vergleich mit Gl. (2/40) läßt sich MG als *dynamische Galvanometer-*

konstante, $D + MH_a$ als *spezifisches Richtmoment* bezeichnen. Daraus leitet sich die *Stromempfindlichkeit* des Drehmagnetgalvanometers zu

$$S_i' = \frac{MG}{D + MH_a} \tag{2/103}$$

ab. Für $D \ll MH_a$ wird $S_i' \approx G/H_a$, d. h. unabhängig vom magnetischen Moment M.

Für $\varphi_0 = \varphi_a = 0$ und kleine Ausschläge lautet die Schwingungsgleichung für das Drehmagnetgalvanometer (vgl. Gl. 2/45):

$$I\ddot{\varphi} + \left(b_0 + \frac{M^2 G^2}{R}\right)\dot{\varphi} + (D + MH_a)\varphi = MGi, \tag{2/104}$$

wenn I das Trägheitsmoment des beweglichen Systems ist. Die Dämpfungskonstante setzt sich aus dem nichtelektrischen Anteil b_0 und der elektrodynamischen Dämpfung des Drehmagneten durch die Spule zusammen, wobei R den Gesamtwiderstand des Schließungskreises bedeutet. Aus Gl. (2/104) ergibt sich die *Schwingungsdauer* T_0 im ungedämpften Zustand zu

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D + MH_a}}. \tag{2/105}$$

2.253 Astasierung

Wie aus Gl. (2/103) hervorgeht, kann die Empfindlichkeit des Drehmagnetsystems erhöht werden, wenn die Richtwirkung des äußeren Magnetfeldes auf das magnetische Moment des Meßsystems stark verkleinert wird. Dies läßt sich durch die *Astasierung* und die *Schirmung* erreichen.

Unter *Astasierung* [*2.25, 2.138*] versteht man die Kompensation des gesamten magnetischen Moments M in bezug auf ein homogenes äußeres Magnetfeld. Dies läßt sich, wie in Abb. 2.38 dargestellt ist, dadurch erreichen, daß auf

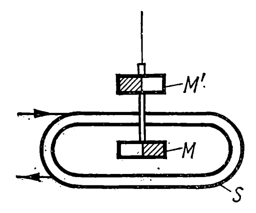


Abb. 2.38 Astasierung

der starren Achse des Drehmagneten M *außerhalb* der Spule S ein zweiter Magnet M' befestigt wird, dessen magnetisches Moment dieselbe Größe wie das von M besitzt, aber entgegengesetzt gerichtet ist. Je vollkommener die Astasierung ist, desto größer wird die Empfindlichkeit, aber auch die Schwingungsdauer des Instruments. Durch zusätzliche Hilfsmagnete können auch die senkrecht zur Achse liegenden Komponenten des resultierenden magnetischen Moments kompensiert werden.

2.254 Schirmung [*2.71*, *2.163*, *2.189*]

Durch eine *magnetische Abschirmung* läßt sich die magnetische Richtkraft MH_a des Außenfeldes so stark verringern, daß diese gegenüber dem Richtmoment D des Aufhängefadens zu vernachlässigen ist. Zu diesem Zweck umgibt man das Meßsystem, wie in Abb. 2.39 schematisch dargestellt ist, mit einem geschlossenen Panzer aus magnetisch sehr weichem Ferromagnetikum. Das Außenfeld H_a durchsetzt nur zu einem kleinen Teil H_i diese Abschirmung. Für einen magnetostatischen Kugelschirm berechnet sich nach KADEN [*2.83*] die Schirmwirkung zu

$$\frac{1}{S} = \frac{H_a}{H_i} = \frac{2}{9}\frac{\mu}{\mu_0}\,[1 - (r_i/r_a)^3]. \qquad (2/106)$$

Dabei bedeuten r_i und r_a Innen- und Außenradius der Hohlkugel sowie μ und μ_0 die magnetischen Feldkonstanten des Panzers bzw. des Vakuums. Starke Schirmwirkung wird mit einer großen Anfangspermeabilität des Ferro-

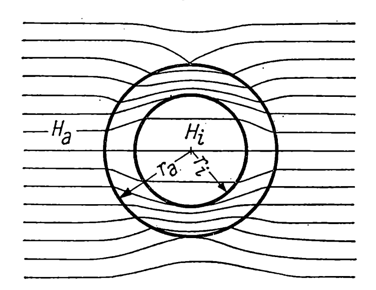


Abb. 2.39 Magnetische Schirmung

magnetikums und bei großer Wanddicke des Panzers erzielt. Gegenüber einem sehr dicken einfachen Panzer bietet eine mehrfache Panzerung mit ineinandergesteckten Schirmen erhebliche Vorteile (Gewicht!). Sind r_{1i}, r_{1a} sowie r_{2i}, r_{2a} die Innen- und Außenradien zweier konzentrischer Kugelschalen, wobei $r_{1a} < r_{2i}$ sein muß, so errechnet sich die Schirmwirkung dieses Doppelpanzers zu

$$\frac{1}{S''} = \frac{1 - (r_{1a}/r_{2i})^3}{S_1 S_2},$$

wenn man die Schirmfaktoren S_1 und S_2 für die Einzelpanzer nach Gl. (2/106) berechnet. Mit geeigneten magnetischen Werkstoffen und Wanddicken von 0,2 cm lassen sich Werte von $1/S'' = 10^6$ erreichen. Näheres s. § 13.94.

2.255 Ablenkspulen

Form und Größe der Ablenkspule bestimmen das vom Meßstrom am Ort des Drehmagneten erzeugte Magnetfeld H_i und damit den Wert der Galvanometerfunktion G. Für eine kreisförmige Windung vom Radius r findet man

im Abstand y vom Kreismittelpunkt für den Strom i das Magnetfeld

$$H_i = \frac{i}{2} \frac{r^2}{(r^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Für den Fall einer viellagigen Spule setzt sich das Axialfeld am Ort des Meßsystems additiv aus den Feldern der Einzelwindungen zusammen. Besteht die Stromspule aus zwei symmetrischen Hälften mit je N Windungen, deren Radien r_i und Abstände von der Symmetrieebene y_i betragen (s. Abb. 2.40), so wird die Galvanometerfunktion

$$G = \sum_{i=1}^{N} \frac{r_i^2}{(r_i^2 + y_i^2)^{3/2}}. \tag{2/107}$$

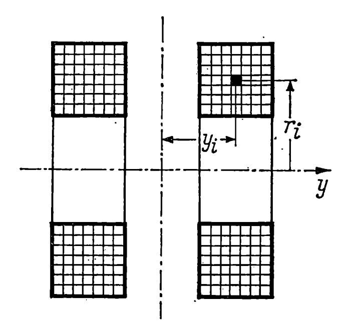


Abb. 2.40 Berechnung der Ablenkspulen

Die Summation über alle Windungen ist nur an einer der Spulenhälften auszuführen. Für einfache Spulengeometrie läßt sich Gl. (2/107) durch das Integral

$$G = \int_A q \frac{r^2}{(r^2 + y^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}y \tag{2/107a}$$

ersetzen, das über den Wicklungsquerschnitt A zu erstrecken ist. Dabei bedeutet q die *Windungsdichte*, d. h. die Windungszahl/cm^2.

Der ohmsche Widerstand der Ablenkspule berechnet sich zu

$$R = 4\pi\varrho \int_A \frac{q^2}{k} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}y, \tag{2/108}$$

wenn ϱ der spezifische Widerstand des Spulendrahtes und k der *Füllfaktor* ist. Vergleicht man die Gln. (2/107) und (2/108), so findet man für konstante Werte von q und k, daß die Größe $G/\sqrt{R}$ unabhängig von der Windungsdichte ist. Wie aus Gl. (2/104) hervorgeht, wird damit auch der elektrodynamische Anteil $M^2 G^2/R$ unabhängig von q, wenn man den Außenwiderstand vernachlässigt.

2.256 Normempfindlichkeit

Zum Vergleich verschiedener Instrumente geht man ähnlich wie in § 2.222 von Gl. (2/103) aus, wobei $M H_a \ll D$ angenommen wird. Berücksichtigt man ferner Gl. (2/105) und bildet

$$\frac{S_i'}{\sqrt{R}\, T_0^2} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{G}{\sqrt{R}} \frac{M}{I}, \tag{2/109}$$

so findet man, daß dieser Ausdruck unabhängig vom Direktionsmoment D und nach § 2.255 die Größe $G/\sqrt{R}$ unabhängig von der Drahtdicke ist. Man bezeichnet den Ausdruck der Gl. (2/109) als *Normempfindlichkeit* und bezieht die Schwingungsdauer T_0 auf 10 s sowie den Innenwiderstand R auf 1 Ω. Man erhält für die Normempfindlichkeit den Ausdruck

$$S_n = S_i' \frac{1}{\sqrt{R}\, T_0^2} \text{ mm/m } \mu\text{A}. \tag{2/109a}$$

Eine hohe Normempfindlichkeit läßt sich daher mit großen Werten von $G/\sqrt{R}$ und M/I erzielen.

2.257 Magnetsystem

Bei den älteren Drehmagnetgalvanometern wurden längsmagnetisierte stabförmige Magnetchen benutzt, deren remanente Magnetisierung im Vergleich zum Trägheitsmoment jedoch klein war. Um ein günstiges Verhältnis M/I (vgl. Gl. (2/109)) zu erzielen, sind quermagnetisierte Systeme mit großer axialer Länge vorteilhafter.

Für einen Magneten der Länge h von elliptischem Querschnitt mit den Halbachsen a und b findet man nach der Magnetisierung in Richtung der a-Achse die scheinbare Remanenz

$$B_s = I + \mu_0 H_e = I(1 - N), \tag{2/110}$$

wenn I die Magnetisierung, N der *Entmagnetisierungsfaktor* und $H_e = -N I/\mu_0$ ist. Die Größe N berechnet sich für einen langen elliptischen Zylinder mit dem Achsenverhältnis $\alpha = a/b$ zu

$$N = \frac{1}{\alpha + 1}. \tag{2/111}$$

Aus den Gln. (2/110) und (2/111) findet man für das Verhältnis B_s/H_e schließlich die einfache Beziehung

$$-\frac{B_s}{H_e} = \frac{1 - N}{N} = \mu_0 \alpha, \tag{2/112}$$

die eine Gerade durch den Nullpunkt der Magnetisierungskurve in Abb. 2.41 darstellt und die Neigung $\tan \beta = \mu_0 \alpha$ besitzt. Der Schnittpunkt mit dem fallenden Ast der Entmagnetisierungskurve liefert die gesuchte Remanenzinduktion B_s. Mit modernen magnetischen Materialien (vgl. *Tabelle 12.12,*

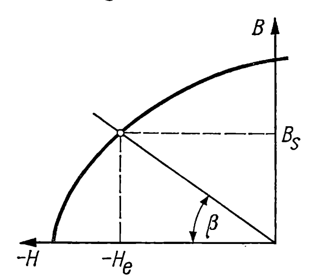


Abb. 2.41 Berechnung der Remanenzinduktion

S. 817) lassen sich auch mit großen Entmagnetisierungsfaktoren hohe Werte von B_s erzielen. Das gesuchte magnetische Moment M des Drehmagneten ergibt sich dann aus

$$M = I V = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) B_s V, \qquad (2/113)$$

wenn V das Volumen des Drehmagneten ist.

2.258 Ausführungsformen

Drehmagnetgalvanometer werden heute relativ selten verwendet, obwohl sie einige Vorteile gegenüber dem Drehspulinstrument aufweisen: *a*) hohe Strom- und Spannungsempfindlichkeit; *b*) Auswechselbarkeit der Ablenkspulen, daher der Meßaufgabe anpaßbar; *c*) keine beweglichen stromführenden Teile; *d*) keine Thermospannungen, da der gesamte Meßkreis aus Kupfer bestehen kann. Nachteilig ist die schwierige Justierung und die Empfindlichkeit gegenüber äußeren Störfeldern. Auch ist die Proportionalität zwischen Ausschlag und Meßstrom nur für kleine Ablenkwinkel gültig.

Das *Panzergalvanometer* nach DUBOIS und RUBENS besitzt eine dreifache Abschirmung aus Weicheisen und zwischen dem inneren und mittleren Panzer zwei verstellbare Richtmagnete. Das Magnetsystem besteht aus 0,25 mm dicken Magnetplättchen, die aufeinandergeschichtet sind.

Das Nernst-Galvanometer ist ein astatisches Instrument ohne äußere Abschirmung mit stabförmigen Magneten, deren Restmomente kompensiert werden.

Von MEYLAN [*2.115*] wird ein Drehmagnetgalvanometer angegeben, dessen astatisches System aus vier dünnen Magnetlamellen aus Co—Cr-Stahl besteht. Jedem Magneten ist ein Spulenpaar aus eisenfreiem Cu zugeordnet, das in Serie oder parallelgeschaltet werden kann.

Ein modernes Panzergalvanometer sehr hoher Empfindlichkeit wird von MEISSNER und DOLL [*2.108*] angegeben. Bei diesem Instrument wird sowohl

die aus *Oerstit 700* bestehende Nadel von elliptischem Querschnitt ($1 \times 0{,}36\ \mathrm{mm}^2$) und 20 mm Länge als auch die magnetische Schirmung optimal ausgelegt, um höchste Empfindlichkeit zu erzielen. Das in Abb. 2.42 dargestellte Instrument zeigt den dreischaligen Panzer S_1, S_2, S_3, der aus 2 mm dicken Einzelschalen mit den Innenradien 1,5, 2,1 und 3,0 cm besteht. Als Material wird eine sehr weiche magnetische Legierung „1040" mit der Anfangspermeabilität $\mu_a = 37000$ verwendet. Die Schirmwirkung wurde experimentell zu $1/S = 3 \cdot 10^8$ gefunden. Der Drehmagnet M von 40 mg Masse ist durch eine dünne Glaskapillare an einem etwa 2,6 µm dicken und 6 cm

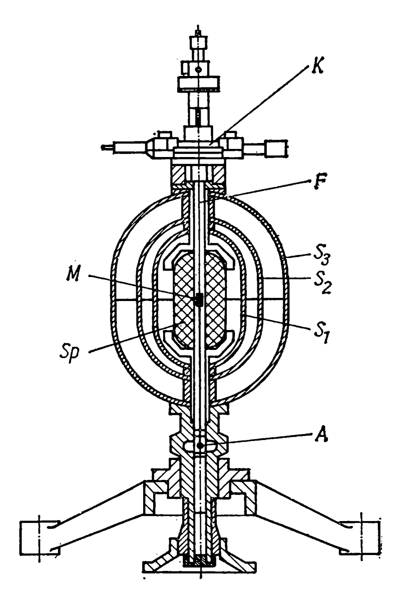


Abb. 2.42 Drehmagnetgalvanometer nach Meissner *und* Doll

langen Quarzfaden F befestigt, der im Kopf K des Instruments justierbar gehalten wird. Der Ablesespiegel A von 4 mm Durchmesser und 50 µm Dicke ist unterhalb von M ebenfalls durch eine Glaskapillare befestigt. Das Gehänge hat eine Eigenschwingungsdauer von 7,2 s. Das Ablenkspulenpaar Sp besitzt einen länglichen, der Nadelform angepaßten Innenraum und ist aus eisenfreiem Cu-Draht von 0,3 mm Durchmesser gewickelt. Mit $R_i = 15\ \Omega$, $R_{\mathrm{agr}} = 165\ \Omega$ erreicht das Instrument eine Stromempfindlichkeit $S_i' = 2{,}2 \times 10^{10}$ mm/m A und eine Spannungsempfindlichkeit $S_u' = 1{,}2 \cdot 10^8$ mm/m V, was einer Normempfindlichkeit $S_n = 11000$ entspricht.

Ein von Coursaget [*2.32*] angegebenes Instrument verwendet als Nadel einen *paramagnetischen* Kristall und erreicht eine Spannungsempfindlichkeit $S_u' = 10^8$ mm/m V.

In *Tabelle 2.6* sind Konstruktionsdaten und Normempfindlichkeit für einige Drehmagnetgalvanometer angegeben.

Tabelle 2.6 Eigenschaften von Drehmagnet-Galvanometern

Bauart	Zahl	Magnet Abmessungen (mm)	Systemmasse mg	Spulenwiderstand Ω	S_n mm/m μA	Panzerung Astasie
DUBOIS-RUBENS	1 × 14	5 × 0,25	200	2 × 5, 100, 1000	80	Eisenpanzerung, nicht astatisch
JAEGER-NERNST	2 × 1	10 × 0,5 × 0,8	1000	2 × 3, 1000	100	astatisch, 2 Komp.-Magneten
BROCA	2 × 1	4 × 2	—	2 × 5, 50, 500	150	kein Panzer, astatisch
DUBOIS-RUBENS	1 × 10	2,5 × 0,15	40	2 × 5, 100, 2000	800	Eisenpanzerung, nicht astatisch
COBLENTZ	2 × 4	2 × 0,1	—	4 × 10	3000	Eisenpanzerung, astatisch
MEISSNER-DOLL	1	1 × 0,36 × 20	46	15	11000	nicht astatisch, Dreifachpanzerung
PASCHEN	2 × 12	1 × 0,3 × 0,1	5	4 × 3, 1000	20000	astatisch, Eisenpanzerung
DOWNING	2 × 5	0,9 × 0,25 × 0,1	4,5	4 × 3, 25	35000	astatisch, Permalloypanzerung

2.26 *Gebrauch des Galvanometers*

2.261 Erschütterungsfreie Aufstellung

Empfindliche Galvanometer benötigen eine erschütterungsvermindernde Aufstellung, die in erster Linie *Translationsbewegungen* in der Horizontalebene sowie *Torsionsschwingungen* um die Meßsystemachse verhindert. Vertikalschwingungen oder kleine Kippbewegungen stören weniger. Die Frequenzen der abzuwehrenden Störungen liegen meist zwischen 10 und 25 Hz. Sie lassen sich durch gedämpfte Schwinger mit sehr kleinen Eigenfrequenzen für die oben hervorgehobenen Bewegungsrichtungen vermindern, deren schwere Masse als Unterlage für das Galvanometer dient. Mathematisch werden solche Aufstellungen analog zu den Bewegungsmessern in Bd. I, § 11.3, beschrieben; über Ausführungsformen von Instrumentenaufstellungen, s. Bd. I, § 11.9.

2.262 Galvanometerablesung

Zur Ablesung von Spiegelgalvanometern sind Ablesevorrichtungen erforderlich, welche die Leistungsfähigkeit des Instruments voll auszunutzen gestatten.

Subjektive Ablesung des Ausschlagswinkels erfolgt durch ein Fernrohr, das auf den Galvanometerspiegel gerichtet und auf eine feststehende Skala ein-

gestellt wird. Für die Messung kleiner Ausschläge ist das Autokollimationsfernrohr bequemer anzuwenden. Beide Methoden sind in Bd. I, § 2.73, näher behandelt.

Objektive Ablesung. Bei der objektiven Ablesung wird eine beleuchtete Markierungsblende über den Instrumentenspiegel mit Hilfe einer Linse auf einer Skala abgebildet. Der Vorteil dieser Methode gegenüber der subjektiven Ablesung besteht darin, daß der Beobachter nicht an die Ablesestellung am Fernrohr gebunden ist, sondern die Skala aus einem größeren Gesichtswinkel beobachten kann.

Für die in Abb. 2.43 schematisch dargestellte Ableseeinrichtung lassen sich die Intensitätsverhältnisse leicht ableiten. Die Glühlampe L beleuchtet über den Kondensor K die Lichtmarkenblende M; die Glühwendel soll etwa in der

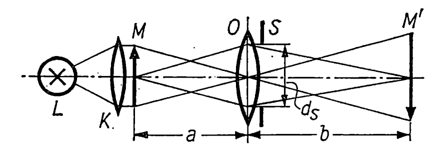


Abb. 2.43 Strahlengang bei der objektiven Ablesung

Ebene der kreisförmigen Blende S, die den Galvanometerspiegel im Strahlengang simuliert, abgebildet werden. Durch das Objektiv O wird M auf der Skala in der Entfernung b als Bild M' abgebildet. Befindet sich die Linse O unmittelbar vor dem Spiegel S, so daß auch das reflektierte Lichtbündel hindurchgeht, so gilt für die Abbildung:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{f},$$

wenn f die Brennweite von O ist. Während der Abbildungsmaßstab $y_{M'}/y_M = b/a$ beträgt, gilt für die Leuchtdichten $I_{M'}/I_M = (a/b)^2$. Eine Vergrößerung des Spiegeldurchmessers ist so lange von Vorteil, bis der durch den Kondensor vergrößert abgebildete Glühfaden von der ganzen Spiegelfläche erfaßt wird. Als Markierungsblende M werden die *Fadenblende* (Strichschatten in hell erleuchtetem Feld) oder eine *Schlitzblende* (heller Strich) verwendet. Als Lichtquelle L wird eine Niedervoltlampe von 10···25 W benutzt, deren enggewickelte kurze Leuchtwendel hohe Flächenhelligkeit besitzen soll.

Die Begrenzung des Spiegels (Durchmesser d_s) verursacht Beugungserscheinungen, wodurch das Bild des Ablesefadens einen verwaschenen Saum der Breite Δx erhält. Ist x_0 der Skalenteilabstand und λ die mittlere Lichtwellenlänge ($\approx$ 0,6 μm), so ergibt sich nach der Beugungstheorie die Beziehung:

$$\Delta x \cdot x_0 \approx b \frac{\lambda}{d_s}.$$

Für $\Delta x \cdot x_0 < 0{,}1$ mm darf die Lichtzeigerlänge b nicht größer als (100···200) d_s sein.

Die häufigste Ableseanordnung, bei der Hin- und Rückweg des Lichtstrahls durch eine waagerechte Ebene gelegt werden, hat den Nachteil eines großen Platzbedarfs. Beleuchtungseinrichtung und Skala sind meist an einem gemeinsamen Stativ befestigt; das abbildende Objektiv befindet sich unmittelbar am Galvanometerfenster (Aufkitten!).

Bei der Ablesevorrichtung nach Abb. 2.44 sind Galvanometer G und Beleuchtungseinrichtung L zusammen mit der geneigten Auflichtskala SK senkrecht übereinander befestigt. Vor dem Galvanometerfenster ist ein Umlenkspiegel S oder ein totalreflektierendes Prisma angebracht, um den Lichtstrahl horizontal abzulenken. Über Lichtmarkengalvanometer s. § 2.226.

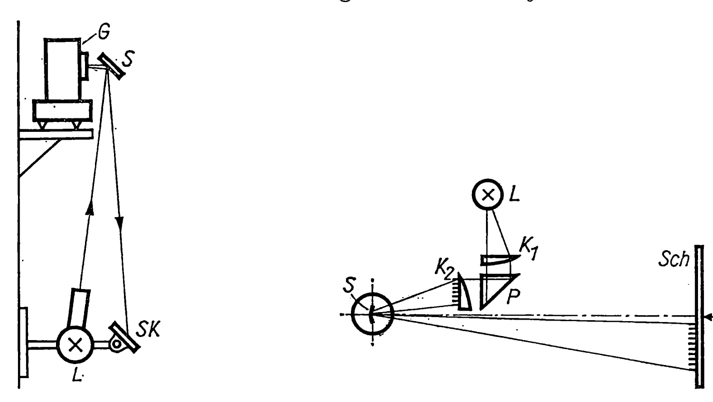


Abb. 2.44 Senkrechte Galvanometerablesung

Abb. 2.45 Skalenprojektion von Zeiss

Der Nachteil aller Ablesevorrichtungen mit beliebigem Skalenabstand ist der, daß die Meßempfindlichkeit nicht konstant ist, sondern vom Skalenabstand abhängt. Dieser Nachteil läßt sich nach einem von der Fa. Zeiss (DRP 509057) stammenden Vorschlag umgehen, wenn anstelle der Lichtmarke die Skala über den Galvanometerspiegel projiziert und der Ausschlag an einer festen Marke abgelesen wird. Bei der in Abb. 2.45 dargestellten Ausführungsform wird die Beleuchtungslampe L über zwei Halbkondensoren K_1, K_2 und das Prisma P auf dem Instrumentenspiegel S abgebildet. In die ebene Rückseite von K_2 ist eine feine bezifferte Skala eingeätzt, die durch den Galvanometerhohlspiegel S auf den Schirm Sch vergrößert projiziert wird.

Durch opto-elektronische Abtastelemente läßt sich der Galvanometerausschlag in eine Impulsfolge umwandeln (Analog-Digital-Wandler), die in einem Impulszähler (s. a. § 7.43) angezeigt oder integriert werden kann. Eine einfache Methode hierzu wird von Rider und Bradley [*2.150*] angegeben.

2.263 Fremdfeldempfindlichkeit

Unter *Fremdfeldempfindlichkeit* eines Galvanometers versteht man die vorübergehende oder dauernde Änderung der Luftspaltinduktion eines Drehspulsystems durch ein äußeres Magnetfeld. Im ersten Fall wird durch ein Außen-

feld das Streufeld des Instruments geschwächt oder verstärkt und damit die Eichempfindlichkeit beeinflußt. Dies wirkt sich um so stärker aus, je kleiner die Induktion im Luftspalt und je breiter dieser ist. Schon ein Nebeneinanderstellen zweier Galvanometer in geringerem Abstand als 20 cm kann die Empfindlichkeit merklich ändern.

Bei starken Außenfeldern kann auch die Remanenz und damit die Eichempfindlichkeit dauernd verändert werden. In beiden Fällen sind moderne Kernmagnetsysteme weniger störanfällig als solche mit offenem magnetischem Kreis.

2.264 Eichung von Galvanometern

Die Eichung eines Galvanometers umfaßt die experimentelle Bestimmung der *Schwingungsdauer* T_0, des *Innenwiderstandes* R_i, des äußeren *Grenzwiderstandes* R_{agr} sowie der *Empfindlichkeit* S_i' bzw. S_u'. Hierzu dient die in Abb. 2.46 dargestellte Schaltung, die das Potentiometer R_p zur Erzeugung einer bekannten Spannung am Normalwiderstand R_n enthält. Der von der Batterie U erzeugte und mit dem Präzisionsamperemeter I gemessene Strom ruft den Spannungsabfall $i_0 R_n$ hervor, der über einen regelbaren Präzisionswiderstand R an das Galvanometer G gelegt wird. Dabei muß R größer als der zu erwartende Grenzwiderstand R_{agr} sein. Potentiometer- und Galvanometerkreis können durch die Schalter S_1 bzw. S_2 sowie den Stromwender S_3 unterbrochen bzw. umgepolt werden.

Schwingungsdauer. Zur Messung der Schwingungsdauer T_0 wird ein Ausschlag von etwa 200 mm/m erzeugt und nach Öffnen von S_2 mittels Stoppuhr die Zeit für 10 Schwingungen gemessen. Bei Instrumenten mit T_0 zwischen 0,5 und 5 s wird der Maximalausschlag, bei höherer Schwingungsdauer der Nulldurchgang beobachtet. Schnellschwingende Systeme werden objektiv mit einer fotografischen Registrierkammer untersucht, wobei gleichzeitig Zeitmarken registriert werden. Genauer ist die Verwendung eines Niederfrequenzsenders (s. § 6.22) für den 1···10-Hz-Bereich, der anstelle von U in der Schaltung der Abb. 2.46 eingeschaltet wird und bei Resonanz ein Lichtband maximaler Breite auf der Skala erzeugt. Um eine scharfe Resonanzeinstellung zu erhalten, muß der Vorwiderstand R um ein bis zwei Größenordnungen größer als R_{agr} sein.

Äußerer Grenzwiderstand. Die Größe von R_{agr} läßt sich mit einiger Genauigkeit dadurch ermitteln, daß der Widerstand R so lange variiert wird, bis gerade kein Überschwingen beim Einschalten zu beobachten ist. Man nähert sich dabei immer von der Seite $R > R_{agr}$, da der Übergang vom Kriechen in den aperiodischen Grenzfall schwierig festzustellen ist. Für große Werte von T_0, wo diese Methode mühsam und ungenau ist, benutzt man nach Gl. (2/53c) den Umstand, daß im aperiodischen Grenzfall die Einstellzeit ziemlich genau der ungedämpften Schwingungsdauer entspricht. Ändert sich nach der Zeit T_0 noch der Ausschlag, so ist der Grenzfall noch nicht erreicht.

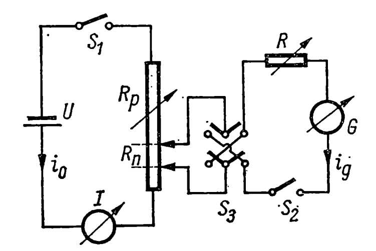
Auch aus der Kenntnis der Dämpfungsgrade α und α_0 (vgl. Gl. 2/47) läßt sich mit Hilfe der Beziehung

$$R_{gr} = R_k \frac{\alpha - \alpha_0}{1 - \alpha_0} \quad \text{mit} \quad R_{agr} = R_{gr} + R_i \tag{2/114}$$

bei bekanntem Kreiswiderstand R_k und den experimentell gefundenen Werten von α und α_0 (bei offenem Galvanometer) der Grenzwiderstand finden.

Galvanometerwiderstand. Bei der direkten Messung des Galvanometerwiderstandes schaltet man das Instrument in einen Zweig einer Wheatstone-Brücke (s. § 9.53), wobei für empfindliche Geräte der Meßstrom höchstens 1 mA betragen sollte. Um ein ruckartiges Anstoßen der Spule zu vermeiden, kann man diese entweder arretieren oder die Vergleichswiderstände der Meßbrücke so klein wählen, daß das Galvanometer stark kriecht.

Ist diese Methode nicht anwendbar, so läßt sich die in Abb. 2.47 dargestellte Schaltung benutzen, bei der das Instrument mit dem Innenwiderstand R_i einen Brückenzweig bildet. Durch den hochohmigen Vorwiderstand R_4 läßt sich der Ausschlag begrenzen. Zunächst wird R_4 so gewählt, daß ein gut ablesbarer Ausschlag zustande kommt. Wird S geschlossen, so ändert sich der Ausschlag und erfordert ein Nachstellen der Brücke, bis der ursprüngliche



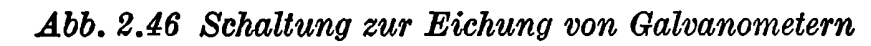


Abb. 2.46 Schaltung zur Eichung von Galvanometern

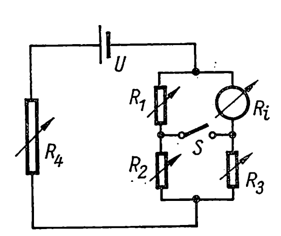


Abb. 2.47 Messung des Innenwiderstandes eines Galvanometers

Strom durch das Instrument fließt. Im abgeglichenen Zustand kann dann der Widerstand R_i aus der Beziehung

$$R_i = \frac{R_1 R_3}{R_2}$$

berechnet werden.

Empfindlichkeitsbestimmung. Die Empfindlichkeit eines Galvanometers wird mit der Eichschaltung nach Abb. 2.46 bestimmt. Als Bezugsinstrument dient entweder das Präzisionsamperemeter I oder ein Voltmeter, mit dem die Spannung U gemessen wird. Ist $R_n \ll R_i + R$, so kann die Eichspannung $i_0 R_n$ unmittelbar aus dem Übersetzungsverhältnis des Spannungsteilers bestimmt werden, d. h.

$$i_0 R_n = \frac{U R_n}{R_p}.$$

Die *Spannungsempfindlichkeit* S_u ergibt sich dann aus

$$S_u = \frac{\varphi}{i_0 R_n} = \varphi \frac{R_p}{U R_n}, \qquad (2/115\,a)$$

wenn φ in mm pro m Skalenentfernung gemessen wird.

Bei der Messung der *Stromempfindlichkeit* S_i gilt für die Stromverzweigung an R_n die Beziehung $i_g = i_0 R_n/(R_i + R)$ und damit die Eichgleichung

$$S_i = \frac{\varphi}{i_g} = \frac{\varphi}{i_0} \frac{R_i + R}{R_n}. \tag{2/115b}$$

Bei der Bestimmung von S_u muß der Grenzfall mittels R eingestellt werden; nach Gl. (2/115a) braucht der Innenwiderstand nicht bekannt zu sein. Bei der Eichung auf Stromempfindlichkeit dagegen muß R_i, aber nicht der Grenzwiderstand bekannt sein. Durch Vergleich der Gln. (2/115a) und (2/115b) folgt unmittelbar:

$$S_i = S_u(R_i + R) = S_u R_{gr},$$

wenn $R = R_{\mathrm{agr}}$ gewählt wird.

Ballistische Empfindlichkeit. Eine spezielle Eichung für ballistische Messungen ist nicht unbedingt erforderlich, da nach den Gln. (2/46) und (2/65) gilt:

$$S'_{ib} = S_i' \frac{2\pi}{T_0} \frac{1}{\beta}. \tag{2/116a}$$

Sind ungedämpfte Schwingungsdauer T_0 und Stromempfindlichkeit S_i' bekannt, so kann für das ungedämpfte Instrument ($\beta = 1$) die Größe S'_{ib} sofort aus Gl. (2/116a) gefunden werden. Im aperiodischen Grenzfall ($\beta = \mathrm{e}$) nimmt S'_{ib} auf den e-ten Teil ab. In ähnlicher Weise findet man für die Spannungsstoßempfindlichkeit nach Gl. (2/83) die Beziehung

$$S'_{ub} = S_i' \frac{2\pi}{T_0} \frac{1}{\beta R_{kr}}, \tag{2/116b}$$

wenn R_{kr} der Gesamtwiderstand des Schließungskreises ist.

Zur direkten Eichung eines ballistischen Galvanometers nach der Definitionsgleichung $S'_{ib} = \varphi_{\max}/\int i \,\mathrm{d}t$ wird die Schaltung nach Abb. 2.48 benutzt. Der Normalkondensator C (vgl. § 10.32) mit Luft- oder Glimmerdielektrikum wird durch die Batterie B über den Spannungsteiler R_p aufgeladen und die Ladespannung U am Voltmeter V gemessen. Durch Umlegen des Schalters S_2 entlädt sich C über das zu eichende Instrument G. Ein variabler Dämpfungswiderstand R_d kann durch den Schalter S_3 zu G parallelgeschaltet werden; S_4 dient zum schnellen Abfangen des ausgeschwungenen Galvanometers.

Für die *ballistische Stromempfindlichkeit* findet man nach Gl. (2/65) im Falle $R_d \to \infty$

$$S'_{ib} = \varphi_{\max}/\int i \,\mathrm{d}t = \varphi_{\max}/CU.$$

Bei eingeschaltetem R_d gelangt nur der Bruchteil $Q_G = CUR_d/(R_d + R_i)$ zum Galvanometer, wenn R_i den Instrumentenwiderstand bedeutet. Damit lautet die allgemeine Eichformel:

$$S'_{ib} = \frac{\varphi_{\max}}{UC}\left(1 + \frac{R_i}{R_d}\right). \tag{2/117}$$

Ein zweites Eichverfahren für S'_{ib} wendet die in Abb. 2.49 wiedergegebene Schaltung an. Durch die Primärspule L_1 eines Normals der Gegeninduktivität wird der bekannte Strom i geschickt, während die Sekundärspule L_2 über den Vorschaltwiderstand R_v an das zu eichende Instrument gelegt wird. Ist L_{12}

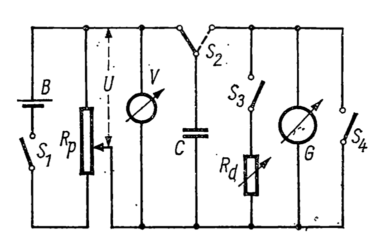




Abb. 2.48 *Eichung des ballistischen Galvanometers*

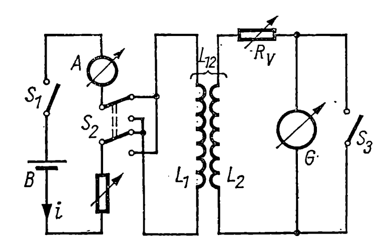


Abb. 2.49 *Eichung eines ballistischen Galvanometers mittels Gegeninduktivität*

die Gegeninduktivität der beiden Spulen, so entsteht beim Umpolen von i der Spannungsstoß $\int u \, dt = 2L_{12}i$. Hiermit wird die *ballistische Spannungsstoßempfindlichkeit* aus dem Maximalausschlag zu

$$S_{ub} = \frac{\varphi_{\max}}{2iL_{12}}$$

für verschiedene Werte von R_v experimentell gefunden. Über die Messung von L_{12} s. § 14.8. Ferner gilt nach Gl. (2/35) die Beziehung

$$S'_{ib} = S'_{ub} \cdot R_{kr},$$

wenn $R_{kr} = R_v + R_i$ gesetzt wird.

Die *fluxmetrische Spannungsstoßempfindlichkeit* S_{uf} nach Gl. (2/67) wird ebenfalls mit Hilfe der in Abb. 2.49 dargestellten Schaltung bestimmt. Um eine sichere Ablesung zu gewährleisten, muß die Zeitkonstante t_k groß genug sein, d. h. $R_{kr} < 0{,}04 R_{agr}$ gewählt werden.

2.265 Empfindlichkeitsregelung [*2.113*]

Ist ein Galvanometer zu empfindlich, so kann durch spezielle Widerstandsschaltungen die Empfindlichkeit stufenweise herabgesetzt werden. Eine Erweiterung des Meßbereichs durch Parallel- und Vorwiderstände, wie sie bei Strom- und Spannungsmessern (s. § 2.31) üblich ist, scheidet aus, da mit der Empfindlichkeit auch die Dämpfung des Instruments verändert wird.

Der Empfindlichkeitsregler nach Ayrton, der in hochohmigen Meßkreisen benutzt wird, besteht aus einer parallel zum Galvanometer G liegenden Widerstandskette $R_1, \ldots, R_9$ (Abb. 2.50). Da in diesem Fall $R_{kr} > R_{gr}$ ist, muß $R_1 + R_2 + \cdots + R_9 = R_{gr}/(\alpha - \alpha_0) - R_i$ sein, um den gewünschten Dämpfungsgrad α zu erzielen. Soll der Meßbereich um den Faktor n erweitert, d. h. die Empfindlichkeit auf $1/n$ reduziert werden, so darf durch das Instrument nur der Bruchteil i/n fließen. Für die einzuschaltenden Widerstände R_v bzw. R_p

in Serie bzw. parallel zu G findet man die Bedingungen:

$$R_p = \frac{R_{gr}}{\alpha - \alpha_0} \frac{1}{n}; \quad R_v = \frac{R_{gr}}{\alpha - \alpha_0} \left(1 - \frac{1}{n}\right) - R_i.$$

In der Schaltung der Abb. 2.50 ändert sich mit den Schalterstellungen allerdings auch der *Eingangswiderstand* des Meßkreises.

Dieser Nachteil wird durch den Volkmann-Regler vermieden, der in Abb. 2.51 dargestellt ist. Ein solcher Regler ist vor allem für niederohmige Meßkreise unerläßlich, wenn die Belastung der Spannungsquelle unabhängig von der Stellung des Stufenschalters sein soll. Er benötigt einen Doppelstufen-

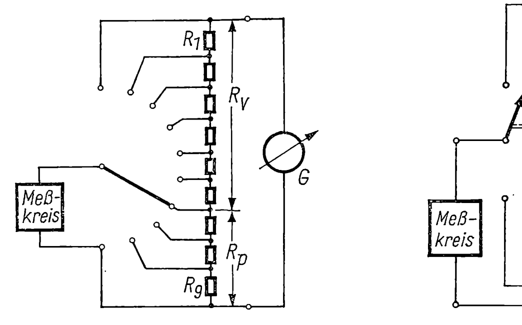


Abb. 2.50 Ayrton-Regler *Abb. 2.51 Volkmann-Regler*

schalter und besteht aus stufenweise einschaltbaren T-Vierpolen. Die Einzelwiderstände R_v, R_n und R_b lassen sich aus folgenden Bedingungen berechnen:

a) bei Herabsetzung der Empfindlichkeit auf $1/n$ muß der Galvanometerstrom $1/n$ des Reglereingangsstroms betragen;

b) Reglereingangswiderstand muß Innenwiderstand R_i entsprechen;

c) Reglerausgangswiderstand soll R_{agr}, d. h., es soll $\alpha = 1$ sein.

Es ergeben sich dann die Beziehungen:

$$R_v = R_{\text{agr}} \frac{n - \gamma}{n + 1}; \quad R_n = R_{\text{agr}} \frac{1 + \gamma}{n - 1/n}; \quad R_b = R_{\text{agr}} \frac{n - 1}{n + 1},$$

wenn $\gamma = R_i/R_{\text{agr}}$ ist.

Beim *Empfindlichkeitsregler für Fluxmeter* [*2.119*] entfallen die Bedingungen *b*) und *c*); er besteht daher, wie in Abb. 2.52 dargestellt ist, nur aus einem Spannungsteiler R_f, der die Meßkreisspannung auf $1/n = R_n/R_f$ herabsetzt. Bei keiner Reglereinstellung darf der äußere Schließungswiderstand des Fluxmeters größer als der Meßkreiswiderstand sein, damit eine große Rückkehrzeit t_k (vgl. Gl. (2/85)) gewährleistet ist.

2.266 Galvanometerauswahl [*2.118*]

Bei der Auswahl eines Galvanometers für eine bestimmte Meßaufgabe ist meist eine minimale *Empfindlichkeit* gefordert, die unabhängig von der Konstruktion des Instruments einen bestimmten Innenwiderstand R_i bedingt.

Außerdem wird man die maximale *Einstellzeit* T_0 vorgeben wollen, die für eine bestimmte Baureihe und für konstante Empfindlichkeit nach Gl. (2/78) proportional zu R ist.

Bei der *Strommessung* wird der in einem Stromkreis *eingeprägte* Strom gemessen, d. h., der von einer Stromquelle abgegebene Strom ist unabhängig vom Widerstand der eingeschalteten Verbraucher. Dies ist z. B. bei der Messung von Ionisationsströmen der Fall. Der Innenwiderstand des Instruments soll dabei nur einen geringen Bruchteil des Meßkreiswiderstandes betragen.

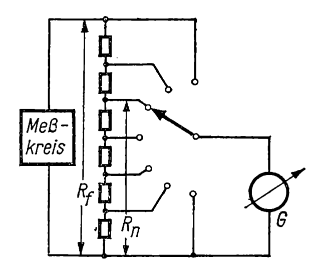


Abb. 2.52 Empfindlichkeitsregler für Fluxmeter

Bei der idealen *Spannungsmessung* soll die Spannungsquelle eine *eingeprägte* Spannung innerhalb des Meßkreises liefern. Die Spannung an den Klemmen eines an die Spannungsquelle angeschlossenen Kreises ist dann unabhängig vom Meßkreiswiderstand. Der Innenwiderstand der Spannungsquelle müßte den Wert Null besitzen, was z. B. angenähert für Thermospannungsmessungen zutrifft. In den meisten praktischen Fällen ist eine ideale Strom- bzw. Spannungsmessung nicht zu verwirklichen; der Meßstrom wird vielmehr vom Widerstand des eingeschalteten Meßgerätes bzw. vom Innenwiderstand der Spannungsquelle abhängen.

Die Frage der *Leistungs-* oder *Widerstandsanpassung* eines Meßgerätes läßt sich anhand von Abb. 2.53 klären. Der Meßkreis besteht aus der Spannungsquelle mit der Spannung E und dem Innenwiderstand R_k und dem Galvanometer G mit dem Innenwiderstand R_i. Der Maximalausschlag wird erhalten, wenn von der Spannungsquelle maximale *Leistung* an das Instrument abgegeben wird. Sie beträgt $N_g = i_g E_g$, wenn der Galvanometerstrom $i_g = E/(R_k + R_i)$ und die am Instrument liegende Spannung $E_g = E R_i/(R_k + R_i)$ sind. Damit wird

$$N_g = \frac{E^2}{R_k} \frac{R_i/R_k}{(1 + R_i/R_k)^2}. \tag{2/118}$$

Die in Abb. 2.53 aufgetragene Größe $N_g R_k/E^2$ als Funktion des Widerstandsverhältnisses R_i/R_k besitzt bei $R_i = R_k$ ein Maximum. Dieser Fall (vgl. § 2.221) wird als *Widerstandsanpassung* bezeichnet und liefert optimale Empfindlichkeit des Instruments in einer Schaltung.

Bei Geräten mit elektrodynamischer Dämpfung (Drehspul- und Drehmagnetgalvanometer) ist eine Widerstandsanpassung oft nicht zu realisieren, da für $R_i = R_k$ die Dämpfungskonstante $\alpha > 1$ wird, d. h. das Instrument sich

kriechend einstellt. Man wählt deshalb besser ein Gerät, dessen *äußerer Grenzwiderstand* $R_{agr} \approx R_k$ ist, und spricht in diesem Fall von *Dämpfungsanpassung*. Besitzt das Instrument einen *magnetischen Nebenschluß*, mit dem die Luftspaltinduktion und damit nach Gl. (2/75) der Grenzwiderstand R_{gr} geändert werden kann, so ist eine Dämpfungsanpassung meist möglich. Im anderen Fall muß sie durch zusätzliche Vor- bzw. Parallelwiderstände, welche die Empfindlichkeit herabsetzen, erzielt werden.

Für $R_k < R_{agr}$ muß zur Dämpfungsanpassung dem Instrument ein Vorwiderstand $R_v = R_{agr} - R_k$ vorgeschaltet werden, durch den die Spannungsempfindlichkeit S_u nicht beeinträchtigt wird. Für $R_k > R_{agr}$ muß dem Galvanometer ein Zusatzwiderstand R_p parallelgeschaltet werden, der sich zu

$$R_p = \frac{R_k R_{agr}}{R_k - R_{agr}}$$

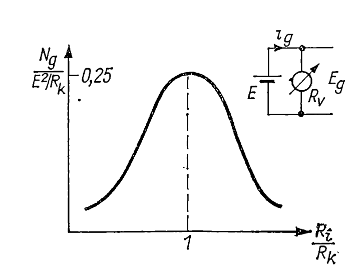


Abb. 2.53 Leistungsanpassung für ein Galvanometer

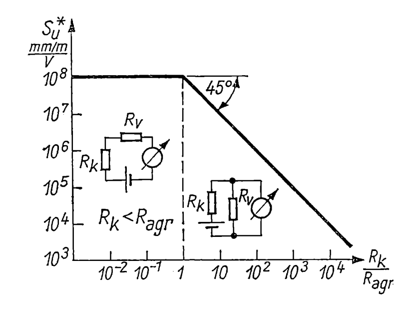


Abb. 2.54 Spannungsempfindlichkeit bei Dämpfungsanpassung

ergibt. Die Spannungsempfindlichkeit S_u^* des Galvanometers *mit* Nebenschluß sinkt mit abnehmendem R_p, d. h. nach obiger Beziehung mit zunehmendem R_k. Es gilt hierfür:

$$S_u^* = S_u \frac{R_{agr}}{R_k}. \tag{2/119}$$

Zur Auswahl eines Galvanometers trägt man nach MOERDER [*2.118*] in doppelt-logarithmischem Maßstab die Spannungsempfindlichkeit S_u^* als Funktion von R_k/R_{agr} unter Berücksichtigung von Gl. (2/119) auf (Abb. 2.54). Im Bereich $R_k/R_{agr} < 1$ ist S_u^* konstant; für $R_k/R_{agr} > 1$ verläuft S_u^* bei gleichen Maßstäben für Abszisse und Ordinate auf einer unter 45° geneigten Geraden.

Die Stromempfindlichkeit eines Instruments hängt vom Meßkreiswiderstand R_k bei Dämpfungsanpassung nur wenig ab, wie sich aus der Beziehung

$$S_i^* = S_i \left(1 + \frac{R_k - R_{agr}}{R_k R_{agr}} R_i\right)^{-1} \tag{2/120}$$

ergibt, die für den Fall $R_k/R_{agr} > 1$ gilt.

2.27 Nachweisgrenzen [*2.3, 2.74, 2.122*]

Die allgemeine Formel (2/70) für die Stromempfindlichkeit des Drehspulgalvanometers läßt keine Grenze für eine Empfindlichkeitssteigerung erkennen. Wie bereits in Bd. I, § 1.54, dargestellt wird, führt ein Galvanometersystem statistische Bewegungen aus, die sich in kleinen Winkelschwankungen um eine Mittellage äußern und kleine Stromschwankungen vortäuschen.

Die Schwankungserscheinungen eines Galvanometersystems lassen sich aus der Differentialgleichung (2/45) ableiten; für das Drehspulsystem findet man mit Hilfe der Gln. (2/69) und (2/73) die Beziehung

$$I\ddot{\varphi} + \left(b_0 + \frac{B^2N^2A^2}{R}\right)\dot{\varphi} + D\varphi = NBAi. \tag{2/45a}$$

Infolge der thermischen Energie $kT/2$ wird das Meßsystem eine Brownsche Bewegung entsprechend

$$\frac{1}{2}\,I\langle\varphi^2\rangle = \frac{1}{2}\,kT$$

ausführen, worin $\langle\varphi^2\rangle$ das mittlere Schwankungsquadrat des Ausschlages darstellt. Diese Schwankung entspricht einer *Stromschwankung*

$$\langle i^2\rangle = \frac{kT}{D}\left(\frac{D}{NAB}\right)^2 \tag{2/121a}$$

bzw. der mittleren quadratischen *Spannungsschwankung*

$$\langle u^2\rangle = \frac{kT}{D}\left(\frac{RD}{NAB}\right)^2. \tag{2/121b}$$

Diese Beziehungen sind bequemer nachzuprüfen, wenn aus Gl. (2/47) die ungedämpfte Schwingungsdauer T_0 eingeführt und das System im Fall der Grenzdämpfung ($\alpha = 1$) betrachtet wird. Da $N^2A^2B^2/R = 2DT_0/2\pi$ ist, ergibt sich

$$\langle u^2\rangle = \frac{\pi kTR}{T_0}. \tag{2/122}$$

Daraus ist ersichtlich, daß die mittlere Spannungsschwankung nur von der Schwingungsdauer T_0 und dem Galvanometerwiderstand R abhängt; bei geringer Dämpfung des Meßsystems führt es periodische Bewegungen, bei großer Dämpfung unregelmäßige, kriechende Schwankungen aus. Die Beziehung (2/122) hat große Ähnlichkeit mit der Nyquist-Formel für die Rauschspannung eines ohmschen Widerstandes; man erhält $\langle u^2\rangle$, wenn man das Rauschspektrum des Widerstandes R mit der Spannungsempfindlichkeit des Galvanometers multipliziert und über alle Frequenzen integriert.

Da bei Zimmertemperatur $kT/2 \approx 2 \cdot 10^{-21}$ Ws ist, findet man für empfindliche Instrumente eine mittlere Schwankung des Lichtzeigers um $\delta\varphi \approx 2 \times 10^{-3}$ mm/m und die Nachweisgrenzen für Strom und Spannung zu

$$\delta i = 1\ \text{pA};$$

$$\delta u = 100\ \text{pV}.$$

2.28 Galvanometerverstärker

Zur Empfindlichkeitssteigerung eines Galvanometers lassen sich die in § 2.262 beschriebenen Methoden der optischen Ablesung verfeinern (z. B. Mehrfachreflexion, Reflexion an gekrümmten Flächen) oder *elektrooptische Verstärker* anwenden (vgl. Bd. I, § 2.74). Bei diesen Galvanometerverstärkern wird der Lichtzeigerausschlag des *Primärgalvanometers* auf einen optisch-elektrischen Verstärker projiziert, an dessen Ausgang ein zweites empfindliches Instrument, das *Sekundärgalvanometer*, als Anzeigegerät liegt.

2.281 Thermorelais

Bei dem von MOLL und BURGER [*2.121*] vorgeschlagenen *Thermorelais* fällt das vom Spiegel des Primärinstruments reflektierte Lichtbündel auf ein Differentialthermoelement (Abb. 2.55), das aus sehr dünnen Bändchen von Konstantan und einem kurzen Mittelstück aus Manganin besteht. Zur Emp-

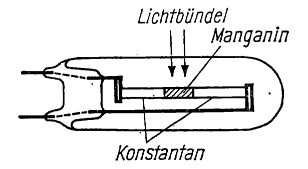


Abb. 2.55 Thermorelais nach MOLL *und* BURGER

findlichkeitssteigerung ist das Thermoelement geschwärzt und befindet sich in einem evakuierten Glaskolben. Trifft das Lichtbündel in der Mitte des Manganinbändchens auf, heben sich die beiden an den Schweißstellen erzeugten Thermokräfte auf. Bei einem Ausschlag des Primärinstruments wird eine der Lötstellen stärker erwärmt und entsteht im angeschlossenen Sekundärgalvanometer ein Ausschlag, der dem Primärausschlag proportional ist. Das Thermoelement reagiert noch auf einen Ausschlag von etwa 1 μm/m; seine Einstellzeit hängt von den Bändchendimensionen ab und liegt in der Größe von 0,2 s. Durch Änderung der Beleuchtungsintensität läßt sich die Relaisempfindlichkeit variieren.

2.282 Fotoelektrische Verstärkung [*2.72, 2.116*]

Bei dieser Methode wird das Thermorelais des § 2.281 durch eine empfindliche *Differential-Fotozelle* bzw. ein *Fotoelement* ersetzt, an deren Ausgang das Sekundärinstrument liegt. Eine erheblich gesteigerte Empfindlichkeit wird

erhalten, wenn über den Spiegel des Primärgalvanometers ein Gitter aus schmalen durchlässigen Spalten auf ein ebensolches mit gleicher „Gitterkonstanten" projiziert wird, hinter dem die Fotozelle angeordnet ist. Die erzielbare Verstärkung beträgt 1000 und mehr.

2.283 Galvanometerverstärker

Nach MERZ [*2.110*] lassen sich die am häufigsten angewandten Galvanometerverstärker mit Rückführung auf die Kompensationsschaltung nach LINDECK-ROTHE (s. auch § 2.33) zurückführen. Das Prinzip dieses Kompensationsverfahrens ist in Abb. 2.56a dargestellt. Der Meßkreis besteht aus dem

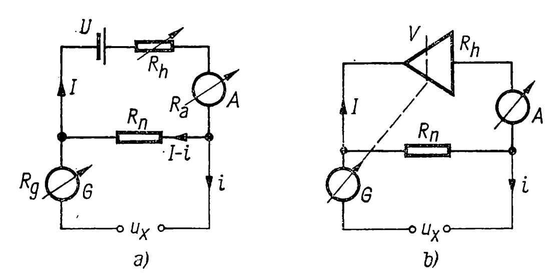


Abb. 2.56 Selbstabgleichender Kompensator

empfindlichen Nullgalvanometer G mit dem Innenwiderstand R_g und dem Normalwiderstand R_n, während im Hilfsstromkreis durch die Batterie mit der EMK U und einem variablen Vorwiderstand R_h der Kompensationsstrom I eingestellt und durch das Sekundärinstrument A gemessen wird. Bei angelegter Meßspannung u_x wird der Galvanometerstrom $i = 0$, wenn

$$u_x = I R_n,$$

d. h. der Hilfswiderstand so lange verstellt wird, bis G stromlos wird. Durch einen Verstärker mit Hilfsstromkreis wird der Ausschlag von G im unabgeglichenen Zustand dazu benutzt, den Hilfsstrom I selbsttätig abzugleichen. In Abb. 2.56b ist dieses Prinzip schematisch dargestellt, wobei V den Verstärker bedeutet, dessen Eingangssignal dem Ausschlag des Galvanometers G proportional ist und dessen Ausgang den Kompensationsstrom I liefert. Für einen großen Verstärkungsfaktor von V wird der Meßstrom sehr klein: die Kompensationsschaltung ermöglicht eine fast *leistungslose Spannungsmessung.*

Bei der in Abb. 2.57a dargestellten *Strom*kompensation liegt im Meßkreis ein Vorwiderstand $R_v \gg R_n$ und das Primärgalvanometer G an den Eingangsklemmen. Durch Verstellen von R_h wird der Kompensationsstrom I so eingeregelt, daß G stromlos wird. Bezeichnet man den zu messenden Strom mit i_x, so gilt nach dem Abgleich die Beziehung

$$i_x = \frac{I R_n}{R_v + R_n}.$$

In Abb. 2.57b ist analog zur Spannungskompensation die regelbare Stromquelle im Hilfsstromkreis durch den Verstärker V ersetzt, der z. B. über einen Fotowiderstand durch G so lange verstellt wird, bis der Kompensationskreis abgeglichen ist. Diese Schaltung wird auch *Saugschaltung* genannt; sie ermöglicht die leistungslose Messung von Strömen, besitzt also den Eingangswiderstand Null.

Zur theoretischen Behandlung der Galvanometerverstärker nach Abb. 2.56b führt man die Größe $\alpha = U/i$ ein, welche die im Verstärker V erzeugte Leerlaufspannung U angibt, wenn das Primärgalvanometer durch den Strom i

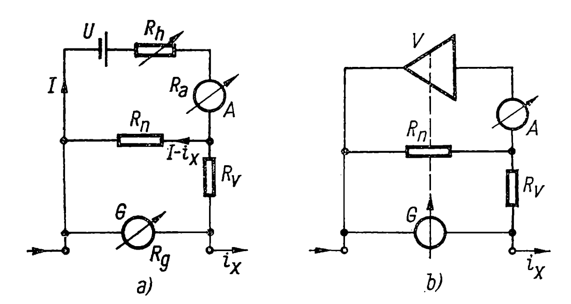


Abb. 2.57 Selbsttätige Stromkompensation

ausgelenkt wird. Für ein Fotoelement, das durch einen am Galvanometerspiegel reflektierten Lichtstrahl belichtet wird, entspricht die Größe α der Fotospannung pro Einheit des Galvanometerstromes. Für den Hilfsstromkreis gilt daher:

$$I(R_a + R_h) + (I - i)R_n = U = i\alpha$$

und mit $i \to 0$

$$M = \frac{I}{i} = \frac{\alpha}{R_n + R_a + R_h}. \tag{2/123}$$

Bezeichnet man mit φ_a bzw. S_{ai} Ausschlag bzw. Stromempfindlichkeit des Sekundärinstruments A, so folgt für die zu messende Spannung:

$$u_x = IR_n = S_{ai}\varphi_a R_n \tag{2/124}$$

und für den Eingangswiderstand des Galvanometerverstärkers:

$$R_i = MR_n = \frac{\alpha R_n}{R_n + R_a + R_h}. \tag{2/125}$$

Der Galvanometerverstärker benutzt also eine starke ***negative Rückkopplung*** des Primärgalvanometers und ist weitgehend von den speziellen Eigenschaften des Galvanometers und des Verstärkers unabhängig.

2.284 Ausgeführte Galvanometerverstärker [*2.131*]

Die Größe M in Gl. (2/123) stellt ein Maß für den Verstärkungsgewinn dar und ist um so größer, je kleiner die im Hilfskreis liegenden Widerstände R_a und R_h im Vergleich zu R_n sind. Die aus der Literatur bekannt gewordenen Geräte unterscheiden sich vor allem in bezug auf die Methoden, den Ausschlag des Primärgalvanometers in Strom- und Spannungsänderungen im Hilfskreis unter Berücksichtigung des Innenwiderstandes R_h umzusetzen.

Bei McDonald [*2.105*] wird die Hilfskreisspannung durch zwei gegeneinander geschaltete Fotoelemente erzeugt, die bei $u_x = 0$ gleich stark beleuchtet sind. Mit normalempfindlichen Galvanometern wird $M = 10^3$ und eine Nachweisgrenze von 10 nV erreicht. Beim Galvanometerverstärker von Muir [*2.123*], der in Abb. 2.58 dargestellt ist, werden anstelle der Fotoelemente CdSe-Fotowiderstände P in einer symmetrischen Brückenschaltung benutzt. Durch den am Spiegel des Primärinstrumentes G_p reflektierten Lichtstrahl

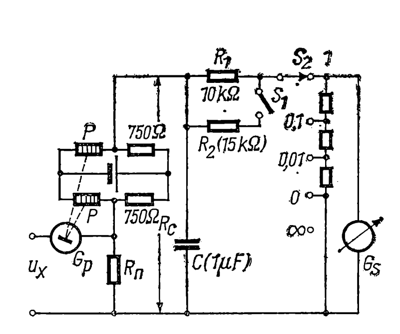


Abb. 2.58 Galvanometerverstärker nach Muir

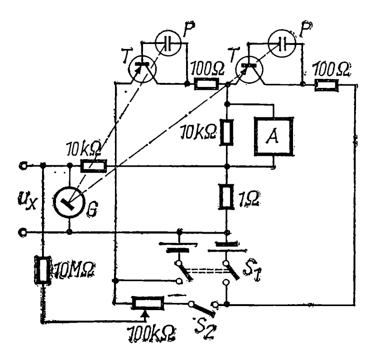


Abb. 2.59 Fotoelektrischer Kompensator

werden die beiden Zellen gegensinnig beleuchtet. Durch die Schalter S_1 und S_2 können die Widerstände R_1 und R_2 in Serie bzw. parallel zum Sekundärinstrument G geschaltet werden. Zur Erhöhung der Stabilität dient der Kondensator C, der eine zeitabhängige Gegenkopplung erzeugt. Mit $R_n = 1\ \Omega$ und $R_c = 10\ \text{k}\Omega$ wird $\alpha = 50\ \text{M}\Omega$. Die Anordnung arbeitet für $R_n = 1 \cdots 10^4\ \Omega$ vollkommen linear und besitzt bei einer Genauigkeit von $\pm$ 0,2% eine Nachweisgrenze von 1 nV.

Der einfach aufzubauende fotoelektrische Kompensator nach Berndt [*2.9*] verwendet CdS-Fotowiderstände P, deren Widerstandsänderung beim Ausschlag des Primärinstruments G durch Transistoren T in Basisschaltung verstärkt wird (Abb. 2.59). Als Sekundärinstrument dient ein Kompensationsschreiber A (s. § 2.63) mit 5 mV Vollausschlag. Die erzielte Stromverstärkung beträgt $M = 10^4$, was mit einem Lichtmarkengalvanometer bereits eine Nachweisgrenze von 10 nV ergibt. Fotowiderstände und Verstärker lassen sich verschiebbar auf der Instrumentenskala montieren.

Ein ähnlicher von Wood und Jongenburger [*2.197*] angegebener Galvanometerverstärker mit einer Differential-Fotozelle und nachgeschalteter

Doppeltriode verwendet als Sekundärinstrument einen 10-mV-Kompensationsschreiber. Er ist mit einer Eichvorrichtung versehen, zeichnet sich durch gute Nullpunktstabilität aus und besitzt eine Empfindlichkeit von 10 nV. Weitere Ausführungen s. [*2.31, 2.58*].

Eine allgemeine Analyse des rückgekoppelten Galvanometerverstärkers gibt SIRS [*2.173*], wobei das Verhalten des Primärgalvanometers bei proportionaler, differentieller und selektiver Rückkopplung untersucht wird.

Von BEATTIE und CONN [*2.4*] wird ein fotoelektrischer Verstärker mit negativer Rückkopplung angegeben, der sich durch hohe Spannungsempfindlichkeit und Stabilität auszeichnet (Abb. 2.60). Der Ausschlag des Primärgalvanometers G wird mit Hilfe einer Autokollimationsanordnung optisch ver-

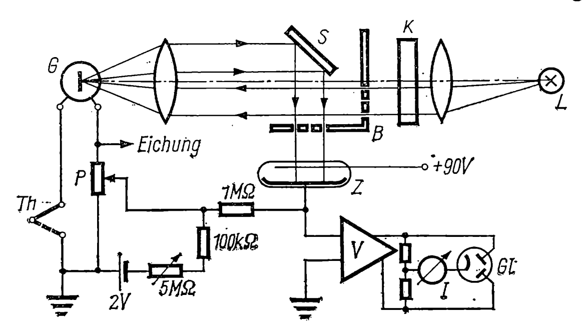


Abb. 2.60 Fotoelektrischer Verstärker nach BEATTIE *und* CONN [*2.4*]

größert (s. § 2.282), wobei das von der Lampe L ausgehende parallele Lichtbündel die Gitterblende B mit je 5 Schlitzen von 1,5 mm Breite durchsetzt und auf die Fotozelle Z fällt. Ein Teil des Fotostromes wird über einen Spannungsteiler dem Potentiometer P im Meßkreis als negative Rückkopplung zugeführt, während der Ruhestrom der Zelle durch eine 2-V-Batterie kompensiert wird. Der Z nachgeschaltete Resonanzverstärker V kann zwischen 0,77 und 3 Hz abgestimmt werden und besitzt einen Verstärkungsfaktor von $10^5 \cdots 10^6$.

Die *Theorie* dieser für empfindliche Strahlungsmessung bestimmten Verstärker geht von Gl. (2/45) aus, die mit Gl. (2/71) die folgende Differentialgleichung ergibt:

$$I\ddot{\varphi} + \left(b_0 + \frac{B^2N^2A^2}{R}\right)\dot{\varphi} + D\varphi = N\,\frac{ABU}{R} = q\,\frac{U}{R}. \qquad (2/45\,\mathrm{a})$$

Da nach Gl. (2/47) $\alpha = \omega_0 b/2D$ und nach Gl. (2/46) $\omega_0 = (D/I)^{1/2}$ ist, wird aus Gl. (2/45a):

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\omega_0} + 2(\alpha_0 + \alpha_m)\dot{\varphi} + \omega_0\varphi = \frac{qU}{RI\omega_0},$$

wenn nach Gl. (2/73) der Grenzwiderstand $R_{\mathrm{agr}} = q^2/2I\omega_0$ und nach Gl. (2/70a) die Spannungsempfindlichkeit $S_u{}' = q/RI\omega_0{}^2$. Führt man nach Gl. (2/123) den Stromverstärkungsfaktor M ein und bezeichnet mit p den Teil

des Sekundärstroms, der in den Primärkreis eingeführt wird, so erhält das gesamte System den Verstärkungsfaktor $M/(1 + pM)$. Hieraus ergibt sich die Stromempfindlichkeit

$$S_i' = \frac{q}{I\omega_0^2} \frac{1}{1 + Mp} \tag{2/126}$$

und eine durch die negative Rückkopplung erhöhte Eigenfrequenz

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + pM}. \tag{2/127}$$

Ein solcher Verstärker besitzt eine sehr große Stabilität, die über Stunden unterhalb von 1% liegt, und eine Empfindlichkeit von 1 nV.

Von HUEY und LANCASTER [*2.77*] wird ein anderer abstimmbarer Galvanometerverstärker hoher Empfindlichkeit beschrieben.

2.3 Spannungs- und Strommessung [*2.146*]

Die Messung von Strom und Spannung bei Gleichstrom nimmt eine besondere Stellung ein, da für diese Meßaufgabe die genauesten Instrumente verfügbar sind und durch Kompensationsmethoden höchste Genauigkeit erzielt werden kann. Da direkt anzeigende Instrumente wegen ihres Energieverbrauchs oft nicht angewandt werden können, müssen empfindliche Messungen mittels Verstärker- und Kompensationsanordnungen durchgeführt werden, auf die in den §§ 2.23—34 näher eingegangen wird.

2.31 Voltmeter [2.44]

Für die Messungen von Gleichspannungen kommt in erster Linie das *Drehspulinstrument* in Betracht, dessen Aufbau und Wirkungsweise aus § 2.22 bekannt ist. Für spezielle Meßaufgaben werden elektrostatische Voltmeter (s. § 2.1) benutzt, vor allem für hohe Spannungen sowie bei der stromlosen Messung kleiner Potentialdifferenzen.

Der Anwendung eines Voltmeters liegt die Schaltung der Abb. 2.61 zugrunde, in der an einem vom Strom I durchflossenen Widerstand R der Spannungsabfall gemessen wird. Das Voltmeter mit dem Innenwiderstand R_i liegt über einen Vorwiderstand R_v an R und wird vom Meßstrom i durchflossen. Aus $(I - i)R - (R_v + R_i)i = 0$ folgt für die gesuchte Spannung:

$$IR = i(R_v + R_i) + iR \tag{2/128}$$

oder

$$U = U' + iR.$$

Die gesuchte Spannung U ist demnach um die Größe iR größer als die am Voltmeter abgelesene Spannung U'. Jede Spannungsmessung ist daher mit einem *Meßfehler*

$$\frac{\Delta U}{U'} = \frac{U - U'}{U'} = \frac{R}{R_v + R_i}$$

behaftet, der sich jedoch nur dann auswirkt, wenn $R > 10^{-3}(R_i + R_v)$. Dieselben Überlegungen gelten auch bei der Messung der Klemmenspannung einer Stromquelle mit dem Innenwiderstand R.

Aus Gl. (2/128) geht hervor, daß durch Verändern des Vorwiderstandes R_v der *Meßbereich* des Instruments beliebig vergrößert werden kann. Soll dem Meßstrom i ein gegenüber dem ursprünglichen Instrument um den Faktor n größerer Meßbereich entsprechen, so muß anstelle des Vorwiderstandes R_v ein solcher der Größe

$$R_{vn} = nR_v + R_i(n-1)$$

vorgeschaltet werden. In gleichem Maße steigt allerdings auch der Energieverbrauch des Instruments, so daß bei sehr hohen Spannungen dieses Meßprinzip nicht mehr anwendbar ist.

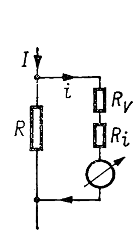


Abb. 2.61 Voltmeterschaltung

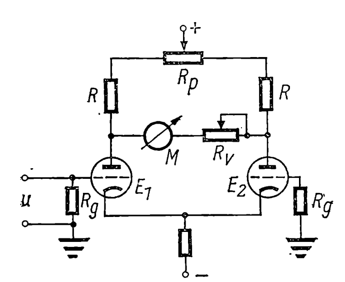


Abb. 2.62 Differenzverstärker

Mit spannungsempfindlichen Galvanometern können noch 1 μV nachgewiesen werden; Zeigerinstrumente mit Bändchenaufhängung besitzen einen kleinsten Meßbereich von etwa 10 mV. Die Meßgenauigkeit der unmittelbaren Spannungsmessung beträgt höchstens 0,1‰.

2.32 *Elektronische Spannungsverstärkung*

Bei hohem Innenwiderstand der zu messenden Spannungsquelle versagt bei sehr kleinen Spannungen die direkte Meßmethode. In diesem Fall wird die elektronische *Gleichspannungsverstärkung* angewandt, deren einfachste Ausführungsform in Abb. 2.62 dargestellt ist. Die Schaltung stellt einen *Differenzverstärker* mit den Elektronenröhren E_1 und E_2 dar, deren Gitter über die Gitterwiderstände R_g an Masse liegen: die Anodenwiderstände R sind gleich. Die zu messende Spannung u am Gitter von E_1 ruft am Mikroamperemeter M mit dem Innenwiderstand R_M die Differenzspannung u_M hervor, für die gilt:

$$\frac{u_M}{u} = \frac{\mu R R_M}{R R_M + R_M R_i + 2 R R_i}, \qquad (2/129)$$

wobei $\mu = S R_i$ (Steilheit S) den Leerlaufverstärkungsfaktor und R_i den Röhreninnenwiderstand bedeuten. Mit Hilfe des Vorwiderstandes R_v im

Instrumentenkreis kann der Verstärkermeßbereich variiert werden. Bei großem R_M (Elektrometer, ESO) vereinfacht sich Gl. (2/129) und ergibt:

$$\frac{u_M}{u} = \frac{\mu R}{R + R_i}.$$

Durch den symmetrischen Aufbau solcher Verstärker werden Veränderungen der Röhrenkennlinien durch Altern größtenteils kompensiert und wird eine befriedigende Nullpunktskonstanz erreicht.

Elektrometerröhren (s. auch § 4.14) sind spezielle, heute nur noch vereinzelt benutzte Bauformen mit sehr hohem Gitterwiderstand ($R_g \geqq 1000\ \mathrm{T\Omega}$) und sehr gutem Vakuum, um mit Gitterströmen von der Größe pA operieren zu können [*2.112*]. Auch speziell geschaltete Pentoden sind hierfür brauchbar [*2.127*]. Für Differenzverstärker gibt es *Doppelelektrometerröhren* (z. B. Ferranti DBM4A), doch liegt auch hiermit die unterste Meßgrenze bei einigen 10 μV.

Gegenkopplung. Von großer Tragweite für den Aufbau stabiler und hochempfindlicher Gleichspannungsverstärker erweist sich das Prinzip der Gegenkopplung [*2.48*], das in Abb. 2.63 für einen Röhrenverstärker angewandt ist. Der Ausgang des Verstärkers V (Innenwiderstand R_e, Steilheit S, Kapazität

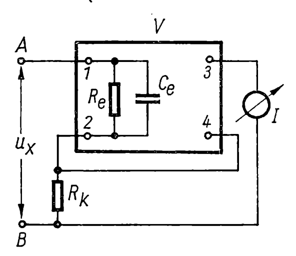


Abb. 2.63 Gegengekoppelter Spannungsverstärker

C_e) wird an den Kopplungswiderstand R_k gelegt, der seinerseits in Serie mit dem Verstärkereingang liegt. Ist I der Ausgangsstrom, so setzt sich die zu messende Spannung wie $u_x = u_{12} + IR_k$ zusammen. Da $I = Su_{12}$ ist, ergibt sich

$$I = \frac{u_x}{R_k(1 + 1/R_k S)},$$

woraus durch Differenzieren die beiden Beziehungen folgen:

$$S' = \frac{\Delta I}{\Delta u_x} = \frac{S}{1 + R_k S}; \tag{2/130}$$

$$R_e' = \frac{\Delta u_x}{\Delta I} = R_e(1 + R_k S). \tag{2/131}$$

Die resultierende Steilheit des gegengekoppelten Verstärkers hängt für hohe Verstärkungsfaktoren nur mehr von R_k ab, während der Eingangswiderstand R_e' außerordentlich hoch werden kann, wenn V durch einen Verstärker mit hohem S und sehr großem R_e realisiert wird. Die Schaltung der Abb. 2.63

kann auch als Kompensator aufgefaßt werden (vgl. § 2.283), in dem die zu messende Spannung u_x bis auf den Rest kompensiert wird, der zur Aussteuerung von V notwendig ist.

Dieses Prinzip ist mit technischen Röhren zum Bau eines hochohmigen Röhrenvoltmeters mit einem Meßbereich von $\pm$ 500 V angewandt worden, wobei $R_e' = 10\ \text{T}\Omega$ und eine Empfindlichkeit von 0,3 μA/V erreicht werden [*2.49*]. Beispiele für Gleichspannungsverstärker mit Elektronenröhren s. [*2.15, 2.24, 2.75, 2.79, 2.85, 2.137*]; sie werden heute nur vereinzelt benutzt und durch die billigeren und empfindlicheren *Operationsverstärker* (s. § 5.3) ersetzt.

Eine Kombination von Elektrometerröhre E und Transistor-Differenzverstärker V stellt die von SPANGLER [*2.177*] angegebene, in Abb. 2.64 dargestellte Schaltung dar. Die Röhre, der Katodenwiderstand R_k und das Potentiometer R_1 bilden eine von der Batterie U_b gespeiste Brücke, deren Differenzspannung $\Delta U = U_1 - U_2$ in V auf $\Delta U \cdot A = U_0$ verstärkt wird, wenn mit A der Verstärkungsfaktor bezeichnet wird. Für kleine Abweichungen vom Brückengleichgewicht gilt die Beziehung:

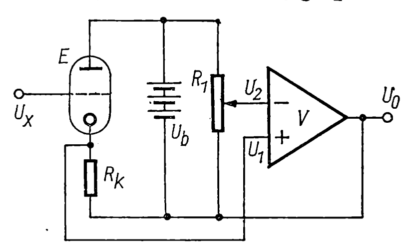


Abb. 2.64 Prinzipschaltung des Elektrometerverstärkers nach SPANGLER

$$\Delta U = \Delta U_0 + \frac{\partial \Delta U}{\partial (U_x - U_0)} = \Delta U_0 + g(U_x - U_0).$$

Mit Hilfe von R_1 läßt sich $\Delta U_0 = 0$ einstellen; für beliebiges U_x ist die Brücke nur dann im Gleichgewicht, wenn $U_x = U_0$ ist. Daraus ergibt sich analog zu Gl. (2/130) die Beziehung $U_0 = U_x/(1 + 1/gA)$ und die entsprechende sehr hohe Eingangsimpedanz. Mit einer Elektrometerröhre des Typs Ratheon CK 5889 wird ein Eingangswiderstand von 1000 TΩ, eine Nullpunktsdrift $< 0{,}5$ mV/h bei einer Rauschspannung von 0,1 mV erzielt. Weitere Ausführungen s. [*2.40*].

Die Anwendung der Gegenkopplung zum Erzielen einer stabilen Gleichspannungsverstärkung bei hoher Eingangsimpedanz wird heute durch die kommerziell hergestellten Operationsverstärker und integrierten Schaltkreise wesentlich erleichtert. Über Transistorverstärker s. [*2.98, 2.159*]; über einen dreistufigen Verstärker mit Si-npn-Planartransistoren im Eingang und 100 MΩ Eingangswiderstand s. [*2.153*].

Zur Einstellung des Arbeitspunktes am Operationsverstärker ist ein bestimmter Ruhestrom erforderlich, der bei üblichen Differenzverstärkern zwischen 5 und 10 μA liegt. Dieser Strom muß bei Gleichspannungskopplung

von der Spannungsquelle geliefert werden. Für hochohmige Spannungsquellen werden Operationsverstärker mit MOS-FET-Eingangsstufen (*Metall-Oxid-Halbleiter-Feldeffekttransistor*) angewandt (s. § 4.267), deren Kennzeichen ein sehr hoher Eingangswiderstand von $10^{10} \cdots 10^{14}\ \Omega$ und ein Eingangsruhestrom von der Größe pA sind. Als Beispiel eines solchen Operationsverstärkers ist in Abb. 2.65 das Schaltbild eines integrierten Verstärkers (Typ µA 740)

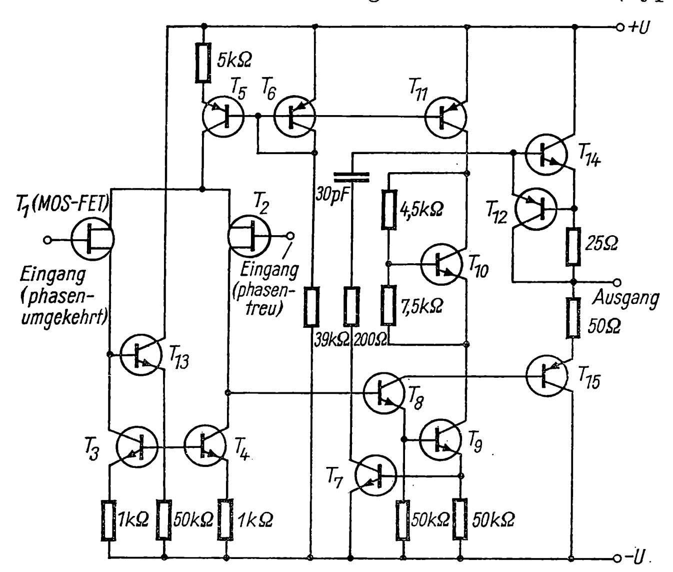


Abb. 2.65 MOS-FET-*Operationsverstärker als integrierter Baustein*

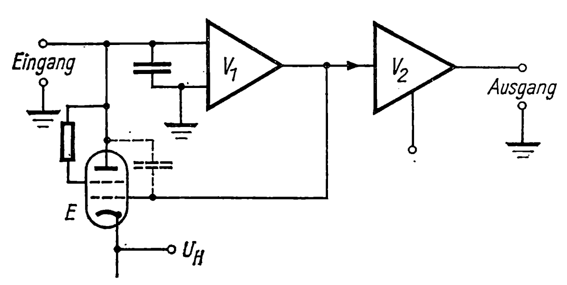


Abb. 2.66 Logarithmisches Elektrometer

wiedergegeben, dessen Komponenten auf ein einziges Si-Einkristallplättchen aufgedampft bzw. eindiffundiert sind. Der Verstärker wird mit $\pm$ 22 V betrieben, besitzt einen Eingangswiderstand von 1 TΩ, einen Ausgangswiderstand von 75 Ω, die Ausgangsleistung von 500 mW und einen Verstärkungsfaktor $A \approx 10^6$.

Als Beispiel für ein hochohmiges Voltmeter ist in Abb. 2.66 das logarithmisch anzeigende Elektrometer nach Chater [*2.27*] dargestellt, dessen Ein-

gangsstufe, eine Subminiaturröhre E, über 5 Zehnerpotenzen einen logarithmischen Zusammenhang von Anodenstrom und Gitterspannung liefert. Der Röhrenausgang liegt über den linearen Operationsverstärker V_1 mit Gegenkopplung des Ausgangssignals an einem zweiten Verstärker V_2 mit Bereichs- und Nullpunktseinstellung.

Auch für technische Voltmeter werden Transistorverstärker zur Erhöhung des Eingangswiderstandes vorgeschaltet, wie das in Abb. 2.67 für ein Vielfachmeßgerät (60 mV bis 600 V Vollausschlag) gezeigt ist. Dem Drehspulmeßwerk ist der aus den Transistoren T_1 und T_2 bestehende Gegentaktverstärker, der durch die 1,5-V-Batterie B gespeist wird, vorgeschaltet. Der

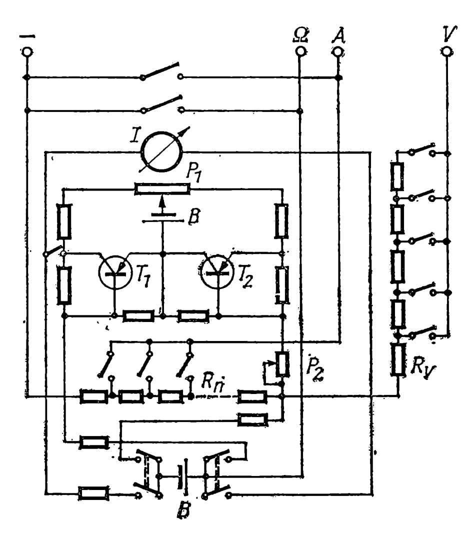


Abb. 2.67 Gleichspannungsvielfachmeßgerät mit Transistorverstärker

elektrische Nullabgleich geschieht durch Symmetrieren der beiden Brückenzweige mit dem Potentiometer P_1; die Spannungs- und Strommeßbereiche (1,5 μA bis 6 A) werden durch Vor- und Nebenschlußwiderstände R_v bzw. R_n eingestellt. Der Widerstand P_2 dient zur Einstellung des Verstärkungsfaktors mit Hilfe einer Hilfsspannung, deren Größe *mit* und ohne Verstärker gemessen wird. Die Meßgenauigkeit beträgt 2,5% des jeweiligen Meßendwertes.

Über weitere Meßverstärker s. [*2.8*, *2.98*] und § 5.264.

2.33 Voltmeter mit Wechselspannungsverstärkung

Bei der direkten Verstärkung sehr kleiner Gleichspannung bei hohem Widerstand der Stromquelle wird die Genauigkeit durch die Nullpunktsdrift und die mittlere Rauschspannung im Eingangskreis begrenzt. Eine schon ältere, aber sehr häufig benutzte Methode besteht darin, die Gleichspannung durch einen *Unterbrecher* periodisch in Impulse umzuformen, deren Spitzenspannung der

Meßspannung entspricht. In einem selektiven Verstärker werden die Impulse so weit verstärkt, daß sie in robusten Instrumenten leicht angezeigt werden können.

2.331 Mechanischer Unterbrecher

Für Spannungsquellen mit niedrigem Innenwiderstand sind Meßkreise mit mechanischen Unterbrecherkontakten geeignet, die in den beiden in Abb. 2.68 dargestellten Schaltungen verwendet werden. Hierbei sind Spannung und Innenwiderstand der zu messenden Spannungsquelle mit u_x bzw. R_i

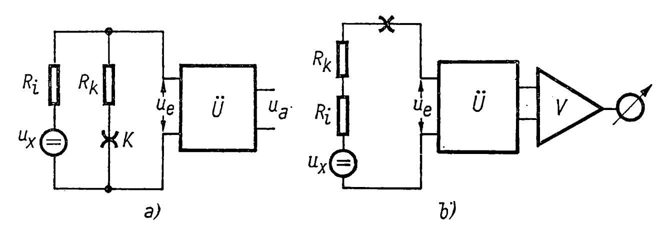


Abb. 2.68 Unterbrecherkreise

sowie der Übergangswiderstand des Unterbrechers K mit R_k bezeichnet. In Abb. 2.68a liegt der Unterbrecher dem Eingang des Anpassungsvierpols $\ddot{U}$ parallel, in Abb. 2.68b liegt er in Serie zur Spannungsquelle. Das Ausgangssignal des Vierpols wird im Verstärker V verstärkt, gleichgerichtet und am Instrument M angezeigt.

Sind Öffnungs- und Kontaktzeit von K gleich lang, so stellt das Eingangssignal an $\ddot{U}$ eine periodische Rechteckspannung dar, deren Maximal- bzw. Minimalspannung für die Schaltung Abb. 2.68a

$$u_e'' = \frac{R_k}{R_i + R_ü} u_x - \frac{R_i}{R_i + R_ü} u_s; \quad u_e'' = \frac{R_ü}{R_i + R_ü} u_x$$

und für die Serienschaltung (Abb. 2.68b)

$$u_e' = \frac{u_x + u_s}{R_i + R_ü} R_ü; \quad u_d'' = 0$$

betragen. Dabei wird R_k gegenüber dem Quellenwiderstand R_i und der Eingangsimpedanz $R_ü$ des Übertragers vernachlässigt. Die Störspannung u_s, die z. B. durch Thermospannungen im Primärkreis hervorgerufen werden kann, wirkt sich — wie ein Vergleich der Beziehungen zeigt — in beiden Schaltungen verschieden aus. Nach ROTHGORDT [*2.154*] können Thermospannungen kompensiert werden; die durch das Kontaktspiel hervorgerufenen zusätzlichen periodischen Störspannungen hängen vom Kontaktdruck u. a. ab.

KROEBEL [*2.92*] verwendet als Unterbrecher ein mechanisches Relais, das aus einem piezoelektrischen *Biegeschwinger* mit Edelmetallkontakten besteht. Der Unterbrecher erzeugt im Gegensatz zu den elektromagnetischen Typen keine magnetischen Streufelder und kann für hohe Unterbrecher-

frequenzen bis zu 20 kHz benutzt werden. In der in Abb. 2.69 gezeigten Prinzipschaltung liegt parallel zur Meßspannung u_x der Unterbrecher K, der von einem NF-Oszillator G angetrieben wird. Der Unterbrecherkreis ist kapazitiv mit dem Überträger $Ü$ gekoppelt, dessen hoch übersetztes Ausgangssignal in der Vorstufe E_1 und im Resonanzverstärker V mit der Bandbreite 10 Hz verstärkt wird. Die Endstufe E_2 ist als Katodenverstärker mit dem Lastwiderstand R_k geschaltet. Bei 10 Ω Innenwiderstand der Spannungsquelle beträgt die Nachweisempfindlichkeit 1,5 nV, die Drift $\pm$ 5 μV/d.

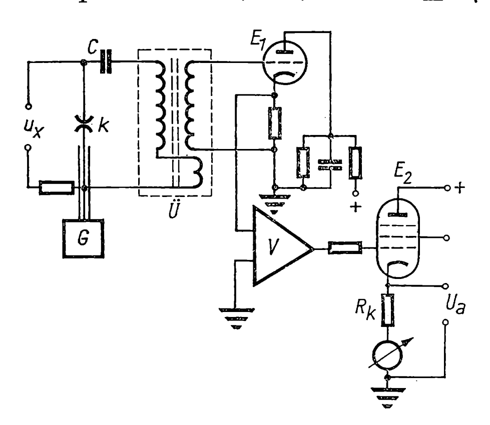


Abb. 2.69 Unterbrecherverstärker nach Kroebel *[2.92]*

Nach Rust und Endesfelder *[2.157]* ist auch ein *Kohlemikrofon*, das mit konstanter Frequenz beschallt wird, als „Unterbrecher" für eine Nachweisempfindlichkeit von 1 μV geeignet. Von Bahr et al. [*2.2*] wird ein Unterbrecherverstärker für Ströme von der Größe pA beschrieben; über Transistorunterbrecher s. § 2.355.

2.332 Supraleitende Gleichspannungsverstärker

Für die Messung in normalleitenden und supraleitenden Kreisen bei Temperaturen im He-Bereich können entsprechende Unterbrecher aus *supraleitendem* Material angewandt werden, deren Widerstand sich zwischen Null (*sl*) und dem Restwiderstand (*nl*) ändert, der allerdings nur einige mΩ beträgt. Zur periodischen Unterbrechnung der elektrischen Stromleitung wird von der magnetischen Schwellenwertkurve der Abb. 4.59 ausgegangen und die Grenze zwischen Normalleitung und Supraleitung entweder durch Änderungen der Temperatur oder des magnetischen Feldes periodisch überschritten.

Die Prinzipschaltung des von Templeton [*2.183*] beschriebenen „Modulators" in Abb. 2.70 zeigt den primären Meßkreis, der aus der Meßprobe R, der Primärspule des Transformators T_1 und dem Modulator, einem zwischen den Polschuhen des Wechselstrommagneten M ausgespannten Ta-Band A von 50 μm Durchmesser und einigen Zentimetern Länge, besteht. Primärkreis und Magnet befinden sich in einem He-Kryostaten bei 4,2 K. Der Ta-Draht,

dessen Sprungpunkt nach *Tabelle 12.3* für $H = 0$ bei 4,4 K liegt, wird in einem von M erzeugten Feld von $H \approx 6$ cT normalleitend, wobei der Widerstand auf 0,1 Ω anwächst. Der Vormagnetisierungsstrom wird von der Batterie B geliefert; der Modulationsstrom wird von einem 800-Hz-Oszillator O über den Transformator T_2 auf die Magnetwicklung übertragen. Die durch die Modulation des Primärstroms auf der Sekundärseite von T_1 erzeugte Wechselspannung wird im Verstärker V verstärkt und über das 800-Hz-Filter F dem phasenempfindlichen Detektor D zugeführt, wo sie gleichgerichtet und im Galvanometer G angezeigt wird. Besser als diese Ausschlagsmethode ist die Serienschaltung eines zweiten bekannten stromdurchflossenen Widerstandes zur Kompensation der gesuchten Spannung und ein Nullabgleich.

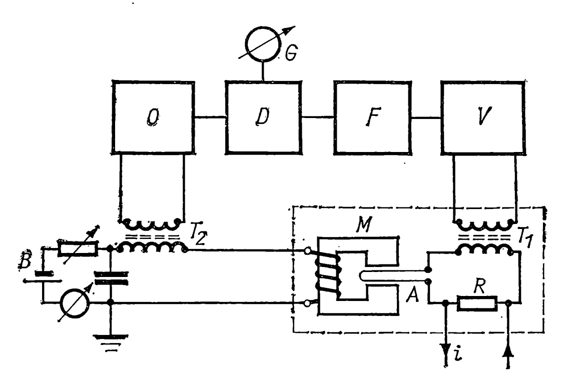


Abb. 2.70 Supraleitender Gleichspannungsverstärker nach TEMPLETON

Der Kern des Übertragers T_1 besteht aus Mu-Metall und besitzt Wicklungen aus Pb-Draht. Die Nachweisempfindlichkeit liegt bei 10 pV, wobei die Rauschspannung der 1. Verstärkerstufe höchstens 1 pV betragen darf.

Der ebenfalls von TEMPLETON [*2.184*] angegebene supraleitende Umschalter (Abb. 2.71) besteht aus 4 kleinen Spulen aus Ta-Draht ($R_0 \equiv 1$ Ω) in der dargestellten Schaltung, die paarweise durch ein magnetisches Wechselfeld von etwa 6 cT periodisch normalleitend gemacht werden. Die zu messende Spannung E wird abwechselnd über die Spülchen R_1 bzw. R_2 im supraleitenden Zustand mit wechselnder Polarität an den Verstärker V gelegt. Eine ähnliche Anordnung wird von KACHINSKI [*2.82*] mit 0,1 nV Nachweisgrenze und 0,1 mΩ Eingangsimpedanz angegeben.

Beim *supraleitenden Gleichspannungsverstärker* nach GYGAX [*2.64*], der aus einer Brückenschaltung nach Abb. 2.72 besteht, wird die Abhängigkeit des Widerstandes eines supraleitenden Drahtes $R'R''$ vom Meßstrom und von einem äußeren Magnetfeld im Zwischenzustand benutzt. Der zur Meßspannung E proportionale Strom i_1 induziert im supraleitenden Transformator T_1 (s. § 15.4) den Sekundärstrom i_2 in der Primärwicklung des zweiten supraleitenden Transformators T_2. T_2 besteht aus zwei gleichen, aber gegensinnig gewickelten Spulen, in deren Magnetfeld sich die supraleitenden Drähte R' und R'' aus In—Pb befinden. Ein zusätzliches Magnetfeld, das gleichsinnig

auf $R'R''$ wirkt und vom Strom i_3 in der Spule L_2 erzeugt wird, dient zur Diskriminierung der von i_2 in den Spulenhälften L_1' und L_1'' erzeugten Magnetfelder. Für $E \equiv 0$ wird $R' = R''$ und ist die angeschlossene Brücke abgeglichen. Für $E \neq 0$ liegt R' in einem Feld $H' = -f i_2 + g i_3$ und die andere Drahthälfte im Feld $H'' = f i_2 + g i_3$, wobei f und g Faktoren sind, die von der Spulengeometrie und den supraleitenden Eigenschaften des „Schaltdrahtes" abhängen. Der Strom im Galvanometer G wird $i = k(R' - R'') = f' i_2 = F'E$, d. h. der gesuchten Spannung proportional. Das Verfahren liefert eine Spannungsverstärkung von 1000 und eine Nullpunktsdrift von 1 nV.

In einer anderen Ausführungsform wird von GYGAX [*2.65*] der magnetische Modulator, der störende Streufelder erzeugt, durch einen *supraleitenden thermischen Chopper* ersetzt, bei dem der aktive Supraleiter periodisch be-

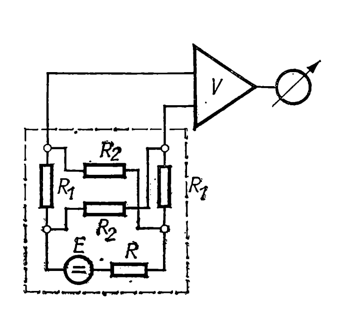


Abb. 2.71 Supraleitender Umschalter nach TEMPLETON [*2.184*]

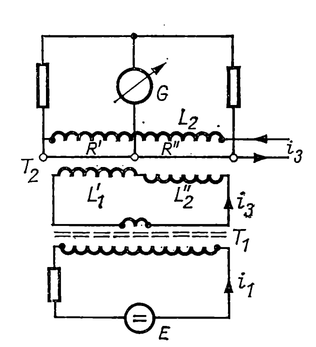


Abb. 2.72 Supraleitender Verstärker

heizt und in den normalleitenden Zustand versetzt wird. Der Chopper besteht aus einem Pb—In-Draht von 0,3 mm Durchmesser, der mit einem He-Bad über einen konstanten thermischen Widerstand auf gleicher Temperatur gehalten wird und durch eine bifilare Heizwicklung aus 50 μm dickem Konstantandraht mit 10 mW bei 85 Hz beheizt wird. Die im Primärkreis erzeugten Stromänderungen werden über einen supraleitenden Transformator einem Verstärker zugeführt, womit eine Empfindlichkeit von 10 pV erreicht werden kann [*2.188*].

Zur Messung sehr kleiner Spannungen von der Größe 10 pV in Tiefsttemperatursystemen, wie z. B. Thermospannungen oder elektrischen Widerständen von Metallen, wird von ERDMAN [*2.51a*] ein parametrischer Verstärker angegeben, der den supraleitenden Modulator nach RIES und SATTERTHWAITE [*2.150a*] benutzt. Der Modulator besteht aus zwei supraleitenden Nb-Spulenpaaren, von denen eines durch eine Stimmgabel mit 1,2 kHz axial periodisch bewegt wird und Änderungen des verketteten magnetischen Flusses in der Spulenanordnung erzeugt. Nach Verstärkung, Demodulation und Gleichrichtung im Endverstärker lassen sich noch Spannungen von 10 pV bei einer Zeitkonstanten von 1,5 s nachweisen. Die Größe der Rausch- und Vibrations-

spannungen liegt unterhalb von 1 pV bei einem Quellenwiderstand im Verstärkereingang von 0···0,3 μΩ.

Meßeingang und Modulator befinden sich auf He-Temperatur und sind über abgeschirmte Leitungen mit dem Verstärker- und Nachweisteil verbunden. Mit einer fest eingebauten Konstantstromquelle lassen sich Widerstände zwischen 30 pΩ und 0,3 mΩ bei einem Maximalstrom von nur 100 mA bestimmen.

2.333 Feldplattenmodulator

Zur Umwandlung von Gleich- in Wechselspannung ist nach HIERONYMUS und WEISS [*2.69*] auch ein von einem Wechselmagnetfeld gesteuerter Hall-Widerstand aus z. B. InSb geeignet, den man auch als ***Feldplatte*** bezeichnet. Nach Abb. 2.73 wird die zu messende Spannung E über die Feldplatte R_F an den Verstärker V gelegt und R_F in das Wechselfeld des Ferritkernmagneten

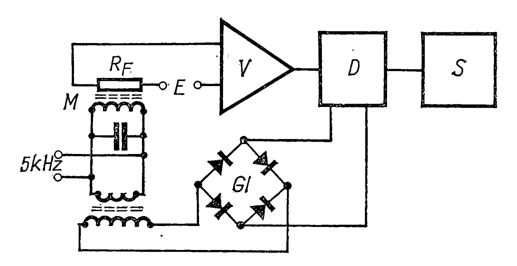


Abb. 2.73 In-Sb-Modulator

M gebracht, der mit 5 kHz erregt wird. Die eigentliche Feldplatte besteht aus einem haarnadelförmigen Leiter von 20 μm Dicke aus eigenleitendem InSb auf einem Ferritträger von 3×1 mm². Zwei solcher Einheiten sind symmetrisch und isoliert aufeinandergeklebt, aber elektrisch in Serie geschaltet, um den transversalen Effekt des Magnetfeldes zu eliminieren. Wie in § 11.73 näher erläutert ist, wird $R_F \sim H^2$ und wächst in einem Feld von 0,3 T um den Faktor 3. Aus diesem Grund erhält der Verstärker V ein 10-kHz-Signal, das in einem Demodulator D durch Phasenvergleich in eine zu E proportionale Gleichspannung umgewandelt wird. Zur Frequenzverdopplung für die Referenzspannung dient der Brückengleichrichter *Gl*. Bei einem Eingangswiderstand des Modulators von 500 Ω betragen die Nullpunktsschwankungen nur 0,1 nV in 10 h.

2.334 Kapazitiver Modulator

Große Verbreitung hat die Verwendung eines *dynamischen Kondensators* [*2.132, 2.160*] zur Messung kleiner Spannungen mit hohem Eingangswiderstand gefunden. Ein Kondensator mit der Kapazität C und der Ladung Q wird seine Spannung $U = Q/C$ periodisch um $\mathrm{d}U = -U\,\mathrm{d}C/C$ ändern, wenn sich C um $\mathrm{d}C$ ändert. In Abb. 2.74 ist die veränderliche Kapazität C_e' parallel zu C_a und in Serie mit dem Potentiometer R geschaltet, an dem die

Spannung U abgegriffen wird. Für $U = 0$ verteilt sich die der Kapazität C_a zugeführte Ladung entsprechend

$$Q_e = \frac{C_e'}{C_e' + C_a} Q \tag{2/132}$$

und ergibt am Eingang des Verstärkers V die Spannung $Q/(C_e' + C_a)$. Für $U \neq 0$ und $Q = 0$ andrerseits erhält C_e' die Ladung

$$Q' = \frac{C_e' C_a}{C_e' + C_a} U. \tag{2/133}$$

Soll das Eingangssignal an V verschwinden, so folgt aus

$$Q' + Q_e = \frac{C_e'}{C_e' + C_a} (U C_a + Q) = 0$$

die einfache Beziehung:

$$U = -\frac{Q}{C_a},$$

wonach bei Nullabgleich und bekanntem C_a die gesuchte Ladung sich aus U berechnet und von C_e' unabhängig ist.

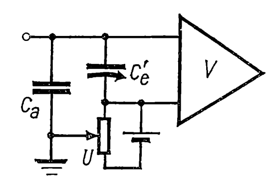


Abb. 2.74 Prinzip des Elektrometers mit dynamischem Kondensator

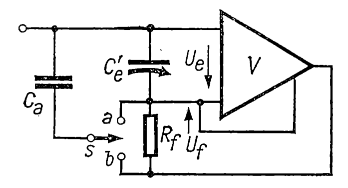


Abb. 2.75 Dynamisches Elektrometer mit negativer Rückkopplung

Wie in Abb. 2.75 angedeutet, kann durch eine negative Rückkopplung der Abgleich selbsttätig erfolgen, wobei das Potentiometer in Abb. 2.74 durch den Widerstand R_f ersetzt wird, der vom Ausgangsstrom des Verstärkers V durchflossen wird. Liegt der Schalter S an a und wird C_e' aufgeladen, so tritt die Gleichspannung U_e und das Wechselspannungssignal $U_e \, \mathrm{d}C_e'/C_e'$ auf. Das in V verstärkte Signal erzeugt in R_f den Spannungsabfall U_f. In der Schalterstellung b verteilt sich eine zugeführte Ladung Q nach den Gln. (2/132) und (2/133) und liefert

$$Q_{ef} = \frac{C_e' C_a}{C_e' + C_a} U_f,$$

woraus sich die Gesamtladung auf C_e' zu

$$Q_e = Q_{eQ} + Q_{ef} = \frac{C_e'(Q + U_f C_a)}{C_e' + C_a} \tag{2/134}$$

berechnet. Ist A der Verstärkungsfaktor von V, so wird $U_f = -A\,U_e = -A\,Q_e/C_e'$, und man findet mit Gl. (2/134) die Beziehung

$$U_f = -\frac{A}{A+1}\,\frac{Q}{C_a + C_e'/(1+A)}. \tag{2/135}$$

Der Spannungsabfall U_f ist demnach eine lineare Funktion von Q und kann direkt an R_f gemessen werden. Weiterhin folgt mit Hilfe von Gl. (2/134) für die Einzelladungen

$$Q_a = Q\,\frac{C_a}{C_a + C_e'/(1+A)} \quad \text{und} \quad Q_e = Q\,\frac{C_e'/(1+A)}{C_a + C_e'/(1+A)}, \tag{2/136}$$

d. h. eine Verteilung der Ladung Q nicht auf C_a und C_e', sondern wegen der Rückkopplung auf die Kapazitäten C_a und $C_e'/(1+A)$. Damit wird auch die effektive Eingangskapazität $C_e = C_a + C_e'/(1+A)$.

Die Nachweisempfindlichkeit dieser Methode ist durch das *thermische Rauschen* in C_e' und durch den Schroteffekt in der 1. Röhre von V begrenzt.

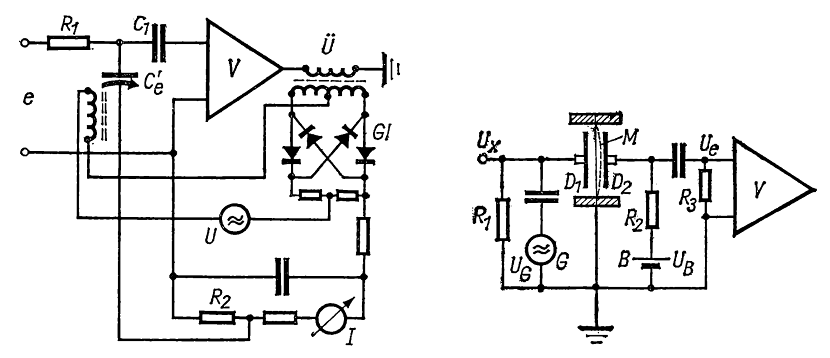


Abb. 2.76 Elektrometerverstärker nach SCHERBATSKOY [*2.160*]

Abb. 2.77 Schwingmembranelektrometer nach DIMEFF und LANE [*2.39*]

Von PALEVSKY et al. [*2.132*] werden zwei Ausführungsformen für den dynamischen Kondensator C_e' angegeben:

a) Schwingende Zunge, die elektromagnetisch mit 50 oder 60 Hz angetrieben wird. Ein damit ausgerüsteter Verstärker besitzt einen Eingangswiderstand von 1000 TΩ, eine Eingangskapazität von 40 pF, eine Nullpunktsdrift $< 0{,}1$ mV/24 h, den Rauschuntergrund von 50 μV und Empfindlichkeitsdrift $< 2‰/24$ h. Der Meßbereich, dessen kleinster 10 mV beträgt, kann durch ein Zusatzpotential beliebig verschoben werden.

b) Schwingende Membran, die mit 1 kHz erregt wird und aus einer 0,2 mm dicken vergoldeten Stahlscheibe von 5 cm Durchmesser besteht. Mit $A = 4000$ beträgt der kleinste Meßbereich 0···100 mV.

Beim elektrometrischen Verstärker von SCHERBATSKOY et al. [*2.160*] (Abb. 2.76) wird der Schwingkondensator C_e' vom Wechselstromgenerator U

angetrieben und liegt über die Kapazität C_1 am Verstärker V. Das Ausgangssignal, das über den Transformator $\ddot{U}$ an den Synchrongleichrichter Gl gelegt wird, wird phasenrichtig gleichgerichtet und im Instrument I angezeigt. Durch die Rückkopplung über $R_2 = 10\,\Omega$ wird eine Änderung des Verstärkungsfaktors unschädlich gemacht. Bei einem Eingangswiderstand von 100 GΩ der Eingangskapazität von 50 pF liegt die Nachweisgrenze bei 0,1 mV.

Das in Abb. 2.77 dargestellte hochempfindliche Elektrometer nach Dimeff und Lane [*2.39*] besitzt eine kreisförmige Metallmembran M, die zwischen den festen Elektroden D_1 und D_2 schwingt und vom NF-Generator G mit der Spannung U_G erregt wird. Zwischen D_2 und M liegt über dem Hochohmwiderstand R_2 die Spannung U_B, während die durch den Schwingkondensator erzeugte Wechselspannung U_e, die der zu messenden Spannung U_x proportional ist, im Verstärker V verstärkt wird. Mit $U_e = (\Delta C/C)\, U_B$ berechnet sich der *Spannungsumsetzungsfaktor* G_u zu

$$G_u = \frac{U_e}{U_x} = \varepsilon_0 U_B U_G \frac{r^2}{8Td^3} Q.$$

In dieser Beziehung bedeuten Q, r und d Kreisgüte, Radius und Abstand der Membran von den Festelektroden. Mit T ist die Normalspannung am Membranrand gegeben, aus der sich die Grundfrequenz $f_0 = 0{,}382\,(T/r^2 m)^{1/2}$ berechnet, wenn m die Membranmasse/cm² ist. Für $m = 2$ mg/cm², $d = 40$ µm, $f_0 = 5$ kHz, $Q = 3 \cdot 10^4$, $U_B = 200$ V und $U_G = 70$ V findet man für G_u den Wert 2000. Der *Stromumsetzungsfaktor* $G_i = I_e/I_x = G_u R_1/R_3$ erreicht mit $R_1 = 5000$ TΩ und $R_3 = 5$ MΩ den Wert $2 \cdot 10^{12}$.

Mit dieser Methode lassen sich Spannungen von 1 mV und Ströme von 10^{-19} A messen, wobei sich allerdings eine große Zeitkonstante ergibt.

Bei dem von Rust [*2.156*] angegebenen Verfahren wird ein Kondensatormikrofon mit konstanter Frequenz und Amplitude beschallt, wodurch aus der angelegten Meßgleichspannung eine proportionale Wechselspannung entsteht, die mit einem Verstärker gemessen werden kann. Mit einem Breitbandverstärker liegt die untere Meßgrenze bei 100 mV, bei einem Resonanzverstärker mit „lock-in"-Ausgang bei 0,1 mV. Weitere Beispiele s. [*2.16, 2.147, 2.201*]. Nach Ritsma [*2.151*] läßt sich der NF-Rauschanteil im Verstärkereingang durch zwei gegenphasig schwingende Kondensatorplatten eliminieren, so daß die Meßgrenze nur noch vom Schroteffekt der 1. Elektronenröhre abhängt.

Von Kolm [*2.90*] wird ein *rotierendes Elektrometer* zur Messung der Austrittsarbeit von Metallen angegeben, bei dem die Meßprobe mit 1500 U/min an einer feststehenden Elektrode vorbeiläuft und die influenzierte Ladung in einem Verstärker gemessen wird. Bei 0,1 mm Elektrodenabstand ist die Nachweisgrenze bei 1 mV erreicht. Weitere Ausführungsbeispiele s. [*2.19, 2.167*].

Spannungsmesser mit hohem Eingangswiderstand, die mit mechanischen oder kapazitiven Choppern arbeiten, werden heute kommerziell vertrieben; ihr Vollausschlag wird bei 1 µV für 10···1000 GΩ Eingangswiderstand erreicht, wobei die Genauigkeit mit ± 1%, die Stabilität mit ± 0,1%/24 h und die Rauschspannung mit 50 nV angegeben wird.

2.335 Transistormodulator

Anstelle der mechanischen Unterbrecher können Transistoren benutzt werden, deren Widerstand in der Durchlaßrichtung relativ gering ist. In Abb. 2.78 ist die Eingangsstufe eines solchen Zerhackerkreises dargestellt [*2.26*]. Die zu messende Gleichspannung U_x liegt parallel zum pnp-Schalttransistor T, der durch die Rechteckspannung eines Übertragers $\ddot{U}$ und die beiden Gleichrichter Gl_1 und Gl_2 periodisch ein- und ausgeschaltet wird. Der

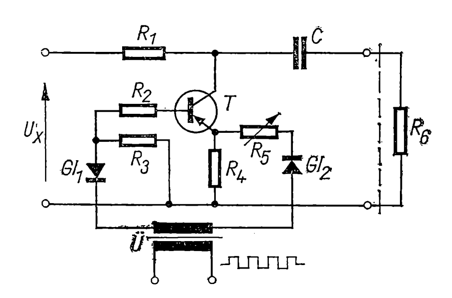


Abb. 2.78 Gleichspannungsverstärker mit Transistorzerhacker

Widerstand zwischen Kollektor und Emitter wird dabei zwischen 50 Ω und 100 kΩ geändert. Die dadurch erzeugte, zu U_x proportionale Wechselspannungskomponente wird über den Kondensator C dem Widerstand R_6 zugeführt, der den Eingangswiderstand des nachfolgenden Verstärkers bildet. Die für $U_x = 0$ vorhandene Störspannung kann durch den variablen Widerstand R_5 kompensiert werden. Durch zusätzliche Maßnahmen [*2.10*] kann der gesamte Meßfehler auf $\pm$ 50 μV herabgesetzt werden. Mit nachgeschalteten Transistorverstärkern können solche Instrumente zur direkten Anzeige kleiner Thermospannungen benutzt werden.

2.336 Supraleitende Quanteninterferometer (*SQUID*)

In § 11.66 wird auf eine äußerst empfindliche Methode zur Messung des mit einer Doppel-Josephson-Tunneldiode verketteten magnetischen Flusses hingewiesen, wobei der in der Anordnung der Abb. 11.35 (S. 743) fließende Strom i Oszillationen konstanter Periode zeigt, wenn sich der Fluß durch F um Einheiten von $\Phi_0 = h/2e = 2 \cdot 10^{-15}$ Wb ändert. CLARKE [*2.28a*] ersetzt die Doppeldiode durch einen Nb-Draht mit dünner Oxidhaut, der von einer Lötzinnperle Z von etwa 3 mm Durchmesser umgeben ist (Abb. 2.79a) und ebenfalls eine Josephson-Tunnelstrecke darstellt. Schickt man unterhalb der Sprungtemperatur von Nb bzw. PbSn, d. h. bei 4,2 K, einen Strom i durch die Diode, so tritt erst beim kritischen Wert i_c ein Spannungsabfall u_D auf. Die Größe von i_c hängt von den Drahtabmessungen und der Dicke der Isolationsschicht ab und liegt gewöhnlich zwischen 100 und 500 μA. Schickt man durch den Nb-Draht einen sich langsam steigernden Strom I, so führt i_c regelmäßige periodische Schwankungen um einen konstanten Mittelwert aus,

wie in Abb. 2.79b angedeutet ist. Diese Modulation hängt mit dem durch I an der Berührungsfläche $A-B$ erzeugten tangentialen Magnetfeld $H = I/2\pi r$ (r = Nb-Draht-Radius) zusammen, das die Querschnittsfläche $L\lambda$ durchsetzt. Die Dicke λ dieser Schicht setzt sich additiv aus den Eindringtiefen im Nb und in der Lötzinnperle zusammen und ist von der Größe 100 nm. Nimmt man ferner an, daß nur an den Stellen A und B das Josephson-Tunneln stattfindet, so sollte ein Sprung von i_c' auftreten, wenn sich der die Fläche $L\lambda$ durchsetzende magnetische Fluß um die Größe Φ_0 ändert, d. h., wenn sich der Strom I um den Betrag

$$\Delta I = \frac{2\pi\Phi_0}{L\lambda}\frac{1}{\mu_0} \qquad (2/137)$$

ändert. Mit $r = 50\ \mu\text{m}$, $L = 0{,}2$ cm und $\lambda = 300$ nm findet man $\Delta I \approx 1$ mA. Es lassen sich einige Tausend solcher Oszillationen experimentell verfolgen.

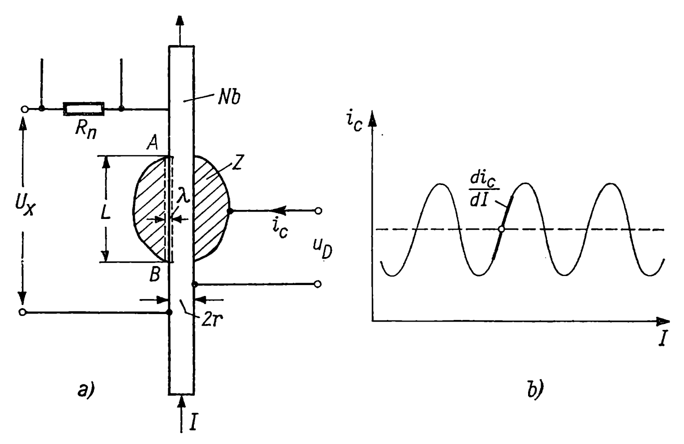


Abb. 2.79 Supraleitendes Quanteninterferometer

Die Anwendung dieses supraleitenden Quanteninterferometers für Spannungsmessungen geht nun davon aus, daß man bequem noch 1% von ΔI feststellen kann, wenn man — wie in Abb. 2.79 geschehen — den Wert I so einstellt, daß $\mathrm{d}i_c/\mathrm{d}I$ ein Maximalwert ist. Damit lassen sich Stromänderungen von 10 μA und in einem angeschlossenen Kompensationskreis mit dem Normalwiderstand $R_n = 10\ \text{n}\Omega$ Spannungen von 100 fV nachweisen. Dabei beträgt die Zeitkonstante in einem Kreis mit der Induktivität von 10 nH etwa 0,2 s. Die entsprechende mittlere Rauschspannung liegt in der gleichen Größe, läßt sich jedoch im Tiefsttemperaturbereich ($T \leq 0{,}1$ K) merklich verringern.

Diese für Messungen des Restwiderstandes von Metallen oder Thermospannungen im He-Temperaturbereich geeigneten, höchst empfindlichen Instrumente werden heute industriell hergestellt und sind unter der Bezeichnung SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) eingeführt.

2.34 Kompensationsverfahren

Bei der direkten Spannungsmessung gehen Meßstrom i und Innenwiderstand R des Instruments in das Meßergebnis ein. Außerdem ist auch bei Präzisionsgeräten aus konstruktiven Gründen die Meßgenauigkeit auf 0,1% begrenzt. Mit Hilfe der *Kompensationsverfahren*, bei denen die zu messende Spannung mit einer bekannten Spannung verglichen wird, lassen sich relative Genauigkeiten von 10^{-6} erzielen, wobei im abgeglichenen Zustand der Meßstrom verschwindet.

Bei Präzisionsmessungen wird der Nullabgleich von Hand vorgenommen (§ 2.341); bei Verzicht auf höchste Genauigkeit kann die Kompensation *selbsttätig* erfolgen. Dies geschieht bei den *selbsttätig abgleichenden Kompensatoren* (§ 2.343) durch einen Stellmotor, der durch die verstärkte Spannungsdifferenz bei nichtabgeglichener Brücke gesteuert wird, oder beim *Fotozellenkompensator* (§ 2.345) durch Steuerung eines Fotowiderstandes durch das Nullinstrument.

2.341 Kompensatoren [*2.195*] (vgl. Bd. II, § 1.352)

Das Prinzip der Kompensationsmethode geht aus Abb. 2.80 hervor. Der Kompensationskreis besteht aus den einstellbaren Präzisionswiderständen R_1 und R_2, die in Serie vom Strom i der Hilfsbatterie B durchflossen werden.

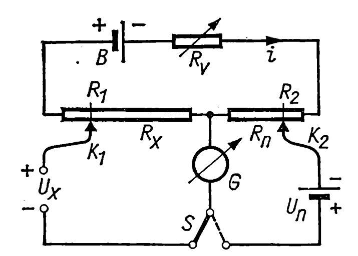


Abb. 2.80 Prinzip der Kompensationsmethode

Die zu messende Spannung U_x wird über das Galvanometer G und den Abgriff K_1 an das Potentiometer R_1 gelegt und dieses so eingestellt, daß der Galvanometerstrom zu Null wird. Ist R_x der durch K_1 eingestellte Wert von R_1, so ist $U_x = iR_x$. Um i mit der gewünschten Genauigkeit bestimmen zu können, wird nach Umlegen des Schalters S die Spannung U_n einer Normalspannungsquelle (s. § 16.2) mit dem Spannungsabfall iR_n verglichen, wozu der Abgriff K_2 auf dem Widerstand R_2 einzustellen ist. Die gesuchte Spannung ergibt sich daraus zu

$$U_x = U_n \frac{R_x}{R_n}. \tag{2/138}$$

Die erzielbare Genauigkeit für die Messung von U_x hängt demnach nicht vom Wert i, sondern nur vom Widerstandsverhältnis R_x/R_n und vom Absolutwert U_n ab.

Diese einfache Kompensationsschaltung weist einige Nachteile auf, die durch Abänderungen vermieden werden können:

a) Maximale Einstellgenauigkeit ist nach § 2.266 nur erzielbar, wenn der äußere Grenzwiderstand R_{agr} des Galvanometers dem Widerstand R_x entspricht. Da $R_x \sim U_x$ und klein gegen R_{agr} werden kann, ist eine optimale Anpassung unmöglich.

b) Die Messung sehr kleiner Spannungen wird durch Thermospannungen an den in Dekaden unterteilten Potentiometern gefälscht.

c) Bei der Messung sehr kleiner Spannungen erzeugen die Übergangswiderstände der Schaltkontakte Meßfehler.

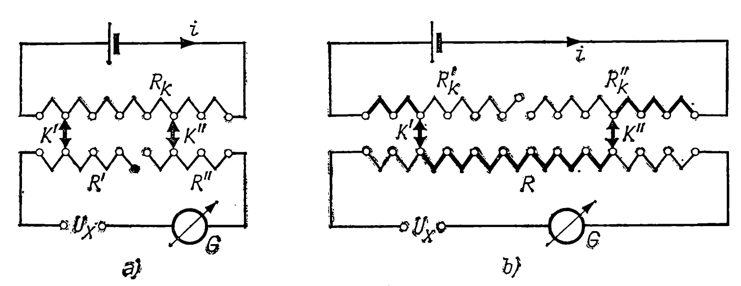


Abb. 2.81 Prinzipschaltung verbesserter Kompensatoren

Der 1. Nachteil wird durch die Brooksschen Doppelkontakte K' und K'' (Abb. 2.81 a) beseitigt, durch die im Kompensationskreis der Widerstand R_k abgegriffen, gleichzeitig im Galvanometerkreis entsprechende Widerstände R' und R'' hinzugeschaltet werden. Sind die Einzelwiderstände zwischen zwei Kontakten in beiden Kreisen gleich, so ändert sich der Außenwiderstand für das Galvanometer beim Abgleichen nicht. Die Forderung *b*) wird durch die Diesselhorstsche Idee nach Abb. 2.81 b erfüllt, durch die beiden Einstellkontakte K' und K'' gleiche Widerstände im Kompensationskreis R_k' bzw. R_k'' *und* Galvanometerkreis R abzugreifen. Da R vom Kompensationsstrom i durchflossen wird, treten keine störenden Thermospannungen auf.

Nebenschlußdekaden. Das von WHITE angegebene Prinzip der Nebenschlußdekade ist in Abb. 2.82 für einen zweistufigen Kompensator dargestellt. Der

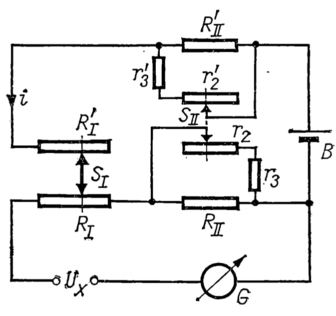


Abb. 2.82 Nebenschlußdekaden

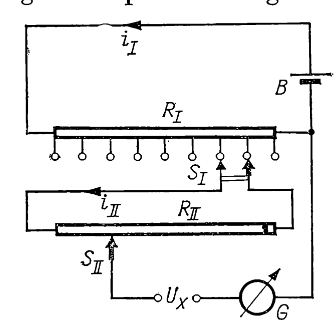


Abb. 2.83 Kaskadenschaltung

von der Batterie B gelieferte Kompensationsstrom i erzeugt in der Dekade I den Spannungsabfall iR_I, durchfließt die Widerstandskombination $R_{II} r_2 r_3$, die so bemessen ist, daß sich der Kombinationswiderstand $R_{II}(r_2 + r_3)/(R_{II} + r_2 + r_3)$ durch Schalten von S_{II} in gleichen Stufen ändert. Damit sich i bei Betätigung der Schalter S_I und S_{II} nicht ändert, sind symmetrisch die entsprechenden Widerstände R_I', R_{II}', r_2' und r_3' vorgesehen.

Kaskadenschaltung. Eine weitere Möglichkeit, bei niederohmigen Kompensatoren sehr kleine Widerstandsstufen (und damit Fehlereinflüsse durch Kontaktwiderstände) zu vermeiden, bietet die in Abb. 2.83 wiedergegebene Kaskadenschaltung nach VARLEY. Durch den Doppelkontakt S_I wird im Nebenschluß zu *einer* Widerstandsstufe von R_I eine zweite Dekade R_{II} gelegt, die so

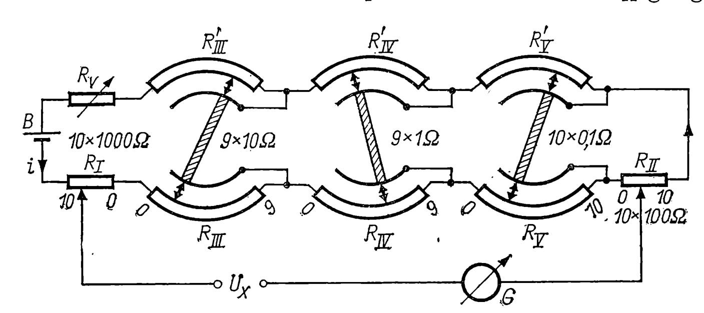


Abb. 2.84 Kompensator nach FEUSSNER

bemessen ist, daß der Strom im Nebenschluß $i_{II} = 0{,}1\, i_I$ wird. Auch bei dieser Schaltung ändern sich die Kompensationsströme i_I und i_{II} beim Umschalten nicht.

Kompensator nach FEUSSNER (1890). Beim Feussner-Kompensator, der in Abb. 2.84 mit 5 Dekaden dargestellt ist, sind die Dekaden R_{III} bis R_V durch Doppelschalter mit gleich bemessenen Ausgleichsdekaden R_{III}' bis R_V' so verbunden, daß der Gesamtwiderstand des Kompensationskreises konstant bleibt. Für die höherohmigen Potentiometer R_I und R_{II} ist dies nicht erforderlich. Die Nachteile dieser Methode sind der relativ hohe Innenwiderstand, der eine Widerstandsanpassung spannungsempfindlicher Galvanometer an niederohmige Quellen erschwert, und die Änderung des Galvanometerkreiswiderstandes beim Abgleich der großen Dekaden R_I und R_{II}.

Kompensator nach RAPS (1890). Beim Raps-Kompensator (Abb. 2.85) sind an die Dekaden R_I und R_{III} über Doppelschalter die Kaskaden R_{II} bzw. R_{IV} mit gleichen Einzelwiderständen gelegt, die nur von 10% des Kompensationsstroms i durchflossen werden. Die gesuchte Spannung ergibt sich daher aus:

$$U_x = i(1000 n_I + 100 n_{II} + 10 n_{III} + 1 n_{IV} + 0{,}1 n_V),$$

wenn n_I bis n_V die jeweiligen Stellungen der Dekadenschalter bedeuten. Durch Betätigung von R_V wird allerdings der Widerstand bzw. der Strom im Kompensationskreis geändert, was einer Meßunsicherheit von 0,0012% entspricht.

Kaskadenkompensatoren. Der in Abb. 2.86 dargestellte Kaskadenkompensator enthält im Hilfskreis die beiden Dekaden $R_I (11 \times 100\,\Omega)$ und $R_{II} (10 \times 10\,\Omega)$, die vom vollen Hilfsstrom i durchflossen werden. Die 3. Dekade R_{III} aus 10×10-Ω-Widerständen ist über einen Doppelschalter und einen Serienwiderstand r_{III} von $801\,\Omega$ an R_I-Einzelwiderstände geschaltet und wird vom Strom $i/10$ durchflossen. Die Dekade R_{IV} besteht aus 9×1-Ω-Widerständen und liegt über einem Doppelkontakt sowie dem Serienwider-

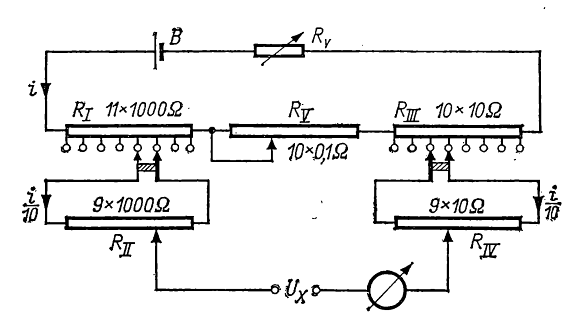


Abb. 2.85 Kompensator nach RAPS

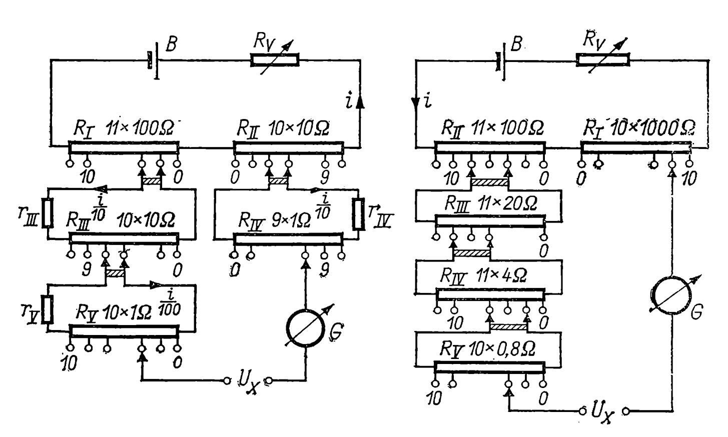


Abb. 2.86 Kaskadenkompensator

Abb. 2.87 Kaskadenkompensator von HARTMANN & BRAUN

stand r_{IV} von $81\,\Omega$ an R_{II}. Die letzte Dekade R_V aus 10×1-Ω-Widerständen wird vom Strom $i/100$ durchflossen. Die gesuchte Spannung ergibt sich aus der Beziehung:

$$U_x = i(100 n_I + 10 n_{II} + 1 n_{III} + 0{,}1 n_{IV} + 0{,}01 n_V).$$

Im Gegensatz zum Feussner-Kompensator ändert sich der Hilfsstrom i beim Abgleich nicht; die Änderungen des Innenwiderstandes sind gering.

Der Kaskadenkompensator von HARTMANN & BRAUN (1900) in Abb. 2.87 besitzt im direkten Hilfsstromkreis zwei Dekaden $R_I (10 \times 1000\,\Omega)$ und

R_{II} (11 × 100 Ω) sowie 3 Kaskaden R_{III} bis R_V mit Doppelschaltern, die im Gegensatz zu Abb. 2.86 je zwei Einzelwiderstände abgreifen und keinen Serienwiderstand besitzen. Die Einzelwiderstände der Kaskadenpotentiometer sind so dimensioniert, daß durch R_{III} der Strom $i/2$, durch R_{IV} $i/4$ und durch R_V $i/8$ fließen. Die gesuchte Spannung erhält man aus:

$$U_x = i(1000 n_I + 100 n_{II} + 10 n_{III} + 1 n_{IV} + 0{,}1 n_V).$$

Diese Art Kaskadenschaltung läßt sich beliebig verlängern. Der Vorteil aller Kaskadenschaltungen liegt darin, daß die Einzelwiderstände relativ groß sind und die Übergangswiderstände an den Doppelkontakten die Meßgenauigkeit wenig beeinflussen.

2.342 Kompensatoren für kleine Spannungen

Die in § 2.341 behandelten Kompensatoren eignen sich vor allem für Spannungen von der Größe 1 V, wenn die Hilfsströme 0,1 mA betragen. Für kleine Spannungen, besonders Thermospannungen, sind sie nicht brauchbar, da wegen der Kontaktwiderstände der Hilfsstrom nicht beliebig verringert werden kann

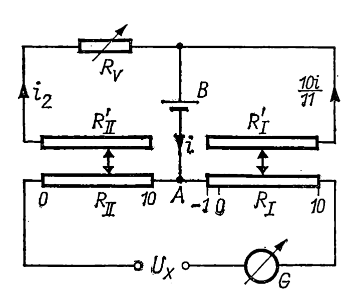


Abb. 2.88 Schema des Diesselhorst-Kompensators

und wegen des relativ hohen Innenwiderstandes die Anpassung eines niederohmigen, spannungsempfindlichen Galvanometers nicht möglich ist.

Thermokraftfreier Kompensator nach DIESSELHORST (1906). Diesem Gerät liegt ein neues, in Abb. 2.88 dargestelltes Meßprinzip zugrunde. Der Hilfsstrom i tritt am Verzweigungspunkt A in den Spannungsteiler ein; der Teilstrom i_1 durchfließt die Dekade I und die Ersatzdekade I' (vgl. Abb. 2.81 b), während der Reststrom i_2 durch die Dekaden II bzw. II' geht. Da die Ersatzdekaden die Hauptdekaden ergänzen, bleibt $i = i_1 + i_2$ konstant. Für die zu messende Spannung gilt dann: $U_x = i_1 R_I - i_2 R_{II}$. Bestehen die beiden Dekaden aus gleichen Einzelwiderständen und teilt man durch den Vorwiderstand R_v die Hilfsströme wie 1:10 auf, so gilt

$$U_x = 10 \frac{i}{11} r(n_I + 1) - \frac{i}{11} r(10 - n_{II}) = \frac{i}{11} (10 r n_I + r n_{II}),$$

wenn n_I und n_{II} die Zahl der abgegriffenen Einzelwiderstände ist und die Bezifferung nach Abb. 2.88 geschieht. In der Nullstellung beider Schalter heben sich die Spannungsabfälle $r(10/11)i$ und $10r(i/11)$ auf, da die Dekade R_I eine Stellung „—1" besitzt. Da der Meßkreis nicht über Schaltkontakte geschlossen ist, sind Meßfehler durch Thermospannungen praktisch ausgeschaltet.

Dieses Meßprinzip der *subtraktiven Kompensation* läßt sich durch Whitesche Nebenschlußdekaden (s. § 2.341) ausbauen, wie in Abb. 2.89 am Beispiel eines 5stufigen Diesselhorst-Kompensators gezeigt ist. Der Hilfsstrom i verzweigt sich an den Schaltkontakten der Widerstände R_I und R_I' in die Teilströme $10i/11$ und $i/11$, deren Verhältnis beim Einstellen der einzelnen Dekaden unverändert bleibt. Die durch Zwillingsschalter abgegriffenen Widerstände sind als Ersatzdekaden (*II*, *III*), Nebenschlußdekaden (*IV*, *V*) und Potentiometer (*I*) ausgebildet, die sich im oberen Teil der Schaltung spiegelbildlich wiederholen. Ferner sind die Festwiderstände $r_a(0{,}11089\ \Omega)$, $r_b(85{,}69\ \Omega)$ und

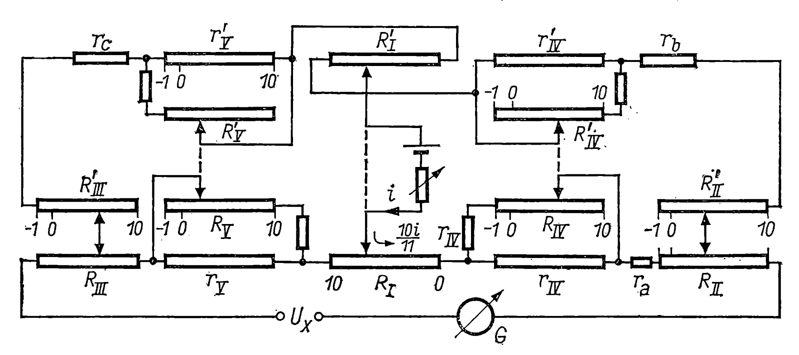


Abb. 2.89 Diesselhorst-Kompensator

$r_c(975{,}8\ \Omega)$ enthalten, um das Teilstromverhältnis einzustellen. Die Dekaden R_I, R_I' bestehen aus zehn 1-Ω-Widerständen, die Dekaden *II* und *III* aus elf 0,11-Ω-Werten, während die Nebenschlußdekaden *IV* und *V* und ihre Ersatzdekaden Serienwiderstände r_{IV}, r_V von 1,000 Ω und Nebenschlüsse enthalten, die sich aus Festwiderständen r_{IV}', r_V' von 81,64 Ω und Stufenwiderständen R_{IV}, R_V zusammensetzen. Die letzteren sind so abgeglichen, daß der Kombinationswiderstand dieser Dekaden in 11 Stufen von 0,0011 Ω zwischen 1,000 und 0,9878 Ω geändert werden kann. Der Widerstand im Kompensationskreis ist praktisch von der Schalterstellung unabhängig und beträgt etwa 14 Ω. Zwischen den Verzweigungspunkten des Hilfsstroms ist der Widerstand für alle Schalterstellungen 90 Ω. Die gesuchte Spannung U_x berechnet sich für die Schalterstellungen *I* bis *V* zu:

$$U_x = i(1n_I + 0{,}1n_{II} + 0{,}01n_{III} + 0{,}001n_{IV} + 0{,}0001n_V).$$

Mit $i = 1$ mA können demnach Spannungen von 10 mV auf 10^{-5} genau gemessen werden. Die Übergangswiderstände von etwa 0,1 mΩ an den Kontakten der Dekaden *I* bis *III* liegen mit sehr viel höheren Widerständen in Serie und bewirken keinen merklichen Fehler. Auch Thermospannungen an

den Kontakten, die bei gereinigten Schaltern kleiner als 0,1 μV sind, wirken sich mit weniger als 10% auf den Meßkreis aus, da sie im Nebenschluß liegen.

Der in Abb. 2.90 dargestellte Kompensationsmeßplatz enthält neben Kompensator K mit Umschalter U für die wahlweise Einstellung des Hilfsstroms bzw. für den Nullabgleich mit dem Galvanometer G zwei Schalter S_B und S_X zum Umpolen von i bzw. u_x. Durch den Hilfskompensator Z werden die Hilfsströme von 0,1, 1, 10 und 100 mA eingestellt. Er besteht aus einem Festwiderstand von 10180 Ω und zwei Dekaden von 12 × 0,1- bzw. 1-Ω-Widerständen, mit denen die temperaturabhängige Spannung des Normalelements N kompensiert wird.

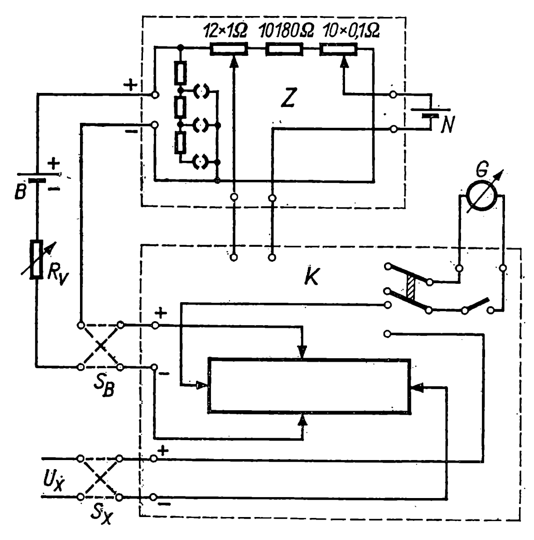


Abb. 2.90 Messung mit dem Diesselhorst-Kompensator

Weitere Ausführungsformen s. [*2.34*, *2.37*, *2.50*]. Von SIEGFRIED [*2.171*] wird ein thermokraftfreier Kompensator für den Meßbereich 0,1···1100 mV angegeben, der aus zwei Ersatzdekaden und drei Nebenschlußdekaden mit Hilfsstromverzweigung besteht.

Empfindlichkeit. Da im Meßstromkreis der Kompensationswiderstand R_k, der Galvanometerwiderstand R_g und der Quellenwiderstand R_u in Serie liegen, entspricht die in G noch nachweisbare Stromänderung Δi einer Spannungsdifferenz $\Delta U = \Delta i(R_k + R_g + R_u)$. Nach § 2.266 wird maximale Empfindlichkeit erreicht, wenn $R_k + R_u$ dem äußeren Grenzwiderstand R_{agr} von G entspricht. Niederohmige Spannungsquellen, wie z. B. Thermoelemente, sollten daher im Kompensator mit einem Instrument mit kleinem Widerstand und hoher Spannungsempfindlichkeit gemessen werden.

Konstanz des Hilfsstroms. Für den Hilfsstromkreis werden gewöhnlich Akkumulatoren ausreichender Kapazität verwendet. Für eine Zelle von 20 Ah und eine Strombelastung von 100 mA beträgt der zeitliche Abfall der Klem-

menspannung etwa 10^{-5}/min. Von WATSON [*2.191*] wird eine Anordnung mit drei Batterien beschrieben, deren Konstanz um den Faktor 10 besser ist. Anstelle einer Batterie werden heute vielfach die in § 16.33 beschriebenen elektronisch stabilisierten Stromquellen benutzt.

Messung kleiner Spannungen mit Kompensatoren für große Spannungen. Nach dem Schaltbild der Abb. 2.91 werden hierzu die Normalwiderstände R_1 und R_2 benutzt, die in Serie über den Regelwiderstand R_v an der Batterie B liegen. Das Verhältnis R_2/R_1 soll dem von Kompensatormeßbereich zu Meßspannung entsprechen. Der Hilfsstrom i wird mit Hilfe von R_v so eingestellt, daß mit dem Galvanometer G die Kompensation $iR_1 = U_x$ durchgeführt

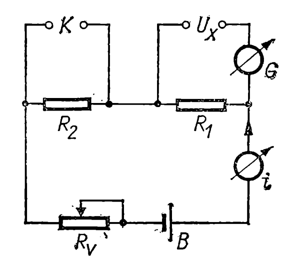


Abb. 2.91 Messung kleiner Spannungen

werden kann. Mit dem an K angeschlossenen Kompensationsapparat wird nun am Normalwiderstand R_2 der Spannungsabfall iR_2 gemessen und daraus i und $U_x = U_k R_1/R_2$ bestimmt.

2.343 Selbstabgleichende Kompensatoren

Die in einem Kompensationskreis im nichtabgeglichenen Zustand auftretende Differenzspannung kann nach Verstärkung dazu benutzt werden, den Schleifkontakt am Meßpotentiometer so lange zu verschieben, bis der Meßkreis stromlos ist. Meist besteht der Kompensationswiderstand nur aus einem Meßdraht, der als gleichmäßig gewickelte Wendel kreisförmig oder als mehrgängige Wicklung auf einem Zylinder angeordnet ist, um eine Meßunsicherheit $< 0{,}1\,\%$ zu erreichen, und von einem Schleifkontakt abgegriffen wird. Die verbleibende Differenzspannung wird so weit verstärkt, daß ein *Stellmotor* den Schleifkontakt oder das zylindrische Potentiometer (bei festem Kontakt) für den Nullabgleich in kurzer Zeit bewegen kann. Die Kenngrößen dieser *Servosteuerung* — Einstellzeit, Stabilität und Meßunsicherheit — lassen sich analytisch nach bekannten Methoden behandeln (s. Bd. I, § 11.7). Bei dieser Nullmethode ist nur eine annähernde Konstanz des Verstärkungsfaktors erforderlich.

Dieses Meßprinzip wird nur in Spezialfällen für die unmittelbare Spannungsmessung benutzt, da eine digitale Meßmethode wesentlich größere Genauigkeit garantiert; es wird aber in großem Umfang bei den *Kompensationsschreibern* (s. § 2.63) angewandt, wo große Verstellkräfte erwünscht sind.

In Abb. 2.92 ist die Prinzipschaltung eines solchen Instruments wiedergegeben. Der Kompensationskreis besteht aus dem linearen Potentiometer P, auf dem ein vom Motor M bewegter Kontaktschlitten L so lange verschoben wird, bis die Spannung an den Punkten a und b mit der gesuchten Spannung U_x übereinstimmt. Die Widerstände $R_1, \ldots, R_4$ dienen zum Einstellen des Meßbereichs und zur Unterdrückung des Nullpunkts der Meßgröße. Die Differenzspannung $U_{ab} - U_x$ wird durch den Wechselrichter W (s. § 2.33) in eine Wechselspannung umgeformt, die ihre Phase beim Durchgang durch die Sollspannung um 180° dreht. Die Ausgangsspannung wird im Verstärker V verstärkt und *einer* Wicklung des Zweiphasenmotors M (s. § 15.1) zugeführt, während die zweite Wicklung mit einem um 90° phasenverschobenen Strom gespeist wird. Entsprechend der Phasenlage der von V kommenden Steuerspannung läuft der Motor links oder rechts herum, bis die Steuerspannung verschwindet. Der Hilfsstrom i wird von einem stabilisierten Gleichrichter geliefert und durchfließt den Normalwiderstand R_N sowie den Regelwiderstand R_v, der ebenfalls über die einrückbare Kupplung K vom Stellmotor verstellt werden kann, bis

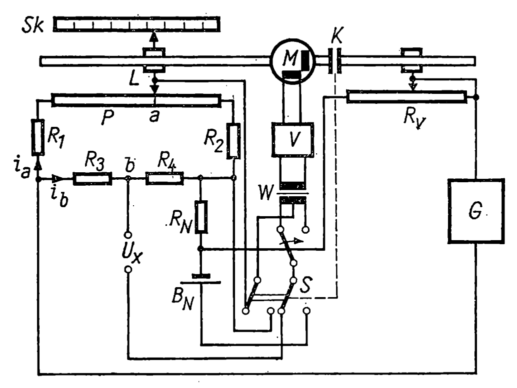


Abb. 2.92 Schaltschema eines Kompensationsschreibers

bei umgelegtem Doppelschalter S die Spannung des Normalelements B_N gegen den Spannungsabfall iR_N kompensiert ist. Die zu messende Spannung läßt sich mit einem am Schlitten L befestigten Zeiger auf der Skala Sk ablesen; die Registriervorrichtung in Form einer Röhrchenfeder oder eines Punktdruckers ist ebenfalls am Schlitten L montiert.

In konstruktiver Hinsicht unterscheiden sich die heute verfügbaren Kompensationsschreiber durch die Gestaltung des Kompensationswiderstandes. Bei ringförmiger Anordnung muß der Schlitten für die Registrierung und Anzeige vom Motor über einen Seilzug bewegt werden; größere Meßgenauigkeit liefert ein lineares Potentiometer.

Die heute vorhandenen Ausführungen, auch *Kompensografen* genannt, besitzen eine Genauigkeit von 0,1 bis 0,2% (bezogen auf den Endausschlag), einen kleinsten Meßbereich von 0,5 mV und sind auf 12 Meßstellen umzuschalten. Der Papiervorschub kann in Stufen zwischen 0,1 und 50 cm/s umgeschaltet werden. Weitere Hinweise s. [*2.107*, *2.109*, *2.135*].

2.344 Quotientenbildung mit Kompensatoren

In Abb. 2.93 ist die von SCHLOTTER und KOPINEK [*2.165*] stammende Methode zur Quotientenbildung von zwei Spannungen dargestellt. Die beiden zu vergleichenden Spannungen U_1 und U_2 werden über die Widerstände R_1' und R_2' an das Kompensationspotentiometer P gelegt. Zur selbsttätigen Kompensation der Spannungen $i_1(R_1 + R_1')$ und $i_2(R_2 + R_2')$ dient der Kontaktunterbrecher W mit nachgeschaltetem Verstärker V, der den Stellmotor M und den angekoppelten Generator G betreibt. Mit verschwindendem

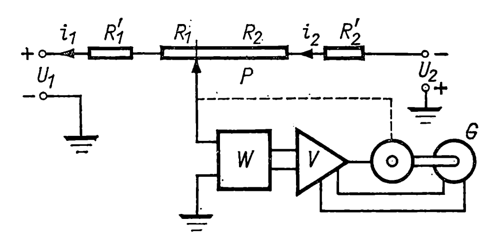


Abb. 2.93 Quotientenmessung zweier Spannungen

Kompensationsstrom wird $i_1 = i_2$ und $U_1/U_2 = (R_1 + R_1')/(R_2 + R_2')$, d. h., jede Stellung des Potentiometerabgriffs entspricht einem bestimmten Spannungsverhältnis. Analog ist diese Methode auch für die Quotientenbildung kleiner Ströme anwendbar.

2.345 Fotozellenkompensator

Die als Fotozellenkompensatoren bezeichneten Meßanordnungen rechnen zu den in § 2.283 behandelten Galvanometerverstärkern, in denen die zu messende Spannung über einen Festwiderstand an ein empfindliches Galvanometer gelegt wird. Im Gegensatz zu § 2.34 bleibt hierbei der Kompensationswiderstand konstant, während der Hilfsstrom durch den Galvanometerausschlag über einen Verstärker bis zum Abgleich verändert wird. Der Meßkreiswiderstand wird daher nicht unendlich groß, sondern erhält einen endlichen, von den Eigenschaften des Meßsystems und des Verstärkers abhängigen, meist hohen Wert. Über die theoretischen Grundlagen und ausgeführte Geräte s. KELEN [*2.84*] sowie [*2.94, 2.130*]. Von POHL [*2.145*] ist die Meßgrenze des Fotozellenkompensators genauer untersucht worden; er ist hinsichtlich der Störspannungen dem Galvanometer überlegen, wenn der Ausdruck RC/T_0 (T_0 = Schwingungsdauer des Instruments, RC = Zeitkonstante des Verstärkereingangs) hinreichend groß gewählt wird.

2.35 Digital anzeigende Voltmeter (s. auch § 6.8)

In vielen Fällen wird die Zahlenangabe einer Meßgröße der subjektiven Ablesung oder laufenden Registrierung vorgezogen, wenn etwa an das Instrument ein Drucker, eine Schreibmaschine, der Fernschreiber angeschlossen oder das Ergebnis direkt in einem Rechner verarbeitet werden soll. Hierzu

ist eine Umwandlung in Zahlenwerte, die digitale Konversion [2.51], hervorragend geeignet.

Langsam veränderliche Spannungen (etwa 1 Meßwert/s) lassen sich mit Hilfe der in § 2.343 beschriebenen Kompensatoren in Zahlenwerte umformen, wenn man z. B. auf der Achse des Stellmotors einen mechanischen oder elektrischen Zähler anbringt.

Für *rasch veränderliche* Spannungen (1000 Meßwerte/s) reicht die Abgleichgeschwindigkeit dieser Instrumente nicht mehr aus und sind elektronische Methoden gebräuchlich, die sich in drei Gruppen unterteilen lassen:

Sägezahnverfahren. Ein häufig benutztes Verfahren zur Analog-Digital-Wandlung ist schematisch in Abb. 2.94 dargestellt. Die Meßspannung U_x wird mit einer zeitlinear ansteigenden Spannung U_v (Sägezahnspannung) mit bekanntem Gradienten $\mathrm{d}U_v/\mathrm{d}t$ verglichen. Als Meßgröße für U_x dient die Zeitdifferenz Δt, die zwischen Start des Sägezahns und Erreichen der Meßspannung ($U_v(t) = U_x$) verstreicht. Die Spannungsdifferenz $U_v - U_x$ wird dem Differenzverstärker D zugeführt, dessen Ausgangssignal bei $U_v = U_x$

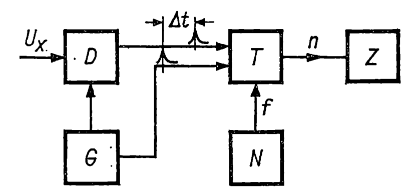


Abb. 2.94 Digitalvoltmeter mit Sägezahnspannung

den Stopimpuls für die laufende Zeitmessung liefert. Der Startimpuls wird vom Sägezahngenerator G selbst geliefert. Beide Impulse gelangen in das Stromtor T, wo von den ankommenden Schwingungen des Eichgenerators N mit der Festfrequenz f die Anzahl $n = \Delta t \cdot f$ abgeschnitten und im elektronischen Zähler registriert wird. Während der Meßwert eine bestimmte Zeit, z. B. 0,5 s, festgehalten wird, startet der nächste Meßvorgang. Die gesuchte Spannung beträgt $U_x = n(\mathrm{d}U_v/\mathrm{d}t)/f$; die Meßgenauigkeit hängt von der Linearität von U_v und der Schaltgenauigkeit des Stromtores ab. Die Anzeige erfolgt in dekadischen Zählern durch kleine Glimmlampen.

Kompensationsverfahren. Bei dieser Methode wird die zu messende Spannung mit der in einem Stufenpotentiometer erzeugten Spannung verglichen, wobei mit einem konstanten Hilfsstrom bzw. Teilströmen durch Zu- und Abschalten dekadisch oder digital schaltbarer Widerstände in mehreren Schritten der Abgleich erzielt wird. Die Vergleichsspannung wird durch einen Digital-Analog-Umsetzer erzeugt, wobei die einzelnen Abgleichschritte von einem Programmgeber in Abhängigkeit von der Anzeige des Nullindikators übernommen werden. In Abb. 2.95 sind zwei Dekaden eines digital schaltbaren Spannungsteilers dargestellt, der pro Dekade eine Normalspannungsquelle E_1 bzw. E_2 besitzt, die konstant belastet wird. Die Widerstandsketten bestehen aus 4 Einheiten vom Widerstand $2R_1$ und einer Einheit mit dem Wert R_1 bzw. $2R_{10}$ und R_{10} und werden von den Hilfsströmen i_{k1} und i_{k2} durch-

flossen. Die Digitalwerte werden durch Betätigen entsprechender Wertigkeitsrelais mit den Kontakten k_ν in Analogwerte übersetzt. Wie sich leicht aus der Schaltung erkennen läßt, setzt sich die Abgleichspannung U_k aus den Spannungsabfällen in den zwei Dekaden zusammen, d. h. $U_k = i_{k1} n_I R_1 + i_{k2} n_{II} R_{10}$. Zur Umschaltung der Einzelwiderstände werden Schalttransistoren verwendet, die gleichzeitig zur Bildung der Zähldekade und zum Schalten einer Ziffernanzeige dienen. Durch Vor- und Rückwärtslaufen wird der Abgleich in kürzester Zeit erzielt. Der Meßbereich wird automatisch umgeschaltet; auch die Polarität der Meßspannung wird angezeigt.

Kommerzielle Geräte mit einem Anzeigeumfang von 0000 bis $\pm$ 9999 besitzen einen Meßbereich zwischen 2 mV und 1000 V, eine Fehlergrenze von 0,1%, den Innenwiderstand von > 10 MΩ und eine Meßzeit von 0,1 s.

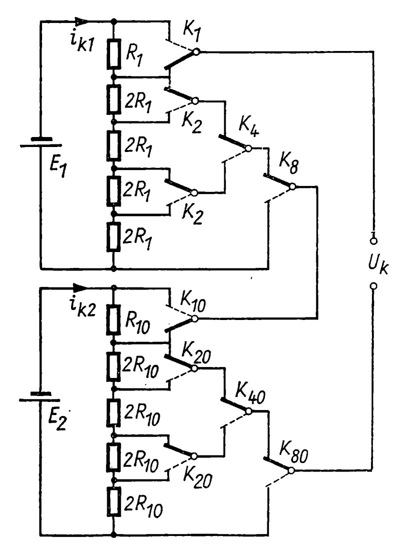


Abb. 2.95 Digitalvoltmeter mit Stufenabgleich

Integrationsverfahren. Diese Methode benutzt einen Spannungsfrequenzumsetzer nach Abb. 6.73, in dem die Meßspannung U_x in eine Sägezahnspannung konstanter Spitzenspannung, aber mit einer zu U_x proportionalen Frequenz umgewandelt wird. Als Meßgröße dient die Anzahl von Sägezahnimpulsen innerhalb einer durch einen Normalzeitgenerator vorgegebenen Meßzeit. Diese Impulse werden in einer Integrationsstufe gezählt und unmittelbar angezeigt. Wenn z. B. bei einer Öffnungszeit von 100 ms und einer Eingangsspannung von 0,5 V der Umsetzer 5000 Impulse abgibt, so beträgt der digitale Anzeigewert 500, d. h., die Genauigkeit beträgt 0,2%. Vor Beginn einer neuen Messung muß der Zähler gelöscht werden.

Beim *Dual-Slope-Verfahren,* dessen schematischer Aufbau in Abb. 2.96 dargestellt ist, wird abwechselnd über das Stromtor G_1 die Referenzspannung U_r über den Schalter S_2 an den Integrator I und den nachfolgenden Kompara-

tor K gelegt. Im Oszillator O werden mit $f = 100$ kHz 10µs-Impulse auf den Eingang des vierstelligen Zählers Z gegeben, der nach 10^4 Impulsen wieder auf Null springt und das Signal für die Zählung der durch die gesuchte Spannung erzeugten Sägezahnimpulse gibt. Die Integrationszeit T_1 von 100 ms wurde so gewählt, daß sich bei der Integration von 50-Hz-Spannungen und deren Oberwellen die Ausgangsspannung heraushebt, d. h. Brummspannungen stark unterdrückt werden. Die Meßgenauigkeit ist ausschließlich durch die Konstanz von U_r und T_1 gegeben; die Zeitkonstante RC des Integrators fällt heraus. Der Eingangswiderstand solcher Instrumente liegt zwischen 10 MΩ und 5 GΩ; ihre Auflösung beträgt 50 µV.

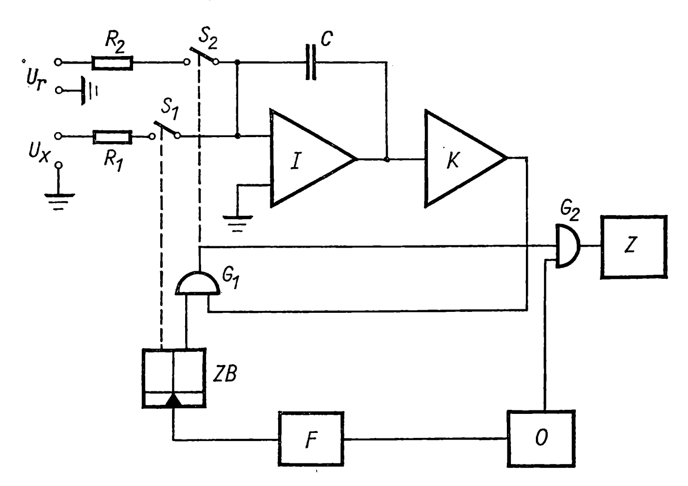


Abb. 2.96 Digitalvoltmeter nach dem Dual-Slope-Verfahren

2.36 Messung hoher Spannungen

2.361 Elektrostatische Methoden

Zur Messung hoher Gleichspannungen sind die in § 2.16 beschriebenen *elektrostatischen Voltmeter* geeignet. Absolutmessungen lassen sich mit dem Schutzringelektrometer (s. Abb. 2.19, S. 54) durchführen, wobei nach Brooks et al. [*2.18*] eine Genauigkeit von 10^{-4} erzielbar ist.

Elektrostatische Instrumente für kleine Spannungen lassen sich in Kombination mit einem *kapazitiven Spannungsteiler* zur Messung hoher Spannungen verwenden. Er besteht aus zwei in Serie geschalteten Kapazitäten C_1 und C_2, wobei $C_2 \gg C_1$ ist und die an C_2 liegende Teilspannung $U_2 = UC_1/(C_1 + C_2)$ mit dem Instrument gemessen wird, dessen Eigenkapazität gegen C_2 vernachlässigbar sein muß. Die gesuchte Spannung ergibt sich damit aus:

$$U_x = \frac{C_1 + C_2}{C_1} U_2 .$$

Das Übersetzungsverhältnis des Spannungsteilers läßt sich bequem aus Wechselspannungsmessungen ermitteln.

Über ein Hochspannungsvoltmeter für Absolutmessungen s. [*2.59*].

Auch die in § 2.17 behandelten *Rotationsvoltmeter* werden vor allem als Hochspannungsmeßgeräte benutzt. Da sie die am Meßort herrschende elektrische Feldstärke messen, können beliebig hohe Spannungen bei bekannter Feldgeometrie erfaßt werden. Solche vielseitig anwendbaren Instrumente, die von 3 V bis 350 kV benutzbar sind, werden von KNAUER [*2.89*] und KIND [*2.87*] näher beschrieben.

2.362 Spannungsteilung durch Widerstände

Hohe Gleichspannungen werden am häufigsten mit Hilfe einer Widerstandskette gemessen, die an der Gesamtspannung U_x liegt, wobei sich nach Abb. 2.97 die gesuchte Spannung aus der Beziehung

$$U_x = i_1 R_i \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) + i_1 R_1$$

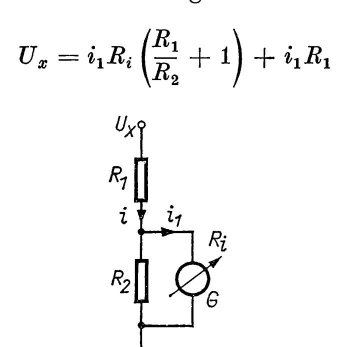


Abb. 2.97 Hochspannungsmessung mit Spannungsteiler

ergibt. Darin bedeutet R_1 einen hohen Vorschaltwiderstand, R_2 den Teilwiderstand und $R_i \gg R_2$ den Innenwiderstand des Spannungsmessers G, durch den der Teilstrom i_1 fließt. Da $i_1 R_i = U$ die an G gemessene Spannung ist, wird

$$U_x \approx U \frac{R_1}{R_2} = \ddot{u} U,$$

wenn $\ddot{u}$ das Übersetzungsverhältnis des Spannungsteilers ist, und $R_1 \gg R_2$. Der Querstrom i durch den Spannungsteiler ist durch die maximal zulässige Leistung $P_R = i^2 R_1$ begrenzt. Die Verlustleistung P_R in R_1 hängt mit der im Anzeigeinstrument verbrauchten Leistung P_G wie folgt zusammen:

$$P_R = P_G \ddot{u} \frac{R_1}{R_2}.$$

Mißt man die Spannung U_x mit $R_2 = \infty$ mit einem Strommesser vom Innenwiderstand R_i, so wird $U_x = i_1(R_1 + R_i)$. Bei bekannter Instrumenten-

empfindlichkeit hängt die erzielbare Genauigkeit weitgehend von der genauen Kenntnis der Widerstandswerte ab (vgl. a. § 9.42).

Für sehr genaue Messungen bestimmt man den Spannungsabfall iR_2 mit Hilfe der Kompensationsmethode (s. § 2.34). Nach RYMER und WRIGHT [*2.158*] ist nach dem Spannungsteilerverfahren eine Genauigkeit von 10^{-4} erreichbar.

2.363 Vergleich mit Spannungsquellen bekannter Größe

Dieses Verfahren geht davon aus, hohe Spannungen durch Trockenbatterien herzustellen und diese in einer Kompensationsschaltung mit der gesuchten Spannung von etwa derselben Größe zu vergleichen. WITT [*2.196*] benutzt hierzu Zellen kleiner Größe und vergleicht sie einzeln mit dem Weston-Normalelement. Durch Vergleich von 6 je in Serie geschalteten Einzelzellen mit 4 weiteren Batterien werden Einheiten von etwa 30, 150, 300 und 600 V zusammengestellt, bis schließlich 48 kV in Einzelbatterien von $10 \times 1{,}2$ kV, 1×12 kV und 1×24 kV zur Verfügung stehen, die untereinander bei konstanter Temperatur schrittweise verglichen werden können. Die Maximalspannung von etwa 50 kV ist mit einer Genauigkeit von 10^{-5} bekannt; der relativ hohe Temperaturkoeffizient beträgt $1{,}3 \cdot 10^{-4}$/grd, und ein Belastungsstrom von 1 nA ergibt einen Spannungsabfall von 10^{-6} der Gesamtspannung [*2.169*].

2.364 Messung der Absolutspannung mittels Elektroneninterferenzen

Ein paralleler Elektronenstrahl, der einen sehr dünnen polykristallinen Metallfilm durchsetzt, liefert Beugungsinterferenzen, für deren Glanzwinkel φ die Bragg-Beziehung

$$\sin \varphi = \frac{n\lambda}{2d} \tag{2/139}$$

gilt, wenn λ die deBroglie-Wellenlänge der monoenergetischen Elektronen und d den Netzebenenabstand des Präparats bedeuten. Mit $\lambda = h/mv$ (h Plancksches Wirkungsquantum, m Elektronenmasse und v deren Geschwindigkeit) findet man mit $v = \sqrt{2eU/m}$ die Wellenlänge der Elektronen für die Beschleunigungsspannung U zu

$$\lambda = \sqrt{\frac{150}{U}}\ \text{Å}. \tag{2/140}$$

Die Netzebenenabstände d sind für die meisten Elemente und Gitterorientierungen bekannt, so daß aus den gemessenen Beugungswinkeln φ mit Hilfe von Gl. (2/140) die gesuchte Beschleunigungsspannung berechnet werden kann.

Diese Methode ist auf Spannungen zwischen 1 und 100 kV beschränkt, da wegen der großen Ablenkung und Absorption der Elektronen nur Schichtdicken von der Größe 0,1 nm angewandt werden können. Für mittelschnelle Elektronen liegt der Beugungswinkel bei 20°; die Ausmessung wird auf der Fotoplatte vorgenommen.

2.365 Spannungsmessung mittels Stark-Effekt

Nach BEERS [2.5] lassen sich mit Hilfe des Stark-Effekts sehr genaue Messungen der elektrischen Feldstärke und (bei bekanntem Elektrodenabstand) der elektrischen Spannung ausführen. Der Effekt besteht darin, daß z. B. im einfachsten Fall des H-Atoms dessen Energieniveaus gewöhnlich entartet sind (die energetischen Zustände für gleiche Hauptquantenzahl n, aber unterschiedliche Drehimpulsquantenzahl l fallen zusammen), die Entartung in einem elektrischen Feld aufgehoben wird und jedes Niveau in $2n - 1$ äquidistante Teilniveaus aufspaltet. Für den *linearen* Effekt gilt die Beziehung

$$Ed = U = a(f_1 - f_0),$$

wenn U die angelegte Spannung, a die Aufspaltungskonstante, f_0 die Frequenz der nichtaufgespaltenen und f_1 die der aufgespaltenen Stark-Komponente ist. Für kompliziertere Moleküle tritt anstelle der obigen Gleichung eine Reihenentwicklung, in der nichtlineare Anteile für U erscheinen.

Die Meßmethode besteht darin, daß mit einem Absorptionsspektrometer der Frequenzunterschied $f_1 - f_2$ mit einem UHF-Sender unmittelbar gemessen wird und U aus dem z. B. interferometrisch bestimmten Abstand d der Elektroden ermittelt wird, wobei eine Genauigkeit von 10^{-5} erzielbar ist (vgl. § 11.65 als Analogon der magnetischen Aufspaltung). Bei *Methylfluorid* (CH_3F) findet man für $U/d = 10$ kV/cm eine Aufspaltung von 4,5 GHz.

2.366 Hochspannungsmessung mittels elektrooptischem Effekt

Der elektrooptische Effekt besteht darin, daß Flüssigkeiten und Festkörper bestimmter Kristallklassen mit elektrischem Dipolmoment im elektrischen Feld *doppelbrechend* werden.

In der von NAMBA [2.125] beschriebenen Anordnung nach Abb. 2.98 wird eine in Z-Richtung geschnittene parallele Platte E aus *Ammoniumorthophos-*

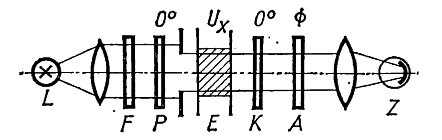


Abb. 2.98 Hochspannungsmessung mit elektrooptischem Kerr-Effekt

phat ($NH_4H_2PO_4$) benutzt, an der die Meßspannung U_x in Z-Richtung ein elektrisches Feld erzeugt. Hierdurch wird der optisch einachsige Kristall doppelbrechend, d. h., zwei unter 90° polarisierte Schwingungsebenen erhalten nach Durchlaufen der Schichtdicke d den Gangunterschied

$$\Delta\lambda = \frac{d}{\lambda_0}(n_1 - n_2) = r_{63} n_0^3 \frac{U_x}{\lambda_0}. \tag{2/141}$$

Darin ist r_{63} der *elektrooptische Koeffizient* für ein Z-Feld, n_0 der Brechungsindex ohne Feld und λ_0 die Vakuumwellenlänge des benutzten Lichts. Die

Meßanordnung besteht aus der Lichtquelle L, dem Filter F, einem Polarisator P, der $\lambda/4$-Platte K, dem Analysator A, der Fotozelle Z als Empfänger sowie aus zwei Objektiven zur Herstellung eines parallelen Strahlenbündels. Ist φ der Polarisationswinkel zwischen P und A, so gilt für die auf Z fallende Intensität:

$$I(\Delta) = \cos^2(\pi\Delta - \varphi),$$

die für $\Delta = (\pi/2 + \varphi)/\pi$ Null wird. Zur Spannungsmessung wird A gegen die Nullstellung um den Winkel φ' verdreht, damit $I(\Delta) = 0$ wird, und es gilt für die gesuchte Spannung:

$$U_x = \frac{\lambda_0}{r_{63} n_0^3} \frac{\varphi'}{\pi} = K\varphi'.$$

Für $\lambda_0 = 5000$ Å, $n_0 = 1{,}5246$, $r_{63} = 8{,}48 \cdot 10^{-7}$ cm/kV findet man $K = 0{,}0924$ kV/grd. Der Winkel φ' ist nach Gl. (2/141) eine lineare Funktion von U_x und kann auf 1% genau bestimmt werden. Die obere Meßgrenze ist durch die Durchbruchsspannung des Kristalls bestimmt.

In ähnlicher Weise ist nach WUNSCH und ERTEZA [*2.200*] der elektrooptische Kerr-Effekt zur Hochspannungsmessung angewandt worden. Zum Unterschied gegenüber dem vorigen Verfahren wird das elektrische Feld senkrecht zur Beobachtungsrichtung angelegt und ein Gangunterschied

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{l}{\lambda_0}(n_p - n_s) = BlE_x^2 = Bl\frac{U_x^2}{d^2} \qquad (2/142)$$

erhalten, wenn zwischen den Elektroden im Abstand d die gesuchte Spannung U_x gelegt wird. Die Brechungsindizes n_p und n_s beziehen sich auf die parallele oder senkrechte Lage des elektrischen Lichtvektors in bezug auf das angelegte Feld. Die als Kerr-Konstante bezeichnete Größe B ist eine Stoffkonstante, die vom elektrischen Dipolmoment und der Konzentration abhängt. Polarisator und Analysator sind gegeneinander um 90°, gegen die Feldrichtung in der *Kerr-Zelle* um 45° verdreht, so daß für $U_x = 0$ die Intensität nach dem Analysator Null ist. Der durch U_x erzeugte Gangunterschied nach Gl. (2/142) wird durch Drehen des Analysators oder mit Hilfe eines Kompensators abgeglichen. Für *Nitrobenzol* ($C_6H_5NO_2$) wird bei 20°C und $\lambda_0 = 5461$ Å die Kerr-Konstante $B = 4{,}30 \cdot 10^{-10}$ cm/V². Mit $d = 0{,}3$ cm, $l = 3$ cm findet man für $U_x = 10$ kV einen Gangunterschied von $\Delta\lambda/\lambda_0 \approx (4/3) \cdot 2\pi$. Da $\Delta\lambda \sim U_x^2$, ist diese Methode auch für Wechselspannungen und wegen der kleinen Relaxationszeit für Frequenzen bis zu 100 MHz anwendbar. Die Genauigkeit bei Gleichspannungsmessungen beträgt 0,1%.

2.37 Gleichstrommessung

Nach § 1.24 ist die Einheit der elektrischen Stromstärke durch Kraftwirkungen zwischen stromdurchflossenen Leitern bekannter Geometrie definiert, wozu Stromwaagen verschiedener Konstruktion (§ 2.371) benutzt werden. Praktisch ist das *Ampere* durch die Spannung des internationalen Weston-Normalelements und durch das internationale *Ohm* nach dem Ohmschen

Gesetz festgelegt; Gebrauchsmessungen werden mit dem *Drehspulinstrument* mit Nebenschluß zur Erweiterung des Meßbereichs (s. § 2.372) durchgeführt. Die genauesten Strommessungen erfordern die *Kompensationsmethode,* wobei der Spannungsabfall an einem Normalwiderstand gemessen wird. Sehr kleine Ströme unterhalb von 1 nA können nicht mehr direkt mit hochempfindlichen Galvanometern gemessen werden, sondern werden in *Gleichstromverstärkern* und *Integratoren* (§ 2.374) nachverstärkt.

2.371 Stromwaagen

Für fundamentale Strommessungen nach der Definition durch das Biot-Savartsche Gesetz nach Gl. (1/3) lassen sich *Stromwaagen* mit zwei vom Meßstrom durchflossene Spulen verwenden, von denen eine beweglich an einem Waagebalken aufgehängt ist und zur Kraftmessung dient.

Bei der Rayleigh-Waage befindet sich die bewegliche Flachspule vom Radius R_1 koaxial zwischen zwei größeren vom Radius R_2, deren gegenseitiger Abstand $2a \approx R_2$ ist, während $R_2/R_1 \approx 2$ ist. Da die Kraft zwischen den beiden vom gleichen Strom i durchflossenen Spulen $F = i^2(\partial M/\partial a)$ ist (M ihre Gegeninduktivität, a ihr Abstand), gilt für die Rayleigh-Anordnung:

$$F = i^2 \left(\frac{\partial M'}{\partial a} - \frac{\partial M''}{\partial a} \right) = 2 i^2 \frac{\partial M}{\partial a}.$$

Zur Stromzuführung werden dünne Bänder oder verseilte Drähte benutzt.

Die vom *National Physical Laboratory* (England) benutzte Stromwaage nach AYRTON, MATHER und SMITH (1908) besitzt zwei feste Zylinderspulen mit 33 cm Durchmesser und 13 cm Höhe und eine bewegliche Spule von 20,5 cm Durchmesser und gleicher Höhe, die koaxial innerhalb der Festspulen aufgehängt ist.

Die Stromwaage nach HELMHOLTZ besteht aus einer größeren Flachspule mit horizontaler Achse und einer kleineren, die symmetrisch innerhalb der ersten, jedoch mit senkrechter Achse angeordnet ist. Das auf die kleine Spule ausgeübte Drehmoment um die in der Ebene der großen Spule liegende Achse wird durch Gewichte kompensiert. Die nur 5 μm dicken Stromzuleitungsbänder dienen gleichzeitig als reibungsarme Lagerung für die kleinere Spule.

2.372 Amperemeter

Zur unmittelbaren Strommessung kommt in erster Linie das *Drehspulinstrument* (s. § 2.22) in Frage, das durch seinen Innenwiderstand R_i, seine Stromempfindlichkeit S_i bzw. durch den Maximalstrom bei Vollausschlag gekennzeichnet ist. Zur Erweiterung des Meßbereichs wird parallel zu den Instrumentenklemmen ein *Nebenschlußwiderstand* R_n geschaltet, der meist aus *Manganin* mit sehr kleinem Temperaturkoeffizienten des Widerstandes besteht. Ist I der Gesamtstrom und i der durch das Meßsystem fließende Strom, so gilt:

$$I = i \frac{R_i + R_n}{R_n} \approx i \frac{R_i}{R_n}, \tag{2/143}$$

da $R_n \ll R_i$ ist.

Bei Präzisionsgeräten wird der Nebenschlußwiderstand (*Shunt*) gesondert an die Meßklemmen angeschlossen. Für Meßströme bis zu 1,5 kA besteht er aus genau abgeglichenen Manganinstäben mit hart angelöteten Klemmschuhen, bei Meßbereichen bis 150 A aus gefaltetem Manganinblech in einem durchbrochenen Blechgehäuse, das die konvektive Wärmeabfuhr erlaubt. Für kleinere Ströme sind die Widerstände drahtgewickelt; meist sind die Shunts für mehrere Meßbereiche in einem Gehäuse untergebracht.

Bei Betriebsinstrumenten mit geringerer Genauigkeit werden durch einen Umschalter die Meßbereiche eingestellt, wie in Abb. 2.99 dargestellt ist. Die einzelnen Nebenschlußwiderstände R_{n1}, R_{n2} usf. sind so bemessen, daß $I/i = 3$,

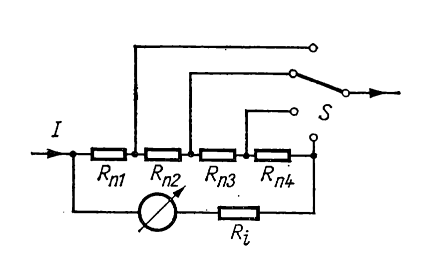


Abb. 2.99 Meßbereichschaltung für Amperemeter

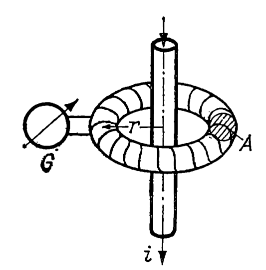


Abb. 2.100 Fluxmetrische Messung starker Ströme

10, 30, 100, ... wird und nach Gl. (2/143) die nicht von I durchflossenen Widerstände R_{n3}, R_{n4} zu R_i addiert werden müssen. Der gesamte Innenwiderstand R_i' beträgt dann

$$R_i' = \frac{R_i R_n}{R_i + R_n} = \frac{i}{I} R_i .$$

In modernen *Vielfachmeßinstrumenten*, deren Meßbereiche zwischen 2 µA und 1 A umgeschaltet werden können, werden Transistorvorverstärker eingebaut.

2.373 Strommessung durch Kompensation

Für sehr genaue Strommessungen werden die in § 2.34 besprochenen *Kompensationsapparate* benutzt, wobei der gesuchte Strom i aus dem gemessenen Spannungsabfall iR_n an einem bekannten Normalwiderstand R_n bestimmt wird. Diese Methode ist sowohl für sehr kleine als auch für große Ströme im kA-Bereich anwendbar. Die notwendigen Normalwiderstände (s. § 9.33) sind mit zusätzlichen Potentialklemmen innerhalb des Strompfades versehen.

2.374 Messung sehr starker Ströme

Für Ströme oberhalb von 10 kA wird das Verfahren mit Nebenschlußwiderständen unbequem und ungenau. In diesem Strombereich ist es vorteilhafter, die gesuchte Stromstärke aus den magnetischen Stromwirkungen abzuleiten. Zu diesem Zweck wird — wie in Abb. 2.100 dargestellt — um den stromführenden Leiter ein gleichmäßig bewickeltes Toroid vom Querschnitt A

und vom mittleren Radius r gelegt. Der Meßstrom i erzeugt darin den magnetischen Fluß

$$\Phi = \mu_0 \frac{iA}{2\pi r}, \tag{2/144}$$

wenn $\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-8}$ Vs/Acm die magnetische Feldkonstante ist. Bei bekannter Windungszahl der Toroidspule kann mit Hilfe von Gl. (2/144) und eines *Fluxmeters G* (§ 2.217) der Strom i gefunden werden. Da alle Fluxmeter eine endliche Rückfallzeit besitzen, ist diese Methode nur für kurz dauernde Messungen geeignet.

Von FORTRAT [*2.56*] werden die zu messenden Ströme bis zu 100 kA durch zwei parallele Kupferplatten als Hin- und Rückleitung geführt und das dazwischen erzeugte Magnetfeld mit einer magnetischen Waage ausgemessen.

Anstelle des Toroids in Abb. 2.100 wird bei vielen Verfahren ein Eisenjoch mit einem oder zwei symmetrischen Luftspalten um den stromführenden Leiter gelegt. Da wegen des meist zu vernachlässigenden Durchflutungsbedarfs für den Eisenweg die Luftspaltinduktion innerhalb eines großen Feldstärkebereichs eine lineare Funktion von i ist, kann der gesuchte Strom aus der Beziehung

$$i = Hd$$

bestimmt werden, wenn H die magnetische Feldstärke im Luftspalt von der Breite d ist. Für das Joch wird meist lamelliertes Eisenblech mit steiler Magnetisierungskurve, hoher Sättigungsinduktion und kleiner Remanenzinduktion, wie z. B. kalt gewalztes Fe—Si-Blech, verwendet. Die Feldstärke im Luftspalt läßt sich z. B. mit Hilfe eines Drehspulsystems messen, dessen Ausschlag bei bekanntem Spulenstrom der magnetischen Feldstärke und damit dem gesuchten Strom i proportional wird. Eine besonders einfache Methode wird von KUHRT und MAAZ [*2.96*] sowie von BORKMANN [*2.12*] angegeben, wonach mit Hilfe eines Hall-Generators (s. § 11.71) die dem Meßstrom proportionale Luftspaltinduktion bestimmt wird.

NIESEN [*2.128*] gibt ein Differentialverfahren auf der Basis der Abb. 2.100 an, bei dem durch eine zweite Toroidwicklung die vom gesuchten Strom erzeugte Durchflutung kompensiert werden kann, wobei das Fluxmeter als Nullindikator arbeitet. Weitere Methoden s. SERVANT [*2.168*].

2.38 Stromintegration, Ladungsmessung

Zur Messung sehr kleiner, zeitlich veränderlicher Ströme genügt es oft, die *Ladung* $Q = \int i \, \mathrm{d}t$ für eine bestimmte Meßzeit zu kennen. Für diese Integration kommen *ballistische Galvanometer* (§ 2.216) bei kürzeren Meßzeiten, sonst *Stromintegratoren* in Betracht, bei denen eine Kapazität durch den Meßstrom aufgeladen wird.

2.381 Ballistische Messung der Ladung [*2.57*]

Für die Kapazität C, die auf die Spannung U_0 aufgeladen und über ein Galvanometer entladen wird, gilt die Beziehung:

$$\frac{Q}{C} + iR + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + q\dot{\varphi} = \frac{Q_0}{C} = U_0. \tag{2/145}$$

Dabei sind R und L ohmscher Widerstand und Induktivität des Galvanometers mit der dynamischen Galvanometerkonstanten q nach Gl. (2/69). Multipliziert man Gl. (2/145) mit $i = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$, so folgt:

$$\frac{Q}{C}\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right) + i^2 R + L i \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + q \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\dot{\varphi} = \frac{Q_0}{C}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \tag{2/146}$$

woraus sich nach Gl. (2/61 a) $q\int i\,\mathrm{d}t = qQ = I\dot{\varphi}$ und mit der Nebenbedingung $\dot{\varphi}(0) = 0$ die Beziehung

$$\dot{\varphi} = \frac{q}{I} Q \tag{2/147}$$

ergibt. Setzt man Gl. (2/147) in Gl. (2/146) ein und integriert über die Meßzeit τ, so ergibt sich

$$\frac{Q_0^2}{2C} + \int_0^\tau i^2 R\,\mathrm{d}t + \frac{q}{2I} Q_0^2 = \frac{Q_0^2}{C}$$

und daraus

$$\frac{Q_0^2 q^2}{2I} + \int_0^\tau i^2 R\,\mathrm{d}t = \frac{Q_0^2}{2C}. \tag{2/148}$$

Der erste Term in Gl. (2/148) stellt die mechanische Energie des Meßwerks $(I/2)\dot{\varphi}^2$ dar, die sich beim Maximalausschlag φ_m in die elastische Energie $D\varphi_m^2/2$ verwandelt; der zweite Term ist die Joulesche Wärme während des Entladevorgangs und $Q_0^2/2C$ die bei $t = 0$ vorhandene elektrische Energie. In der Form

$$\int_0^\tau i^2 R\,\mathrm{d}t = \frac{Q_0^2}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{q^2}{I}\right) \tag{2/148a}$$

stellt die Joulesche Wärme die Differenz von elektrischer und mechanischer Energie dar, die immer größer als Null ist. Da $1/C : q^2/I$ von der Größe 10 bis 1000 ist, läßt sich aus Gl. (2/148a) ein sehr schlechter „Wirkungsgrad" des ballistischen Galvanometers ableiten.

2.382 Aufladen eines Kondensators

Wird eine Kapazität C durch einen Strom $i(t)$ aufgeladen, so gilt für Spannung bzw. Ladung von C:

$$U_C = \frac{1}{C}\int_0^t i\,\mathrm{d}t; \qquad Q_C = \int_0^t i\,\mathrm{d}t = C\,U_C(t). \tag{2/149}$$

Um die in Gl. (2/149) niedergelegte Meßvorschrift mit großer Genauigkeit realisieren zu können, muß der Verluststrom des Kondensators kleiner als $10^{-3}\,i(t)$ sein und darf die Messung von U_C weder die Größe von C verändern noch einen mit $i(t)$ vergleichbaren Strom erfordern. Da U_C hohe Werte an-

nehmen kann, die den Meßvorgang, wie z. B. die Messung von Elementarteilchenströmen im Faraday-Käfig, störend beeinflussen können, wird man den Maximalwert von U_C meist auf nur einige Volt begrenzen. Für die Messung von U_C kommen daher empfindliche elektrostatische Instrumente und vor allem Elektrometerverstärker (s. § 2.32—3) in Betracht.

2.383 Stromintegratoren

Die Methode nach § 2.382 besitzt den Nachteil geringer Genauigkeit und Anpassungsfähigkeit. Sie läßt sich verbessern, wenn C durch den Meßstrom $i(t)$ aufgeladen, bei Erreichen einer bestimmten Spannung wieder entladen wird und sich dieser Zyklus wiederholt. Die Gesamtladung ergibt sich aus der Zahl der erfolgten Entladungen, die durch ein Zählwerk registriert werden.

Auf dieser Grundlage beruht der von Higinbotham und Rankowitz [*2.70*] angegebene kombinierte Strommesser und -integrator, der schematisch in Abb. 2.101 dargestellt ist. Der Verstärker V ist über die Kapazität C und den Widerstand R_1 rückgekoppelt und enthält im Ausgang das mA-Meter M mit dem Vorwiderstand R_m. Ist C über das Relais S kurzgeschlossen, so stellt V einen gewöhnlichen rückgekoppelten Verstärker dar, an dessen Ausgangswiderstand die Spannung

$$u_3 = A\,u_1 = R_1 i_1 \frac{A}{A+1}$$

entsteht, wenn A der Verstärkungsfaktor von V ist. Für großes A ergibt sich die einfache Beziehung:

$$i_1 = \frac{A+1}{A}\,\frac{u_3}{R_1} \approx \frac{u_3}{R_1} \approx i_3\,\frac{R_m}{R_1}, \tag{2/150}$$

die allgemeine Bedeutung hat.

Ist S geöffnet, so lädt sich der Kondensator auf die Spannung $u_C = \int i\,\mathrm{d}t/C$ für $i_1 \ll i_3$ auf, die sich mit Gl. (2/150) zu

$$u_C = \frac{R_1}{C R_m} \int i_1\,\mathrm{d}t \tag{2/151}$$

berechnet. Erreicht u_C die im Trigger-Kreis T (s. § 5.54) vorgegebene Spannung, so gelangt ein Impuls zum Zähler Z, der gleichzeitig den Schalter S schließt und dadurch C entlädt. Die gesuchte Gesamtladung berechnet sich aus Gl. (2/150) zu

$$Q = \int i_1\,\mathrm{d}t = u_C C \frac{R_m}{R_1}\,n,$$

wenn der Kondensator n-mal entladen wird.

Die mit dieser Methode erreichbare Genauigkeit hängt von der Konstanz der Triggerspannung und der maximalen Aufladespannung u_C ab. Bei einem Fehler von 10 mV in der Triggerspannung muß bei einer geforderten Meßgenauigkeit von $1^0/_{00}$ der Meßkondensator mindestens auf 10 V aufgeladen werden, was für viele Anwendungsfälle zu hoch sein kann.

Von LEWIS und COLLINGE [*2.99*] wird dies dadurch umgangen, daß der Kondensator nach Erreichen seiner Maximalspannung nur teilweise entladen wird. Hierzu wird die in Abb. 2.102 dargestellte Prinzipschaltung mit zwei Kondensatoren C_1 und C_2 benutzt, von denen der zweite durch die Batterie B immer auf die konstante Spannung U_2 aufgeladen wird. Hat der Ladekondensator C_1 einen vorgegebenen Grenzwert U_1 erreicht, wird C_2 durch das Relais R parallel zu C_1 geschaltet und im Triggerkreis T der Umschaltimpuls für R ausgelöst. Dadurch wird von der Ladung $C_1 U_1$ die konstante Ladung $U_2 C_2$ abgeführt, und die gesuchte Ladung $\int i\,\mathrm{d}t$ berechnet sich aus der Anzahl der Entladungen $C_2 U_2$ zu

$$Q = U_2 C_2 f t \frac{1 - U_1/U_2}{1 - C_2/C_1}.$$

Dabei ist f die Schaltfrequenz des Relais und t die Meßzeit; U_1/U_2 und C_2/C_1 sind von der Größe 0,01 und einander gleich. Damit vereinfacht sich die obige Formel, und man erhält mit $C_1 = 1$ nF, $C_2 = 10$ pF, $f = 0{,}1$ Hz und

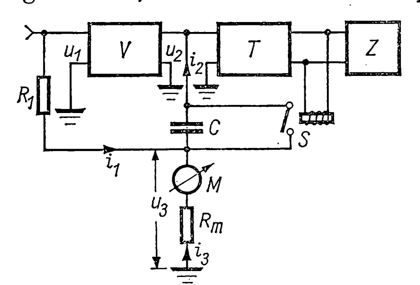


Abb. 2.101 Strommesser und Integrator nach [*2.70*]

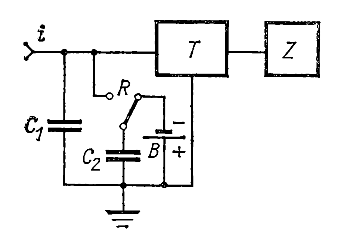


Abb. 2.102 Stromintegrator mittlerer Empfindlichkeit

$U_2 = 100$ V eine Meßgrenze von 100 pA. Empfindliche Stromintegratoren nach diesem Prinzip oder auch nach dem der direkten Ladungsmessung mit rückgekoppeltem Verstärker sind von WATTS [*2.193*], FEASTER et al. [*2.52*], DEKABRUN [*2.35*], KURASCHOV und LINEW [*2.97*], ROGERS [*2.152*] sowie MADEY und FARLY [*2.106*] angegeben worden.

WATSON und SHARBAUGH [*2.192*] geben zur Kurzzeitmessung sehr kleiner Ströme beim Stromtransport in Isolatoren eine Rechteckimpulsmethode an, mit der 1 µA während 1 µs auf etwa 5% genau gemessen werden kann.

Stromintegratoren und Faraday-Käfige zur Messung des Strahlstromes in Beschleunigern lassen sich nach Verfahren eichen, die von ROYDEN und CALDWELL [*2.155*], PALMIERI und GOLOSKIE [*2.136*] und FOH [*2.55*] angegeben werden. Von FOH wird die verstärkte Ladespannung des Auffängers mit Hilfe eines *Analog-Frequenzwandlers* (s. § 6.84) in eine zum Eingangssignal proportionale Impulsfrequenz umgesetzt, so daß die gezählten Impulse der gesuchten Ladung entsprechen; über einen Strom-Frequenz-Konverter für Ströme zwischen 1 µA und 100 pA s. TAYLOR [*2.182a*].

Über besondere Methoden zur Messung und Stabilisierung von Strahlströmen bei hohen Teilchenenergien s. Bd. V. Grundsätzliches über Ladungsmessung mittels gegengekoppelter Verstärker s. DUBRAU [*2.42*].

2.39 Messung der Gleichstromleistung

Zur Messung der Gleichstromleistung $P = Ui = i^2R$ werden die Strommeßgeräte des § 2.2 und die Spannungsmeßmethoden nach § 2.3 entsprechend dem Meßbereich und der erforderlichen Genauigkeit kombiniert. Besonders bequem und genau läßt sich die Leistung mit Hilfe des *Kompensators* (s. § 2.34) mit der in Abb. 2.103 dargestellten Schaltung messen. Dem vom Strom i_1 durchflossenen Verbraucher R ist der Normalwiderstand R_n vorgeschaltet, dessen Spannungsabfall $U_1 = i_1R_n$ am Kompensator K gemessen wird und den Strom i_1 liefert. Die an R liegende Spannung U wird direkt oder bei höheren Spannungen aus dem Verzweigungsverhältnis R_2'/R_2 eines parallel-

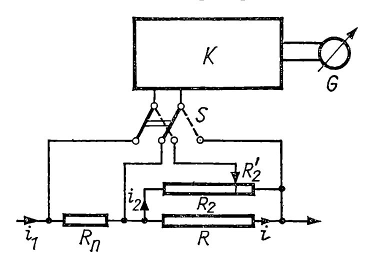


Abb. 2.103 Leistungsmessung mittels Kompensators

geschalteten Widerstandes R_2 bestimmt, da $U_2 = UR_2'/R_2$ ist. Der durch R fließende Strom i folgt aus der Beziehung $i = i_1 - i_2 = U_1/R_n - U_2/R_2'$; damit wird die gesuchte Leistung

$$P = Ui = \frac{U_2R_2'}{R_2}\left(\frac{U_1}{R_n} - \frac{U_2}{R_2'}\right).$$

Man wählt ein solches Widerstandsverhältnis, daß die beiden im Kompensator zu messenden Spannungen etwa gleich sind, damit beim Umschalten von U_1 auf U_2 durch den Schalter S der Meßbereich nicht verändert werden muß.

Bei zeitlich sich ändernder Leistung werden beide Spannungen gleichzeitig mit dem Kompensationsschreiber (s. § 2.343) registriert oder wird ein *Elektrodynamometer* (s. § 6.312) verwendet, das wie das Drehspulsystem aus einer hochohmigen Drehspule zur Spannungsmessung und einer dickdrähtigen Stromwicklung zur Erzeugung des Magnetfelds besteht.

Das Prinzip eines *elektronischen Leistungsmessers* mit Analog- oder Digitalausgang und hoher Genauigkeit ist in Abb. 2.104 dargestellt. Die Eingangsspannungen U_x und U_y sind Spannung und Strom des Lastwiderstandes proportional. Die Spannung u_2 am Ausgang des Integrators I hängt linear mit der Summe der über R_1 und R_2 zufließenden Ströme zusammen und wird im Komparator K mit der Dreiecksspannung u_3 des 200-kHz-Generators G verglichen. Für $u_2 = u_3$ gibt der Komparator einen Umschaltimpuls an den Schalter S_1, wodurch sich das Vorzeichen der an R_2 liegenden Referenzspannung U_r umkehrt. Da sich damit auch die Stromrichtung in R_2 im gleichen Takt ändert, ergibt sich der in Abb. 2.104b gezeigte steigende und fallende Verlauf von u_2. Der Mittelwert von u_2 wird um so höher liegen, je größer die Spannung u_x ist.

Die Verweildauer des Schalters S_1 liefert die gezeigte Rechteckfolge mit den Zeitdifferenzen t_1 und t_2, deren Verhältnis zu T eine lineare Funktion von U_x wird. Macht man die Amplitude der Rechteckfolge abhängig von U_y, so findet man das Produkt $U_x U_y$ aus dem Mittelwert der Rechteckfolge. Hierzu wird der Schalter S_2 mit S_1 gekoppelt, so daß er abwechselnd an $+U_y$ und $-U_y$ anliegt. Die Spannung $-U_y$ erhält man durch Multiplikation mit dem Faktor -1 über einen Rechenverstärker. Die Spannung u_4 ergibt sich als Rechteckspannung, deren Amplitude $\sim U_y$ und deren Breite $\sim U_x$ ist. Nach Mittelwertbildung durch das Tiefpaßfilter F wird die Ausgangsspannung $U_a \sim U_x U_y$.

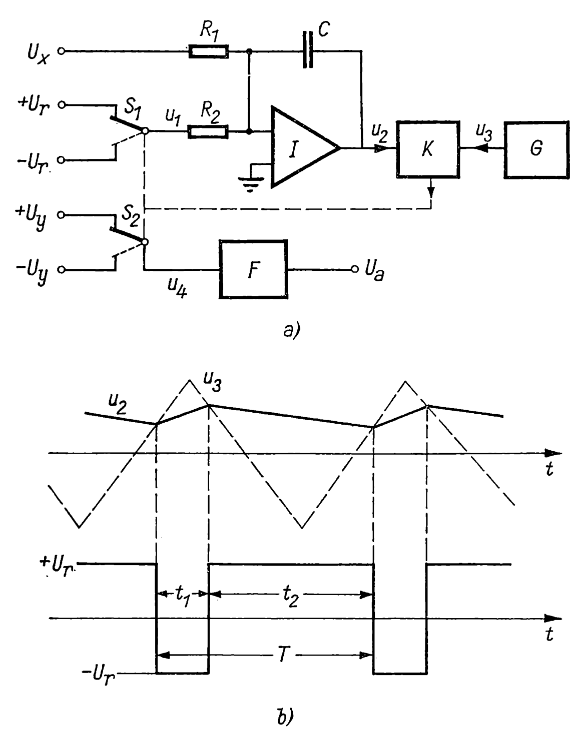


Abb. 2.104 Elektronischer Leistungsmesser

Dieses Verfahren ist auch für Wechselstrom bis zu 10 kHz anwendbar und liefert eine Genauigkeit von 0,02%.

2.4 Elektrische Feldmessung [*2.1, 2.172, 2.194*]

Bisher besprochene Methoden der Strom- und Spannungsmessung sind vorzugsweise für räumlich begrenzte Verbraucher geeignet. Andererseits gibt es eine Reihe von Problemen, bei denen in räumlich ausgedehnten Leitern oder Dielektrika die örtliche Stromdichte oder die elektrische Feldstärke gemessen

werden soll, wie etwa bei Erderwiderständen, Kontakten oder Hochspannungsisolatoren. Solche räumlichen Felder lassen sich mathematisch durch die *Potentialgleichung* beschreiben, deren Lösung aber nur bei einfachen Grenzbedingungen möglich ist. In den meisten Fällen von großem praktischem Interesse werden die Lösungen der Potentialgleichung mit experimentellen Methoden gesucht.

2.41 Potentialgleichung [*2.43*]

Die Berechnung elektrischer Felder im isolierenden Medium geht von der Definitionsgleichung für die elektrische Ladung aus, wonach das Oberflächenintegral der elektrischen Induktionsdichte $\boldsymbol{D}$ (Verschiebung) über eine geschlossene Fläche der eingeschlossenen Ladung Q entspricht, d. h.

$$Q = \oint \boldsymbol{D} \, \mathrm{d}\boldsymbol{A}. \tag{2/152}$$

Ist die Ladung eine Funktion des Ortes, so ergibt sich die *Raumladungsdichte* ϱ zu

$$\varrho = \lim \frac{Q}{V} = \frac{1}{V} \oint \boldsymbol{D} \, \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \operatorname{div} \boldsymbol{D}. \tag{2/153}$$

Ferner gilt zwischen elektrischer Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und Induktionsdichte $\boldsymbol{D}$ der lineare Zusammenhang

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \tag{2/154}$$

wenn ε_0 die elektrische Feldkonstante (absolute Dielektrizitätskonstante des Vakuums) und ε_r die (dimensionslose) Dielektrizitätskonstante des dielektrischen Mediums ist. Für ε_0 ist im Internationalen Einheitensystem (s. *Tabelle 1.3*) der Wert

$$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$$

einzusetzen. Für das raumladungsfreie Feld ergibt sich aus den Gln. (2/153) und (2/154) die Beziehung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0,$$

und da die Feldstärke $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ (Potential φ), folgt daraus die Laplacesche Differentialgleichung (1782):

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi = 0. \tag{2/155}$$

Sie lautet in verschiedenen Koordinaten:

$$\text{kartesische Koordinaten:}\ \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \tag{2/155a}$$

$$\text{Zylinder-Koordinaten:}\ \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \tag{2/155b}$$

Kugelkoordinaten:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \right]. \qquad (2/155\,c)$$

Durch Anwendung der *konformen Abbildung* lassen sich auch kompliziertere, zweidimensionale Probleme exakt lösen.

Grafische Methoden zur Ermittlung der Potentialverteilung (s. Abb. 2.105) beginnen an den Elektroden mit dem Einzeichnen der Niveaulinie (φ_i = const) und der senkrecht darauf stehenden Feldlinien. Dabei ist der Abstand a zweier Äquipotentiallinien der reziproken Feldstärke und der Abstand b zweier Feldlinien der reziproken Verschiebung $\boldsymbol{D}$ proportional. Da nach Gl. (2/154) zwischen $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{D}$ Proportionalität herrscht, muß das auch für a und b gelten. Die Konstruktion des Feldverlaufs wird besonders einfach, wenn man a und b gleich macht und durch eingeschriebene Kreise das ganze Feld in Quadrate

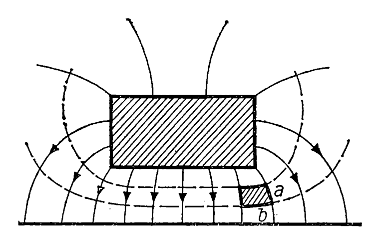


Abb. 2.105 Grafische Konstruktion eines zweidimensionalen Feldes

mit stetig sich ändernder Kantenlänge aufteilt. Selbstverständlich stehen die Feldlinien senkrecht auf den Elektroden. Für abschnittsweise sich ändernde Dielektrizitätskonstante ε_r muß gelten:

$$\varepsilon_r \frac{b}{a} = \text{const}. \qquad (2/156)$$

Für die etwas kompliziertere grafische Konstruktion von *rotationssymmetrischen* Feldern muß anstelle von Gl. (2/156) die Beziehung

$$\varepsilon_r r \frac{b}{a} = \text{const} \qquad (2/156\,a)$$

erfüllt werden, wenn r der mittlere Abstand des betrachteten Flächenelements $a \times b$ von der Rotationsachse ist.

Da die Grundgesetze des elektrostatischen Feldes bis auf die Stoffkonstanten mit denen des elektrischen Strömungsfeldes übereinstimmen, kann die grafische Methode auch für die Konstruktion von Strömungsfeldern benutzt werden. Anstelle von ε_r in den Gln. (2/156) und (2/156a) tritt lediglich die spezifische Leitfähigkeit σ. Von dieser Ähnlichkeit wird weitgehend bei der experimentellen Ausmessung von elektrischen Feldern im *elektrolytischen Trog* (s. § 2.43) Gebrauch gemacht.

2.42 *Elektrische Feldstärkemessung* [2.60, 2.63, 2.174]

Zur Ausmessung räumlich ausgedehnter elektrischer Felder sind die in § 2.17 besprochenen *Rotationsvoltmeter* als Feldstärkemesser besonders geeignet. Sie beruhen auf der Tatsache, daß die Meßelektrode periodisch vom wirkenden Feld abgeschirmt wird und die influenzierte Ladung der Feldstärke proportional ist. Die Influenzladung wird mit spannungsempfindlichen Verstärkern gemessen; als Antrieb dient ein Synchronmotor oder ein Tauchspulsystem. Nach diesem Verfahren lassen sich Feldstärken von der Größe 1 V/cm bis zu vielen kV/cm nachweisen, wobei die Eichung in einem durch zwei ebene Platten erzeugten Parallelfeld bekannter Feldstärke ausgeführt wird.

Grundsätzlich sind auch die meisten in § 2.1 besprochenen elektrostatischen Meßsysteme zur Feldmessung geeignet, wenn man die beweglichen Teile (Nadel) dieser Instrumente in das auszumessende Feld einbringt.

2.43 *Elektrolytischer Trog*

Der *elektrolytische Trog* [2.38, 2.86] dient zur experimentellen Lösung der Potentialgleichung (2/155) für komplizierte Randwertprobleme, die mathematisch nicht oder nur mit großem Zeitaufwand behandelt werden können. Hierbei wird vom *Ähnlichkeitstheorem* Gebrauch gemacht, wonach bei belie-

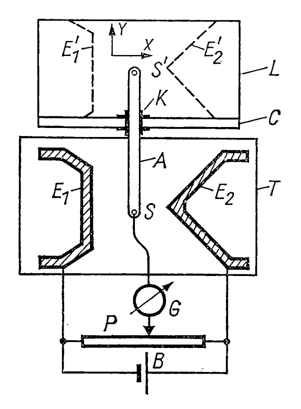


Abb. 2.106 Elektrolytischer Trog

biger Vergrößerung oder Verkleinerung der Anordnung Feld- und Potentialverlauf sich nicht ändern. Zum andern wird die formale Übereinstimmung der Gleichungen für das elektrostatische und Strömungsfeld dazu verwendet, elektrische Felder in einem schwach leitenden Elektrolyten durch Sonden auszumessen.

Der elektrolytische Trog besteht aus einer flachen Schale T aus Isoliermaterial, die mit einem schwachen Elektrolyten oder Leitungswasser gleich hoch gefüllt ist (Abb. 2.106). Die Randbedingungen sind durch entsprechende Metallelektroden E_1, E_2 vorgegeben, zwischen denen die Spannung der Batterie B angelegt ist. Die Potentialverteilung zwischen E_1 und E_2 wird mit der

Sonde S (Pt- oder Cu-Draht) ausgemessen, die etwa gleich tief wie die in den Trog gelegten Elektroden eintaucht. Das Sondenpotential wird mit dem Potentiometer P und dem Galvanometer G abgeglichen. Bei einer festen Einstellung an P durchfährt die Sonde für $i = 0$ eine Äquipotentialfläche bzw. -linie. Zur bequemen Übertragung der Meßergebnisse ist das zweite Ende des Sondenarmes A mit dem Schreibstift S' versehen. Durch eine Schlittenführung K, die sich in X-Richtung auf der Gleitschiene C bewegt, wird die Sondenposition auf dem Zeichentisch L abgebildet. Nach der Übertragung einiger Äquipotentiallinien können senkrecht hierzu die Feldlinien eingezeichnet werden, die senkrecht an den Elektroden einmünden. Durch einen Storchschnabel läßt sich das Feldbild vergrößern oder verkleinern.

Zur Vermeidung von Kontaktpotentialen an Sonde und Elektroden wird die Meßschaltung mit niederfrequentem Wechselstrom betrieben und das Nullinstrument als Vibrationsgalvanometer oder Lautsprecher ausgebildet. Meßfehler können durch den Trogrand in der Nähe der Elektroden und durch ungleiche Flüssigkeitstiefe verursacht werden.

Grundsätzlich ist dieses Verfahren auch für die Ausmessung *dreidimensionaler* Felder geeignet; s. SOFTKY und JUNGERMAN [*2.176*]. Durch Doppelsonden kann der maximale Feldgradient und damit die Richtung der Feldlinie bestimmt werden [*2.149*]. Von BURTT und WILLIS [*2.23*] wird das Versuchsmodell eines elektronischen Feldbildgerätes beschrieben, mit dem das ganze Feldlinienbild innerhalb von 1/25 s registriert wird.

Anstelle des Elektrolyten können auch leitfähiges Papier oder halbleitende Schichten benutzt werden, wobei die Elektroden mit Leitsilber aufgetragen werden. CLAUSSNITZER und NEUMANN [*2.29*] benutzen graphithaltiges Reflexpapier, das einen isotropen Flächenwiderstand besitzt. Mit keilförmigen Halbleitern lassen sich auch rotationssymmetrische räumliche Probleme lösen. HECHTEL [*2.67*] benutzt als Matrix ein Widerstandsnetzwerk, mit dem durch

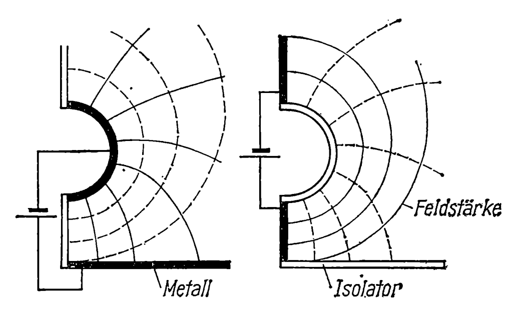


Abb. 2.107 Inversion von Feld- und Äquipotentiallinien

Einspeisen von Strömen auch Raumladungsfelder abgebildet werden können. Über ein Widerstandsnetzwerk zur Analyse rotationssymmetrischer Potentialfelder s. [*2.148*]. MURRAY und HOLLWAY [*2.124*] benutzen als Flächenwiderstand gewöhnliches Zeichenpapier, dessen Widerstand $1 \cdots 3$ GΩ für ein Quadrat beträgt, und als Elektroden Bleistiftstriche mit einem sehr viel kleineren Widerstand. Zur Potentialmessung dient ein hochohmiger Gleichspannungsverstärker

mit 100 TΩ Eingangswiderstand. Unterschiedliche Dielektrizitätskonstanten lassen sich durch veränderte Papierdicken oder -qualitäten nachbilden. Über andere Methoden zur Aufzeichnung zweidimensionaler Felder in nichthomogenen Medien s. [*2.140*].

Die Konstruktion der Feldlinien läßt sich wesentlich erleichtern, wenn man die Methode der *Inversion* zwischen Feld- und Potentiallinien anwendet, wie sie aus Abb. 2.107 hervorgeht. Die Randbedingungen des abzubildenden Feldes werden dabei so abgeändert, daß *a*) jeder Leiter (Elektrode) durch einen Nichtleiter und *b*) eine der Flächen, innerhalb derer im ursprünglichen Feld die Feldlinien verlaufen, durch eine Flächendoppelquelle ersetzt wird. Als solche kann eine Symmetrieebene dienen. Es entsteht ein neues inverses Strömungsfeld mit vertauschten Feld- und Äquipotentiallinien.

2.44 Elektrische Sonden [*2.80*]

Zur Ausmessung räumlich ausgedehnter elektrischer Felder, in erster Linie des *luftelektrischen Erdfeldes*, werden *Potentialsonden* benutzt, die man auch *Kollektoren* nennt. Ihr Potential gegen Erde wird mit einem *Elektrometer* (s. § 2.1) oder mit einem hochohmigen *Meßverstärker* gemessen, wobei die influenzierte Ladung im Gleichgewicht nach außen abgeführt werden muß.

Beim *Tropfkollektor*, der aus einer engen Glaskapillare besteht, nimmt jeder sich abschnürende Wassertropfen so lange Influenzladung des entsprechenden Vorzeichens mit, bis das Potential der Austrittsstelle mit dem zu messenden Potential übereinstimmt. Wirksamer sind die mit Druckluft betriebenen *Zerstäuberdüsen*, d. h., ihr Innenwiderstand ist viel kleiner als der des Tropfkollektors. Am bequemsten sind *Radiokollektoren* zu handhaben, die aus einem mit einem α-Strahler überzogenen Cu-Blech bestehen.

2.5 Gleichstromzählgeräte [*2.6*, *2.7*, *2.95*]

2.51 Elektrolytzähler

Elektrolytzähler sind *Coulombmeter*, bei denen eine elektrolytische Zersetzung stattfindet und die abgeschiedene Stoffmenge der durchgegangenen elektrischen Ladung proportional ist. Diese Geräte stellen demnach *Ah-Zähler* dar, deren Anzeige nur bei konstanter Spannung der *elektrischen Arbeit* (kWh) entspricht. Das Meßsystem ist geschlossen, um ein Verdunsten des Elektrolyten zu verhindern, und kann nach Erreichen der maximalen Meßanzeige wieder in den Anfangszustand zurückgeführt werden.

Der *Quecksilber-Elektrolytzähler* in Abb. 2.108 besteht aus der Glaszelle Z, die durch die poröse Zwischenwand W in den Anodenraum A und den Katodenraum K geteilt ist. Der Elektrolyt — eine Lösung aus HgJ_2 und KJ — kann durch das Röhrchen R in die Räume A und K gelangen. Die Anode A besteht aus Hg, die Katode aus der Kohleelektrode K', an der sich bei Stromdurchgang Hg ausscheidet und in kleinen Tropfen in das Meßrohr M mit der Skala S fließt. Ist M gefüllt, wird das Glasgefäß gekippt und das ausgeschiedene Hg nach A befördert. Vorbedingung für einen kleinen Meßfehler ist die Konstanz des Widerstandes der Meßzelle, die über den Vorwiderstand R_v parallel zu

einem geeichten Widerstand R_n im Hauptstromkreis liegt. Wegen der Polarisationsspannung an den Elektroden ergibt sich ein Fehler von 2% bei 10% des Maximalstroms. Der Teilstrom i_Z ist von der Größe 20 mA, wobei der Spannungsabfall $i_0 R_n$ etwa 1 V beträgt. Der negative Temperaturkoeffizient des Zellenwiderstandes wird kompensiert durch einen passenden positiven Temperaturkoeffizienten von R_v.

Beim *Wasserstoff-Elektrolytzähler* mit verdünnter Phosphorsäure als Elektrolyten entwickelt sich an der Katode bei Stromdurchgang H_2, dessen Menge 420 cm³/Ah bei Normalbedingungen beträgt. Der Wasserstoff verdrängt in einem senkrechten Rohr den Elektrolyten. Der negative Säurerest verbindet

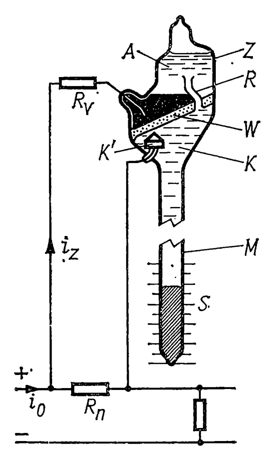


Abb. 2.108 Elektrolytzähler (Stia-Zähler)

sich an der Anode unter Bildung neuer Säure zu Wasser, wobei O_2 frei wird, der mit dem H_2 an der Anode Wasser bildet. Der Zellenstrom beträgt in diesem Gerät nur 0,1 mA, weshalb Vorsorge getroffen werden muß, um Isolationsströme im Nebenschluß zu verhindern.

2.52 *Magnetmotorzähler*

Motorzähler bestehen aus einer mehrspuligen Flach- oder Trommelwicklung, die im Feld eines Permanentmagneten oder einer stromdurchflossenen Spule ein dem Meßstrom proportionales Drehmoment M entwickelt.

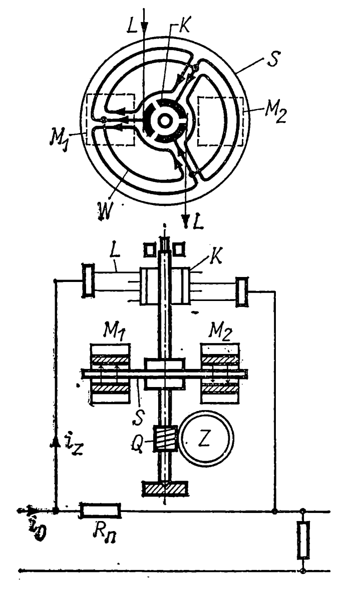
Der in Abb. 2.109 dargestellte *Magnetmotorzähler* besteht aus einer senkrecht gelagerten Al-Scheibe S mit einer dreiteiligen Flachwicklung W, deren Zuleitungen mit dem dreiteiligen Kollektor K verbunden sind. Der Anker befindet sich im Luftspalt der Permanentmagneten M_1 und M_2 mit entgegengesetzter Feldrichtung; der Ankerstrom wird dem Kollektor K durch dünne Bürsten L einer Au-Legierung zugeführt.

Das vom Anker erzeugte Drehmoment $M = c_1 i_z$ wird um das Bremsmoment $M' = c_2 B^2 n$ verringert, wenn B die Luftspaltinduktion der Magneten

und n die sekundliche Drehzahl ist. Mit $M = M'$ wird $n = c_1 i_z/(c_2 B^2) = c_3 i_z$. Andrerseits wird in der Ankerwicklung eine Gegen-EMK $e_z = c_4 n = c_3 c_4 i_z$ entwickelt und führt zur Klemmenspannung $u_z = i_z R_z + c_3 c_4 i_z = R_z' i_z$, wenn R_z der Widerstand der Läuferwicklung ist. Der Anker verhält sich also wie ein konstanter Widerstand R_z', dessen Klemmenspannung dem Spannungsabfall am Nebenschlußwiderstand $R_n i_0$ entspricht. Es wird daher

$$i_0 = \frac{R_z' i_z}{R_n} = \frac{R_z'}{R_n c_3} n = \int i_0 \, \mathrm{d}t,$$

d. h., die am Zählwerk Z angezeigte Umdrehungszahl n ist der zu messenden Ladung proportional. Zur Verringerung der Achsreibung wird das obere Lager als Halslager, das untere als Stützlager mit polierter und gehärteter Kugelfläche



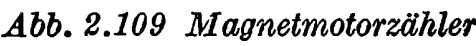


Abb. 2.109 *Magnetmotorzähler*

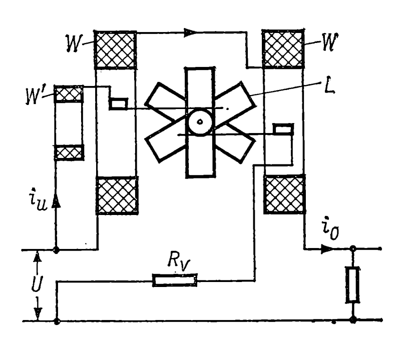


Abb. 2.110 *Elektrodynamischer Zähler*

und einem Lagerstein aus Rubin ausgebildet. Der verbleibende mittlere Meßfehler beträgt bei Nennstrom etwa $+3\%$, bei 5% des Nennstromes -2% und bei 10% etwa Null. Um den Eigenverbrauch klein zu halten, wählt man die Ankerspannung bei Nennlast zwischen 0,4 und 1 V. Gegen Temperaturschwankungen ist der Zähler unempfindlich, da sich die Momente M und M' im gleichen Maße ändern.

2.53 *Elektrodynamischer Zähler*

Im Gegensatz zum Magnetmotorzähler, der eigentlich ein Ah-Zähler ist, wird beim elektrodynamischen Zähler tatsächlich die Gleichstromarbeit $\int u i \, \mathrm{d}t$ gemessen. Wie aus Abb. 2.110 ersichtlich, enthält er einen dreiteiligen, eisen-

losen Läufer L, der sich im Magnetfeld der rechteckigen Wicklungen W mit senkrechter Achse drehen kann. Da die Magnetspulen vom Hauptstrom i_0, der Läufer von dem zur Spannung U proportionalen Teilstrom i_u durchflossen wird, ist das Drehmoment $M = c_1 i_u i_0$. Ähnlich wie beim Magnetmotorzähler wird in einer auf der Achse befestigten Al-Scheibe, die sich im Luftspalt eines Permanentmagneten dreht, ein Bremsmoment $M' = c_2 n$ erzeugt, so daß bei $M = M'$ die Drehzahl $n = c_1 i_u i_0 / c_2 = c_3 U i_0$ wird. Die vom Läufer erzeugte EMK von einigen hundert Millivolt kann gegen die Klemmenspannung U vernachlässigt werden. Das bei kleinen Meßströmen störende Lagerreibungsmoment wird durch die Hilfsspule W' unschädlich gemacht, die von i_u dauernd durchflossen wird. Um für $i_0 = 0$ die Drehung des Ankers zu verhindern, ist auf der Achse eine kleine eiserne Hemmfahne angebracht, die vom Bremsmagneten gehalten wird. Gewöhnlich beträgt das Drehmoment bei Nennlast etwa 10 cm p, die Nenndrehzahl $n = 50/\mathrm{min}$ und das Ankergewicht 100 bis 140 g. Die Anzeige kann durch einen passenden Vorwiderstand R_v temperaturunabhängig gemacht werden, da M und M' gleichen Temperaturverlauf zeigen, sofern die Luftspaltinduktion konstant bleibt. Da sie um etwa 0,3% bei 10 grd Temperaturerhöhung abnimmt, wird ein Teil von R_v aus Ni hergestellt, dessen Temperaturkoeffizient größer als der von Al und Cu ist.

Elektrodynamische Zähler sind fremdfeldempfindlich und weisen im Erdfeld und in der Nähe von Gleichstromsammelschienen Fehler auf. Diese Fehler werden beim *astatischen Zähler* mit einem Doppelanker auf einer gemeinsamen Achse vermieden, wobei die Feldspulen so geschaltet sind, daß Störfelder sich im Anker aufheben.

Über Wechselstromzähler s. § 6.46.

2.6 Registriergeräte [*2.135*]

Zeitveränderliche Ströme und Spannungen können mit Schreibern registriert werden, wobei die Auswertgenauigkeit meist viel größer als die bei Einzelablesungen ist und gleichzeitig die Ablesung der Meßzeit entfällt. Schreiberdiagramme erfassen auch die Meßwerte, die zwischen zwei Einzelablesungen verlorengehen, und geben über Störeinflüsse oder Schwankungserscheinungen Auskunft. Das zeitliche Auflösungsvermögen, d. h. die höchste noch unverzerrt registrierbare Frequenz, hängt weitgehend von der Konstruktion des Schreibers ab und erreicht bei den Kompensationsschreibern einige Hertz. Die Meßempfindlichkeit liegt bei modernen Geräten bei 0,1 mV/cm Schreibbreite; die Meßgenauigkeit beträgt meist 0,2% des Endausschlages.

Oszillografen zum Registrieren sehr schnell verlaufender Spannungen und Ströme werden in § 6.7 behandelt.

2.61 Linienschreiber

Beim *Linienschreiber* wird durch eine mit Tinte gefüllte Röhrchenfeder, die durch das Meßsystem in die Ausschlagstellung gebracht wird, ein zusammenhängender Kurvenzug auf dem Papierstreifen aufgezeichnet. Der Streifen wird gelegentlich durch ein Uhrwerk, meist aber durch einen Synchronmotor auf einer Stiftwalze mit einstellbarem Vorschub unter der Schreibfeder bewegt;

die Vorschubgeschwindigkeit kann zwischen 0,5 und 7200 cm/h eingestellt werden. Der Zeiger des Meßsystems muß viel kräftiger als ein frei schwingender Zeiger sein und ist zur Aufzeichnung in rechtwinkligen Koordinaten mit einem *Ellipsenlenker* kombiniert. Wegen dieser Zusatzeinrichtungen und der zu überwindenden Reibungskräfte zwischen Feder und Papier muß das Meßwerk große Drehmomente hervorbringen und liegt sein Eigenverbrauch zwischen 10 und 30 mW. Bei einem kleinsten Strommeßbereich von 0,5 mA entspricht die erzielbare Genauigkeit der der Klasse 1,5, d. h. einer Fehlergrenze von $\pm 1,5\%$ für den Bereichsendwert.

Zur Verringerung der Reibung zwischen Feder und Papier kann man dem Meßstrom einen Wechselstrom von etwa 10 Hz überlagern, dessen Stärke so gewählt wird, daß sich die Strichbreite etwa verdoppelt [*2.68*].

2.62 Punktschreiber

Beim *Punktschreiber* wird der elastische Zeiger des Meßwerks in vorgegebenen Zeitabständen, z. B. alle 20 s, von einem *Fallbügel* kurzzeitig auf das unter dem Zeigerende befindliche Farbband gedrückt und auf dem darunter ablaufenden Papier ein Punkt markiert. Die einzelnen Farbpunkte schließen sich zu einem Kurvenzug zusammen. Im Gegensatz zum Linienschreiber können hier empfindliche Meßwerke benutzt werden, da der Zeiger keine Kräfte auf das Papier zu übertragen hat. Ändern sich die Meßwerte nur langsam, so können gleichzeitig mehrere Meßgrößen auf demselben Registrierstreifen aufgezeichnet werden. Zu diesem Zweck ist der Vorschubmotor mit einem Meßstellenumschalter und der Farbbandumschaltung gekoppelt, die jeder Meßgröße eine andere Farbspur zuordnet. Die *Mehrfarben-Punktschreiber* können mit einem Drehspul- oder Kreuzspulmeßwerk ausgerüstet sein; übliche Spannungsmeßbereiche sind 0···5 oder 0···15 mV. Neuerdings gibt es auch kleine Vielfachmeßgeräte mit angebautem Punktschreiber und umschaltbarem Papiervorschub.

Punkt- und Linienschreiber sind mit einer Ableseskala versehen, deren Teilung mit den Koordinaten des Schreibstreifens korrespondiert.

2.63 Kompensationsschreiber

Bei den bereits in § 2.343 besprochenen *Kompensationsschreibern* handelt es sich um einen selbsttätig abgleichenden Kompensator, der mit einer Registriervorrichtung (Röhrchenfeder, Punktschreiber) und einem automatischen Meßstellenumschalter gekoppelt sein kann. Bei einem ringförmigen Abgleichpotentiometer wird der Schreibschlitten durch den Motor über einen Seilzug betätigt. Ist der Kompensator mit einem Schiebepotentiometer ausgerüstet, so sitzt die Schreibvorrichtung direkt auf dem Abgriff. Die Einstellzeit für eine volle Auslenkung ist konstruktionsabhängig und variiert zwischen 1,5 und 0,1 s. Der kleinste der umschaltbaren Meßbereiche beträgt meist 50 μV; die Anzeigegenauigkeit liegt bei 0,2% der Papierbreite.

Nach Plankeel [*2.144*] können sehr kleine Galvanometerausschläge mit Hilfe eines fotoelektrischen CdS-Kristalls direkt von einem Kompensationsschreiber registriert werden. Der vom Lichtzeiger getroffene Kristall ist dabei auf dem Schreibschlitten befestigt und bildet einen Zweig einer Wheatstone-

Brücke. Mit einem Galvanometer der Empfindlichkeit $S_u' = 20\,\mathrm{nV/mm\,m}$ wird eine Auslenkung des Schreibers über die volle Breite bei 0,4 µV erreicht.

2.64 *Lichtpunktlinienschreiber* [2.178]

Bei diesem Instrument wird der Ausschlag des Meßsystems durch eine lichtstarke UV-Hochdrucklampe auf ein spezielles Fotopapier abgebildet, wobei die aufgezeichnete Lichtspur sofort und bleibend sichtbar wird. Als Lichtquelle dient eine Hg-Höchstdrucklampe mit 100 W, deren Lichtbogen von nur 0,35 mm Durchmesser vom Spiegel des Meßsystems auf dem Registrierpapier abgebildet wird. Die maximale Schreibgeschwindigkeit liegt bei 20 m/s bei einer Schreibbreite von 60 mm.

2.65 *Nachlaufschreiber*

Als *Nachlaufschreiber* bezeichnet man eine auf einem Schlitten durch einen Stellmotor bewegte Schreibvorrichtung, die der Auslenkung eines Lichtzeigers unmittelbar folgt. Hierzu wird z. B. vom Lichtzeiger eines empfindlichen Galvanometers eine auf dem Schlitten montierte Differential-Fotozelle beleuchtet, deren Spannung nach Verstärkung den Stellmotor ins Gleichgewicht einregelt. Die Schreibvorrichtung registriert den Instrumentenausschlag unmittelbar auf dem Papierstreifen, dessen Vorschub dem Meßproblem angepaßt ist. Die Abweichung des Kurvenzuges von der Stellung des Lichtzeigers ist bei einer Einstellgeschwindigkeit von 3 cm/s kleiner als 0,5 mm.

2.66 *Koordinatenschreiber*

Koordinaten- oder *X-Y-Schreiber* sind universell anwendbare Registriervorrichtungen, bei denen auf dem fest eingespannten Registrierbogen zwei unabhängige Gleichspannungen in kartesischen Koordinaten aufgezeichnet werden können. Die zweite Koordinate kann auch als Zeitmaß wie im gewöhnlichen Schreiber aufgetragen werden. Das Gerät unterscheidet sich grundsätzlich nicht von einem Kompensationsschreiber (s. Abb. 2.92); es besitzt aber für beide Koordinaten eine unabhängige Kompensationsvorrichtung, wie aus der Abb. 2.111 hervorgeht.

Die Eingangskreise E_x, E_y für die zu registrierenden Spannungen U_x, U_y enthalten einen geeichten Spannungsteiler zur Einstellung des gewünschten Meßbereichs sowie RC-Filterkreise. Die Kompensationsströme werden mittels Vergleichspannungsquellen R_x, R_y eingestellt, die von Zener-Dioden (vgl. § 4.243) mit einer Genauigkeit von 0,03% gesteuert werden. Die Meßspannungen U_x, U_y werden in den Kompensationskreisen B_x, B_y mit den Motoren M_x, M_y selbsttätig abgeglichen, indem die Differenzspannung aus Eingangssignal und Kompensationsspannung durch Synchronzerhacker Z_x, Z_y in Wechselspannungen umgeformt und in den Leistungsverstärkern V_x, V_y so weit verstärkt wird, daß die Zweiphasenmotore M_x, M_y betrieben werden können. Die mit dem Abgriff der zylindrischen Potentiometer verbundenen Wagen W_x, W_y werden auf den Schienen S_x, S_y so lange verschoben, bis der

Kompensationskreis abgeglichen ist. Vorzeichen der Gleichgewichtsabweichung und damit Drehsinn der Verstellmotore, deren eine Wicklung an der Netzspannung liegt, ergeben sich aus der phasenrichtigen Zerlegung der Balancespannung durch den Zerhacker.

Soll anstelle der X-Spannung eine zeitproportionale Registrierung von U_y gemacht werden, so muß U_x durch eine zeitlinear ansteigende Spannung ersetzt werden. Hierzu wird mit Hilfe des Kompensationspotentiometers eine stetig steigende Spannung erzeugt, die in B_x so abgeglichen wird, daß der Ladestrom einer Kapazität konstant bleibt. Durch Einschalten verschiedener Kondensatoren

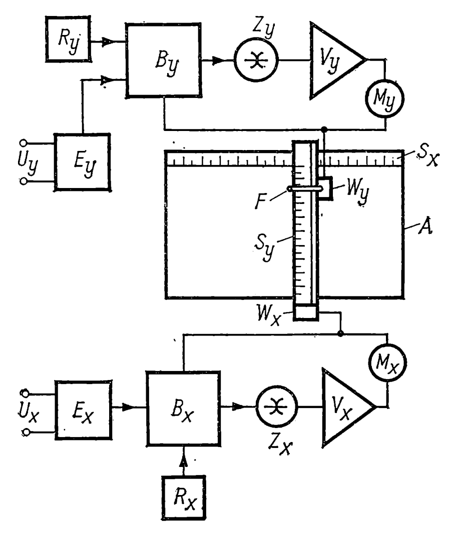


Abb. 2.111 Schaltschema eines X,Y-Schreibers

läßt sich die Ablenkgeschwindigkeit beliebig variieren. Die resultierende Bewegung der Wagen wird mit der Kapillarfeder F auf die Papierunterlage übertragen.

Moderne Geräte dieser Art besitzen Pultform mit frei liegender Registrierfläche, auf der das Koordinatenpapier durch Unterdruck unverrückbar festgehalten wird. Im Unterteil des Instruments sind die auswechselbaren volltransistorisierten Verstärker und Zeitablenkeinsätze untergebracht. Bei bekannten Geräten sind Meßbereiche von 5 mV bis 500 mV für die gesamte Schreibbreite von 35 cm wählbar; für die Zeitablenkung in der X-Koordinate können Vorschubgeschwindigkeiten zwischen 0,1 und 20 cm/s eingestellt werden. Als Genauigkeit werden 0,1% der Gesamtschreibbreite garantiert. Von FELLER [*2.53*] wird ein Koordinatenschreiber mit linearem X- und logarithmischem Y-Maßstab angegeben.

2.67 Diagrammabtaster

Die in § 2.66 besprochenen X-Y-Schreiber können durch Hilfsgeräte auch zum selbständigen Abtasten eines geschriebenen Kurvenzugs benutzt werden. Die Wirkungsweise dieses Instruments geht aus Abb. 2.112 hervor: Die abzu-

tastende Kurve C muß mit elektrisch leitender Tinte von Hand nachgezeichnet werden, ist einpolig geerdet und mit dem anderen Ende mit dem HF-Generator G verbunden. In der X-Richtung wird die Suchvorrichtung mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, während am Wagen W_y eine sehr kleine Induktionsspule L befestigt ist, mit der das von C herrührende HF-Signal empfangen werden kann. Dieses Signal wird in A verstärkt und in bezug zur

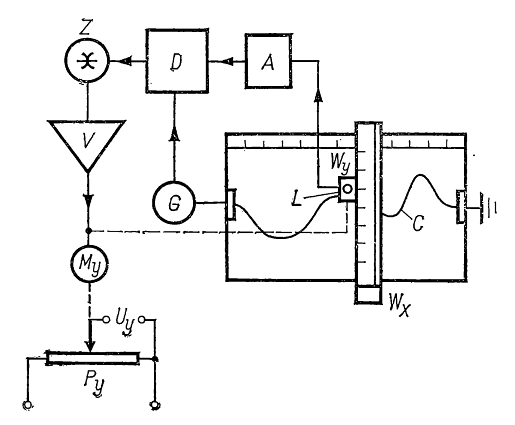


Abb. 2.112 Schema eines Diagrammabtasters

HF-Spannung von G phasenrichtig im Detektor D gleichgerichtet. Abweichungen von L vom Zentrum des Kurvenzuges um $\pm 0{,}1$ mm ergeben am Ausgang von D eine Gleichspannung von ± 1 V. Diese Spannung wird im Zerhacker Z in Wechselspannung von 50 Hz umgeformt, im Verstärker V weiter verstärkt und dem Verstellmotor M_y als zweite Phase zugeführt. Dieser verstellt W_y so lange, bis sich L genau über C befindet. Der Ausgang besteht aus dem Potentiometer P_y, das von konstantem Strom durchflossen wird und eine zur Kurvenordinate proportionale Spannung U_y für eine weitere Datenverwertung liefert. Die Reproduktionsgenauigkeit hängt von der Kurvenform ab und beträgt im Mittel 0,4 mm.

Eine analoge fotoelektrische Abtastvorrichtung mit zwei CdS-Kristallen wird in [*2.129*] beschrieben.

2.68 *Lochstreifenaufzeichnung* (vgl. auch § 6.8)

Für spezielle Zwecke, wie z. B. bei Verwertung von experimentell gewonnenen Meßgrößen in Digitalrechnern, ist es von Vorteil, sie unmittelbar als digitale Größe aufzuzeichnen. Blythe et al. [*2.11*] geben hierzu ein Verfahren an, bei dem für kalorimetrische Messungen die selbsttätig abgeglichene Kompensationsspannung der Widerstandsthermometer unmittelbar auf einen Fünflochstreifen übertragen wird. Durch den Rechner werden diese Werte entsprechend der eingespeicherten Eichkurven für die Thermometer in Temperaturwerte umgerechnet.

§ 3 LINEARE NETZWERKE [*3.2, 3.3, 3.4, 3.6, 3.7, 3.8, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.15, 3.16*]

Grundlage für die Behandlung elektromagnetischer Vorgänge in Netzwerken und räumlich ausgedehnten Leitern bilden die Maxwell-Gleichungen. In sehr vielen Fällen kann auf eine Lösung der Maxwell-Gleichungen verzichtet werden und können Stromsysteme, die aus Stromerzeugern, Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten bestehen, durch die entsprechenden Ströme beschrieben werden, welche vom Generator in die einzelnen *Kreiselemente* fließen, aus denen ein *Netzwerk* besteht. Im Gegensatz hierzu muß man bei Systemen, in denen ein Teil der zugeführten Leistung in Strahlungsenergie umgesetzt wird, mit orts- und zeitabhängigen Größen, wie Feldenergie, Stromdichte und Ladungsdichte, operieren, die als Lösungen der Maxwell-Gleichungen gefunden werden.

Die Netzwerktheorie stellt eine Näherung mit begrenzter Gültigkeit dar, deren Abgrenzung gegen Ausbreitungsprobleme oft schwierig ist.

3.1 Grundlagen der Netzwerktheorie

In der Netzwerktheorie werden Widerstände R, Induktivitäten L und Kapazitäten C als *Netzwerkelemente* bezeichnet; bei ihrer Behandlung ist vorausgesetzt, daß ihre räumliche Ausdehnung im Vergleich zur Wellenlänge der angewandten Frequenzen klein ist. In Abb. 3.1 sind die Grundgleichungen für R, L und C dargestellt, wobei U und i Augenblickswerte von Spannung und Strom bedeuten. Ferner ist für die Stromquelle die Polarität angegeben, wie sie bei der Behandlung von Netzwerken einzusetzen ist. Eine Induktivität besitzt die im magnetischen Feld gespeicherte Energie $Li^2/2$; in einer Kapazität ist die Energie $CU^2/2$ im elektrischen Feld gespeichert. Als dissipatives Element verwandelt der Widerstand die Energie i^2R in Joulesche Wärme. Die einem Kreiselement zugeführte augenblickliche Leistung beträgt Ui; sie ist positiv für einen Widerstand, kann positiv oder negativ für L und C sein, je nachdem, ob die gespeicherte Energie zu- oder abnimmt.

Eine *Gegeninduktivität* zwischen zwei Induktivitäten L_1 und L_2 entsteht, wenn ein Teil des magnetischen Flusses mit beiden Elementen verkettet ist; die entsprechenden Gleichungen sind in Abb. 3.2 angegeben. Das Vorzeichen von M hängt von der Wahl der Stromrichtung in bezug auf die Spannung und von der Konstruktion der Spulen ab. Die Größe $k = M/\sqrt{L_1 L_2}$ wird als *Kopplungskoeffizient* oder *-grad* bezeichnet, der Eins wird, wenn vollkommene Kopplung vorhanden ist.

Ströme werden in RLC-Netzwerken erst hervorgerufen, wenn diese an eine Energiequelle angeschlossen sind. Ohne diese verschwinden Strom und Spannung mit charakteristischen Frequenzen, wobei die in L und C gespeicherte Energie von den Widerständen R aufgezehrt wird. Eine *Spannungsquelle* hält eine bestimmte Spannung u unabhängig vom Außenkreis an ihren Klemmen konstant; mit $u = 0$ wird der *Kurzschlußfall* beschrieben. Eine *Stromquelle*

liefert einen konstanten Strom i in einem beliebigen Außenkreis; $i = 0$ entspricht dem *Leerlauffall.*

Kirchhoffsche Sätze. Die Struktur eines Netzwerkes läßt sich unter der Annahme idealer Netzwerkelemente und der Gültigkeit der beiden Kirchhoff-Sätze behandeln, die sich auf die Verteilung der Ströme und Spannungen im Netzwerk beziehen. Als *Masche* eines Netzwerkes wird die geschlossene Serienschaltung mehrerer Kreiselemente einschließlich Spannungsquellen bezeichnet. Der *Maschensatz* sagt aus, daß die Summe der Spannungsabfälle in einer einzelnen Masche Null ist, d. h.,

$$\sum_{k=1}^{n} U_k - \sum_{k=1}^{n} I_k R_k = 0. \tag{3/1}$$

$u = i \cdot R \qquad u = L \cdot \frac{di}{dt} \qquad u = C\frac{du}{dt}$

Spannungsquelle, Stromquelle

Abb. 3.1 Netzwerkelemente

$U_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$;

$U_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}$

Abb. 3.2 Gegeninduktivität

Ein *Knoten* entsteht, wenn die Verbindung einer Masche zu zwei oder mehreren Maschen gehört. Der *Knotensatz* besagt, daß die algebraische Summe aller zum Knoten fließenden oder diesen verlassenden Ströme Null ist, d. h.,

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0. \tag{3/2}$$

Komplexe Schreibweise. Durch Anwendung der Kirchhoff-Sätze und der Grundgleichungen für die Kreiselemente lassen sich die einzelnen Ströme und Spannungen auch in komplizierten Netzwerken als Lösung von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten finden. Von besonderer Bedeutung sind Wechselspannungsquellen, deren Spannung der Beziehung

$$u(t) = U_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}[U e^{pt}] \tag{3/3}$$

gehorcht, wobei $U = U_m e^{j\varphi}$ und $p = \sigma + j\omega$ ist. Gleichung (3/3) stellt eine Sinusspannung der Frequenz $f = \omega/2\pi$ und dem Phasenwinkel φ dar, deren Amplitude sich exponentiell mit der Zeit t ändert. Die Größe p wird *komplexe Frequenz* genannt; sie spielt bei der Berechnung der *Netzwerkfunktionen* eine besondere Rolle.

Strom und Spannung an den Klemmen eines Netzwerks werden durch eine lineare Differentialgleichung beschrieben. Da die Operatoren Re und d/dt kommutativ sind, ist der Operator d/dt gleichbedeutend mit einer Multiplikation mit p und der Operator $\int dt$ mit einer Division durch p. Die Differentialgleichung wird dadurch in eine algebraische Gleichung in p verwandelt.

Impedanz und Admittanz. Legt man an die Klemmen eines linearen, passiven Netzwerkes einen komplexen Strom I, so wird an diesem die komplexe Spannung U herrschen. Als *Scheinwiderstand* oder *Impedanz* $\boldsymbol{Z}$ definiert man den Quotienten

$$\boldsymbol{Z}(p) = \frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{I}}; \tag{3/4}$$

der Kehrwert

$$\boldsymbol{Y}(p) = 1/\boldsymbol{Z}(p) = \boldsymbol{I}/\boldsymbol{U} \tag{3/5}$$

wird als *Scheinleitwert oder Admittanz* bezeichnet.

Aus den Kirchhoffschen Sätzen folgt, daß die Gesamtimpedanz von in *Serie* geschalteten beliebigen Widerständen gleich der Summe der Einzelimpedanzen ist; analog gilt diese Summenregel auch für die Admittanz *parallel*-geschalteter Widerstände.

Für Sinusströme läßt sich die Impedanz eines Netzwerkes im stationären Zustand ($\sigma = 0$) in einen Realteil und einen Imaginärteil zerlegen, d. h.,

$$\boldsymbol{Z}(\mathrm{j}\,\omega) = R + \mathrm{j}X, \tag{3/6}$$

wobei R der *Wirkwiderstand* und X der *Blindwiderstand* ist, die Funktionen der Frequenz ω sind.

Den reziproken Wert von $\boldsymbol{Z}$, die *Admittanz* $\boldsymbol{Y}$, kann man analog in den *Wirkleitwert* G und in den *Scheinleitwert* B zerlegen:

$$\boldsymbol{Y}(\mathrm{j}\,\omega) = G + \mathrm{j}B. \tag{3/7}$$

Nach den Regeln der komplexen Rechenweise gilt ferner

$$|\boldsymbol{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + X^2}; \tag{3/8a}$$

$$|\boldsymbol{Y}| = Y = \sqrt{G^2 + B^2}. \tag{3/8b}$$

Durch Einsetzen von Gl. (3/6) in Gl. (3/5) findet man

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}; \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}. \tag{3/9}$$

Die in einer Impedanz $\boldsymbol{Z}$ durch den Strom $\boldsymbol{I}_m$ (Maximalwert) verbrauchte Leistung beträgt

$$W = \frac{1}{2} I_m{}^2 R, \tag{3/10}$$

wenn R der Wirkwiderstand des Zweipols ist. Analog ergibt sich die Wirkleistung durch eine anliegende Spannung U_m (Gl. 3/3)

$$W = \frac{1}{2} U_m{}^2 G, \tag{3/10a}$$

wenn G den Wirkleitwert bedeutet. Allgemein gilt für die *Wirkleistung*

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\boldsymbol{U}\boldsymbol{I}^*), \tag{3/10b}$$

wenn $\boldsymbol{U}$ die komplexe Spannung und $\boldsymbol{I}^*$ der zu $\boldsymbol{I}$ konjugiert komplexe Strom an den Klemmen des Verbrauchers ist.

3.2 Gleichstromnetzwerk

Die Analyse von Gleichstromnetzen ist ein Spezialfall von Wechselstromnetzwerken mit Sinusstrom und im stationären Zustand, wenn $\omega = 0$ gesetzt wird.

3.21 Überlagerungstheorem

Sind in einem Netz mehrere elektromotorische Kräfte E_i wirksam, so erhält man die wirkliche Stromverteilung in den einzelnen Maschen, wenn man jeweils für *eine* Spannungsquelle die Ströme berechnet, dieses Verfahren für alle

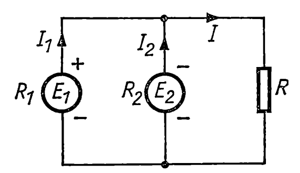


Abb. 3.3 Parallelbetrieb zweier Stromquellen

E_i wiederholt und die Ströme in den Abschnitten des Netzwerks überlagert. Handelt es sich z. B. um den Parallelbetrieb zweier Stromquellen mit der Klemmenspannung E_1 bzw. E_2 und den Innenwiderständen R_1 bzw. R_2 entsprechend Abb. 3.3, so gilt für $E_2 = 0$

$$I_1' = E_1 \frac{R_2 + R}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}$$

und für $E_1 = 0$

$$I_1'' = -E_2 \frac{R}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}.$$

Nach dem Superpositionstheorem ergibt sich nun

$$I_1 = I_1' + I_1'' = \frac{E_1(R_2 + R) - E_2 R}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}$$

und analog für den von der Stromquelle E_2 gelieferten Strom I_2.

3.22 Reziprozitätstheorem

Dieser Satz sagt aus, daß eine Stromquelle mit dem EMK E_m in einem freien Zweig einer Masche m des Netzwerks in der Masche n den Strom I_n verursacht, der dem gleichen Strom $I_m = I_n$ in der Masche m entspricht, wenn die Stromquelle in einen Zweig der Masche n geschaltet wird. Das Theorem gilt auch in allgemeinerer Form: Erzeugt die *zwei* Maschen m und n angehörige Quelle E_{mn} eines gemeinsamen Zweiges in einem den Maschen h und k angehörenden Zweig den Strom I_{hk}, dann entsteht im gemeinsamen Zweig mn der gleiche Strom $I_{mn} = I_{hk}$, wenn die Quelle in den gemeinsamen Zweig hk geschaltet wird.

Ist nur *eine* Stromquelle vorhanden und wird in einem Zweig der Strom mit einem (widerstandslosen) Strommesser bestimmt, so kann man Quelle und Strommesser vertauschen (z. B. bei der Wheatstone-Brücke).

3.23 Kompensationstheorem

Dieses Theorem, das aus dem Superpositionstheorem (§ 3.21) folgt, läßt sich folgendermaßen formulieren: Ändert sich der Widerstand eines vom Strom I durchflossenen Zweiges um die Größe ΔR, so ist die Stromänderung oder der Spannungsabfall in einem anderen Zweig die- bzw. derselbe, wie wenn im ersten Zweig eine Spannungsquelle $e = -I\Delta R$ eingeschaltet worden wäre.

Wird ΔR über alle Maßen groß ($\Delta R \to \infty$), so verschwindet in diesem Zweig der Strom; an den Enden dieses Zweiges liegt dann die *Leerlaufspannung*.

3.24 Thevenins Theorem

Betrachtet man einen beliebigen Widerstandszweig R_n eines linearen Netzwerkes, das irgendwelche Stromquellen enthält und in diesem Zweig einen Strom I_n unterhält, so kommt nach Gl. (3/1) die Größe R_n nur in der Verbindung $I_n R_n$ vor; I_n dagegen kann wegen Gl. (3/2) in Verbindung mit anderen Widerständen des Netzes auftreten. Nach Auflösen der Gleichungen für I_n ergibt sich eine Beziehung

$$c_1 I_n R_n + c_2 I_n = f(E_k, R_k),$$

in der c_1 und c_2 Konstanten sind, die R_n nicht enthalten, und f eine Funktion der Widerstände R_k (ohne R_n) sowie der EMKs E_k darstellt. Die Division beider Seiten mit c_1 zeigt, daß c_2/c_1 die Dimension eines Widerstandes und die rechte Seite die einer Spannung besitzt. Diese wird Null, wenn sämtliche E_k verschwinden, d. h. sie entspricht einer Spannungsquelle E_i, welche die Wirkung aller EMKs als Ursache für den Strom I_n in sich vereint. Setzt man $c_2/c_1 = R_i$, so lautet die obige Gleichung

$$I_n(R_n + R_i) = E_i. \tag{3/11}$$

Am Widerstand R_n liegt dann die Spannung

$$U_n = I_n R_n = E_i \frac{R_n}{R_i + R_n}. \tag{3/12}$$

Das Netzwerk außerhalb des Widerstandes R_n besitzt demnach die Eigenschaft einer Spannungsquelle mit der *Leerlaufspannung* E_i und dem *Innenwiderstand* R_i.

Man kann damit den Strom in einem beliebigen Widerstandszweig dadurch berechnen, daß man *a*) den Widerstand R_n entfernt und an dessen Anschlüssen mit $R_n = \infty$ die Leerlaufspannung E_i bestimmt; *b*) R_n durch einen Kurzschluß ($R_n = 0$) ersetzt und aus Gl. (3/11) den *Kurzschlußstrom* E_i/R_i erhält. Damit kennt man Spannung und Widerstand der Ersatzspannungsquelle.

3.25 Transformation von Netzwerken

Die Methode der Netzumwandlung besteht darin, bestimmte Zweige eines linearen Netzes durch andere Widerstandsanordnungen zu ersetzen, ohne daß sich in den verbleibenden Teilen des Netzes die Stromverteilung ändert. Als Beispiel ist in Abb. 3.4a die Wheatstone-Brücke dargestellt, welche die Batterie B und das Nullgalvanometer G enthält. Nach dem Thevenin-Theorem (§ 3.24) läßt sich auf einfache Weise der Galvanometerstrom und damit die Spannung

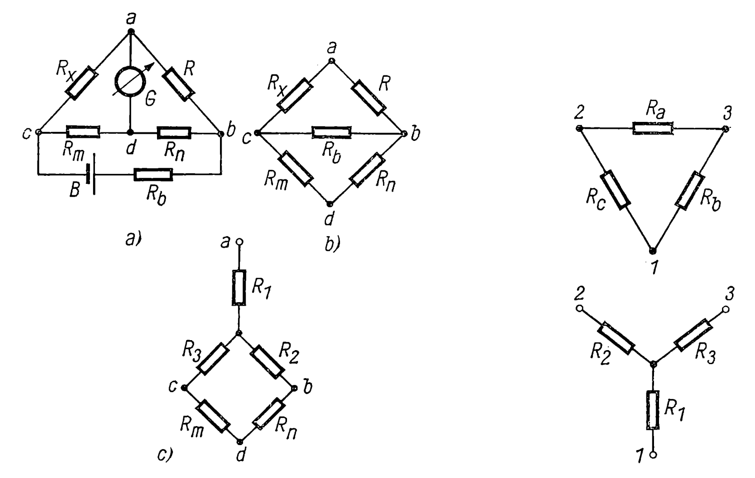


Abb. 3.4 Transformation der Wheatstone-Brücke

Abb. 3.5 Transformation eines Widerstandsdreiecks

sowie der Innenwiderstand der äquivalenten Spannungsquelle berechnen. In Abb. 3.4b ist für diese Betrachtung die ursprüngliche Schaltung umgezeichnet, wobei die Batterie kurzgeschlossen und das Galvanometer G abgeschaltet ist. Die Aufgabe besteht darin, den zwischen den Klemmen a und d herrschenden Gesamtwiderstand zu bestimmen. Sie kann wesentlich vereinfacht werden, wenn es, wie in Abb. 3.4c, gelingt, die dreieckige Masche abc in einen sternförmigen Kreis zu *transformieren*. Die Bedingung hierfür ist, daß der von zwei Klemmen aus gesehene Widerstand des Netzes auch zwischen den entsprechenden Klemmen des transformierten Kreises erhalten bleiben muß. Die äquivalente Transformation von n-Eck-Widerstandsverbänden in n-

strahlige Sternverbände und umgekehrt ist ein spezieller, aber wichtiger Anwendungsfall dieser Methode.

Für den in Abb. 3.5 dargestellten einfachsten Fall dreier Widerstände lassen sich folgende Beziehungen ableiten:

$$R_1 + R_2 = \frac{(R_a + R_b) R_c}{R_a + R_b + R_c};$$

$$R_2 + R_3 = \frac{(R_b + R_c) R_a}{R_a + R_b + R_c};$$

$$R_3 + R_1 = \frac{(R_c + R_a) R_b}{R_a + R_b + R_c},$$

woraus sich die Widerstände für die Sternschaltung aus denen der Dreiecksschaltung wie folgt berechnen lassen:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_b R_c / (R_a + R_b + R_c); \\ R_2 &= R_c R_a / (R_a + R_b + R_c); \\ R_3 &= R_a R_b / (R_a + R_b + R_c). \end{aligned} \tag{3/13}$$

Der umgekehrte Weg, aus den Werten der Sternschaltung die des Widerstandsdreiecks zu finden, läßt sich durch Einsetzen von Leitwerten verkürzen. Man erhält hieraus:

$$\begin{aligned} R_a &= \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}; \\ R_b &= \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}; \\ R_c &= \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}. \end{aligned} \tag{3/14}$$

3.26 Linearer Vierpol

Als *Vierpol* bezeichnet man allgemein eine beliebige Kombination passiver Widerstände, von der zwei Paar Klemmen nach außen geführt sind: ein Paar für den „Eingang", ein zweites für den „Ausgang". An den Eingang wird die Stromquelle gelegt; mit dem Ausgang ist ein Belastungswiderstand verbunden. Mit Hilfe eines solchen Vierpols läßt sich die Aufgabe lösen, an einem Festwiderstand eine variable Spannung aufrechtzuerhalten, wobei der Generator am Vierpoleingang immer den gleichen Widerstand „sehen" soll. Der einfachste Weg hierfür ist der T-Kreis, der aus drei Widerständen besteht, die in Dreiecks- oder Sternform geschaltet sind (vgl. Abb. 3.6). Es läßt sich zeigen, daß jeder Vierpol durch einen T-Kreis ersetzt werden kann und durch drei Messungen an einem beliebigen Vierpol die charakteristischen Widerstände des äquivalenten T-Kreises ermittelt werden können.

Betrachtet man den in Abb. 3.6a dargestellten T-Kreis, so erhält man für die Eingangsspannung U_1 und für den Eingangsstrom I_1 die Beziehungen:

$$U_1 = U_2\left(1 + \frac{R_1}{R_3}\right) + I_2\left(R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}\right); \tag{3/15}$$

$$I_1 = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) I_2 + U_2/R_3. \tag{3/16}$$

Diese lassen sich mit den Abkürzungen $A_1 = 1 + R_1/R_3$, $A_2 = 1 + R_2/R_3$, $B = R_1 + R_2 + R_1 \cdot R_2/R_3$, $C = 1/R_3$ in die einfache Form

$$U_1 = A_1U_2 + BI_2, \tag{3/15a}$$

$$I_1 = CU_2 + A_2I_2 \tag{3/16a}$$

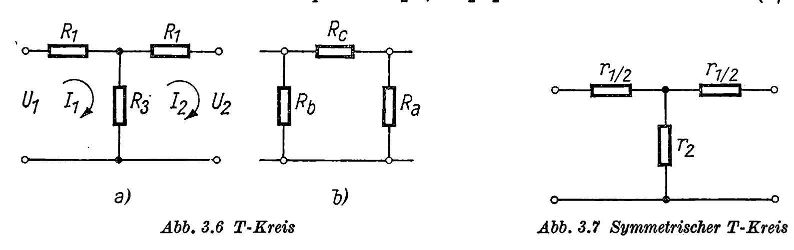


Abb. 3.6 T-Kreis

Abb. 3.7 Symmetrischer T-Kreis

bringen, wobei für die vier Konstanten, durch welche drei Widerstände bestimmt sind, zusätzlich die *Systemdeterminante*

$$A_1A_2 - BC = 1 \tag{3/17}$$

sein muß. Durch die Gln. (3/15a) und (3/16a) wird die Linearität der Beziehungen zwischen den Ein- und Ausgangsgrößen ausgedrückt; diese allgemeine Beziehung muß auch für jeden anderen Vierpol gelten. Eliminiert man B aus den obigen Gleichungen, so erhält man für die Berechnung der drei gesuchten Widerstände

$$R_1 = \frac{A_1 - 1}{C}; \quad R_2 = \frac{A_2 - 1}{C}; \quad R_3 = 1/C. \tag{3/18}$$

Die Größen A_1, A_2 und C lassen sich bestimmen, ohne daß man die Struktur und die Parameter des Netzwerks kennt. Man kann sie durch drei Messungen, z. B. Kurzschlußmessungen von beiden Seiten des T-Kreises her gesehen und eine Leerlaufmessung, erhalten.

In Abb. 3.6b ist außerdem die in einen äquivalenten Π-Kreis verwandelte T-Schaltung dargestellt; die Transformation läßt sich mit den Beziehungen des § 3.25 durchführen.

Besondere Bedeutung kommt dem symmetrischen T-Kreis (Abb. 3.7) zu, für den sich die Gln. (3/15a) und (3/16a) vereinfachen zu

$$U_1 = AU_2 + BI_2; \tag{3/15b}$$

$$I_1 = CU_2 + AI_2, \tag{3/16b}$$

mit $A_1 = A_2 = A = 1 - r_1/2r_2$, $B = r_1 - r_1^2/4r_2$, $C = 1/r_2$. Ferner tritt anstelle von Gl. (3/17) die Beziehung zwischen den Größen A, B und C untereinander:

$$A^2 - BC = 1. \tag{3/17a}$$

Mit Hilfe der *Leerlaufmessung*

$$R_0 = (U_1/I_1)_{I_2=0} = A/C$$

und der *Kurzschlußmessung*

$$R_k = (U_1/I_1)_{U_2=0} = B/A$$

sowie der Gl. (3/17a) findet man für die Parameter A, B und C:

$$A = R_0/(R_0^2 - R_0R_k)^{1/2}; \quad B = R_0R_k/(R_0^2 - R_0R_k)^{1/2};$$
$$C = 1/(R_0^2 - R_0R_k)^{1/2}. \tag{3/19}$$

Die beiden Widerstände r_1 und r_2 ergeben sich dann aus

$$r_1/2 = (A - 1)/C = R_0 - (R_0^2 - R_0R_k)^{1/2}$$
$$r_2 = 1/C = (R_0^2 - R_0R_k)^{1/2}. \tag{3/20}$$

3.27 Spannungsübertragung

Von allgemeiner Bedeutung ist der in Abb. 3.8 dargestellte Fall, daß der T-Kreis mit einem Widerstand R belastet ist. Setzt man $R = U_2/I_2$ in die Gln. (3/15b) und (3/16b) ein, so findet man daraus den *Eingangswiderstand*

$$R_e = U_1/I_1 = (AR + B)/(CR + A). \tag{3/21}$$

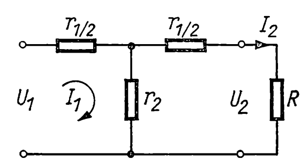


Abb. 3.8 Belasteter T-Kreis

Dieser kann durch geeignete Wahl der Parameter A, B und C bei vorgegebenem R auf vielfältige Weise realisiert werden. Ihre eindeutige Festlegung bringt die Einführung des *Spannungsübertragungsfaktors* oder *-maßes* q, der durch das Verhältnis Ausgangs- zu Eingangsspannung definiert ist. Ersetzt man in Gl. (3/15b) I_2 durch U_2/R, so findet man für

$$q = U_2/U_1 = (A + B/R)^{-1}. \tag{3/22}$$

Als *charakteristischen Widerstand* R_c eines symmetrischen T-Kreises bezeichnet man denjenigen Wert des Belastungswiderstandes R, der nach Gl. (3/21) dem Innenwiderstand R_e entspricht. Man erhält für R_c durch Einsetzen

von $R = R_c = R_e$ in Gl. (3/21) unter Berücksichtigung der Gln. (3/20)

$$R_c = \sqrt{B/C} = \frac{1}{2} \sqrt{r_1(r_1 + 4r_2)} = \sqrt{R_0 R_k}. \tag{3/23}$$

Die Größe q entspricht dem *Abschwächungsfaktor* eines T-Kreises, wobei der Generator unabhängig von der am Belastungswiderstand R_c liegenden Spannung einen konstanten Außenwiderstand R_c „sieht“. Es gilt für die Widerstandselemente

$$q = 1/(A + CR_c) = r_2\left(r_2 + \frac{r_1}{2} + R_c\right)^{-1} \tag{3/24}$$

und daraus

$$r_1 = 2R_c \frac{1-q}{1+q}; \quad r_2 = 2R_c \frac{q}{1-q^2}. \tag{3/25}$$

Eine Anwendung dieser Beziehungen stellt der in § 2.265 behandelte Empfindlichkeitsregler nach Volkmann für die Spannungsmessung dar. Das Prinzip des charakteristischen Widerstandes läßt sich beliebig erweitern, indem mehrere T-Kreise hintereinandergeschaltet werden. Da für jeden einzelnen T-Kreis der Eingangswiderstand R_e dem charakteristischen Widerstand R_c entspricht, bleibt dieser auch als Eingangswiderstand für die ganze Kette erhalten, für die der gesamte Abschwächungsfaktor $q = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \ldots q_n$ wird.

3.3 Einschaltvorgänge

Der Gleichgewichtseinstellung für Strom und Spannung der in § 3.2 besprochenen Netzwerke geht eine zeitliche Phase voraus, die man als *Einschaltvorgang* bezeichnen kann. Rechnerisch wird dieser durch Anlegen einer Rechteckflanke der Spannung approximiert. Neben den eigentlichen Einschaltvorgängen ist das Anlegen von *Rechteckimpulsen* an passive Netzwerke von besonderer Bedeutung für die rechnerische Behandlung von Zählgeräten u. a.

3.31 Einschaltvorgänge in Serien-RC- und -RL-Kreisen

Beim plötzlichen Anlegen einer Spannung E an eine Serienschaltung eines Widerstandes R und einer Kapazität C gilt mit $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ die Differentialgleichung

$$E = R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C}, \tag{3/26}$$

deren Lösung für die Grenzbedingungen $q = 0,\ t = 0$

$$q = EC(1 - \mathrm{e}^{-t/RC}) \tag{3/27}$$

lautet. Für den Strom findet man durch Differentiation von Gl. (3/27)

$$i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t = \frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/RC}. \tag{3/28}$$

Für das Entladen des auf die Spannung E aufgeladenen Kondensators über den Widerstand R gelten die analogen Beziehungen

$$q = E C \, e^{-t/RC} \tag{3/27 a}$$

bzw.

$$i = -\frac{E}{R} e^{-t/RC}. \tag{3/28 a}$$

Die Größe $RC = \tau$ wird *Zeitkonstante* des Kreises genannt; sie gibt die Zeitspanne für den Abfall der Anfangsspannung auf den e-ten Teil an.

Das Verhalten eines Kreises aus hintereinandergeschalteter Induktivität und einem Widerstand wird durch die Differentialgleichung

$$E = L \, \mathrm{d}i/\mathrm{d}t + iR \tag{3/29}$$

beschrieben, deren Lösung für die Anfangsbedingungen $i = 0, \ t = 0$

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad \text{(Einschaltvorgang)} \tag{3/30}$$

bzw.

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad \text{(Ausschaltvorgang)} \tag{3/30 a}$$

lautet. In diesem Fall beträgt die Zeitkonstante $\tau = L/R$.

3.32 Impulsvorgänge in RC-Kreisen

Die in Abb. 3.9 dargestellte Serienschaltung wird von einem Impulsgenerator mit Spannungsimpulsen der Größe E innerhalb eines Zeitintervalls $0 \leqq t \leqq T$ beschickt; außerhalb dieses Zeitabschnitts soll der Innenwiderstand der Spannungsquelle Null oder durch einen Serienwiderstand r dargestellt sein.

Nach Gl. (3/27) findet man mit $U_C = q/C$ die Spannung am Kondensator zu

$$U_C = E(1 - e^{-t/(r+R)C}) = E(1 - e^{-t/\tau}), \tag{3/31}$$

wenn in diesem Fall die Zeitkonstante $\tau = (r + R)C$ ist. Nach der Impulsdauer T besitzt die Kapazität eine Ladung $q_T = EC(1 - e^{-T/\tau})$; während $t \geqq T$ erfolgt die Entladung über den Widerstand $r + R$. Die am Kondensator liegende Spannung wird dann

$$U_C = E(e^{T/\tau} - 1) \, e^{-t/\tau}. \tag{3/32}$$

Im Fall $T \gg \tau$ hat U_c bereits kurz nach Impulseinsatz die Spannung E erreicht und hält diese bis zu Beginn der Entladung bei $t = T$ bei. Je größer T/τ ist, um so besser wird die Impulsform durch UC reproduziert. Ist dagegen $T \ll \tau$, so wird der Kondensator während der Impulsdauer nur auf einen Bruchteil der Spannung E aufgeladen. Dieser beträgt

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{\tau} \int E(t) \, \mathrm{d}t; \tag{3/33}$$

dies gilt auch, wenn $E(t)$ keine Konstante wie beim Rechteckimpuls, sondern zeitabhängig ist.

Der Spannungsabfall am Widerstand R während der Impulsdauer ergibt sich aus Gl. (3/28) zu

$$U_R = iR = \frac{ER}{r+R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}; \quad 0 \leqq t \leqq T$$

und nach dem Impuls zu

$$U_R = R\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)_{t>T} = -\frac{ER}{r+R}\,(\mathrm{e}^{T/\tau}-1)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}; \qquad t \geqq T. \qquad (3/34)$$

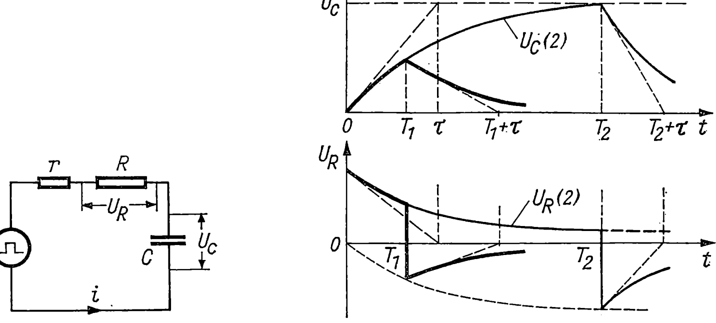


Abb. 3.9 Gepulster RC-Kreis

Abb. 3.10 Impulsverhalten des RC-Kreises

In Abb. 3.10 sind die Spannungen U_C und U_R für zwei verschiedene Verhältnisse von T/τ in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt. Im Gegensatz zu U_C ist daraus zu entnehmen, daß eine gute Wiedergabe der Impulsform durch U_R nur für $T \ll \tau$ möglich ist. Ist die Impulsspannung durch $E(t)$ gegeben, so gilt für diesen Grenzfall

$$U_R = RC\,\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}; \qquad (3/35)$$

man nennt den RC-Kreis unter diesen Bedingungen einen *Differentialkreis.*

3.33 Impulsvorgänge in RL-Kreisen

Wie bereits in § 3.31 behandelt, wird der RL-Kreis durch eine ähnliche Differentialgleichung beschrieben wie ein RC-Kreis. Wie der Vergleich der Gln. (3/27) und (3/30) zeigt, entspricht die Ladung q im RC-Kreis dem Strom i im RL-Kreis, während $C \to 1/R$ und $RC \to L/R$ entsprechen. Analog zu § 3.32 findet man daher als Spannung am Widerstand R während und nach dem Impuls

$$U_R = \frac{ER}{r+R}\,(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}), \quad 0 \leqq t \leqq T; \qquad (3/36)$$

$$U_R = \frac{ER}{r+R}\,(\mathrm{e}^{T/\tau}-1)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}, \quad t \geqq T, \qquad (3/36\mathrm{a})$$

wenn $\tau = L/(R + r)$. Im Gegensatz zum RC-Kreis reproduziert U_R im RL-Kreis die Impulsform um so besser, je länger der Impuls dauert.

Vergleicht man die Gln. (3/26) und (3/29), so erkennt man, daß die Spannung U_L an der Induktivität L der Spannung U_R im RC-Kreis entspricht und daß folgende Beziehungen gelten:

$$U_L = E\,\mathrm{e}^{-t/\tau}, \qquad 0 \leqq t \leqq T; \tag{3/37}$$

$$U_L = -E\,(\mathrm{e}^{T/\tau} - 1)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}, \qquad t \geqq T. \tag{3/37a}$$

Für kleine Impulsdauer im Vergleich zu τ gibt U_L die Impulsform wieder. Auch der RL-Kreis läßt sich also als Integrationskreis oder Differenzierkreis benutzen.

3.34 Impulsvorgänge im RLC-Kreis

Es soll ein aus dem Widerstand R, der Induktivität L und der Kapazität C bestehender Serienkreis an einen Rechteck-Impulsgenerator geschaltet werden, dessen Innenwiderstand r beträgt. Während des Impulses von der Dauer T lautet die Differentialgleichung

$$E = L\,\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + R\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0, \tag{3/38}$$

die von 2. Ordnung ist und folgenden Lösungsansatz besitzt:

$$q = CE + K_1\mathrm{e}^{-A_1 t} + K_2\mathrm{e}^{-A_2 t}. \tag{3/39}$$

Die Größe CE stellt darin den stationären Zustand dar; die beiden anderen Terme beschreiben die zeitveränderlichen Vorgänge. Für die beiden Größen A_1 und A_2 ergeben sich die bekannten Lösungen

$$A_1 = \delta + \omega; \qquad A_2 = \delta - \omega \tag{3/40}$$

mit den Abkürzungen

$$\delta = R/2L; \qquad \omega_0^2 = 1/LC; \qquad \omega = \delta^2 - \omega_0^2. \tag{3/41}$$

Mit den Anfangsbedingungen $t = 0$, $q = 0$, $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t = 0$ berechnen sich die Parameter K zu

$$K_1 = \frac{A_2 CE}{A_1 - A_2}; \quad K_2 = -\frac{A_1 CE}{A_1 - A_2} \qquad (A_1 - A_2 = 2\omega). \tag{3/42}$$

Unter Benutzung der Gln. (3/40) und (3/42) ergibt sich schließlich aus Gl. (3/39)

$$q = CE\left\{1 - \frac{1}{\omega}\,\mathrm{e}^{-\delta t}\left[\frac{\delta}{2}\,(\mathrm{e}^{\omega t} - \mathrm{e}^{-\omega t}) + \frac{\omega}{2}\,(\mathrm{e}^{\omega t} - \mathrm{e}^{-\omega t})\right]\right\} \tag{3/43}$$

und daraus der Strom

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = CE\,\frac{\omega_0^2}{\omega}\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cdot\frac{1}{2}\,(\mathrm{e}^{\omega t} - \mathrm{e}^{-\omega t}). \tag{3/43a}$$

1. Fall: $\delta^2 > \omega_0^2$. Für diesen Fall ist $R^2 > 4L/C$ und $A_1 \neq A_2$. Mit Hilfe von Gl. (3/43) findet man die Beziehung

$$q = CE\left[1 - \frac{\omega_0}{\omega}\,\mathrm{e}^{-\delta t}\sinh(\omega t + \alpha)\right], \tag{3/44}$$

worin $\alpha = \tanh^{-1}(\omega/\delta)$. Für kleine Werte von t ist q durch die sinh-Funktion bestimmt; mit zunehmender Zeit wird der Exponentialfaktor dominierend.

Nach Abschluß des Impulses ($t \geqq T$) ist $E = 0$, und anstelle von Gl. (3/38) gilt die homogene Gleichung

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\,q = 0. \tag{3/38a}$$

Der Lösungsansatz entspricht dem der Gl. (3/39), wobei allerdings der stationäre Term Null ist. Es gilt also

$$q = K_1'\mathrm{e}^{-A_1t} + K_2'\mathrm{e}^{-A_2t}, \tag{3/39a}$$

wobei die Konstanten A_1 und A_2 die gleichen wie nach Gl. (3/40) sind. Die Parameter K_1' und K_2' werden aus den Anfangsbedingungen für $t = T$ gefunden, d. h., die Werte von $q(t)$ und $\mathrm{d}q(t)/\mathrm{d}t$ für $t = T$ müssen nach den Gln. (3/39) und (3/39a) übereinstimmen. Daraus ergibt sich

$$K_1' - K_1 = -\frac{A_2CE}{A_1 - A_2}\,\mathrm{e}^{A_1T}; \qquad K_2' - K_2 = \frac{A_1CE}{A_1 - A_2}\,\mathrm{e}^{A_2T} \tag{3/42a}$$

und damit die Lösung

$$q = \frac{CE}{A_1 - A_2}\{A_2\mathrm{e}^{-A_1t} - A_1\mathrm{e}^{-A_2t} - [A_2\mathrm{e}^{-A_1t'} - A_1\mathrm{e}^{-A_2t'}]\} = q'(t) - q'(t'), \tag{3/45}$$

wenn $t' = t - T$. Der Verlauf von $U_C = q/C$ ähnelt dem in Abb. 3.10 dargestellten, während $U_R = R\,\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ zunächst einen Maximalwert erreicht, dann abfällt und nach $t = T$ das Vorzeichen wechselt (*aperiodischer Fall*).

2. Fall: $\delta^2 < \omega_0^2$. In diesem Fall wird $R^2 < 4L/C$, $\omega^2 < 0$; A_1 und A_2 sind konjugiert komplexe Größen, mit denen Gl. (3/43) folgende Form erhält

$$q = CE\left\{1 + \mathrm{j}\,\frac{\mathrm{e}^{-\delta t}}{\omega}\left[\frac{\delta}{2}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}) + \mathrm{j}\,\frac{\omega}{2}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})\right]\right\},$$

wobei im Gegensatz zu Gl. (3/41) $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ ist. Benutzt man die Beziehung $\delta\,\sin\omega t + \omega\cos\omega t = \omega_0\sin(\omega t + \beta)$ mit $\beta = \arctan(\omega/\delta)$, so ergibt sich

$$q = CE\left[1 - \frac{\omega_0}{\omega}\,\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta)\right]. \tag{3/46}$$

Diese Beziehung beschreibt gedämpfte Schwingungen mit der Frequenz ω, die nach genügender Zeit in den Gleichgewichtszustand CE übergehen. Für

$t = T$ gelten die gleichen Beziehungen, d. h., es wird ein Einschwingvorgang angefacht, der später in den stationären Zustand übergeht (s. Abb. 3.11).

3. Fall: $\omega_0^2 \to \delta^2$. Diese Bedingung stellt den Übergang vom aperiodischen (1. Fall) zum periodischen, gedämpften Verhalten des RLC-Kreises dar, für den nach Gl. (3/40) $A_1 \to A_2$ werden müßte. Zunächst soll $A_1 = A$ und $A_2 = A + a$ gesetzt werden, wobei a eine infinitesimale Größe sein soll, die den Übergang für $a \to 0$ zum aperiodischen Grenzfall liefert. Durch Einsetzen in Gl. (3/39) findet man abgesehen vom stationären Term

$$q' = \mathrm{e}^{-At}(K_1 + K_2 \mathrm{e}^{-at})$$

und mit $\mathrm{e}^{-at} \approx 1 - at$ für kleine a

$$q' = \mathrm{e}^{-At}(K_3 - K_4 t),$$

wenn $K_3 = K_1 + K_2$ und $K_4 = aK_2$. Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $q = 0$, $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t = 0$ für $t = 0$ werden $K_3 = -CE$ und $K_4 = ACE$, so daß sich mit $A = \omega_0$ die vollständige Lösung zu

$$q = CE[1 - (1 + \omega_0 t)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}] \tag{3/47}$$

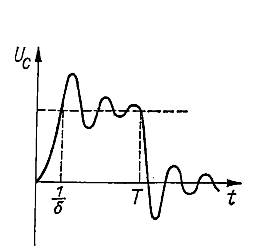


Abb. 3.11 Gepulster C-Kreis

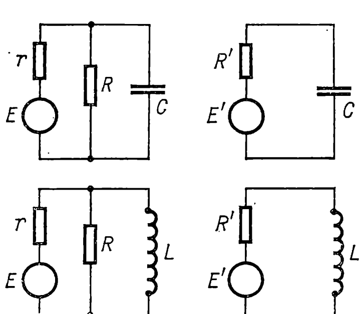


Abb. 3.12 Transformation von Parallel- in Serienkreis

ergibt. Es läßt sich zeigen, daß der Wendepunkt im ersten Anstieg von q nach der Zeit $t = 1/\delta$ auftritt, während er in allen aperiodischen Kreisen später erreicht wird. Diese Eigenschaft gibt dem RLC-Kreis mit Grenzdämpfung für die Verarbeitung von Impulsen eine besondere Bedeutung.

3.35 Impulsvorgänge in parallelgeschalteten RL- und RC-Kreisen

Die Eigenschaften von Netzwerken mit parallelgeschalteten RL- und RC-Zweigen lassen sich leicht aus denen der Serienkreise ableiten. Wie in Abb. 3.12 für einen RC- und einen RL-Kreis dargestellt ist, muß die EMK des Impulsgenerators mit dem Innenwiderstand r durch den Ausdruck

$$E' = ER/(r + R)$$

und der gesamte Wirkwiderstand durch

$$R' = Rr/(r + R)$$

ersetzt werden. Man erhält den Verlauf der Spannung U_C am Kondensator durch Einsetzen von E' und R' in die Gln. (3/31) und (3/32); sie lauten

$$U_C = \frac{ER}{r + R}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau'}), \qquad 0 \leqq t \leqq T; \tag{3/31a}$$

$$U_C = \frac{ER}{r + R}(\mathrm{e}^{T/\tau'} - 1)\,\mathrm{e}^{-t/\tau'} \qquad t \geqq T, \tag{3/32a}$$

worin $\tau' = rRC/(r + R)$ ist. Der zeitliche Anstieg von U_C für kleine Werte von t ergibt sich aus Gl. (3/31 a) zu

$$(\mathrm{d}U_C/\mathrm{d}t)_{t=0} = E/rC,$$

d. h., er hängt nur vom Innenwiderstand r des Generators, nicht vom Dämpfungswiderstand R ab. Andererseits ist der stationäre Wert von U_C durch beide Größen bestimmt:

$$U_{C0} = ER/(r + R).$$

Die Analyse des RL-Kreises in Parallelschaltung verläuft analog. Aus den Gln. (3/37) und (3/37a) folgt für die Spannung an der Induktivität

$$U_L = \frac{ER}{r + R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau''} \qquad 0 \leqq t \leqq T; \tag{3/37b}$$

$$U_L = \frac{ER}{r + R}(\mathrm{e}^{T/\tau''} - 1)\,\mathrm{e}^{-t/\tau''} \qquad t \geqq T, \tag{3/37c}$$

wobei die Zeitkonstante $\tau'' = L\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right)$ ist.

3.4 Wechselstromnetzwerke

3.41 Komplexe Schreibweise

Wechselstromnetzwerke lassen sich mit Hilfe der komplexen Rechenweise (s. a. § 3.1) bequem behandeln, wobei die zeitabhängigen Größen durch Funktionen komplexer Variabler ausgedrückt werden.

Periodisch sich ändernde Größen, wie $X = X_0 \cos(\omega t - \Phi)$, lassen sich als *Realteil* eines mit der Winkelgeschwindigkeit ω in der Gaußschen Zahlenebene umlaufenden Vektors $\boldsymbol{X} = X_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \Phi)}$ ausdrücken, d. h.

$$X = \mathrm{Re}\,\{X_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \Phi)}\}.$$

Die in § 3.2 behandelten linearen Netzwerke sind in gleicher Weise mit Wechselstromgrößen zu betreiben; die dort erhaltenen Resultate gelten auch für komplexe Größen. Bei nichtlinearen Vorgängen trifft diese Regel nicht mehr zu, wie z. B. bei der Berechnung der Leistung in Wechselstromkreisen.

Die große Bedeutung der komplexen Rechenmethode in der Netzwerktheorie liegt in der kompakten Schreibweise, welche die Amplituden- und Phasenbeziehungen enthält. Die für die Beschreibung von Netzwerken erforderlichen Differentialgleichungen lassen sich auf lineare algebraische Gleichungen mit komplexen Variablen und komplexen Koeffizienten reduzieren.

Als Beispiel soll ein Serienresonanzkreis (Abb. 3.13) behandelt werden, der von einer Spannung $E = E_0 \cos(\omega t - \Phi)$ erregt wird. In komplexer Form lautet die Gleichung für die Erregerspannung

$$\boldsymbol{E} = E_0 e^{j(\omega t - \Phi)} = \boldsymbol{E}_1 e^{j\omega t}.$$

Für den Strom i im Kreis muß folgende Differentialgleichung gelten:

$$L\,di/dt + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = E, \qquad (3/48)$$

deren stationäre Lösung durch den Ansatz

$$\boldsymbol{I} = I_0 e^{j(\omega t - \Psi)} = \boldsymbol{I}_1 e^{j\omega t}$$

angegeben werden kann. Da für $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{I}$ die Zeitabhängigkeit durch $e^{j\omega t}$ gegeben ist, ferner der *Differentiation* nach der Zeit die Multiplikation mit $j\omega$

$$d/dt \to j\omega$$

und der *Integration* über die Zeit die Division mit $j\omega$ oder Multiplikation mit $-j/\omega$

$$dt \to -j/\omega$$

entspricht, kann Gl. (3/48) in der Form

$$\boldsymbol{E}_1 e^{j\omega t} = j\omega L\,\boldsymbol{I}_1 e^{j\omega t} + R\boldsymbol{I}_1 e^{j\omega t} - j\,\frac{1}{\omega C}\,\boldsymbol{I}_1 e^{j\omega t} \qquad (3/49)$$

geschrieben werden. Durch Kürzen mit $e^{j\omega t}$ erhält man die Beziehung

$$\boldsymbol{E}_1 = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{I}_1, \qquad (3/50)$$

die den Zusammenhang zwischen $\boldsymbol{E}_1$ und $\boldsymbol{I}_1$ durch eine *Impedanz* $\boldsymbol{Z} = R + jX$ beschreibt. Die Amplitude der an den Enden des Serienkreises liegenden Spannung beträgt $U_0 = I_0 Z$, wobei

$$Z = |\boldsymbol{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

und die relative Phasenverschiebung zwischen U und I ergibt sich zu

$$\Phi = \arctan(X/R) = \arctan\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

In Abb. 3.14 ist das Vektordiagramm für E und I dargestellt.

3.42 Serien- und Parallelschaltung von Impedanzen

Besteht der Kreis aus mehreren Induktivitäten, Widerständen und Kapazitäten, die hintereinandergeschaltet sind, so tritt anstelle von Gl. (3/48) die Beziehung

$$(L_1 + L_2 + L_3 + \cdots L_h)\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t + (R_1 + R_2 + \cdots + R_k)i + (1/C_1 + 1/C_2 + \cdots + 1/C_2 + \cdots + 1/C_l) \int i\,\mathrm{d}t = E.$$

Führt man

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_h;$$

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_k;$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_l}$$

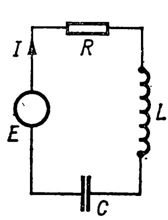


Abb. 3.13 Serienresonanzkreis

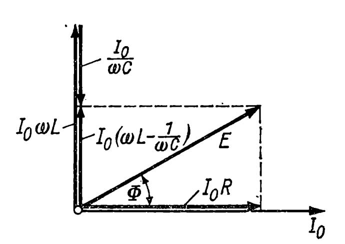


Abb. 3.14 Vektordiagramm eines Serienresonanzkreises

ein, so läßt sich die obige Gleichung auf die ursprüngliche Gl. (3/48) zurückführen. Die Gesamtimpedanz berechnet sich damit zu

$$\boldsymbol{Z} = \sum_n \boldsymbol{Z}_n = \sum R_k + \mathrm{j} \sum \left(\omega L_h - \frac{1}{\omega C_l}\right). \tag{3/51}$$

Sind h Induktivitäten, k Widerstände und l Kapazitäten parallelgeschaltet und wird dieser Kreis vom Generator mit dem Strom $\boldsymbol{I} = I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \Phi)}$ gespeist, so gilt

$$I = c\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t + u/r + \frac{1}{l} \int u\,\mathrm{d}t \tag{3/52}$$

mit den Abkürzungen

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_h};$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_k};$$

$$c = C_1 + C_2 + \cdots + C_l.$$

Gleichung (3/52) ist von derselben Form wie Gl. (3/48), so daß für den stationären Wert der Spannung

$$\boldsymbol{U} = U_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \Phi)} = U_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad (\text{mit } \boldsymbol{U}_1 = U_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Phi})$$

angesetzt werden kann. Als Lösung ergibt sich die Beziehung

$$\boldsymbol{I} = \left[\frac{1}{r} + \mathrm{j}\left(\omega c - \frac{1}{\omega l}\right)\right] \boldsymbol{U} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{U}. \tag{3/53}$$

Die Größe $\boldsymbol{Y}$ mit der Dimension einer Leitfähigkeit ist die komplexe *Admittanz* oder der Scheinleitwert (vgl. Gl. (3/7))

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{I}/\boldsymbol{U} = \frac{1}{r} + \mathrm{j}\left(\omega c - \frac{1}{\omega l}\right) = G + \mathrm{j}B. \tag{3/54}$$

Da die Kirchhoffschen Sätze (§ 3.1) auch für die Augenblickswerte von Strom und Spannung gelten, vereinfacht sich das System von Differentialgleichungen für ein Netzwerk aus mehreren Maschen auf ein System linearer algebraischer Gleichungen; die in § 3.2 besprochenen Netzwerktheoreme gelten daher ebenso für Wechselstrom.

3.43 Elektrische Leistung

In § 3.41 war bereits davon die Rede, daß bei nichtlinearen Phänomenen die komplexe Rechenweise nur mit Einschränkung anwendbar ist. Liegt an den Klemmen eines beliebigen Netzwerks eine Spannung mit der Amplitude U_0 und wird dieses von einem Strom mit der Amplitude I_0 durchflossen, der gegenüber der Spannung eine Phasenverschiebung Φ aufweist, so wird im Netzwerk die Leistung

$$P = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \Phi \tag{3/55}$$

verbraucht. Führt man anstelle der Amplituden die komplexen Größen $\boldsymbol{I} = I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ und $\boldsymbol{U} = U_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \Phi)}$ ein, so erhält man das Skalarprodukt (3/55) durch Multiplikation des ersten Vektors mit dem konjugiert komplexen Wert des zweiten, d. h.,

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{I}^* = U_0 I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Phi} = U_0 I_0 \cos \varphi + \mathrm{j}\, U_0 I_0 \sin \Phi.$$

Die gesuchte Wirkleistung P findet man also aus dem halben Realteil von $\boldsymbol{U}\boldsymbol{I}^*$

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{I}^*). \tag{3/56}$$

Die Bedeutung des Imaginärteils von $\boldsymbol{U}\boldsymbol{I}^*$ erkennt man aus Gl. (3/50), wenn man beide Seiten mit $\frac{1}{2}\boldsymbol{I}^*$ multipliziert

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{U}\boldsymbol{I}^* = \frac{1}{2} R I_0^2 + \mathrm{j}\omega\left(\frac{1}{2} L I_0^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{\omega^2 C} I_0^2\right).$$

Der erste Term auf der rechten Seite stellt die Wirkleistung dar; $\frac{1}{2}\,LI_0^2$ ist die mittlere in L gespeicherte magnetische Energie, während $\frac{1}{2}\,(I_0/\omega C)^2 C = \frac{1}{2}\,U_C^2 C$ die mittlere in der Kapazität C gespeicherte elektrische Energie angibt. Der Imaginärteil von $\frac{1}{2}\,\boldsymbol{U I}^*$ ist demnach der Differenz zwischen gespeicherter magnetischer und elektrischer Energie proportional; man nennt ihn die *Blindleistung* $P_q = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2}\,\boldsymbol{U I}^*\right)$.

Soll von einem Generator mit der Impedanz $\boldsymbol{Z}_g$ ein Optimum an Leistung auf eine Last mit der Impedanz $\boldsymbol{Z}_l$ übertragen werden, so muß für diesen Fall Gl. (3/56) ein Maximum annehmen. Da der in diesem Kreis fließende Strom

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{U}/(\boldsymbol{Z}_g + \boldsymbol{Z}_l) = \frac{\boldsymbol{U}}{R_g + R_l + \mathrm{j}\,(X_g + X_l)}$$

beträgt, wird der Spannungsabfall an der Last $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{Z}_l \boldsymbol{I}$ und die in ihr verbrauchte Wirkleistung

$$P = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{U I}^*) = \frac{\frac{1}{2}\,E_0^2 R_l}{(R_g + R_l)^2 + (X_g + X_l)^2}\,.$$

Da die Blindwiderstände X_g und X_l positiv oder negativ sein können, wird P auf jeden Fall maximal, wenn $X_g = -X_l$. Mit dieser Bedingung ergibt sich die Wirkleistung zu

$$P = \frac{U_0^2}{2}\,\frac{R_l}{(R_g + R_l)^2}\,,$$

die für $R_g = R_l$ ihr Maximum erreicht. Beide Bedingungen ergeben optimale *Leistungsanpassung.*

3.44 Resonanzkreise

Der aus hintereinandergeschalteter Induktivität L, Widerstand R und Kapazität C bestehende *Serienresonanzkreis* ist bereits in § 3.34 behandelt worden; sein Vektordiagramm ist in Abb. 3.14 dargestellt. Für die Anfangsbedingungen

$$t = 0\,, \quad q(0) = UC\,; \quad \mathrm{d}q/\mathrm{d}t = 0$$

wird die Lösung der Differentialgleichung (3/38)

$$\boldsymbol{I} = I_0 \mathrm{e}^{-\delta t} \sin \omega t\,, \quad I_0 = -UC\omega_0^2/\omega$$

mit $\delta = R/2L$ und $\omega_0^2 = 1/LC$. Es tritt eine gedämpfte Schwingung auf, deren Amplitude zeitlich wie $\mathrm{e}^{-\delta t}$ abnimmt und deren Frequenz

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - (\delta/\omega_0)^2} \tag{3/57}$$

gegenüber der ungedämpften Eigenfrequenz ω_0 des Kreises verringert ist. Den (natürlichen) Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinanderfolgender Strommaxima nennt man *logarithmisches Dekrement*

$$\ln (I_n/I_{n+1}) = \lambda = \frac{2\pi}{\omega}\,\delta. \tag{3/58}$$

Gebräuchlicher ist der Ausdruck *Kreisgüte* Q als Verhältnis der im Kreis gespeicherten Energie W zum Energieverlust $-\mathrm{d}W/\mathrm{d}t$ während der Zeit $1/\omega_0$; es gilt

$$Q = \frac{W}{-\mathrm{d}W/\mathrm{d}t} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0 L}{R}. \tag{3/59}$$

Wird der Resonanzkreis an eine Wechselspannungsquelle gelegt, so ist der Strom eine Funktion der Frequenz und der einzelnen Schwingkreiselemente. Der Ausdruck für die Impedanz des Kreises

$$\boldsymbol{Z} = R + \mathrm{j}(\omega L - 1/\omega C)$$

zeigt, daß diese rein ohmisch und zum Minimum wird, wenn $\omega L = 1/\omega C$ ist, d. h., wenn der Kreis mit der Resonanzfrequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ erregt wird.

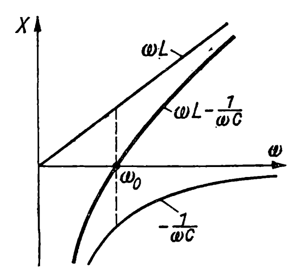


Abb. 3.15 Blindwiderstand im Serienresonanzkreis

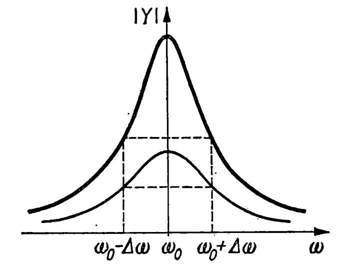


Abb. 3.16 Resonanzkurve des Serienresonanzkreises

In Abb. 3.15 ist als Funktion der Frequenz der Verlauf des Blindwiderstandes X dargestellt; unterhalb der Resonanzfrequenz $(\omega < \omega_0)$ ist $1/\omega C > \omega L$ (kapazitive Last), und für $\omega > \omega_0$ wird $X > 0$ (induktive Last).

Die *Schärfe* der Resonanz, d. h. die Frequenzabhängigkeit des Stromes I bei konstanter Spannung, wird durch den Verlauf der *Admittanz* $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{I}/\boldsymbol{U}$ in Abb. 3.16 wiedergegeben. Für die Resonanzfrequenz ω_0 wird $Y = 1/R$, also reell, und erreicht ein Maximum. Zur Charakterisierung der *Resonanzschärfe* führt man die Differenzfrequenzen $\omega = \omega_0 \pm \Delta\omega$ ein, für die der Absolutwert der Reaktanz dem ohmschen Widerstand entspricht, d. h., $\omega L - \dfrac{1}{\omega C} = R$. Bei diesen Frequenzen wird $Y = \dfrac{1}{R}\sqrt{2}$ und die Wirkleistung gegenüber der bei ω_0 auf die Hälfte reduziert. Man nennt dieses Intervall die *Halbwertsbreite* der Resonanzkurve. Schreibt man die Impedanz

des Kreises in der Form

$$\boldsymbol{Z} = R + \mathrm{j}\,\omega_0 L(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega),$$

so wird für $\Delta\,\omega/\omega_0 \ll 1$

$$\boldsymbol{Z} \approx R + \mathrm{j}\,\omega_0 L\,\frac{2\Delta\,\omega}{\omega_0} = R\left(1 + \mathrm{j}Q\,\frac{2\Delta\,\omega}{\omega_0}\right).$$

Wählt man wieder $\Delta\,\omega$ so, daß $X = R$ wird, so liefert der Vergleich mit Gl. (3/59):

$$\frac{2\Delta\,\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}, \tag{3/60}$$

d. h., die relative Halbwertsbreite $2\Delta\,\omega/\omega_0$ entspricht der reziproken *Kreisgüte* Q.

Für die Berechnung des *Parallelresonanzkreises* (Abb. 3.17) benutzt man zweckmäßig die Admittanz $\boldsymbol{Y}$, für die

$$\boldsymbol{Y} = \frac{1}{R + \mathrm{j}\,\omega L} + \mathrm{j}\,\omega C = \frac{R + \mathrm{j}(X_L + X_C)}{-X_L X_C + \mathrm{j}RX_C}$$

gilt, wenn $X_L = \omega L$, $X_C = -1/\omega C$. Daraus ergibt sich die Impedanz des Kreises zu

$$\boldsymbol{Z} = \frac{1}{\boldsymbol{Y}} = \frac{RX_C^2}{R^2 + (X_L + X_C)^2} + \mathrm{j}\,\frac{X_L X_C(X_L + X_C) + R^2 X_C}{R^2 + (X_L + X_C)^2}. \tag{3/61}$$

Im Falle der Resonanz muß die Impedanz rein ohmisch sein, d. h., $\mathrm{Im}(\boldsymbol{Z}) = 0$. Soll der Zähler des zweiten Terms in Gl. (3/61) verschwinden, so wird

$$R^2 = \omega_0 L\left(\frac{1}{\omega_0 C} - \omega_0 L\right)$$

und daraus

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}. \tag{3/62}$$

Dieser Ausdruck für die Resonanzfrequenz unterscheidet sich von dem des Serienkreises, in dem R nicht enthalten ist. Für $R = 0$ stimmen beide Ausdrücke überein. Der Resonanzwiderstand des Parallelkreises wird dann

$$Z_0 = \mathrm{Re}(\boldsymbol{Z}) = \frac{RX^2}{R^2 + (X_C + X_L)^2} \quad \text{bei} \quad \omega = \omega_0$$

und für $R \ll \omega L$

$$Z_0 = X_C{}^2/R = -X_L X_C/R = L/RC. \tag{3/62a}$$

3.45 Netzwerke mit induktiver Kopplung

Im Gegensatz zu Gleichstromnetzwerken, in denen die einzelnen Maschen galvanisch gekoppelt sind, können in Wechselstromnetzwerken zwei Maschen durch eine *Gegeninduktivität* (§ 3.1), d. h. durch den mit zwei Spulen gemeinsam verketteten magnetischen Fluß, gekoppelt sein (*induktive Kopplung*).

Bezeichnet man die Gegeninduktivität mit M und führt eine der beiden Spulen den Strom $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_0 e^{j\omega t}$, dann wird in der zweiten Spule die EMK

$$e_2 = M\,\mathrm{d}\boldsymbol{I}_1/\mathrm{d}t = j\omega M \boldsymbol{I}_1$$

induziert. Betrachtet man das in Abb. 3.18a dargestellte Netzwerk mit den Impedanzen Z_1, Z_2, Z_3 und den Kopplungsspulen L_1, L_2, deren Gegeninduktivität M sei, so gilt für die beiden EMK (gleiche Frequenz vorausgesetzt)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_1 &= \boldsymbol{I}_1(\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2 + j\omega L_1) - \boldsymbol{I}_2(\boldsymbol{Z}_2 + j\omega M); \\ \boldsymbol{E}_2 &= -\boldsymbol{I}_1(\boldsymbol{Z}_2 + j\omega M) + (\boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_3 + j\omega L_2)\boldsymbol{I}_2. \end{aligned} \tag{3/63}$$

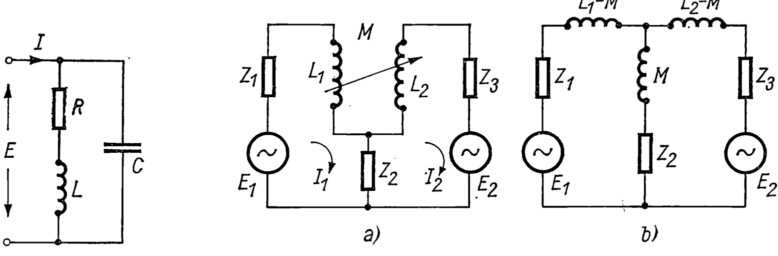


Abb. 3.17 Parallelresonanzkreis *Abb. 3.18 Induktive Kopplung*

Führt man die Serienimpedanzen $\boldsymbol{Z}_{11} = \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2 + j\omega L_1$, $\boldsymbol{Z}_{22} = \boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_3 + j\omega L_2$, ferner die Gegenimpedanz der zwei Maschen $\boldsymbol{Z}_{12} = \boldsymbol{Z}_{21} = \boldsymbol{Z}_2 + j\omega M$ ein, so wird aus Gl. (3/63)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_1 &= \boldsymbol{Z}_{11} I_1 - \boldsymbol{Z}_{12} I_2; \\ \boldsymbol{E}_2 &= -\boldsymbol{Z}_{21} I_1 + \boldsymbol{Z}_{22} I_2. \end{aligned} \tag{3/63a}$$

Diese Beziehungen gelten auch für ein Netzwerk nach Abb. 3.18b, in dem die Gegeninduktivität durch eine Induktivität M ersetzt wird, die beiden Maschen angehört.

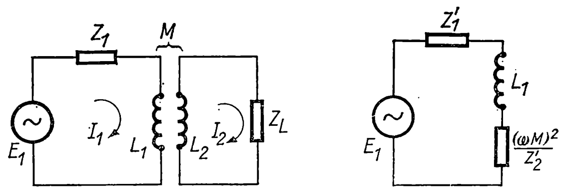


Abb. 3.19 Induktive Kopplung eines Generators

Dieses Prinzip läßt sich auch auf den in Abb. 3.19 dargestellten Fall anwenden, bei dem eine Lastimpedanz Z_L an einen Generator $\boldsymbol{E}_1$ induktiv angekoppelt ist. Analog zu Gl. (3/63) gilt hierfür

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_1 &= (\boldsymbol{Z}_1 + j\omega L_1)\boldsymbol{I}_1 - j\omega M \boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{Z}_1' \boldsymbol{I}_1 - j\omega M \boldsymbol{I}_2, \\ 0 &= -j\omega M \boldsymbol{I}_1 + (\boldsymbol{Z}_1 + j\omega L_2)\boldsymbol{I}_2 = -j\omega M \boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{Z}_2' \boldsymbol{I}_2. \end{aligned} \tag{3/64}$$

Eliminiert man daraus I_2, so findet man für die vom Generator aus gesehene Impedanz den Ausdruck

$$Z = E_1/I_1 = Z_1' + (\omega M)^2/Z_2'. \tag{3/65}$$

Infolge der Ankopplung eines zweiten Kreises wird demnach die ursprüngliche Impedanz um die zusätzliche Impedanz $(\omega M)^2/Z_2'$ vergrößert.

Ein besonderer Fall ist der, bei dem ein Generator einen Parallelresonanzkreis in Resonanz betreibt und dieser induktiv an einen Serienresonanzkreis gekoppelt ist (Abb. 3.20). Für beide Kreise muß $C_1 L_1 = C_2 L_2 = 1/\omega^2$ sein. Der rechts von der Trennlinie liegende Teil kann nach obigem durch die in Abb. 3.20b gezeichnete Schaltung ersetzt werden. Da auch der angekoppelte Kreis in Resonanz ist, reduziert sich dessen Impedanz Z_2' auf $R' = (\omega M)^2/R$

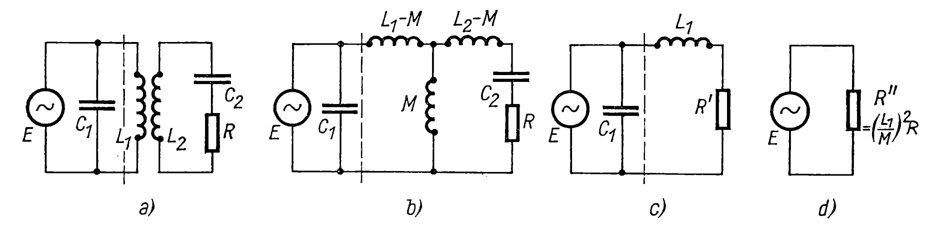


Abb. 3.20 Gekoppelte Resonanzkreise

(Abb. 3.20c). Nunmehr wird E durch einen aus L_1, C_1 und R' bestehenden Resonanzkreis belastet, für den nach Gl. (3/62a) $L_1/R'C_1 = R(L_1/M)^2$ zu setzen ist. Es findet demnach eine *Impedanztransformation* im Verhältnis $(L_1/M)^2$ statt.

3.46 Idealer Transformator

Ein *Transformator* (vgl. § 15.41) besteht aus einem Spulenpaar, das durch einen geschlossenen Eisenkern induktiv miteinander gekoppelt ist. Wegen der magnetischen Sättigung dieses Kerns, der nichtlineare Effekte bewirkt, kann dieser nur dann durch lineare Gleichungen beschrieben werden, wenn und solange ein linearer Zusammenhang zwischen magnetischer Feldstärke H und Induktion B gewährleistet ist. Für eisenlose Transformatoren gilt das ohne Einschränkung.

In Abb. 3.21 ist das Ersatzbild des idealen Transformators dargestellt, der im Sekundärkreis die Lastimpedanz Z enthält. Mit den Abkürzungen $Z_{11} = R_1 + j\omega L_1$, $Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 + Z$ und $Z_{12} = Z_{21} = j\omega M$ lauten die Netzwerkgleichungen

$$\begin{aligned} E &= Z_{11} I_1 - Z_{12} I_2, \\ 0 &= -Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2. \end{aligned} \tag{3/66}$$

Das Idealverhalten eines Transformators ist dadurch gekennzeichnet, daß die Ströme und Spannungen in Primär- und Sekundärkreis durch die Bedingungen

$$E_1 = a E_2, \qquad I_1 = -I_2/a \tag{3/67}$$

verknüpft sind, wobei a eine reelle Zahl ist. Da $\boldsymbol{Z} = -\boldsymbol{E}_2/\boldsymbol{I}_2$, wird mit Gl. (3/67)

$$\boldsymbol{Z}' = \boldsymbol{E}_1/\boldsymbol{I}_1 = a^2\boldsymbol{Z}. \tag{3/67a}$$

Das aus der zweiten der Gln. (3/66) resultierende Verhältnis

$$\boldsymbol{I}_1/\boldsymbol{I}_2 = (R_2 + \mathrm{j}\,\omega L_2 + \boldsymbol{Z})/\mathrm{j}\,\omega M \tag{3/66a}$$

wird nur dann reell und frequenzunabhängig, wenn $R_2 \ll \omega L_2$ und $Z \ll \omega L_2$ ist. Berücksichtigt man dies, so wird

$$\boldsymbol{I}_1/\boldsymbol{I}_2 = L_2/M = \text{const}\,(N_2/N_1) \qquad (L_2 \sim N_2^2;\; M \sim N_1 N_2),$$

wenn N_1 und N_2 die Windungszahlen von Primär- und Sekundärwicklung sind. Setzt man I_1 aus Gl. (3/66a) in die erste der Gln. (3/66) und führt $\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{I}_2\boldsymbol{Z}$ ein, so ergibt sich die Beziehung

$$\frac{\boldsymbol{E}_1}{\boldsymbol{E}_2} = \frac{(M^2 - L_1L_2)\,\omega^2 + \mathrm{j}\,(R_1L_2 + R_2L_1)\,\omega + \mathrm{j}\,\omega L_1\boldsymbol{Z} + R_1(R_2 + \boldsymbol{Z})}{\mathrm{j}\,\omega M\boldsymbol{Z}}.$$

Soll $\boldsymbol{E}_1/\boldsymbol{E}_2$ frequenzunabhängig sein, sind folgende Bedingungen zu erfüllen:

$$(M^2 - L_1L_2)\,\omega \ll \boldsymbol{Z}L_1;$$

$$R_1L_2 + L_1R_2 \ll \boldsymbol{Z}L_1;$$

$$R_1(R_2 + \boldsymbol{Z}) \ll ZL_1\omega,$$

und man erhält

$$\boldsymbol{E}_1/\boldsymbol{E}_2 = L_1/M = \text{const}\cdot(N_1/N_2).$$

Durch Vergleich mit dem entsprechenden Ausdruck für $\boldsymbol{I}_1/\boldsymbol{I}_2$ findet man die Beziehung $\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{I}_1 = \text{const}\,\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{I}_2$; weist der Transformator keinen Streufluß auf, so wird $M^2 = L_1L_2$, und die Konstante erhält den Wert Eins.

3.47 Gekoppelte Resonanzkreise

Bei einer Reihe praktischer Anwendungen werden zwei Resonanzkreise, die auf die gleiche Frequenz abgestimmt sind, miteinander gekoppelt. Diese Kopplung kann galvanisch, induktiv oder kapazitiv sein; ihre analytische Behandlung hängt nicht von der Kopplungsart ab.

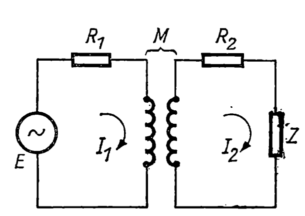


Abb. 3.21 Idealer Transformator

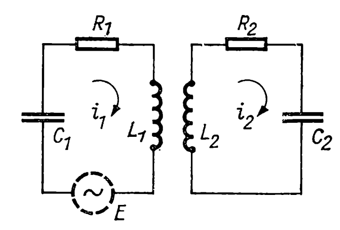


Abb. 3.22 Induktiv gekoppelte Resonanzkreise

In Abb. 3.22 sind zwei Serienresonanzkreise mit induktiver Kopplung dargestellt, deren freie Schwingungen zunächst berechnet werden sollen. Geht man

davon aus, daß bei $t = 0$ der Kondensator C_1 die Ladung $Q_1(0) = Q_0$, die Kapazität C_2 die Ladung $Q_2(0) = 0$ besitzen soll, ferner $i_1 = \mathrm{d}Q_1/\mathrm{d}t = i_2 = \mathrm{d}Q_2/\mathrm{d}t = 0$ ist, so gilt

$$\left.\begin{aligned} L_1 \frac{\mathrm{d}^2 Q_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{Q_1}{C_1} - M \frac{\mathrm{d}^2 Q_2}{\mathrm{d}t^2} &= 0; \\ -M \frac{\mathrm{d}^2 Q_1}{\mathrm{d}t^2} + L_2 \frac{\mathrm{d}^2 Q_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{Q_2}{C_2} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3/68}$$

Dabei sind die Beiträge $R_1\,\mathrm{d}Q_1/\mathrm{d}t$ bzw. $R_2\,\mathrm{d}Q_2/\mathrm{d}t$ in beiden Gleichungen vernachlässigt worden. Als Lösungsansatz wird

$$\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{A}_1 \mathrm{e}^{\gamma t} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{A}_2 \mathrm{e}^{\gamma t}$$

benutzt, wobei $\boldsymbol{A}$ und γ komplexe Zahlen sind; ferner führt man die Resonanzfrequenz der ungekoppelten Kreise

$$\Omega_1^2 = 1/L_1 C_1 \quad \text{und} \quad \Omega_2^2 = 1/L_2 C_2$$

ein. Setzt man diese in Gl. (3/68) ein, so findet man

$$\gamma^2 = \frac{-(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \pm \sqrt{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + 4k^2 \Omega_1^2 \Omega_2^2}}{2(1 - k^2)} \leqq 0, \tag{3/69}$$

wenn
$$k^2 = M^2/L_1 L_2 \leqq 1$$

der *Kopplungsgrad* der Resonanzkreise ist. Da nach Gl. (3/69) γ^2 immer negativ ist, wird $\gamma = \pm\,\mathrm{j}\,\omega$ und

$$\omega^2 = \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 \pm \sqrt{(\Omega_1^2 - \Omega_2{}^2)^2 + 4k^2 \Omega_1^2 \Omega_2^2}}{2(1 - k^2)}; \tag{3/70}$$

die Frequenzen ω_1 und ω_2 werden *Normalfrequenzen* des gekoppelten Systems genannt. Sind beide Kreise auf die gleiche Frequenz $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ abgestimmt, so ergeben sich aus Gl. (3/70) die beiden Frequenzen

$$\omega_1 = \Omega/\sqrt{1 + k} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \Omega/\sqrt{1 - k}. \tag{3/70a}$$

Für schwache Kopplung, $k \ll 1$, kann man $\frac{1}{2}\,(\omega_2 + \omega_2) \approx \Omega$ und $\frac{1}{2} \times (\omega_1 - \omega_2) \approx -\frac{1}{2}\,k\,\Omega$ setzen und bekommt die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= Q_0 \cos \frac{k\Omega}{2}\, t \cos \Omega t; \\ Q_2 &= Q_0 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \sin \frac{k\Omega}{2}\, t \sin \Omega t. \end{aligned}\right\} \tag{3/71}$$

In beiden Kreisen entstehen Schwingungen mit der Frequenz Ω, die um 90° gegeneinander phasenverschoben sind und deren Amplitude sich mit der

Frequenz $k\Omega/2$ ändert. Die Energie pendelt periodisch von einem Kreis zum andern.

Betrachtet werde nunmehr der Fall, wie in Abb. 3.22 gestrichelt eingezeichnet, daß der eine Kreis den Generator mit der EMK $\boldsymbol{E}$ enthält, dessen Frequenz ω sei. Mit den Abkürzungen

$$\boldsymbol{Z}_{11} = R_1 + \mathrm{j}(\omega L_1 - 1/\omega C_1), \quad \boldsymbol{Z}_{22} = R_2 + \mathrm{j}(\omega L_2 - 1/\omega C_2), \quad \boldsymbol{Z}_{12} = \boldsymbol{Z}_{21} = \mathrm{j}\omega M$$

gelten die Netzwerkgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Z}_{11}\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{Z}_{12}\boldsymbol{I}_2 &= \boldsymbol{E}; \\ -\boldsymbol{Z}_{21}\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{Z}_{22}\boldsymbol{I}_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{3/72}$$

woraus sich der Strom im zweiten Kreis zu

$$\boldsymbol{I}_2 = \frac{\boldsymbol{Z}_{12}\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{Z}_{11}\boldsymbol{Z}_{22} - \boldsymbol{Z}_{12}} \tag{3/72a}$$

berechnet. Sind beide Kreise identisch, d. h., ist $L_1 = L_2 = L$, $C_1 = C_2 = C$ und $R_1 = R_2 = R$, und führt man außerdem die Kreisgüte $G = \Omega L/C$ ein, so erhält man aus Gl. (3/72a) mit den Vereinfachungen $\omega + \Omega = 2\Omega$, $\omega/\Omega = 1$, $\Delta\omega = \omega - \Omega$ den Ausdruck

$$I_2 = \frac{E}{R}\,\frac{kG}{\sqrt{\left[1 + G^2\left(\dfrac{2\Delta\omega}{\Omega} + k\right)^2\right]\left[1 + G^2\left(\dfrac{2\Delta\omega}{\Omega} - k\right)^2\right]}}. \tag{3/73}$$

Trägt man den Strom $\boldsymbol{I}_2$ gegen die Verstimmung $\Delta\omega/\Omega$ auf (Abb. 3.23), so findet man bei $\Delta\omega = 0$, d. h. für die Resonanzfrequenz Ω, ein relatives Minimum der Größe

$$I_2(\Omega) = \frac{E}{R}\,\frac{kG}{[1 + (kG)^2]} \tag{3/74}$$

und zwei Strommaxima bei $\omega = \omega_1$ und $\omega = \omega_2$, wenn $\Delta\omega/\Omega = \pm k/2$, mit dem Wert

$$I_2(\omega_{1,2}) = \frac{E}{R}\,\frac{kG}{\sqrt{1 + (2kG)^2}}. \tag{3/74a}$$

Aus den Gln. (3/74) und (3/74a) folgt, daß in beiden Fällen ein Maximalstrom $I_{2\max} = E/2R$ resultiert, der bei $\Delta\omega = 0$ für $kG = 1$, bei $\omega = \omega_{1,2}$ für $kG \to \infty$ erreicht wird. Beide Kurven schneiden sich bei $kG = \sqrt{2}$, d. h., in diesem Fall ist $I_2(\Omega) = I_2(\omega_{1,2})$ und $M = \dfrac{R}{\omega_0}\sqrt{2}$.

In Abb. 3.23 ist $2I_2R/E$ in Abhängigkeit von der Verstimmung $\Delta\omega/\Omega$ für verschiedene Werte von $kG = k\Omega L/R$ aufgetragen. Für $kG > 1$ treten zwei Maxima bei $\Delta\omega/\Omega = \pm\sqrt{\dfrac{k^2G - 1}{2G}}$, für $kG \gg 1$ bei den Normalfrequenzen $\Delta\omega/\Omega = -k/2$ auf.

3.48 *Wechselstrombrücken*

Ein wichtiges Beispiel eines aus mehreren Maschen bestehenden Netzwerks ist die *Wechselstrombrücke*, welche die Messung beliebiger Impedanzen ermöglicht (vgl. § 10.52; 14.5). Sie besteht, wie aus Abb. 3.24 ersichtlich, aus den vier Brückenzweigen $\boldsymbol{Z}_1$, $\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{Z}_3$ und $\boldsymbol{Z}_4$, die von einem Wechselspannungsgenerator E gespeist werden und in deren Diagonalzweig ein Nullinstrument mit der Impedanz $\boldsymbol{Z}_5$ liegt. Sind drei der Impedanzen in den Brückenzweigen bekannt, kann bei Nullabgleich die vierte berechnet werden. Aus den Netzwerkgleichungen

$$\boldsymbol{I}_1(\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_4 + \boldsymbol{Z}_5) - \boldsymbol{I}_2\boldsymbol{Z}_5 - \boldsymbol{I}_3\boldsymbol{Z}_4 = 0;$$
$$-\boldsymbol{I}_1\boldsymbol{Z}_5 - \boldsymbol{I}_2(\boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_3 + \boldsymbol{Z}_5) - \boldsymbol{I}_3\boldsymbol{Z}_3 = 0;$$
$$-\boldsymbol{I}_1\boldsymbol{Z}_4 - \boldsymbol{I}_2\boldsymbol{Z}_3 + \boldsymbol{I}_3(\boldsymbol{Z}_3 + \boldsymbol{Z}_4) = \boldsymbol{E}$$

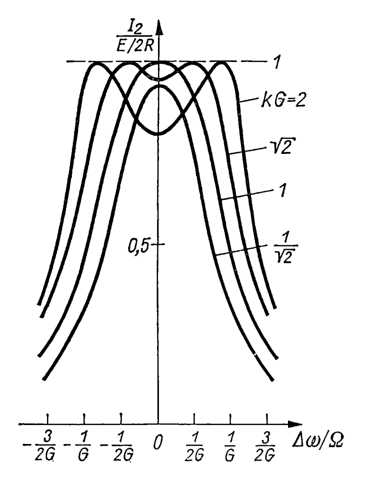


Abb. 3.23 Resonanzkurven gekoppelter Schwingungskreise

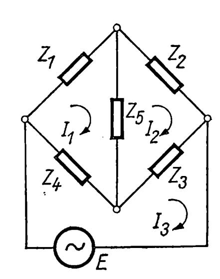


Abb. 3.24 Wechselstrombrücke

ergeben sich die Ströme zu

$$\boldsymbol{I}_1 = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{D}}\,[\boldsymbol{Z}_3\boldsymbol{Z}_5 + \boldsymbol{Z}_4(\boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_3 + \boldsymbol{Z}_5)];$$

$$\boldsymbol{I}_2 = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{D}}\,[\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_4 + \boldsymbol{Z}_5) + \boldsymbol{Z}_4\boldsymbol{Z}_5],$$

wobei die Determinante $\boldsymbol{D}$ lautet:

$$D = \begin{vmatrix} \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_4 + \boldsymbol{Z}_5 & -\boldsymbol{Z}_5 & -\boldsymbol{Z}_4 \\ -\boldsymbol{Z}_5 & \boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_3 + \boldsymbol{Z}_5 & -\boldsymbol{Z}_3 \\ -\boldsymbol{Z}_4 & -\boldsymbol{Z}_3 & \boldsymbol{Z}_3 + \boldsymbol{Z}_4 \end{vmatrix}.$$

Durch den Indikatorzweig fließt daher der Strom

$$\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{I}_2 = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{D}} (\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Z}_3 - \boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{Z}_4),$$

woraus sich die Gleichgewichtsbedingung

$$\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Z}_3 = \boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{Z}_4 \tag{3/75}$$

ergibt. Da die Größen $\boldsymbol{Z}_k$ komplex sind, beinhaltet Gl. (3/75) zwei Bedingungen für das Gleichgewicht: eine für die Amplituden, die zweite für die Phasen. Setzt man für $\boldsymbol{Z}_k = R_k + \mathrm{j}X_k$, ergeben sich aus Gl. (3/75) für das *Amplitudengleichgewicht* die Bedingungen

$$R_1R_3 = R_2R_4; \qquad X_1X_3 = X_2X_4 \tag{3/76}$$

und für das *Phasengleichgewicht* die Beziehungen

$$X_1/R_1 = X_4/R_4; \qquad X_2/R_2 = X_3/R_3. \tag{3/77}$$

Die vielen Ausführungsformen von Wechselstrombrücken lassen sich alle unter einem gemeinsamen Aspekt behandeln. Soll z. B. die unbekannte Impedanz $\boldsymbol{Z}_1$ bestimmt werden, so kann das Brückengleichgewicht durch Variieren der Impedanz $\boldsymbol{Z}_4$ entsprechend

$$\boldsymbol{Z}_1 = \frac{\boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}_3} \boldsymbol{Z}_4$$

eingestellt werden, während $\boldsymbol{Z}_2$ und $\boldsymbol{Z}_3$ konstant gehalten werden. Die Gleichgewichtseinstellung wird wesentlich erleichtert, wenn die Größe $\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{Z}_4/\boldsymbol{Z}_3$ die Form $r + \mathrm{j}x$ hat, d. h., wenn durch Verändern von r bzw. x entweder das Amplituden- *oder* das Phasengleichgewicht erzielt werden kann. Dies läßt sich durch $\boldsymbol{Z} = R_4 + \mathrm{j}X_4$ realisieren, wenn außerdem der Quotient $\boldsymbol{Z}_2/\boldsymbol{Z}_3$ entweder *rein* reell oder imaginär ist (*Quotient-Brücke*). Die andere Möglichkeit besteht darin, das Produkt $\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{Z}_3$ entweder *rein* reell oder imaginär vorzugeben und mit $\boldsymbol{Z}_3 = R_3 + \mathrm{j}X_3$ die Gleichgewichtseinstellung getrennt nach Amplitude oder Phase vorzunehmen.

Die erzielbare Genauigkeit beim Abgleich solcher Brücken läßt sich aus der Größe der im Indikatorzweig auftretenden Spannung $\Delta \boldsymbol{e}$ ableiten, die einer Änderung der Impedanz $\boldsymbol{Z}_4$ um $\Delta \boldsymbol{Z}_4$ entspricht. Es ergibt sich

$$\frac{\Delta \boldsymbol{Z}_4}{\boldsymbol{Z}_4} = -\frac{\Delta \boldsymbol{e}}{\boldsymbol{E}} \frac{1 + (\boldsymbol{Z}_4/\boldsymbol{Z}_3)^2}{\boldsymbol{Z}_4/\boldsymbol{Z}_3},$$

wenn $\Delta \boldsymbol{e}$ die kleinste am Nullinstrument noch ablesbare Spannung ist.

3.5 Passive Vierpole [*3.5, 3.9*]

Unter einem *Vierpol* versteht man ein Netzwerk mit zwei Eingangs- und zwei Ausgangsklemmen, das zur Übertragung elektrischer Energie dient. Sind in einem solchen Vierpol keine Energiequellen in Form von Batterien vorhanden, spricht man von einem *passiven* Vierpol. Ein Vierpol ist *linear*,

wenn alle in ihm enthaltenen Elemente *lineare* Elemente sind. In § 3.26 sind für den Vierpol bei Gleichspannung bereits einige Gesetzmäßigkeiten abgeleitet worden, die in erweiterter Form auch für den Wechselstromvierpol gelten.

Das in Abb. 3.25 dargestellte Netzwerk besteht aus linearen Elementen, die zu Maschen verknüpft sind, in denen die Ströme $\boldsymbol{I}_1 \ldots \boldsymbol{I}_n$ fließen. Die Netzwerkgleichungen haben die Form

$$\begin{aligned} \xi_{11}\boldsymbol{I}_1 - \xi_{12}\boldsymbol{I}_2 - \cdots - \xi_{1n}\boldsymbol{I}_n &= \boldsymbol{E}_1; \\ -\xi_{21}\boldsymbol{I}_1 + \xi_{22}\boldsymbol{I}_2 - \cdots - \xi_{2n}\boldsymbol{I}_n &= \boldsymbol{E}_2; \\ -\xi_{31}\boldsymbol{I}_1 - \xi_{32}\boldsymbol{I}_2 + \cdots - \xi_{3n}\boldsymbol{I}_n &= 0, \end{aligned}$$

worin ξ_{sk} die Impedanz des gemeinsamen Zweiges der Maschen s und k und $\xi_{kk} = \sum_{s=1}^{n} \xi_{sk}$ die Serienimpedanz der Schleife k ist. Die Zahl der Gleichungen entspricht der Zahl der Maschenströme. Für die Ströme im Ein- bzw. Ausgang des Vierpols erhält man

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}_1 &= \frac{\boldsymbol{A}_{11}}{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{E}_1 + \frac{\boldsymbol{A}_{12}}{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{E}_2; \\ \boldsymbol{I}_2 &= \frac{\boldsymbol{A}_{21}}{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{E}_1 + \frac{\boldsymbol{A}_{22}}{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{E}_2, \end{aligned}$$

wobei $\boldsymbol{D}$ die aus den Elementen $\xi_{kl}\,(\xi_{kl} = \xi_{lk})$ bestehende *Systemdeterminante* und die $\boldsymbol{A}_{lk}$ die Unterdeterminanten sind. Führt man die Größen $\boldsymbol{y}_{kl} = \boldsymbol{A}_{kl}/\boldsymbol{D}$ in die obigen Gleichungen ein, so ergeben sich folgende Beziehungen zwischen den Spannungen und Strömen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}_1 &= \boldsymbol{y}_{11}\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{y}_{12}\boldsymbol{E}_2; \\ \boldsymbol{I}_2 &= \boldsymbol{y}_{21}\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{y}_{22}\boldsymbol{E}_2, \end{aligned} \qquad (3/78)$$

wobei $\boldsymbol{y}_{12} = \boldsymbol{y}_{21}$ und die $\boldsymbol{y}_{kl}$ die Dimension eines Leitwerts haben, den man auch *Kopplungsleitwert* nennt. Löst man Gl. (3/78) nach den Spannungen $\boldsymbol{E}_1$ und $\boldsymbol{E}_2$ auf, so erhält man die Beziehungen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_1 &= \boldsymbol{z}_{11}\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{z}_{12}\boldsymbol{I}_2; \\ \boldsymbol{E}_2 &= \boldsymbol{z}_{21}\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{z}_{22}\boldsymbol{I}_2, \end{aligned} \qquad (3/79)$$

mit $\boldsymbol{z}_{11} = \boldsymbol{y}_{22}/\boldsymbol{D}_y$, $\boldsymbol{z}_{12} = -\boldsymbol{y}_{21}/\boldsymbol{D}_y$, $\boldsymbol{z}_{21} = -\boldsymbol{y}_{12}/\boldsymbol{D}_y$, $\boldsymbol{z}_{22} = \boldsymbol{y}_{11}/\boldsymbol{D}_y$ und der Admittanzmatrix

$$D_y = \begin{vmatrix} \boldsymbol{y}_{11} & \boldsymbol{y}_{12} \\ \boldsymbol{y}_{21} & \boldsymbol{y}_{22} \end{vmatrix}.$$

Aus den Gln. (3/78) und (3/79) sind die linearen Beziehungen zwischen den Spannungen $\boldsymbol{E}_k$ und den Strömen $\boldsymbol{I}_k$ ersichtlich, die durch die unabhängigen Konstanten $\boldsymbol{y}_{11}, \boldsymbol{y}_{12} = \boldsymbol{y}_{21}$ und $\boldsymbol{y}_{22}$ bzw. $\boldsymbol{z}_{11}, \boldsymbol{z}_{12} = \boldsymbol{z}_{21}$ und $\boldsymbol{z}_{22}$ gegeben sind. Diese Größen $\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{z}$ sind im allgemeinen Funktionen der Frequenz.

Wie bereits in § 3.26 für das Gleichstromnetzwerk gezeigt, kann ein Vierpol durch ein einfaches Netzwerk ersetzt werden, z. B. durch einen T-Kreis, der aus den Serienimpedanzen $\boldsymbol{Z}_1$ und $\boldsymbol{Z}_2$ sowie der Nebenschlußimpedanz $\boldsymbol{Z}_3$ besteht (Abb. 3.26). Hierfür gelten die Netzwerkgleichungen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_1 &= (\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_3)\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{Z}_3\boldsymbol{I}_2; \\ \boldsymbol{E}_2 &= -\boldsymbol{Z}_3\boldsymbol{I}_1 + (\boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_3)\boldsymbol{I}_2. \end{aligned} \tag{3/80}$$

Durch Koeffizientenvergleich in den Gln. (3/79) und (3/80) findet man

$$z_{11} = \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_3; \quad z_{12} = z_{21} = -\boldsymbol{Z}_3; \quad z_{22} = \boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_3.$$

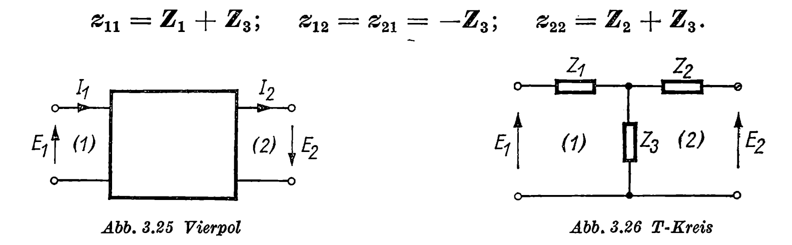


Abb. 3.25 Vierpol

Abb. 3.26 T-Kreis

Analog zu § 3.26 können die Koeffizienten z_{ik} ohne Kenntnis der inneren Struktur des Vierpols aus Leerlauf- und Kurzschlußmessungen bestimmt werden. Legt man die Eingangsklemmen (*1*) an die Spannung $\boldsymbol{E}_1$ und öffnet man die Klemmen (*2*), d. h., ist $\boldsymbol{I}_2 = 0$, so folgt aus der ersten der Gln. (3/79)

$$z_{11} = (\boldsymbol{E}_1/\boldsymbol{I}_1)_{I_2=0} = \boldsymbol{Z}_{10}. \tag{3/81a}$$

Analog ergibt sich für den Fall, daß an den Klemmen (*2*) die Spannung $\boldsymbol{E}_2$ liegt und die Klemmen (*1*) offen sind, aus der zweiten der Gln. (3/79)

$$z_{22} = (\boldsymbol{E}_2/\boldsymbol{I}_2)_{I_1=0} = \boldsymbol{Z}_{20}. \tag{3/81b}$$

Schließt man an die Klemmen (*1*) die Spannung $\boldsymbol{E}_1$ an und schließt die Klemmen (*2*) kurz ($\boldsymbol{E}_2 = 0,\ \boldsymbol{I}_2/\boldsymbol{I}_1 = -\boldsymbol{Z}_{21}/\boldsymbol{Z}_{22}$), so folgt für diesen Kurzschlußfall

$$\boldsymbol{Z}_{1s} = (\boldsymbol{E}_2/\boldsymbol{I}_1)_{E_2=0} = z_{11} - \frac{z_{21}z_{12}}{z_{22}} \tag{3/81c}$$

und, da $z_{12} = z_{21}$,

$$z_{12} = \sqrt{(\boldsymbol{Z}_{10} - \boldsymbol{Z}_{1s})\boldsymbol{Z}_{20}}. \tag{3/81d}$$

Als *symmetrischen* Vierpol bezeichnet man ein Netzwerk, wenn die Leerlaufimpedanzen $\boldsymbol{Z}_{10}$ und $\boldsymbol{Z}_{20}$ gleich werden, d. h., wenn $z_{11} = z_{22}$ und damit $\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{Z}_2 = \boldsymbol{Z}/2$ wird.

Eine oft verwendete Form der Vierpolgleichungen stellt die Eingangsgrößen $\boldsymbol{E}_1$ und $\boldsymbol{I}_1$ als Funktion der Ausgangsgrößen dar:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}_1 &= \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{I}_2, \\ \boldsymbol{E}_1 &= \boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{I}_2. \end{aligned} \tag{3/82}$$

Durch Vergleich mit den Gln. (3/78) und (3/79) ergeben sich für die Koeffizienten in Gl. (3/82) die Ausdrücke

$$\boldsymbol{a}_{11} = \frac{1}{\boldsymbol{Z}_{21}} = -\frac{\boldsymbol{D}_y}{\boldsymbol{y}_{21}}; \quad \boldsymbol{a}_{21} = -\frac{\boldsymbol{z}_{22}}{\boldsymbol{z}_{21}} = \frac{\boldsymbol{y}_{11}}{\boldsymbol{y}_{21}};$$

$$\boldsymbol{a}_{21} = \frac{\boldsymbol{z}_{11}}{\boldsymbol{z}_{21}} = \frac{\boldsymbol{y}_{22}}{\boldsymbol{y}_{21}}; \quad \boldsymbol{a}_{22} = -\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{z}_{21}} = \frac{1}{\boldsymbol{y}_{21}},$$

deren Systemdeterminante

$$\boldsymbol{D}_a = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} \end{vmatrix} = 1$$

ist. Man nennt diese Form der Vierpolgleichungen die *Kettenform,* weil sie die Hintereinanderschaltung mehrerer Vierpole in einfacher Weise erlaubt.

Analog zu § 3.27 soll nun die Eingangsimpedanz $\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{E}_1/\boldsymbol{I}_1$ berechnet werden, wenn der Vierpolausgang mit der beliebigen Impedanz $\boldsymbol{Z}_L = -\boldsymbol{E}_2/\boldsymbol{I}_2$ belastet ist. Aus Gl. (3/82) folgt hierfür

$$\boldsymbol{Z}_1 = \frac{\boldsymbol{E}_1}{\boldsymbol{I}_1} = \frac{-\boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{Z}_L + \boldsymbol{a}_{22}}{-\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{Z}_L + \boldsymbol{a}_{12}} = \frac{\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{Z}_L + \boldsymbol{a}_{22}}{-\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{Z}_L + \boldsymbol{a}_{12}}, \tag{3/83}$$

wenn beim symmetrischen Netzwerk $\boldsymbol{a}_{12} = -\boldsymbol{a}_{21}$ zu setzen ist. Als *Wellenwiderstand* oder *charakteristische Impedanz* $\boldsymbol{Z}_c$ wird der Wert von $\boldsymbol{Z}_L$ bezeichnet, für den $\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{Z}_L$ wird; er berechnet sich aus Gl. (3/83) zu

$$\boldsymbol{Z}_c^2 = -\boldsymbol{a}_{22}/\boldsymbol{a}_{11}. \tag{3/83a}$$

Die Größe $\boldsymbol{Z}_c$ läßt sich experimentell leicht aus einer Leerlaufmessung

$$\boldsymbol{Z}_0 = (\boldsymbol{Z}_1)_{Z_L=\infty} = -\boldsymbol{a}_{12}/\boldsymbol{a}_{11}$$

und aus einer Kurzschlußmessung

$$\boldsymbol{Z}_k = (\boldsymbol{Z}_1)_{Z_L=0} = \boldsymbol{a}_{22}/\boldsymbol{a}_{12}$$

bestimmen, da das Produkt

$$\boldsymbol{Z}_0\boldsymbol{Z}_k = \boldsymbol{Z}_c^2 \tag{3/83b}$$

ist. Anstelle des durch Gl. (3/22) definierten Spannungsübertragungsmaßes q für einen Gleichstromvierpol tritt hier eine komplexe Größe, die das Amplituden- und Phasenverhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung ausdrückt. Im einfachsten Fall eines symmetrischen Vierpols, der mit Z_c belastet ist, gelten die Beziehungen entsprechend Gl. (3/82)

$$\boldsymbol{I}_1 = (-\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{Z}_c + \boldsymbol{a}_{12})\boldsymbol{I}_2;$$

$$\boldsymbol{E}_1 = -(\boldsymbol{a}_{12} + \boldsymbol{a}_{22}/\boldsymbol{Z}_c)\boldsymbol{E}_2,$$

und mit $-\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{Z}_c = \boldsymbol{a}_{22}/\boldsymbol{Z}_c = -\sqrt{-\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{22}}$ erhält man

$$-\boldsymbol{E}_1/\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{I}_1/\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{a}_{12} - \sqrt{-\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{22}}. \tag{3/84}$$

Durch Einführen einer neuen Variablen γ entsprechend der Beziehung

$$a_{12} = \cosh \gamma \qquad (3/85)$$

ergibt sich

$$\sinh^2 \gamma = \boldsymbol{a}_{12}^2 - 1 = -\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{22}$$

und aus Gl. (3/84) die einfache Relation

$$-\boldsymbol{E}_1/\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{I}_1/\boldsymbol{I}_2 = \mathrm{e}^{-\gamma}. \qquad (3/84\mathrm{a})$$

Die Größe γ bestimmt das Verhältnis der Spannungen oder Ströme am Ein- und Ausgang eines symmetrischen Vierpols bei vollkommener Anpassung der Last. Mit $\boldsymbol{a}_{22} = \boldsymbol{Z}_c \sinh \gamma$ und $\boldsymbol{a}_{11} = -\frac{1}{\boldsymbol{Z}_c} \sinh \gamma$ wird

$$\tanh \gamma = \sqrt{\boldsymbol{Z}_k/\boldsymbol{Z}_0}, \qquad (3/86)$$

und man findet aus Gl. (3/82) die Beziehungen

$$\boldsymbol{I}_1 = -\frac{\boldsymbol{E}_2}{\boldsymbol{Z}_c} \sinh \gamma + \boldsymbol{I}_2 \cosh \gamma; \qquad (3/87)$$

$$\boldsymbol{E}_1 = -\boldsymbol{E}_2 \cosh \gamma + \boldsymbol{I}_2 \boldsymbol{Z}_c \sinh \gamma.$$

Für *nichtsymmetrische Vierpole*, für die $-\boldsymbol{a}_{12}/\boldsymbol{a}_{21} \neq 1$ ist, findet man anstelle von Gl. (3/84a) mit $\boldsymbol{n}^2 = -\boldsymbol{a}_{12}/\boldsymbol{a}_{21}$ die Gleichungen

$$\boldsymbol{I}_1/\boldsymbol{I}_2 = \frac{1}{\boldsymbol{n}} \mathrm{e}^{-\gamma}; \quad \boldsymbol{E}_1/\boldsymbol{E}_2 = -\boldsymbol{n} \mathrm{e}^{-\gamma}. \qquad (3/84\mathrm{b})$$

Es ist daraus zu ersehen, daß γ imaginär wird und $\mathrm{e}^{-\gamma}$ eine Phasenverschiebung darstellt, wenn das Netzwerk aus rein reaktiven Elementen besteht, d. h., wenn $\boldsymbol{n}$ reell ist.

3.6 Filter [*3.14*]

Die gebräuchlichste Anwendung der Vierpoltheorie stellen *Wellenfilter* dar, deren Zweck es ist, bestimmte Frequenzbänder ungeschwächt zu übertragen, andere dagegen zu unterdrücken.

Für die Berechnung von Filtern in einfachster Näherung nimmt man symmetrische Netzwerke aus verlustfreien Reaktanzen an (*Reaktanzvierpole*). Nach Gl. (3/83b) ergibt sich dann eine ohmsche charakteristische Impedanz $Z_c = \sqrt{X_a X_b}$, wenn die Kurzschluß- bzw. Leerlaufimpedanzen reine Blindwiderstände mit *entgegengesetztem* Vorzeichen sind; haben sie *gleiches* Vorzeichen, so wird

$$\boldsymbol{Z}_c = \mathrm{j}\sqrt{X_a X_b}.$$

Für Filter sind besonders solche Netzwerke geeignet, die eine ohmsche charakteristische Impedanz haben und deren Leerlauf- und Kurzschlußimpedanzen bei bestimmten Frequenzen ihr Vorzeichen wechseln.

Geht man von einem Vierpol aus, der mit der charakteristischen Impedanz im Ausgang belastet ist, so gilt nach § 3.5 $\tanh \gamma = \sqrt{\boldsymbol{Z}_k/\boldsymbol{Z}_0}$ und für die beiden angenommenen Fälle

$$\tanh \gamma = \sqrt{X_a/X_b}; \qquad \tanh \gamma = \mathrm{j}\,\sqrt{X_a/X_b}.$$

Mit $\gamma = \alpha + \mathrm{j}\,\beta$ und aus der Beziehung

$$\tanh(\alpha + \mathrm{j}\beta) = \frac{\sinh \alpha \cosh \alpha + \sinh \beta \cosh \beta}{\sinh^2 \alpha + \cosh^2 \beta}$$

sieht man, daß $\tanh \gamma$ imaginär für $\alpha = 0$, dagegen reell für $\beta = k\pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und beliebiges α wird. Im ersten Fall bewirkt das Netzwerk nur eine Phasenverschiebung, jedoch keine Dämpfung; im zweiten Fall beträgt die Phasenverschiebung Null oder $k\pi$, und es tritt eine Dämpfung auf. Um also den Durchlaßbereich eines Filters zu finden, müssen die Frequenzbereiche aufgesucht werden, in denen der Wellenwiderstand reell ist.

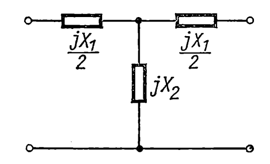


Abb. 3.27 Symmetrischer T-Kreis

Im einfachsten Fall des symmetrischen T-Kreises (Abb. 3.27) können die X_1 und X_2 positiv oder negativ sein, und man erhält

$$\boldsymbol{Z}_0 = \mathrm{j}\,(X_1/2 + X_2); \qquad \boldsymbol{Z}_k = \boldsymbol{Z}_0 + X_2^2/\boldsymbol{Z}_0. \tag{3/88}$$

Durch Einsetzen in Gl. (3/86) findet man

$$\tanh \gamma = \sqrt{1 + (X_2/Z_0)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{(X_1/2X_2)^2 + X_1/X_2 + 1}}. \tag{3/89}$$

Da im Durchlaßbereich (ohne Dämpfung) $\tanh \gamma$ rein imaginär sein muß, ergibt sich aus Gl. (3/89) die Bedingung $0 < (X_1/2X_2)^2 + X_1/X_2 + 1 < 1$, d. h.,

$$-1 < X_1/4X_2 < 0, \tag{3/90}$$

wofür sich auch schreiben läßt

$$F(\omega) = \pm 1, \quad \text{wenn} \quad F(\omega) = \sqrt{-X_1/4X_2}. \tag{3/90a}$$

Von besonderem Interesse sind symmetrische T-Kreise, die aus Serien- oder Parallelreaktanzen derart bestehen, daß ihr Produkt

$$X_1 X_2 = K^2 = \text{const} \tag{3/91}$$

ist. Aus Gl. (3/90) ist sofort zu entnehmen, daß X_1 und X_2 verschiedene Vorzeichen haben müssen. In *Tabelle 3.1* sind die vier möglichen Typen solcher Filter dargestellt und ihre charakteristischen Größen angegeben.

In Abb. 3.28 ist der durch Gl. (3/90a) gegebene Frequenzbereich für die vier Typen der *Tabelle 3.1* dargestellt. Setzt man $F(\omega)$ nach Gl. (3/90a) in Gl. (3/89) ein, so findet man für $\gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta$ nach Trennung in Imaginär- und Realteil folgende Bedingungen für den

$$\text{Durchlaßbereich:}\quad \alpha = 0;\quad \beta = 2\sinh^{-1} F(\omega), \tag{3/92a}$$

$$\text{Sperrbereich:}\quad \beta = \pm\pi;\quad \alpha = 2\cosh^{-1} F(\omega). \tag{3/92b}$$

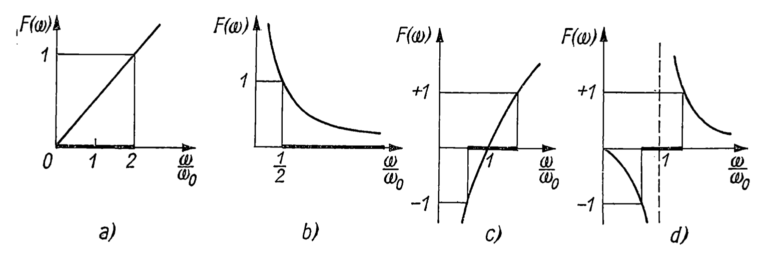


Abb. 3.28 Durchlaßbereiche von symmetrischen T-Filtern

In Abb. 3.29 sind die Größen α und β über $F(\omega)$ aufgetragen, wobei $F(\omega)$ für die einzelnen Filtertypen aus *Tabelle 3.1* zu entnehmen ist. Für die praktische Anwendung konstruiert man aus der Kurve für den Dämpfungsterm α in Abb. 3.29 mit Hilfe der für $F(\omega)$ angegebenen Beziehungen die $\alpha(\omega)$-Kurve, die im Falle *a*) wegen des linearen Zusammenhanges zwischen F und ω identisch mit Abb. 3.29 ist.

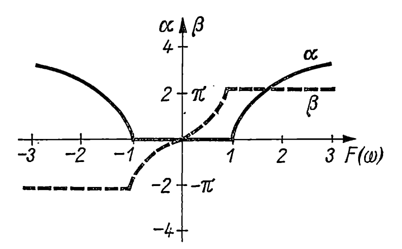


Abb. 3.29 Dämpfung und Phasendrehung in symmetrischen T-Filtern

Durch Einsetzen von Gl. (3/88) in Gl. (3/83b) und Berücksichtigung der Gln. (3/90a) und (3/91) findet man für den Wellenwiderstand $\mathfrak{Z}_c$ den Ausdruck

$$\mathfrak{Z}_c = K\sqrt{1 - F^2(\omega)}; \tag{3/93}$$

der also frequenzabhängig ist. Die tatsächlich sich ergebende Durchlässigkeit eines Filters stimmt daher nicht vollkommen mit den oben erhaltenen Beziehungen überein, die ausdrücklich unter der Voraussetzung abgeleitet sind, daß der Vierpol am Ausgang mit dem Wellenwiderstand belastet ist.

Tabelle 3.1 Filter aus T-Kreisen mit $X_1 X_2 = K^2$

	Filter	X_1	X_2	$X_1 X_2$	$F(\omega)$
a		ωL_1	$-\dfrac{1}{\omega C_2}$	$-\dfrac{L_1}{C_2}$	$\dfrac{1}{2}(\omega/\omega_0)$ $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}$
b		$-\dfrac{1}{\omega C_1}$	ωL_2	$-\dfrac{L_2}{C_1}$	$\dfrac{1}{2}(\omega_0/\omega)$ $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L_2 C_1}}$
c		$\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)$	$-\dfrac{\sqrt{\dfrac{L_2}{C_2}}}{\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}}$	$-\sqrt{\dfrac{L_1 L_2}{C_1 C_2}}$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{C_2}{C_1}}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)$ $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \dfrac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$
d		$-\dfrac{\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}}{\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}}$	$\sqrt{\dfrac{L_2}{C_2}}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)$	$-\sqrt{\dfrac{L_1 L_2}{C_1 C_2}}$	$\dfrac{\sqrt{C_2/C_1}}{2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$ $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \dfrac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$

Je nach Lage des Durchlaßbereichs unterscheidet man im praktischen Gebrauch den

Tiefpaß:	Durchlaßbereich	$0 \ldots \omega_g$,	Sperrbereich	$\omega_g \ldots \infty$;
Hochpaß:	,,	$\omega_g \ldots \infty$,	,,	$0 \ldots \omega_g$;
Bandpaß:	,,	$\omega_{g1} \ldots \omega_{g2}$,	,,	$0 \ldots \omega_{g1}$, $\omega_{g2} \ldots \infty$.

Werden mehrere Vierpole hintereinandergeschaltet, so entsteht ein *Kettenleiter*. Dieser wird *homogen* genannt, wenn die einzelnen Vierpole unter sich gleich sind. Sind diese ferner richtungssymmetrisch, so entsteht ein *richtungssymmetrischer, homogener Kettenleiter*.

Bei der in Abb. 3.30 dargestellten Serienschaltung von zwei Vierpolen gelten die Beziehungen

$$\boldsymbol{E}_2' = -\boldsymbol{E}_1''; \qquad \boldsymbol{I}_2' = \boldsymbol{I}_2''.$$

Benutzt man zur Kennzeichnung der beiden Vierpole die Kettenform nach Gl. (3/82), so lauten die Systemdeterminanten

$$\boldsymbol{D}_a' = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11}' & \boldsymbol{a}_{12}' \\ \boldsymbol{a}_{21}' & \boldsymbol{a}_{22}' \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{D}_a'' = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11}'' & \boldsymbol{a}_{12}'' \\ \boldsymbol{a}_{21}'' & \boldsymbol{a}_{22}'' \end{vmatrix}$$

und die Matrixelemente des resultierenden Netzwerks

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{11} &= -\boldsymbol{a}_{11}'\boldsymbol{a}_{21}'' + \boldsymbol{a}_{12}'\boldsymbol{a}_{11}''; \\ \boldsymbol{a}_{12} &= -\boldsymbol{a}_{11}'\boldsymbol{a}_{22}'' + \boldsymbol{a}_{12}'\boldsymbol{a}_{12}''; \\ \boldsymbol{a}_{21} &= -\boldsymbol{a}_{21}'\boldsymbol{a}_{21}'' + \boldsymbol{a}_{22}'\boldsymbol{a}_{11}''; \\ \boldsymbol{a}_{22} &= -\boldsymbol{a}_{21}'\boldsymbol{a}_{22}'' + \boldsymbol{a}_{22}'\boldsymbol{a}_{12}''. \end{aligned} \tag{3/94}$$

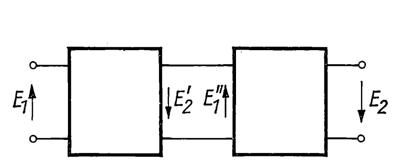


Abb. 3.30 Serienschaltung von zwei Vierpolen

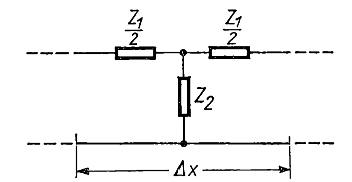


Abb. 3.31 Element einer Übertragungsleitung

Sind die einzelnen Netzwerke symmetrisch, d. h., ist $\boldsymbol{a}_{12}' = -\boldsymbol{a}_{21}'$ und $\boldsymbol{a}_{12}'' = -\boldsymbol{a}_{21}''$, so ist die Serienschaltung nur dann symmetrisch, wenn

$$\boldsymbol{a}_{11}'\boldsymbol{a}_{22}'' = \boldsymbol{a}_{22}'\boldsymbol{a}_{11}''$$

ist. Sind die Wellenwiderstände der Einzelvierpole die gleichen, so gilt für das Übertragungsmaß

$$\mathrm{e}^{\gamma} = -\frac{\boldsymbol{E}_2''}{\boldsymbol{E}_1'} = (-\boldsymbol{E}_2''/\boldsymbol{E}_1'')(-\boldsymbol{E}_2'/\boldsymbol{E}_1') = \mathrm{e}^{\gamma'+\gamma''}, \tag{3/95}$$

wenn γ' und γ'' die entsprechenden Größen der einzelnen Vierpole sind und die Kaskade mit dem Wellenwiderstand abgeschlossen ist.

3.7 Kettenleiter, Fortleitungen

Die *Übertragungsleitung* ist eine Serienschaltung von unendlich vielen gleichartigen Vierpolen, die alle den gleichen Wellenwiderstand besitzen. Besteht sie z. B. aus zwei parallelen Drähten, so besitzen diese Kapazität und Induktivität, die der Leiterlänge proportional sind. Der Abschnitt Δx (Abb. 3.31) läßt sich

als T-Kreis ansehen, dessen Serienimpedanz $\frac{1}{2}\,\boldsymbol{Z}_1 = \frac{1}{2}\,(R + \mathrm{j}\,\omega L)\,\Delta x = \boldsymbol{z}_1 \Delta x$ und dessen Parallelimpedanz

$$\boldsymbol{Z}_2 = \frac{1}{(G + \mathrm{j}\,\omega C)\,\Delta x} = \frac{\boldsymbol{z}_2}{\Delta x}$$

ist. Setzt man die Impedanzen für Kurzschluß und Leerlauf für einen Leiterabschnitt, d. h.

$$\boldsymbol{Z}_k = \boldsymbol{z}_1 \Delta x + \frac{\boldsymbol{z}_1 \boldsymbol{z}_2}{\boldsymbol{z}_1 \Delta x + \boldsymbol{z}_2/\Delta x}; \qquad \boldsymbol{Z}_0 = \boldsymbol{z}_1 \Delta x + \boldsymbol{z}_2/\Delta x$$

in Gl. (3/83 b) ein, so bekommt man beim Grenzübergang $\Delta x \to 0$ den Wellenwiderstand für die ganze Übertragungsleitung zu

$$\boldsymbol{Z}_c = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{\boldsymbol{Z}_0 \boldsymbol{Z}_k} = \sqrt{\frac{R + \mathrm{j}\,\omega L}{G + \mathrm{j}\,\omega C}}. \tag{3/96}$$

Für eine verlustfreie Leitung wird $R = 0$, $G = 0$ und damit

$$\boldsymbol{Z}_c = \sqrt{L/C}. \tag{3/96a}$$

Das Übertragungsmaß ergibt sich mit $\boldsymbol{a}_{12} = 1 + \frac{\boldsymbol{z}_1}{\boldsymbol{z}_2}\,(\Delta x)^2$ aus Gl. (3/85) für den Abschnitt Δx zu

$$\cosh \gamma_{\Delta x} = 1 + \frac{\boldsymbol{z}_1}{\boldsymbol{z}_2}\,(\Delta x)^2$$

und für die gesamte Leitung von der Länge l zu

$$\gamma_l = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{l}{\Delta x}\,\gamma_{\Delta x} = l \sqrt{2\,\frac{\boldsymbol{z}_1}{\boldsymbol{z}_2}} = l\,\sqrt{(R + \mathrm{j}\,\omega L)\,(G + \mathrm{j}\,\omega C)} \tag{3/97}$$

bzw. für die verlustfreie Leitung

$$\gamma_l = \mathrm{j}\,\omega\,\sqrt{LC} \cdot l = \mathrm{j}\,\beta l; \qquad \beta = \omega\,\sqrt{LC}. \tag{3/97a}$$

Nach Gl. (3/83) kann ferner die Eingangsimpedanz der Leitung berechnet werden, wenn diese mit der Lastimpedanz $\boldsymbol{Z}_L = -\boldsymbol{E}_2/\boldsymbol{I}_2$ abgeschlossen ist:

$$\boldsymbol{Z}_i = \boldsymbol{Z}_c\,\frac{\boldsymbol{Z}_L + \boldsymbol{Z}_c \tanh \gamma}{\boldsymbol{Z}_L \tanh \gamma + \boldsymbol{Z}_c}. \tag{3/98}$$

Über die Anwendung dieser Beziehungen auf Hohlrohrleitungen siehe § 8.1.

3.8 Aktive Vierpole [*3.1*]

Außer den in § 3.5 behandelten (passiven) Vierpolen lassen sich auch Verstärkerröhren und Transistoren in Schaltungsanordnungen als Vierpole auffassen, auch wenn die Ausgangsleistung durch Steuerung einer fremden Stromquelle entnommen wird; man spricht in diesen Fällen von *aktiven Vierpolen.*

In diesem Abschnitt soll an Hand einfacher Beispiele nur das Grundsätzliche klargelegt werden; in § 5 wird die Vierpoltheorie ausführlicher auf verschiedene Probleme angewandt.

Es soll die in Abb. 3.32 dargestellte Verstärkeranordnung betrachtet werden, die aus einer Triode mit der Lastimpedanz $\boldsymbol{Z}_L$ im Anodenkreis besteht. Das Steuergitter ist durch eine Batterie E_g negativ vorgespannt; die Anodenspannung wird von der Batterie E_a geliefert. Beschränkt man sich auf die Verstärkung kleiner Wechselspannungen $\boldsymbol{u}_1$, so kann die Schaltung als *linearer* Vierpol betrachtet werden, d. h., die Beziehungen zwischen den Strömen und Spannungen werden mit konstanten Koeffizienten beschrieben. Bezeichnet man mit i_a, u_g und u_a die Augenblickswerte von Anodenstrom, Gitter- und Anodenspannung, so folgt aus der allgemeinsten Form für die Verstärkereigenschaften der Elektronenröhre,

$$i_a = f(u_g, u_a), \tag{3/99}$$

durch Differenzieren:

$$\mathrm{d}i_a = \frac{\partial i_a}{\partial u_g}\,\mathrm{d}u_g + \frac{\partial i_a}{\partial u_a}\,\mathrm{d}u_a. \tag{3/99a}$$

Setzt man für

$$\left(\frac{\partial i_a}{\partial u_g}\right)_{u_a} = S; \quad \left(\frac{\partial i_a}{\partial u_a}\right)_{u_g} = \frac{1}{R_i}, \tag{3/100a, b}$$

wobei S als *Steilheit* und R_i als *Innenwiderstand* der Röhre bezeichnet wird, und führt diese Größen in Gl. (3/99a) ein, so ergibt sich

$$\Delta i_a = S\Delta u_g + \frac{1}{R_i}\,\Delta u_a. \tag{3/101}$$

Berücksichtigt man, daß sich die Größen i_a, u_g und u_a aus einem konstanten Anteil und einer Wechselstromgröße zusammensetzen, die mit $\boldsymbol{I}_a, \boldsymbol{U}_1$ und $\boldsymbol{U}_2$ bezeichnet werden, so gilt für sinusförmige Spannungs- und Stromänderungen anstelle von Gl. (3/101) die Beziehung

$$-\boldsymbol{U}_g/D + \boldsymbol{I}_a R_i = \boldsymbol{U}_2, \tag{3/102}$$

wenn der *Durchgriff*

$$D = -\left(\frac{\partial u_g}{\partial u_a}\right)_{i_a} = \frac{\partial i_a/\partial u_a}{\partial i_a/\partial u_g} = \frac{1}{SR_i} \tag{3/103}$$

eingeführt wird. Gleichung (3/102) läßt sich durch die Ersatzschaltung der Abb. 3.33a darstellen, in der die Elektronenröhre, die in einem linearen Bereich und mit konstanten Kenngrößen D, R_i und S arbeitet, durch eine äquivalente Spannungsquelle $\boldsymbol{U}_g/D$ ersetzt wird. Dividiert man beide Seiten von Gl. (3/102) mit R_i, so ergibt sich unter Berücksichtigung von Gl. (3/103) die Beziehung

$$S\boldsymbol{U}_g = \boldsymbol{I}_a - \boldsymbol{U}_2/R_i, \tag{3/104}$$

die durch das Ersatzschaltbild der Abb. 3.33b dargestellt ist. Die Triode wird in diesem Fall durch eine *äquivalente Stromquelle* $S\boldsymbol{U}_g$ ersetzt, die zwei parallelgeschaltete Zweige mit den Strömen $\boldsymbol{I}_a$ und $-\boldsymbol{U}_2/R_i$ speist. Beide Ersatzschaltungen haben ihre speziellen Anwendungsgebiete.

Als *Spannungsverstärkung* $\boldsymbol{A}$ bezeichnet man das Verhältnis Ausgangsspannung zu Eingangsspannung, das im allgemeinen eine komplexe Größe ist, da beide Spannungen nicht in Phase sind, d. h.,

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_2/\boldsymbol{U}_1, \tag{3/105}$$

wobei die Signalspannung $\boldsymbol{U}_1$ nicht identisch mit der wirklichen Gitterspannung $\boldsymbol{U}_g$ sein muß. Da nach Abb. 3.33b $\boldsymbol{I}_a = -\boldsymbol{U}_2/\boldsymbol{Z}_L$ ist, findet man mit Gl. (3/104)

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_2/\boldsymbol{U}_1 = -\frac{SR_i\boldsymbol{Z}_L}{R_i + \boldsymbol{Z}_L} = -\frac{1}{D}\frac{\boldsymbol{Z}_L}{R_i + \boldsymbol{Z}_L}. \tag{3/106}$$

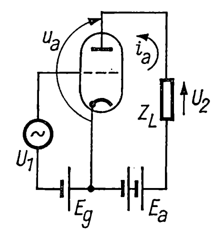


Abb. 3.32 Triodenverstärker

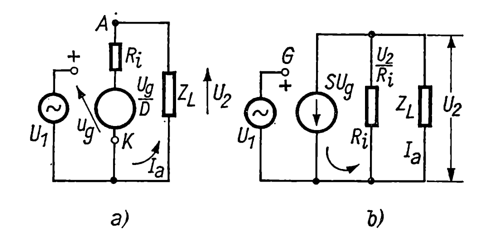


Abb. 3.33 Ersatzschaltungen eines Verstärkers

Schließt man die Ausgangsspannung $\boldsymbol{U}_2$ mit einem Kondensator kurz, so ergibt sich mit $\boldsymbol{U}_2 = 0$ aus Gl. (3/104) der *Kurzschlußstrom* zu

$$\boldsymbol{I}_k = S\boldsymbol{U}_1 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{U}_g = \boldsymbol{U}_1. \tag{3/107}$$

Andererseits erhält man die Anodenwechselspannung bei *Leerlauf* aus Gl. (3/102) mit $\boldsymbol{I}_a = 0$ zu

$$\boldsymbol{U}_{20} = -\boldsymbol{U}_1/D. \tag{3/108}$$

Beide Beziehungen enthalten eine Meßvorschrift für die experimentelle Bestimmung der Größen D und S. Aus Gl. (3/108) ist im Hinblick auf Gl. (3/106) mit $\boldsymbol{Z}_L \to \infty$ außerdem zu entnehmen, daß $1/D$ die *Leerlaufverstärkung* der Röhre ist. Da der Innenwiderstand auch durch $R_i = \boldsymbol{U}_1/D\boldsymbol{I}_k$ ausgedrückt werden kann, ergibt sich mit Gl. (3/107)

$$R_i = 1/DS \tag{3/109}$$

eine Beziehung, die in Gl. (3/103) aus den Kennliniengrößen abgeleitet wurde.

Zur allgemeingültigen Behandlung des *aktiven Vierpols* geht man von den Beziehungen (3/79) aus, deren erste man durch Addition und Subtraktion von $z_{12}\boldsymbol{I}_1$ umformt in

$$\boldsymbol{E}_1 = (z_{11} - z_{12})\boldsymbol{I}_1 + z_{12}(\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2), \tag{3/79a}$$

während die zweite durch Addition und Subtraktion von $z_{12}\boldsymbol{I}_1$ und $z_{12}\boldsymbol{I}_2$ die Form

$$\boldsymbol{E}_2 = (z_{21} - z_{12})\boldsymbol{I}_1 + (z_{22} - z_{12})\boldsymbol{I}_2 + z_{12}(\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2) \tag{3/79b}$$

erhält. Der diesen Gleichungen äquivalente Vierpol ist in Abb. 3.34 dargestellt; er enthält im rechten Zweig eine Spannungsquelle mit der EMK $(z_{21} - z_{12})\boldsymbol{I}_1$. Aus Gl. (3/79) findet man die *Eingangsimpedanz* $\boldsymbol{Z}_{11} = \boldsymbol{E}_1/\boldsymbol{I}_1$ zu

$$\boldsymbol{Z}_{11} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + \boldsymbol{Z}_L} = \frac{\boldsymbol{D}_z + z_{11}\boldsymbol{Z}_L}{z_{22} + \boldsymbol{Z}_L}, \qquad (3/110)$$

wenn $\boldsymbol{Z}_L$ die Lastimpedanz und $\boldsymbol{D}_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$ die Systemdeterminante ist. Analog findet man für die Ausgangsimpedanz (von den Klemmen *2* aus gesehen)

$$\boldsymbol{Z}_{22} = z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + \boldsymbol{Z}_s} = \frac{\boldsymbol{D}_z + z_{22}\boldsymbol{Z}_s}{z_{11} + \boldsymbol{Z}_s}, \qquad (3/111)$$

wenn $\boldsymbol{Z}_s$ die Impedanz des Signalgenerators ist.

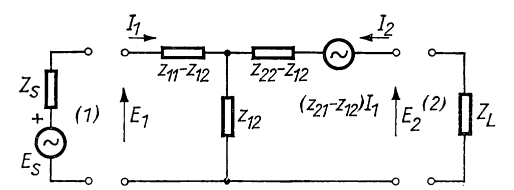


Abb. 3.34 Ersatzschaltbild des aktiven Vierpols

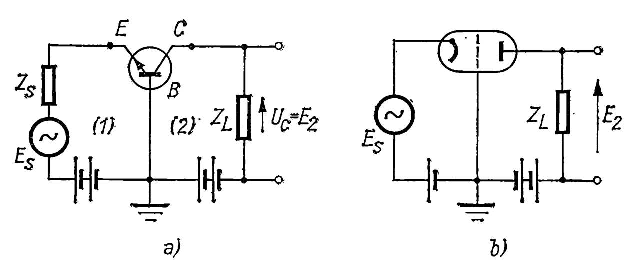


Abb. 3.35 Basisschaltung eines npn-Transistors (a) und der äquivalenten Röhrenschaltung (b)

Wendet man diese Betrachtungen auf Verstärker mit Elektronenröhren oder Transistoren an, so lassen sich diese auf einfache Grundschaltungen zurückführen. Als Beispiel ist in Abb. 3.35 die Basisschaltung eines npn-Transistors und die entsprechende Röhrenschaltung mit geerdetem Gitter dargestellt. Sieht man Emitterstrom i_e und Kollektorstrom i_c als unabhängige Variable an, so gelten für kleine Änderungen dieser Größen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \Delta u_e &= \frac{\partial u_e}{\partial i_e}\Delta i_e + \frac{\partial u_e}{\partial i_c}\Delta i_c; \\ \Delta u_c &= \frac{\partial u_c}{\partial i_e}\Delta i_e + \frac{\partial u_c}{\partial i_c}\Delta i_c. \end{aligned} \qquad (3/112\text{a, b})$$

Handelt es sich um sinusförmige Änderungen der Ströme bzw. Spannungen, so folgt aus Gl. (3/112)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}_c &= z_{11}\boldsymbol{I}_e + z_{12}\boldsymbol{I}_c; \\ \boldsymbol{U}_e &= z_{21}\boldsymbol{I}_e + z_{22}\boldsymbol{I}_c. \end{aligned} \tag{3/113a, b}$$

Durch Vergleich mit Gl. (3/112) findet man für die einzelnen Impedanzen

$$z_{11} = (\partial u_e/\partial i_e)_{i_c}; \qquad z_{12} = (\partial u_e/\partial i_c)_{i_e};$$

$$z_{21} = (\partial u_c/\partial i_e)_{i_c}; \qquad z_{22} = (\partial u_c/\partial i_c)_{i_e}.$$

Vergleicht man die Beziehungen (3/79) und (3/113), so sieht man, daß die Ergebnisse der Vierpoltheorie auf den Transistor (und auch auf den Röhrenverstärker) für *kleine* Störungen übertragen werden können.

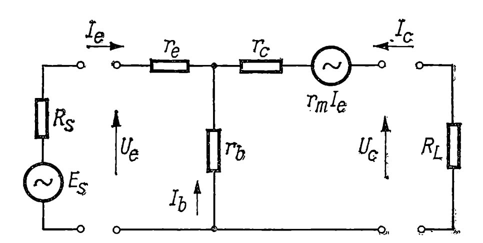


Abb. 3.36 Ersatzschaltbild des Transistors in Basisschaltung

Bei niedrigen Frequenzen stellen die Parameter z Wirkwiderstände dar, d. h. $z_{11} = r_{11}$, $z_{12} = r_{12}$, $z_{21} = r_{21}$, $z_{22} = r_{22}$, die experimentell ermittelt werden können (s. § 4.28). Führt man die neuen Parameter

Emitterwiderstand:	$r_e = r_{11} - r_{12}$;
Basiswiderstand:	$r_b = r_{12}$;
Kollektorwiderstand:	$r_c = r_{22} - r_{12}$,
	$r_m = r_{21} - r_{12}$

in Gl. (3/113) ein, so erhält man die Grundgleichungen

$$\boldsymbol{U}_e = (r_e + r_b)\boldsymbol{I}_e + r_b\boldsymbol{I}_c; \tag{3/114a}$$

$$\boldsymbol{U}_c = (r_b + r_m)\boldsymbol{I}_e + (r_b + r_c)\boldsymbol{I}_c. \tag{3/114b}$$

Diese lassen sich, wie in Abb. 3.36 dargestellt ist, durch einen Vierpol wiedergeben, dessen Ersatz-EMK im Ausgangskreis im Gegensatz zu Abb. 3.33 durch die Eingangsstromstärke $\boldsymbol{I}_e$ und nicht durch die Eingangsspannung $\boldsymbol{U}_g$ gegeben ist.

Für $U_c = 0$ findet man aus Gl. (3/114b) für den Kurzschlußfall

$$\boldsymbol{I}_c/\boldsymbol{I}_e = \alpha_{ce} = \frac{r_m + r_b}{r_c + r_b} = r_{21}/r_{22} \approx r_m/r_c, \tag{3/115}$$

wobei der *Kurzschlußstromverstärkungsfaktor* α_{ce} immer kleiner als Eins für *Spitzentransistoren* ist, für die $r_b \ll r_c$ und r_m gilt. Aus Gl. (3/110) findet man mit den neuen Parametern sofort den *Eingangswiderstand* (für niedrige Frequenzen):

$$R_{11} = r_e + \frac{r_b(r_c - r_m + R_L)}{r_c + r_b + R_L}, \tag{3/116}$$

wenn R_L der ohmsche Außenwiderstand ist. Da dieser meist klein gegen r_c und $r_c - r_m$ ist, vereinfacht sich obige Gleichung zu

$$R_{11} = r_e + r_b(1 - \alpha_{ce}). \tag{3/116a}$$

Analog findet man den *Ausgangswiderstand*:

$$R_{22} = r_c - \frac{r_m - r_e - R_L}{r_e + r_b + R_L} \approx r_c. \tag{3/117}$$

Die *Spannungsverstärkung* für den Transistor in Basisschaltung ergibt sich zu

$$\boldsymbol{A}_u = \boldsymbol{U}_c/\boldsymbol{U}_e = \frac{-R_L \boldsymbol{I}_c}{R_{11} \boldsymbol{I}_e},$$

woraus mit den Gln. (3/115) und (3/116a) folgt:

$$\boldsymbol{A}_u = \frac{(r_m + r_b)R_L}{r_e r_b + r_c[r_e + r_b(1 - \alpha_{ce})] + (r_e + r_b)R_L}. \tag{3/118}$$

Gewöhnlich kann man den ersten und letzten Term im Nenner sowie r_b gegen r_m vernachlässigen, so daß in guter Näherung gilt:

$$\boldsymbol{A}_u = \frac{\alpha_{ce} R_L}{r_e + r_b(1 - \alpha_{ce})}. \tag{3/118a}$$

Für die *Stromverstärkung* findet man analog den Ausdruck

$$\boldsymbol{A}_i = \frac{\boldsymbol{I}_c}{\boldsymbol{I}_e} = \frac{-r_{21}}{r_{22} + R_L} = \frac{-(r_b + r_m)}{r_e + r_b + R_L}, \tag{3/119}$$

der sich mit den Annahmen $r_b \ll r_m$, $r_b + R_L \ll r_c$ und mit $r_m = \alpha_{ce} r_c$ vereinfacht zu

$$\boldsymbol{A}_i \approx -\alpha_{ce}. \tag{3/119a}$$

Die *Leistungsverstärkung* des Transistorkreises beträgt $(A_u A_i)$ und wird mit den Gln. (3/118a) und (3/119a)

$$|A_u A_i| \approx \frac{\alpha_{ce}^2 R_L}{r_e + r_b(1 - \alpha_{ce})}. \tag{3/120}$$

Transistorkreise mit Basisschaltung und die entsprechende Röhrenschaltung nach Abb. 3.35 stellen eine Art Rückkopplungsverstärker dar, die sich durch gute Stabilität und relativ geringe Verstärkungsfaktoren auszeichnen. Sie werden vor allem zur Anpassung niedriger Impedanzen an hohe Ausgangsimpedanzen benutzt. Näheres über Transistorschaltungen siehe § 4.274.

§ 4 VERSTÄRKER- UND GLEICHRICHTERELEMENTE [*4.7, 4.10, 4.34, 4.36, 4.51, 4.76, 4.99*]

Verstärkung und Gleichrichtung von Strömen und Spannungen durch elektronische Hilfsmittel, wie Elektronenröhren und Halbleiterelemente, bilden die Grundlage der heutigen Meßtechnik. In diesem Paragraphen werden Aufbau und Eigenschaften von Elektronenröhren, Transistoren und anderen Halbleiterelementen, im nächsten ihre Anwendung für die Verstärkung, Erzeugung und Gleichrichtung von Wechsel- und Gleichspannungen besprochen. Oszillatoren und Verstärkeranordnungen für den Zentimeterwellenbereich werden erst in § 7, Leistungsgleichrichter in § 14 behandelt.

4.1 Grundlagen der Elektronenröhre [*4.1, 4.3, 4.30, 4.74, 4.75, 4.87*]

4.11 Glühemission

Die Elektronenröhre besteht aus einem Hochvakuumgefäß mit einer oder mehreren Elektronenquellen und einer Anzahl von Elektroden, zwischen denen der Strom durch freie Elektronen hervorgerufen wird. Die Elektroden dienen sowohl zur Steuerung als auch zum Auffangen der Elektronenströme; sie werden Steuergitter bzw. Anode genannt.

Der Elektronenstrom wird in den meisten Fällen durch Glühemission, in speziellen Fällen durch *Sekundär-* oder auch *Feldemission* erzeugt. Nach der Emissionsformel von RICHARDSON bzw. DUSHMAN tritt von einer Katodenfläche A mit der Temperatur T der Elektronenstrom

$$I_s = \alpha_0 A T^2 \mathrm{e}^{-b_0/T} \qquad (4/1)$$

ins Vakuum aus, wenn $\alpha_0 = 4\pi m e k^2/h^3 = 60{,}2\ \mathrm{A/cm^2\,grd^2}$ eine universelle Größe, $b_0 = e\Phi_0/k$ mit Φ_0, der *Austrittsarbeit* der Elektronen aus dem Katodenmaterial, und k die Boltzmann-Konstante ($k = 1{,}380 \cdot 10^{-23}$ J/grd) bedeuten. Die Beziehung gibt den Maximalwert des Emissionsstromes, den *Sättigungs-*

Tabelle 4.1

Emissionskonstanten für verschiedene Metalle

Material	α_0 A/cm² grd²	b_0 grd	Φ_0 V	T_s K
Kohlenstoff	60,2	54500	4,7	—
Cäsium	16,2	21000	1,81	301
Molybdän	60,2	49900	4,3	2895
Nickel	26,8	32100	5,0	1725
Platin	32	61700	5,32	2047
Tantal	60,2	47600	4,1	3123
Thorium	60,2	39400	3,4	2118
Wolfram	60,2	52400	4,52	3655

strom, an, der nach Gl. (4/1) sehr stark von der Katodentemperatur T abhängt. Die Katodentemperatur muß daher innerhalb kleiner Grenzen konstant gehalten werden. In *Tabelle 4.1* sind die Kenngrößen der Gl. (4/1) sowie der Schmelzpunkt T_s für einige Metalle zusammengestellt.

Zur experimentellen Bestimmung der Größen α_0 und b_0 wird Gl. (4/1) umgeschrieben in

$$\log \frac{I_s}{T^2} = \log \alpha_0 A - 0{,}4343\, b_0/T \tag{4/1a}$$

und log I/T gegen $1/T$ aufgetragen, wobei sich eine Gerade der Steigung $-0{,}4343\,b_0$ ergibt, die auf der Abszisse den Abschnitt $\alpha_0 A$ besitzt.

Man unterscheidet *direkt* und *indirekt geheizte* Katoden. Bei den ersteren durchfließt der Heizstrom selbst den emittierenden Draht. Der dadurch auftretende Potentialabfall längs des Drahtes wirkt oft störend; auch kann der Emissionsstrom die örtliche Stromdichte und damit die Temperatur beeinflussen. Dieser soll daher nicht mehr als 1/5 des Heizstromes betragen. Die *indirekt* geheizte Katode besteht aus einem Röhrchen (oder einer Scheibe) mit innenliegender und von diesem isolierter Heizwendel, die bifilar gewickelt ist. Die Wirksamkeit einer Katode, deren Heizleistung zum größten Teil in Strahlung umgesetzt wird, kann durch das *Heizmaß* definiert werden, das dem Verhältnis von Sättigungsstrom zu Heizleistung, d. h. I_s/P_h entspricht. Es beträgt bei Wolframkatoden etwa 4—20 mA/W, bei Oxidkatoden 1 A/W.

Thorierte Wolframkatoden besitzen eine einatomige Schicht aus Thorium an der Drahtoberfläche; sie werden durch Zumischen von 1···2% Thoriumoxid zu Wolframpulver vor dem Drahtspritzen und Sintern hergestellt. Infolge des hohen elektrischen Feldes zwischen den Thoriumatomen an der Oberfläche und dem Wirtsmetall wird die Austrittsarbeit, wie aus *Tabelle 4.2* ersichtlich, stark herabgesetzt. Diese Katoden liefern gegenüber der reinen Wolframkatode einen wesentlich höheren Sättigungsstrom; ihre Betriebstemperatur muß innerhalb kleiner Grenzen konstant gehalten werden, da bei Überhitzung Thorium abdampft.

Oxidkatoden bestehen aus einer Unterlage (Röhrchen) aus Nickel oder Nickellegierungen, die mit einer Schicht von Strontium- oder Bariumoxid bedeckt ist. Während der „*Formierung*" entsteht eine dünne Schicht des reinen Metalls, die in bezug auf die Unterlage elektropositiv ist und deren Austrittsarbeit erniedrigt. Solche Katoden sind gegen Lufteinbruch und auch gegen Restionen empfindlich und werden nur für Anodenspannungen unterhalb von 1000 V benutzt. In *Tabelle 4.2* sind die Kenngrößen der hauptsächlich verwendeten Katoden zusammengestellt.

Tabelle 4.2 Kenngrößen von Emissionskatoden

Material	α_0 A/cm² grd²	b_0 grd	Φ_0 V	I_s/P_h mA/W	T K
Wolfram	60,2	52400	4,52	4···20	2500···2600
Thoriertes Wolfram	3,0	30500	2,6	50···100	1900···2000
Oxidkatoden	0,01	11600	1,0	100···10000	1000···1200

Die Sättigungsströme pro Quadratzentimeter Katodenoberfläche betragen für reines Wolfram bei 2400 K 0,4, für thoriertes Wolfram bei 1600 K 0,1 und für eine Ba—Sr-Oxidkatode bei 1100 K etwa 10 A/cm².

4.12 Diode

Von den aus der Katode austretenden Elektronen besitzen die meisten eine mittlere Energie, die durch $2kT/e$ gegeben und klein gegen die im äußeren Potentialfeld erworbene ist. Im stationären Zustand entsteht um die Katode eine *Raumladung*, welche die gleiche Elektronenzahl zur Umkehr zur Katode zwingt, wie sie aus dieser emittiert wird.

Ist eine zweite Elektrode, die *Anode*, vorhanden, die auf positives Potential gebracht wird, so zieht sie aus der Raumladungswolke Elektronen an; dadurch wird die Raumladung soweit verdünnt, daß aus der Katode weitere Elektronen nachgeliefert werden können. Verändert man die *Anodenspannung* U_a und verfolgt den zur Anode fließenden Strom I_a, so ergibt sich der in Abb. 4.1 dargestellte Verlauf, der zeigt, daß die Röhrendiode ein *nichtlineares* Schaltungselement ist. Die für zwei verschiedene Katodentemperaturen aufgezeichneten

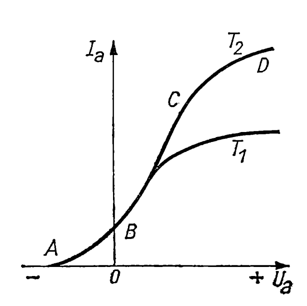


Abb. 4.1 Kennlinien der Dioden

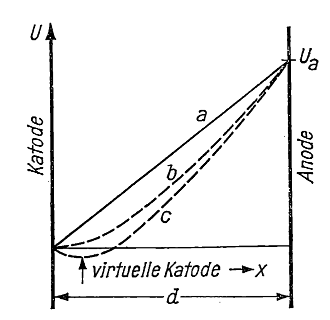


Abb. 4.2 Potentialverlauf in einer Raumladungsdiode

Kennlinien lassen sich in drei Bereiche unterteilen. Zwischen A und B ist die Anode schwach negativ gegen die Katode vorgespannt und fängt die energiereichsten Elektronen auf. Dieses Gebiet wird als *Anlaufstromgebiet* bezeichnet. Im *Sättigungsstromgebiet* $C—D$ werden bei genügend hoher Anodenspannung alle von der Katode emittierten Elektronen aufgefangen, d. h., es wird der durch Gl. (4/1) gegebene Sättigungsstrom erreicht. Unter diesen Bedingungen nimmt die Anode die *Anodenverlustleistung* $U_a I_s$ auf, die durch Wärmeleitung und -strahlung nach außen abgeführt werden muß. Bei thorierten Wolfram- und Oxidkatoden kann das Sättigungsgebiet stationär nicht erreicht werden. Im *Raumladungsgebiet* $B—C$ ist I_a durch die negative Raumladung vor der Katode begrenzt. Bei kleinen Elektronengeschwindigkeiten oder großen Stromdichten wird durch die Raumladung die Feldstärke an der Katodenoberfläche soweit abgeschwächt, daß die meisten von der Anode ausgehenden Feldlinien im Raumladungsgebiet enden.

Für den einfachsten Fall, daß Katode und Anode parallele und ausgedehnte Ebenen bilden, deren Abstand d sei, ergibt sich mit den Ausdrücken

$$\text{Stromdichte} \quad J = -nev = -\varrho v$$

(n Elektronendichte/cm³, e Elementarladung $= 0{,}1602$ aC, v Elektronengeschwindigkeit, ϱ Raumladung),

$$\text{kinetische Energie} \quad mv^2/2 = eU$$

die Poissonsche Differentialgleichung in der Form

$$\mathrm{d}^2 U/\mathrm{d}x^2 = -\varrho/\varepsilon_0 = \frac{J}{\varepsilon_0 \sqrt{2Ue/m}}\,.$$

Integration längs der X-Richtung liefert die Beziehung

$$J = \frac{9\varepsilon_0}{4}\sqrt{\frac{2e}{m}}\,\frac{U^{3/2}}{x^2} = 2{,}34 \cdot 10^{-6}\,\frac{U_a^{3/2}}{d^2}\,[\mathrm{A/cm^2}], \tag{4/2}$$

die als das Raumladungsgesetz von LANGMUIR und SCHOTTKY bekannt ist. In Abb. 4.2 ist für diesen eindimensionalen Fall der Potentialverlauf für den raumladungsfreien Fall (a) und für das durch Gl. (4/2) gegebene Raumladungsgesetz (b) dargestellt. Wird außerdem die endliche Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Katode berücksichtigt (c), so ergibt sich sogar eine Feldumkehr vor der Katode. Da die Lage der Katode durch $\mathrm{d}U/\mathrm{d}x = 0$ definiert ist, verschiebt sich diese im Fall (c) in Richtung der Anode (virtuelle Katode) und ist daher von der Katodentemperatur abhängig. Das Raumladungsgesetz (4/2) ist von großer Bedeutung für die Elektronengeräte, die fast alle unter Raumladungsbedingungen arbeiten.

Für eine zylindrische Anordnung von Katode und Anode, deren Radien r_k bzw. r_a sind, ergibt sich anstelle von Gl. (4/2) der Ausdruck

$$I_a = 14{,}6 \cdot 10^{-6}\,\frac{l}{r_a}\,\frac{U_a^{3/2}}{\beta^2} \tag{4/3}$$

für den raumladungsbegrenzten Anodenstrom, wobei l die Anodenlänge und β eine Funktion von r_a/r_k ist, die ≈ 1 ist, wenn $r_a \geqq 7r_k$ ist.

4.13 Gleichrichtung mit Röhrendioden

Liegt zwischen Katode und Anode einer Diode eine Wechselspannung, so fließt ein Strom durch die Röhre nur bei einer gegen die Katode positiven Anodenspannung. Dies ermöglicht z. B., die Scheitelspannung einer sinusförmigen Wechselspannung zu messen, indem man nach Abb. 4.3 die Diode in Serie zu einem Widerstand R schaltet. Wie aus Abb. 4.1 zu entnehmen ist, läßt sich die Diode durch einen effektiven Widerstand $R_i = U_a/I_a$ ersetzen, der eine Funktion von I_a ist und für schwache Ströme sehr groß, für stärkere Ströme klein und fast konstant ist. In der *Sperrichtung* ist $R_i = \infty$, wenn man das Anlaufstromgebiet vernachlässigt. In der *Durchlaßrichtung* kann man R_i

in guter Näherung durch den Ausdruck

$$R_i = A/\sqrt{I_a} + B$$

ersetzen und erhält für die am Widerstand R liegende Spannung

$$U_2 = I_a R = U_1 \frac{R}{R_i + R} = \frac{U_1}{1 + B/R + A/\sqrt{U_2 R}}. \tag{4/4}$$

Für große Werte von $U_2 \approx U_a$ kann der letzte Term im Nenner von Gl. (4/4) vernachlässigt werden, d. h., es ist

$$U_2 = \frac{U_1}{1 + B/R}. \tag{4/4a}$$

Diesen Betriebszustand, also $U_2 \approx U_a$ und großes R, bezeichnet man als *lineare Gleichrichtung*, bei der Ausgangs- und Eingangsspannung einander entsprechen und in der Sperrichtung $U_2 = 0$ ist. Für kleine Werte von U_a überwiegt in der Gleichung für den Ersatzwiderstand der erste Term, und aus Gl. (4/4) wird hierfür

$$U_2 = U_1^2 \cdot R/A^2. \tag{4/4b}$$

Dies stellt den Fall der *quadratischen Gleichrichtung* dar, wobei wie in Gl. (4/4a) für $U_2 < 0$ auch $U_1 = 0$ ist.

Zur Berechnung eines Gleichrichterkreises bei hohen Frequenzen der Spannung U_1 ist für die Diode nicht nur der Ersatzwiderstand R_i, sondern auch ihre effektive Kapazität C_i zu berücksichtigen. Diese hängt nicht nur von der Geometrie der beiden Elektroden, sondern auch von den Betriebsbedingungen, d. h. vom Verhältnis des Wechselspannungs- zum Gleichspannungsanteil von U_1, ab, da die Laufzeit der Elektronen zwischen Katode und Gitter für kleine Amplituden von U_a bestimmt wird. Für kleine Frequenzen beträgt C_i wegen der Raumladung etwa 3/2 des statischen Wertes; für sehr hohe Frequenzen kann die Admittanz der Diode negativ werden, d. h. die Erzeugung von Schwingungen bewirken.

Nach dem Verwendungszweck lassen sich drei Typen von Röhrendioden unterscheiden:

1. *Netzgleichrichterröhren* mit hohem Emissionsstrom (50···200 mA), mittleren Anodenspannungen unter 1000 V und kleinem Ersatzwiderstand (≈ 500 Ω);

2. *Hochspannungsgleichrichter* für Spannungen bis 10 kV besitzen großen Elektrodenabstand mit gesondert nach außen geführten Anoden, von denen für die Vollweggleichrichtung meist zwei im Kolben vorgesehen sind. Geringere Emission als bei 1.;

3. *Empfänger- und Meßdioden* besitzen indirekt geheizte Oxidkatoden und zwei Anoden mit gemeinsamer Katode.

Über Gleichrichter s. § 5.1.

4.14 Triode

4.141 Allgemeines

Durch Einfügen eines der Katode benachbarten, dünndrähtigen Steuergitters zwischen dieser und der Anode ergibt sich die Möglichkeit, den zur Anode fließenden Elektronenstrom zu steuern. Für den Emissionsstrom nach Gl. (4/2) oder (4/3) tritt anstelle der Anodenspannung U_a ein linearer Ausdruck, in dem Gitter- und Anodenspannung (beides vom Katodenpotential gerechnet) enthalten sind. Man erhält daher für das Raumladungsgebiet den Emissionsstrom aus der Beziehung

$$I = I_a + I_g = K\,U_{st}^{3/2}, \tag{4/5}$$

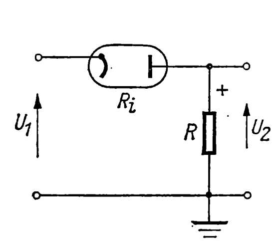


Abb. 4.3 Gleichrichterkreis

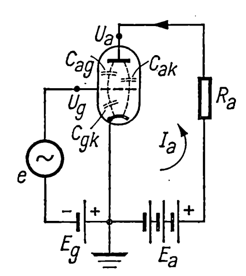


Abb. 4.4 Triode

wenn K eine von der Röhrengeometrie abhängige Konstante und die *Steuerspannung* U_{st} als diejenige Spannung verstanden wird, die in der Ebene des Steuergitters die Größe

$$U_{st} = \frac{1}{\sigma}\,(U_g + D\,U_a) \tag{4/6}$$

besitzt. Die beiden Größen σ und D, als *Steuerschärfe* bzw. *Durchgriff* bezeichnet, hängen von der räumlichen Anordnung der drei Elektroden ab und sind durch die in Abb. 4.4 eingetragenen Teilkapazitäten gegeben. Es ergibt sich

$$\sigma = 1 + \frac{C_{ak}}{C_{gk}} + \frac{C_{ak}}{C_{ag}} = 1 + D + \frac{C_{ak}}{C_{ag}} \tag{4/7}$$

und

$$D = C_{ak}/C_{gk}, \tag{4/8}$$

wobei sich die Indizes k, g, a der Teilkapazitäten auf Katode, Gitter und Anode beziehen. Durch Einsetzen von Gl. (4/6) in Gl. (4/5) ergibt sich dann

$$I_a = \frac{K}{\sigma}\,(U_g + D\,U_a)^{3/2}. \tag{4/5a}$$

Die Werte von σ liegen bei Eins, die von D zwischen 0,05 und 0,2.

Bei den meisten Anwendungen wird, wie in Abb. 4.4 gezeichnet, die Triode zur leistungslosen Spannungsverstärkung des Gittersignals e benutzt. Zu diesem Zweck wird in den Anodenkreis die Batterie E_a geschaltet und das Gitter durch die Gitterbatterie E_g negativ vorgespannt. Nimmt man sinusförmige Änderungen von Gitterspannung, Anodenspannung und Anodenstrom an, so setzen sich diese Größen aus stationären Anteilen und periodischen Änderungen zusammen, wie in Abb. 4.5 dargestellt ist.

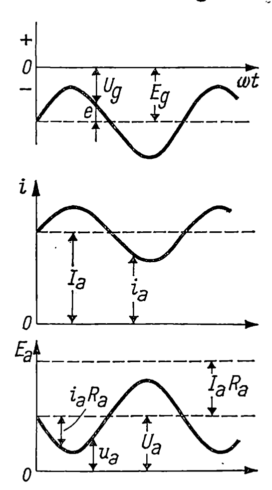


Abb. 4.5 Spannung und Strom an der Triode

Bei nicht zu hohen Frequenzen ω und einer ohmschen Last R_a ist der Anodenstrom $I_a + i_a$ in Phase mit der Gitterspannung $E_g - e$. Nimmt der Anodenstrom zu, so erhöht sich auch der Spannungsabfall an R_a und nimmt damit die Anodenspannung ab, da

$$(I_a + i_a)R_a + u_a = E_a.$$

4.142 Kennlinien und Triodenparameter

Wie im Raumladungsbereich nach Gl. (4/5a) ist der Anodenstrom im gesamten Arbeitsbereich der Triode eine Funktion der Form

$$i_a = f(u_g + Du_a).$$

Das nichtlineare Verhalten der Röhre läßt sich durch *Kennlinien* darstellen, die als einparametrige Kurvenscharen der Variablen i_a, u_a und u_g aufgetragen werden. In Abb. 4.6a ist in der i_a–u_a-Ebene für konstante Gitterspannungen u_g der Anodenstrom als Funktion der Anodenspannung aufgetragen. Für kleine Änderungen von i_a, wie sie bei Verstärkern benutzt werden, findet man mit der entsprechenden Änderung der Spannung u_a an der Anode die Größe

$$R_i = (\partial u_a / \partial i_a)_{u_g}, \tag{4/9}$$

die man als *inneren Widerstand* bezeichnet. Dieser ist die reziproke Steigung der Kennlinien im Arbeitspunkt Q und eine Funktion der drei Betriebsgrößen.

Eine zweite Kennlinienschar (Abb. 4.6b) gibt die Änderung des Anodenstroms bei konstanter Anodenspannung als Funktion der Gitterspannung wieder. Die einzelnen Kurven ergeben sich durch Verschieben längs der Abszisse und zeigen eine gewisse Ähnlichkeit mit denen der Abb. 4.6a. Für kleine Änderungen von u_g läßt sich mit der entsprechenden Anodenstromänderung das eingezeichnete Dreieck konstruieren, dessen Neigung

$$S = (\partial i_a / \partial u_g)_{u_a} \tag{4/10}$$

die Dimension eines Leitwerts besitzt und als *Steilheit* bezeichnet wird.

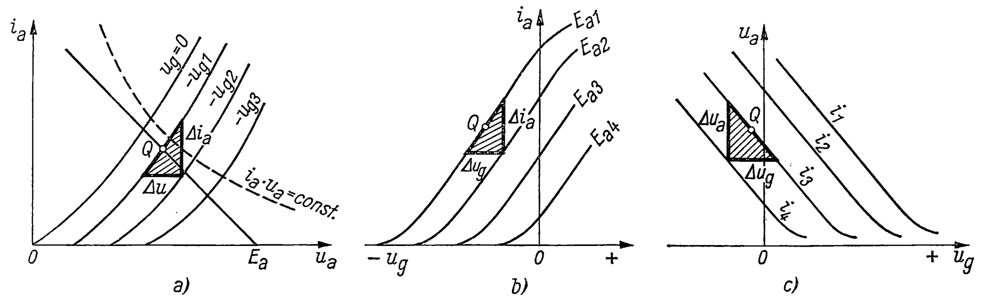


Abb. 4.6 Kennlinien einer Triode

Schließlich ist in Abb. 4.6c bei konstantem Anodenstrom die Anodenspannung als Funktion der Gitterspannung aufgetragen, woraus unmittelbar durch Differenzieren von Gl. (4/5a) für $\mathrm{d}i_a = 0$ die Konstruktion des *Durchgriffs D* folgt. Es gilt

$$D = -(\partial u_g / \partial u_a)_{i_a} = (\partial i_a / \partial u_a)/(\partial i_a / \partial u_g) = \frac{1}{S R_i}\,. \tag{4/11}$$

Das negative Vorzeichen gibt an, daß für konstanten Anodenstrom die Änderungen von u_a und u_g entgegengesetzt gerichtet sein müssen. Die Größe $\mu = 1/D$ wird gelegentlich auch als *Verstärkungsfaktor* bezeichnet; tatsächlich erscheint in der Vierpolersatzschaltung der Röhre (vgl. § 3.8) in Abb. 3.33a die Größe $\mu U_g = U_g/D$ als wirksame EMK im Anodenkreis.

In Abb. 4.6a ist die *maximale Anodenbelastung* $(i_a u_a)_{\max}$ durch eine Hyperbel eingezeichnet, durch welche der Arbeitsbereich der Röhre begrenzt wird.

4.143 Verstärkungseigenschaften der Triode

Meist wird die Triode zur leistungslosen Steuerung des Anodenstroms innerhalb eines Arbeitsbereiches benutzt, der Linearität garantiert. Wie man aus den Kennlinien ersieht, ist hierzu die richtige Wahl des *Arbeitspunktes Q* von Bedeutung, der ohne Signalspannung die stationären Werte von I_a, U_a

und E_g (s. Abb. 4.5) festlegt. Geht man von der einfachen Verstärkerschaltung der Abb. 4.4 aus, so folgt aus $U_a = E_a - I_a R_a$ für den Anodenstrom die Beziehung

$$I_a = E_a/R_a - U_a/R_a. \tag{4/12}$$

Andererseits gilt für $I_a = f(U_g + D U_a)$ das Anodenkennlinienfeld der Abb. 4.6a. Das Wertepaar U_a, U_g für den gesuchten Arbeitspunkt einer gegebenen Triode mit dem Außenwiderstand R_a findet man aus Gl. (4/12), die eine Gerade durch den Punkt $I_a = 0$, $U_a = E_a$ mit der Neigung $-1/R_a$ darstellt (Abb. 4.6a). Diese *Widerstandsgerade* muß innerhalb der Hyperbel für die maximale Anodenbelastung liegen. Der Arbeitspunkt Q ist durch die Vorgabe der Gittervorspannung U_g noch frei wählbar, wird jedoch zweckmäßig so gelegt, daß möglichst große Wechselspannungsamplituden unverzerrt verstärkt werden können. Auch ist zu beachten, daß die (negative) Gittervorspannung für den Arbeitspunkt groß genug ist, damit kein merklicher Gitterstrom fließt und die Steuerung keine Leistung erfordert.

Bezeichnet man mit i_a, u_g und u_a kleine Änderungen der entsprechenden Größen im Arbeitspunkt, so folgt aus den Gln. (4/10) und (4/11) die bereits in § 3.8 abgeleitete Beziehung

$$i_a = S(u_g + D u_a) = S u_{st}, \tag{4/13}$$

wobei u_{st} als *Steuerspannung* bezeichnet wird. Für die durch Gl. (4/5a) beschriebene ideale Triode findet man die Steilheit S zu

$$S = (\partial I_a/\partial U_g)_{U_a} = \frac{3}{2}\,\frac{K}{\sigma}\,U_{st}^{1/2} = \frac{3}{2}\left(\frac{K}{\sigma}\right)^{2/3} I_a^{1/3}. \tag{4/14}$$

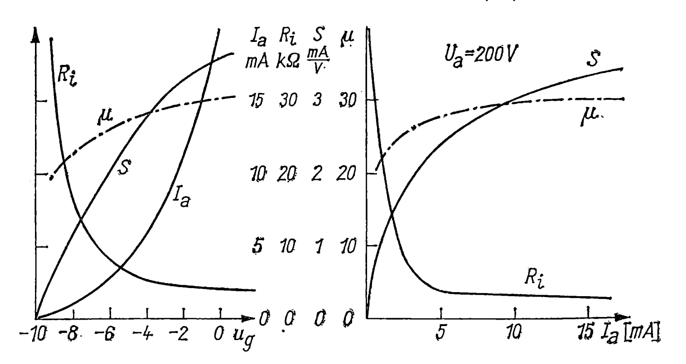


Abb. 4.7 Kenngrößen der Triode AC 2

Die erzielbare Verstärkung A der Triode ist durch Gl. (3/106) für eine Lastimpedanz Z_L gegeben; sie wird $A \to D$, wenn der Lastwiderstand groß gegen den Innenwiderstand der Röhre ist.

Zum Vergleich sind in Abb. 4.7 für die Triode AC2 die Größen μ, S und R_i als Funktion von U_g bzw. I_a dargestellt.

4.144 Elektrometerröhren

Wie in § 2.32 erwähnt, können mit Verstärkerröhren mit besonders kleinem Gitterstrom sehr kleine Ströme bzw. Spannungen gemessen werden. Die dabei auftretenden Widerstände lassen sich aus Abb. 4.8 ersehen, wo der Gitterkreis den Widerstand R_g enthält. Fließt zwischen Gitter und Katode ein Gitterstrom I_g, so wirkt am Gitter die Spannung

$$U_g = R_g(I - I_g),$$

wenn I der zu messende Strom ist. Der Einfluß der Gitter- und Anodenspannung auf den Gitterstrom läßt sich durch die Innenwiderstände $R_{ig} = \left(\frac{\partial I_g}{\partial U_g}\right)^{-1}$ und $R_{ia} = \left(\frac{\partial I_g}{\partial U_a}\right)^{-1}$ beschreiben, die man sich ersatzweise nach Abb. 4.8 eingeschaltet vorstellen muß. Die Werte von R_{ig} und R_{ia} sind natürlich Funktionen der Betriebsdaten der Röhre.

Wie aus der obigen Beziehung hervorgeht, ist eine Steuerung des Anodenstromes durch kleine Meßströme I nur dann möglich, wenn $I > I_g$ und

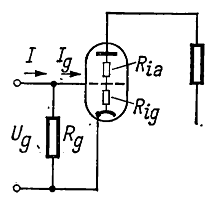


Abb. 4.8 Elektrometertriode

der Außenwiderstand R_g sehr hoch gewählt werden kann. Der Gitterstrom I_g setzt sich zusammen aus: *a*) Isolationsstrom, der der Gitterspannung proportional ist, *b*) Fotostrom durch sichtbares Licht der Katode, *c*) Fotostrom am Gitter durch weiche Röntgenstrahlung der Anode, *d*) thermischer Emission am Gitter durch Erwärmung in Katodennähe, *e*) durch Restgasionisierung bedingtem positivem Strom zum Gitter, der proportional zum Anodenstrom ist, *f*) positivem Gitterstrom durch energiereiche Elektronen der Katode.

Zur Verminderung von I_g dienen verschiedene konstruktive Maßnahmen, wie Vergrößerung des Isolationswiderstandes der Gitterhalterung durch besondere Durchführung, kleine Gitterfläche, Lichtabschirmung, ferner geeignete Betriebsbedingungen, wie Unterheizen der Katode, kleine Anodenspannungen zwischen 10 und 20 V, negative Gitterspannung von mindestens —2 V und kleiner Anodenwiderstand. Für geringere Ansprüche sind auch entsockelte Normalröhren brauchbar, die mit Unterheizung und kleiner Anodenspannung arbeiten. Der Gitterstrom erniedrigt sich hierdurch von 1 μA im normalen Betrieb auf etwa 10 pA. Röhrentypen siehe *Tabelle 4.3*.

4.15 Pentode

Trioden weisen in Verstärkerschaltungen eine Reihe von Nachteilen auf, die sich durch Einführen zusätzlicher Elektroden vermeiden lassen: 1. der Durchgriff D und damit der Verstärkungsfaktor ist auf Werte bis 50 be-

grenzt; 2. der Innenwiderstand ist besonders bei Schwingkreisen als Außenwiderstand zu gering; 3. die Anoden-Gitter-Kapazität C_{ag} (vgl. Gl. (4/8)) ist relativ groß, was zu unerwünschter Kopplung von Ein- und Ausgangskreis führt. Die *Pentode* enthält fünf Elektroden, die in der Reihenfolge Katode, Steuergitter G_1, Schirmgitter G_2, Bremsgitter G_3 und Anode angeordnet sind (Abb. 4.9); Schirmgitter und Anode befinden sich auf positivem Potential, das Bremsgitter ist meist mit der Katode verbunden. Das Schirmgitter ist gewöhnlich mit größerer Steigung als das Steuergitter gewickelt, um den Schirmgitterstrom klein zu halten. Das Bremsgitter G_3 hat die Aufgabe, vor der Anode eine Potentialsenke zu erzeugen, um die aus dieser befreiten Sekundärelektronen zur Anode zurückzutreiben.

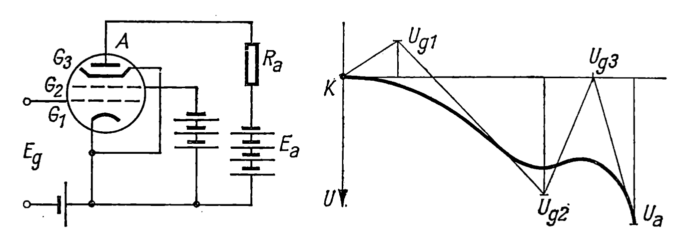


Abb. 4.9 Schaltung (a) und Potentialverteilung (b) in der Pentode

Der Katodenstrom I_e (Gesamtstrom) der Pentode hängt analog zu Gl. (4/6) von der Steuerspannung

$$U_{g1} = \frac{1}{\sigma} (U_{g1} + D_{g2} U_{g2} + D_a U_a) \tag{4/15}$$

ab, worin D_{g2}, der Durchgriff des Schirmgitters, etwa die gleiche Größe wie bei der Triode besitzt, während U_a mit dem Produkt dreier Durchgriffe multipliziert in das Effektivpotential eingeht. Damit wird der Gesamtstrom, der sich aus Anoden- und Schirmgitterstrom wie

$$I_e = I_a + I_{g2} \tag{4/16}$$

zusammensetzt, fast unabhängig von der Anodenspannung U_a. Nur bei sehr kleinen Werten von U_a nimmt I_a etwas ab, da ein Teil der Elektronen an der Anode gespiegelt wird. Für das Verhältnis I_a/I_{g2} sind die Gesetze der Stromverteilung anzuwenden, wobei für $U_{g2} < U_a$, d. h. im Tankschen Bereich, die Beziehung

$$I_{g2}/I_a = c_1 (U_{g2}/U_a)^{1/2} = 1/q \tag{4/17}$$

gilt. Die Konstante c_1 hängt nur von den Abmessungen des Elektrodensystems ab. Den Einfluß des Bremsgitters, das auf Katodenpotential liegt, kann man vernachlässigen. Analog zu Gl. (4/5a) erhält man für den Anodenstrom der Pentode den Ausdruck

$$I_a = B \frac{(U_{g1} + D_{g2} U_{g2})^{3/2}}{1 + c(U_{g2}/U_a)^{1/2}}, \tag{4/18}$$

worin B eine Konstante ist und der Einfluß der Anodenspannung U_a im Zähler wegen des sehr kleinen Wertes von D_a in Gl. (4/15) vernachlässigt wird.

In Abb. 4.10 ist das Kennlinienfeld einer typischen Pentode RENS 1284 dargestellt, wobei die Schirmgitterspannung U_{g2} einen Festwert einnimmt. Für andere Wert von U_{g2} kann man aus den Gln. (4/17) und (4/18) die Kennlinienschar konstruieren. Man erkennt, daß für größere Anodenspannung der Anodenstrom I_a nur wenig von dieser abhängt und der für einen Wert von U_{g1} eingezeichnete Schirmgitterstrom I_{g2} komplementär zu I_a verläuft.

Die *Steilheit* $S_a = (\partial I_a / \partial U_g)$ ist wegen der Stromverteilung auf Anode und Schirmgitter um das Verhältnis I_a/I_e kleiner als diejenige einer gleichartigen Triode. Mit Gl. (4/17) ergibt sich der Ausdruck

$$S_a = \frac{q}{1+q} S_{g2} = \left(\frac{q}{1+q}\right)^{2/3} a I_a^{1/3} = a' I_a^{1/3}, \qquad (4/19)$$

der qualitativ das durch Gl. (4/14) beschriebene Verhalten einer Triode zeigt.

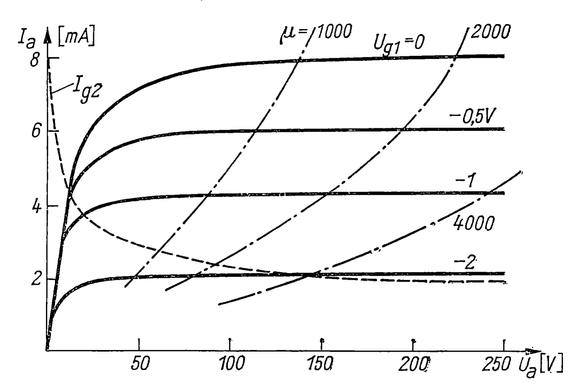


Abb. 4.10 I_a–U_a-Kennlinien einer Pentode

Für den *Innenwiderstand* $R_i = (\partial U_a / \partial I_a)|_{U_{g1}, U_{g2}}$ findet man

$$R_i = b\, U_a / I_a, \qquad (4/20)$$

wobei b nur von den Abmessungen des Elektrodensystems abhängt und Werte zwischen 20 und 30 einnehmen kann. Aus den Gln. (4/19) und (4/20) folgt sofort der *Verstärkungsfaktor*

$$\mu = S R_i = a' b\, U_a / I_a^{2/3}, \qquad (4/21)$$

der, wie aus Abb. 4.10 ersichtlich ist, eine Funktion von U_a und I_a ist. Im Gegensatz zur Triode (vgl. Gl. (4/8)) hat bei der Pentode die Größe μ keine Beziehung mehr zum elektrostatischen Durchgriff der Anode durch die dazwischenliegenden Gitter.

Aus Gl. (4/20) ergibt sich im Vergleich zur Triode ein sehr viel größerer Innenwiderstand, der bei normalen Pentoden mehrere MΩ bei einer Steilheit von einigen mA/V beträgt.

Tetroden enthalten kein Bremsgitter und verhalten sich bei kleinen Anodenspannungen wie Pentoden. Bei konstanter hoher Schirmgitterspannung steigt

mit wachsender Anodenspannung wegen der an der Anode ausgelösten Sekundärelektronen der Schirmgitterstrom. Nimmt die Ausbeute der Sekundärelektronen stärker als der primäre Elektronenstrom bei wachsender Anodenspannung zu, so nimmt der Anodenstrom ab und kann sogar negativ werden. Man erhält in diesem Spannungsbereich eine fallende $I_a - U_a$-Kennlinie mit *negativem* Innenwiderstand, die im *Dynatron* zur Schwingungserzeugung herangezogen wird. Im Bereich $U_a > U_{g2}$ laufen die Sekundärelektronen wieder zur Anode und vergrößern den Anodenstrom. Der Anwendungsbereich der Tetroden ist wegen des geringen Aussteuerbereiches auf Vorverstärker beschränkt.

Leistungstetroden (beam power tubes) besitzen einen relativ großen Anoden-Schirmgitter-Abstand und Bündelbleche zur Erzeugung einer großen Elektronenstromdichte. Die dadurch erzeugte hohe Raumladung vor der Anode erzeugt eine Potentialmulde, die von den Sekundärelektronen nicht überwunden werden kann. Die Röhre wird mit Vorteil als Endverstärker eingesetzt, da zur Aussteuerung geringere Gitterspannungen als bei der Pentode erforderlich sind.

Regelpentoden besitzen ein Steuergitter, dessen Drähte mit veränderlicher Steigung längs der Haltedrähte gewickelt sind. In der Mitte sind diese weiter als an den Enden gewickelt. Mit kleiner negativer Gitterspannung ergibt sich ein großer Wert von μ, der mit zunehmender Gitterspannung um mehr als zwei Größenordnungen abnimmt. Dieser Röhrentyp ist für Verstärker mit variablem Verstärkungsfaktor geeignet.

4.16 Hexoden und Heptoden

Hexoden enthalten zwei auf negativem Potential befindliche Steuergitter G_1 und G_3 mit einem positiven Schirmgitter G_2 dazwischen, ein zweites Schirmgitter G_4 sowie die Anode. Bei der *Heptode* liegt zwischen Schirmgitter G_4 und Anode noch ein zusätzliches Bremsgitter G_5 zur Unterbindung des Austausches der Sekundärelektronen. Die beiden Schirmgitter G_2 und G_4 liegen meist an der gleichen (positiven) Spannung.

Durch das Gitter G_1 wird der Gesamtstrom I_e genau wie bei der Triode (vgl. Gl. (4/15)) mit der Steuerspannung

$$U_{\text{st}1} = \frac{1}{\sigma}\,(U_{g1} + D_{21}\,U_{g2}) \qquad (4/22)$$

gesteuert, wobei die folgenden Elektroden praktisch ohne Einfluß sind. Das zweite Steuergitter G_3 wirkt dagegen durch Stromverteilungssteuerung, d. h., der durch G_3 gehende Strom hängt von der Spannung U_{g2} und der am Gitter G_3 wirksamen Steuerspannung

$$U_{\text{st}3} = \frac{1}{\sigma}\,(U_{g3} + D_{43}\,U_{g4} + D_{23}\,U_{g2}) \qquad (4/23)$$

ab, wobei der Einfluß der übernächsten Elektroden vernachlässigt wird. Im Gegensatz zum Tankschen Bereich der Gl. (4/17), in dem der Schirmgitterstrom kaum mehr von der Schirmgitterspannung U_{g2} abhängt, ergibt sich im

vorliegenden Bereich, dem Belowschen Gebiet,

$$\frac{I_{g4} + I_a}{I_e} = c_2 (U_{st3}/U_{g2})^{1/2}. \qquad U_{st3} \ll U_{g2}. \tag{4/24}$$

Entsprechend den drei Entladungsvorgängen, Triodensteuerung des Systems $K G_1 G_2$, Raumladungssteuerung zwischen $G_2 G_3 G_4$, Stromverteilungssteuerung $G_3 G_4 A$, wird die Hexode durch drei Kennlinienscharen beschrieben, die in Abb. 4.11 dargestellt sind. Das $I_a - U_a$-Diagramm (a) entspricht dem einer gewöhnlichen Pentode (s. Abb. 4.10). Dagegen unterscheiden sich die $I_a - U_{g1}$- und $I_a - U_{g3}$-Kurven grundsätzlich von denen einer Triode bzw. Pentode (s. Abb. 4.6b), die durch Parallelverschiebung entstehen, da nach Gl. (4/13) oder (4/15) die Potentiale der Steuergitter additiv in die Beziehung für den Anodenstrom eingehen. Bei der Hexode hingegen wirken sich die Potentiale

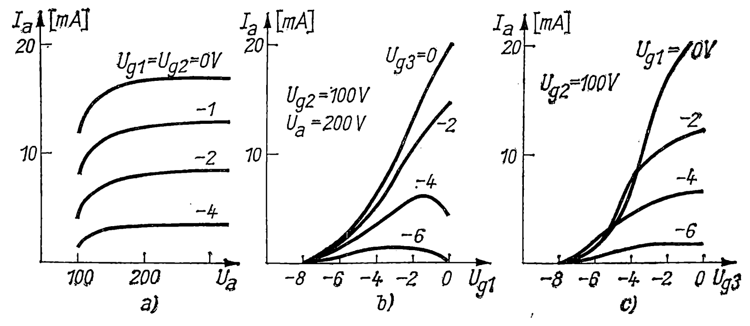


Abb. 4.11 Kennlinienfelder einer Hexode

der Steuergitter *multiplikativ* auf I_a aus; die Steuerkennlinien erscheinen um den Fußpunkt der ursprünglichen Kennlinie geschwenkt (Abb. 4.11b, c). Wird bei besonderen Potentialverhältnissen vor dem zweiten Steuergitter eine starke Raumladung (virtuelle Katode) erzeugt, so nimmt der Anodenstrom bei zunehmendem Gesamtstrom stark ab. Innerhalb gewisser Grenzen läßt sich eine Linearisierung der Kennlinie erreichen.

Aus Abb. 4.11 ist ersichtlich, daß die Steilheiten $S_1 = \partial I_a / \partial U_{g1}$ und $S_3 = \partial I_a / \partial U_{g3}$ von den Gitterspannungen U_{g3} bzw. U_{g1} stark abhängen. Man kann damit die Verstärkung eines am ersten Gitter ankommenden Signals durch das zweite Gitter bequem regeln. Bezeichnet man mit S_1 bzw. S_3 die Steilheit der Hexode in bezug auf die Gitterspannungen U_{g1} bzw. U_{g3}, so ergibt sich für kleine Änderungen des Anodenstroms

$$i_a = S_1 u_1 + \left(S_3 + \frac{\partial S_3}{\partial u_1} u_1\right) u_3 = S_3 u_3 + \left(S_1 + \frac{\partial S_1}{\partial u_3} u_3\right) u_1, \tag{4/25}$$

wenn u_1 und u_3 die an die beiden Steuergitter gelegten Spannungsänderungen sind. Es tritt dabei das Produkt $u_1 u_3$ auf, das bei sinusförmigen Signalspannungen mit den Frequenzen f_1 und f_3 zu *Mischfrequenzen* $f_1 + f_3$ bzw. $|f_1 - f_3|$ führt.

In *Tabelle 4.3* sind die wichtigsten Daten einiger Röhren zusammengestellt.

Tabelle 4.3 Daten von Gleichrichter- und Verstärkerröhren

Gleichrichterröhren

Typ	Heizung V	Heizung A	U_a V	I_a mA	Anwendung
EAA 91	6,3	0,3	300	9	Zweiweg-HF-Diode
EZ 80	6,3	0,6	220	30	Zweiweg-Netzgleichrichter
EY 51	6,3	0,09	5000	3	Hochspannungsgleichrichter

Trioden

Typ	Heizung V	Heizung A	U_a V	U_g V	I_a mA	S mA/V	μ	Anwendung
EC 92	6,3	0,15	250	−2	10	5,5	60	HF-Triode
EC 86	6,3	0,175	175	−1,5	12	14	68	TV-Triode
ECC 85	6,3	0,435	220	−2,3	10	5,9	57	HF-Doppeltriode

Pentoden

Typ	Heizung V	Heizung A	U_a V	U_{g3} V	U_{g2} V	U_{g1} V	I_a mA	I_{g2} mA	S mA/V	μ_{21}	Anwendung
EF 80	6,3	0,3	170	0	170	−2	10	2,5	7,4	50	HF-Pentode
EF 85	6,3	0,3	250	0	100	−2	10	2,5	6	26	regelbare HF-Pentode
EF 86	6,3	0,2	250	0	140	−2	3	0,6	2	38	rauscharme NF-Pentode
EF 89	6,3	0,2	250	0	100	−2	11	3,8	3,85	19	regelbare HF-Pentode
			250	0	100	−20	—	—	0,16	—	
EL 84	6,3	0,76	250	0	250	−7,3	48	5,5	11,3	19	NF-Leistungspentode
EL 95	6,3	0,2	250	0	250	−9	24	4,5	5	17	NF-Leistungspentode

Tabelle 4.3 (*Fortsetzung*)

Heptoden

Typ	Heizung V	Heizung A	U_a V	U_{g2g4} V	U_{g1} V	U_{g3} V	I_a mA	I_{g2+g4} mA	S_{ag1} mA/V	R_i MΩ	Anwendung
EH 90	6,3	0,3	100	30	−1	0	0,75	1,1	0,95	1	Mischröhre
ECH 81	6,3	0,3	250	250	−2	0	6,5	3,8	2,4	0,7	Triode-Heptode

Elektrometerröhren

Typ	Heizung V	Heizung A	U_a V	U_{g2} V	U_{g1} V	I_a mA	I_{g2} mA	I_{g1} A	S mA/V	Anwendung
T 113	3	0,1	10	—	−3	0,24	—	$<6 \cdot 10^{-13}$	0,18	
DF 703	1,25	0,01	8,5	4,5	−2	0,006	0,0036	$3 \cdot 10^{-15}$	0,014	E.-Pentode
4065	1,25	0,013	9	—	−2,5	0,10	—	$8,5 \cdot 10^{-14}$	0,08	Subminiatur-R.
4068	1,25	0,0082	10	6,5	−2,5	0,005	0,0022	$3 \cdot 10^{-15}$	0,0105	Subminiatur-R.

4.17 *Experimentelle Bestimmung der Röhrenkennlinien*

Die Röhrenparameter S, μ und R_i sind als Steigungen der Kennlinien im gewünschten Arbeitspunkt (s. Abb. 4.6) definiert, doch ist eine zeichnerische Ermittlung daraus meist zu ungenau. Mit Hilfe von Brücken- oder Kompensationsschaltungen lassen sich diese direkt experimentell bestimmen.

Der *Röhrenwiderstand* R_i kann mit Hilfe der in Abb. 4.12 dargestellten Brückenschaltung bestimmt werden, wobei der Arbeitspunkt Q durch die Wahl der Anodenspannung E_a und der Gittervorspannung E_g eingestellt wird. Die Elektronenröhre bildet den vierten Zweig der aus den Widerständen R_1, R_2 und R_3 bestehenden Widerstandsbrücke, die an die Wechselspannungsquelle

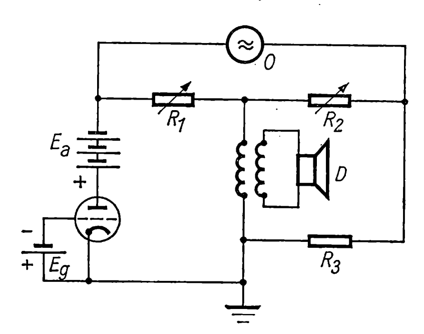


Abb. 4.12 Wheatstone-Brücke zur Messung von R_i

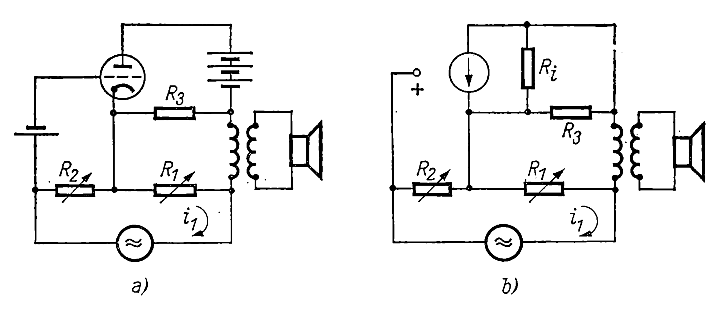


Abb. 4.13 Miller-Brücke zur Durchgriffsmessung

O von kleiner Spannung und etwa 1000 Hz angeschlossen ist. Bei abgeglichener Brücke ist die im Diagonalzweig mit dem Detektor D (Telefon) nachgewiesene Spannung Null. Es gilt dann

$$R_i = R_1 R_3 / R_2 .$$

Der Widerstand der Anodenspannungsquelle muß dabei zu vernachlässigen sein.

Zur Messung des reziproken *Durchgriffs* $\mu = 1/D$ benutzt man die in Abb. 4.13a dargestellte Miller-Brücke, bei der ein aus R_1 und R_2 bestehender Span-

nungsteiler zwischen der Gittervorspannung E_g, der Anodenspannung E_a und der Katode liegt. Im Ersatzschaltbild der Abb. 4.13b ist analog zu Abb. 3.33b die Röhre durch die eingeprägte Stromquelle Su_g und den Innenwiderstand R_i ersetzt. Bei abgeglichener Brücke ist der Anodenstrom $i_2 = 0$, und es gilt

$$Su_gR_i = i_1R_1.$$

Da $u_g = i_1R_2$ ist, erhält man

$$\mu = SR_i = \frac{R_1}{R_2}.$$

Zur Messung der *Steilheit* S wird die in Abb. 4.14a wiedergegebene Schaltung benutzt, die wie Abb. 4.13a den Spannungsteiler R_1R_2 enthält. Der Indikatorzweig liegt jedoch zwischen den Enden der Widerstände R_1 und R_3 und ist

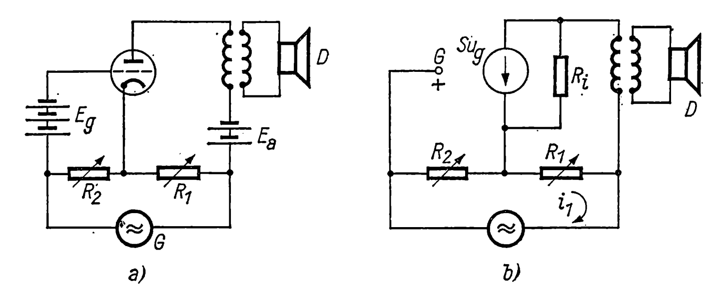


Abb. 4.14 Messung der Röhrensteilheit

stromlos, wenn diese gleiches Potential aufweisen. Mit Hilfe des Ersatzschaltbildes in Abb. 4.14b läßt sich diese Bedingung durch die Relation

$$Su_g \frac{R_iR_3}{R_i + R_3} = i_1R_1$$

darstellen. Da $u_g = i_1R_2$ ist, ergibt sich die zu messende Größe S aus

$$S = \frac{R_1(R_i + R_3)}{R_iR_2R_3}.$$

Soll die Messung unabhängig von R_i sein, so muß $R_i \gg R_3$ werden, dann vereinfacht sich die obige Beziehung zu

$$S = R_1/R_2R_3.$$

Bei Anwendung der Schaltungen in den Abbn. 4.12···4.14 ist es zur Erzielung einer größeren Genauigkeit zweckmäßig, als Nulldetektor einen Katodenstrahloszillografen zu verwenden.

Zur schnellen Aufnahme von Röhrenkennlinien sind *Kennlinienschreiber* [*4.6*] entwickelt worden, die selbsttätig die interessierenden Parameter stufenweise verändern und nacheinander am Oszillografenschirm die Kennlinien aufzeichnen.

4.18 Anwendungsbedingungen

In den vorhergehenden Abschnitten wurde gezeigt, daß sich für kleine Änderungen u_g der Gitterspannung U_g nach Gl. (4/10) der Anodenstrom um die Größe i_a ändert und beide Änderungen über die Steilheit S linear miteinander verknüpft sind. Ist u_g nicht mehr klein gegen U_g, so besteht kein linearer Zusammenhang zwischen i_a und u_g mehr. Es müssen vielmehr drei verschiedene Anwendungsbedingungen unterschieden werden, die in Abb. 4.15 an Hand der I_a–U_g-Kennlinie dargestellt sind.

Bei der ersten Betriebsart (a) spricht man von einem *A-Verstärker*, wenn der Arbeitspunkt etwa in der Mitte des geraden Teils der U_g–I_a-Kurve liegt und die Amplitude u_g der als sinusförmig angenommenen Gitterspannungsänderung klein gegen die Gittervorspannung $|U_g|$ ist, d. h. das Gitter immer negatives Potential besitzt. Man erhält einen stetigen Anodenstrom, dessen Änderungen i_a die der Gitterspannung unverzerrt wiedergeben.

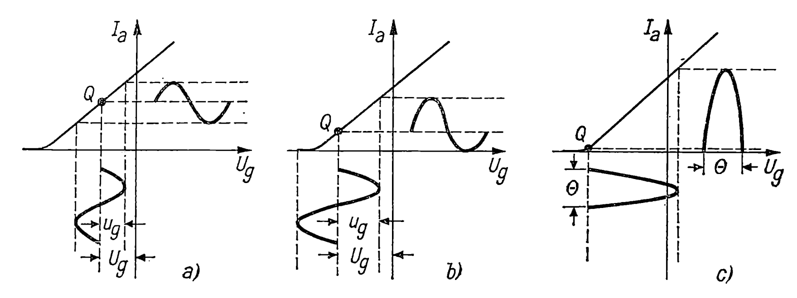


Abb. 4.15 Anwendungsbedingungen von Röhren

Die Spannungsverstärkung nach Gl. (3/106) wird hoch; doch wird der Wirkungsgrad wegen der kleinen Amplituden von u_g und i_a klein.

Beim *B-Verstärker* (Abb. 4.15b) liegt der Arbeitspunkt etwa am unteren Knick der I_a–U_g-Kurve, wodurch der Anodenruhestrom fast Null wird. Die Amplitude u_g der zu verstärkenden Gitterspannung entspricht etwa der Gittervorspannung U_g. Der Anodenstrom fließt nur während der halben Periode, und zwar dann, wenn $U_g - u_g < U_g$. Während dieser Halbperiode ist der Verlauf von I_a ähnlich dem der Gitterspannung. Für negative Werte von u_g ist $I_a \approx 0$. Infolge der relativ großen Aussteuerung lassen sich mit dieser Betriebsart große Wechselstromleistungen und -wirkungsgrade erzielen. Im Gegensatz zur A-Schaltung, bei der die Gittervorspannung U_g mit Hilfe eines Katodenwiderstandes (mit parallel geschaltetem Kondensator) durch den Anodenstrom selbst erzeugt wird, muß U_g in diesem Fall durch eine gesonderte Gitterspannungsquelle geliefert werden, da der mittlere Anodenstrom von der Aussteuerung abhängt. Zur Verstärkung von sinusförmigen Signalen sind zwei Röhren in einer *Gegentaktschaltung* notwendig.

Bei der *C-Schaltung* (Abb. 4.15c) ist die Gittervorspannung größer als die Grenzgitterspannung am Knick der I_a–U_g-Kurve und die Signalamplitude von der Größe U_g. Der Anodenstrom fließt nur während des Winkels

$\Theta < \pi$ und gibt das Eingangssignal verzerrt wieder. Wegen seines hohen Wirkungsgrades wird dieser Verstärker im Gegentakt als *Senderverstärker* vorwiegend bei fester Frequenz und einem Schwingungskreis als Lastimpedanz betrieben, durch den die Oberwellen kurzgeschlossen werden.

Als *AB-Verstärker* wird eine Betriebsart bezeichnet, bei der der Arbeitspunkt unsymmetrisch zum geradlinigen Teil der Röhrenkennlinie liegt und eine Zwischenstellung von A- und B-Schaltung einnimmt. Der Verstärker wird im Gegentakt mit automatischer Gittervorspannung betrieben; er zeichnet sich durch kleinen *Klirrfaktor* (s. § 5.243) und großen Wirkungsgrad aus.

4.2 Grundlagen von Halbleiterverstärkern und -gleichrichtern [*4.31*, *4.46*]

Die spezielle Eigenschaft von Halbleitern, einen von der Stromrichtung stark abhängigen Innenwiderstand aufzuweisen, wird in der Hochfrequenztechnik schon lange ausgenutzt. Die in den letzten 15 Jahren stürmische Weiterentwicklung der Halbleitertechnik hat zu einem neuartigen Verstärkerelement, dem *Transistor*, geführt. Mit dem Transistor lassen sich die Funktionen der Elektronenröhren-Triode (s. § 4.14) übernehmen, wobei allerdings eine Grenze nach hohen Frequenzen existiert und größere Rauschspannungen in Kauf genommen werden müssen (vgl. § 4.6). Während die Elektronenröhre durch *Spannungen* gesteuert wird, geschieht die Steuerung des Transistors durch *Ströme*; dieses komplementäre Verhalten spiegelt sich in der Behandlung beider Elemente in der Theorie der aktiven Vierpole (s. § 3.8) wieder.

Der große Vorteil des Transistors gegenüber der Elektronenröhre liegt im Fortfall der Katodenheizung, in der fast unbegrenzten Lebensdauer und in der niedrigen Eingangsimpedanz, die bei kleinen Spannungen einen hohen Wirkungsgrad gewährleistet.

4.21 Allgemeines über Halbleiter

Die halbleitenden Materialien für Transistoren und Gleichrichter sind kristalline Festkörper, in denen sich der Ladungstransport durch Elektronen abspielt. Die beiden wichtigsten Elemente für die praktische Anwendung, *Germanium* und *Silizium*, gehören der vierten Gruppe des Periodischen Systems an und kristallisieren in einem kubischen Gitter vom Diamanttyp. Jedes Siliziumatom mit der Ordnungszahl 14 besitzt 14 Elektronen, die von innen gezählt in Schalen mit 2, 8 und 4 Elektronen angeordnet sind. Während die inneren Schalen mit 2 bzw. 8 Elektronen aufgefüllt und stabil sind, stellen die äußeren 4 Elektronen die *Valenzelektronen* dar, durch welche die chemische Bindung hervorgerufen wird. Im *Germanium* mit der Ordnungszahl 32 enthalten die inneren geschlossenen drei Schalen 2, 8 und 18 Elektronen; die verbleibenden 4 Valenzelektronen bilden wie im Silizium die Träger für den Transportstrom.

Im Gitterverband ist jedes Ge- oder Si-Atom mit seinen nächsten 4 Nachbarn durch vier Valenzbindungen mit je 2 Valenzelektronen verbunden, wie in Abb. 4.16a schematisch dargestellt ist. Bei dieser *kovalenten Bindung* ist je ein Elektron *einem* Atom zugehörig, so daß ein Gitteratom von 8 Elektronen

in einer stabilen Schale umgeben ist. Da in dieser Struktur im Gegensatz zu einem metallischen Leiter (vgl. § 9.21) keine frei beweglichen Elektronen vorhanden sind, verhalten sich Ge und Si bei tiefen Temperaturen wie Isolatoren. Bei erhöhter Temperatur erhalten einige Elektronen eine so hohe kinetische Energie, daß sie aus der Valenzbindung befreit werden und in einem angelegten elektrischen Feld einen Strom bilden können. Solche Elektronen hinterlassen in der Valenzbindung ein *Loch* oder *Defektelektron*, so daß tatsächlich bei der thermischen Anregung ein *Elektron-Loch-Paar* gebildet wird. Das Loch verhält sich wie eine *positive Ladung*, wird von einem Elektron angezogen und liefert in einem Potentialgefälle einen zum Elektronenstrom gleichgerichteten Strom. Bei Zimmertemperatur wird auf 10^{10} Ge-Atome *ein* Elektron-Loch-Paar erzeugt, wodurch sich eine *Eigenleitfähigkeit* von $1{,}67 \cdot 10^{-2}$ S/cm ergibt.

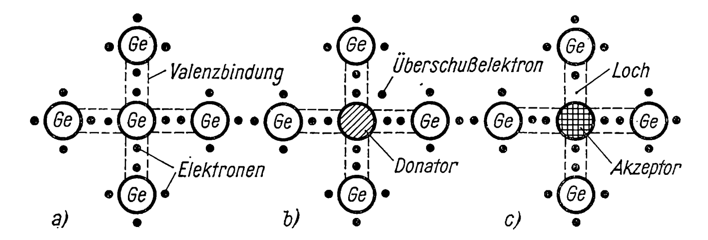


Abb. 4.16 Struktur von reinem und dotiertem Germanium

Diese Eigenleitung spielt bei gewöhnlichen Temperaturen eine untergeordnete Rolle. Ungleich wichtiger sind Zusätze oder Verunreinigungen, welche Ge- oder Si-Atome substituieren können und aus der dritten oder fünften Gruppe des Periodischen Systems stammen. So können Elemente der V. Gruppe, z. B. *Phosphor*, *Antimon* oder *Arsen*, die 5 Valenzelektronen besitzen, den Gitterplatz eines Ge-Atoms einnehmen, wie in Abb. 4.16b dargestellt ist. Das Ersatzatom wird vier seiner Elektronen an die Valenzbrücken abgeben, während das fünfte relativ schwach gebunden ist und zum Stromtransport beitragen kann. Das Verunreinigungsatom wird *Donator-Atom* genannt, die Leitfähigkeit durch Überschußelektronen verursacht und der Kristall als n-*Halbleiter* bezeichnet.

Verunreinigungen, die aus Atomen mit drei Valenzelektronen bestehen, wie *Bor*, *Aluminium*, *Gallium* und *Indium* können die Valenzbindungen nur unvollkommen füllen; sie lassen in einer Bindung ein Loch, das attraktiv auf freie Elektronen wirkt und eine Löcherleitung (mit effektiver positiver Ladung) verursacht. Solche Verunreinigungsatome werden *Akzeptoren* genannt; derart dotierte Kristalle werden als p-*Halbleiter* bezeichnet.

Wird ein Elektron aus der Valenzbindung befreit, so erhält es eine zusätzliche Energie; füllt es ein Loch in einer Valenzbindung auf, so gibt es seine Überschußenergie in Form von Wärme oder Licht ab. Dieses Energiequant kann von einem anderen Elektron reabsorbiert werden, das seinerseits seine Bindungskräfte überwindet und ein weiteres Elektron-Loch-Paar erzeugt. Elektron und Loch führen unter der Wirkung eines elektrischen Feldes eine

Driftbewegung aus, die durch die *Beweglichkeit* $\mu \left(\frac{\text{cm/s}}{\text{V/cm}}\right)$ charakterisiert ist. Für Löcher beträgt diese etwa die Hälfte derjenigen von Elektronen.

Von großer Bedeutung für das Verhalten dieser Halbleiter ist das Prinzip der *Raumladungsneutralität.* Es besagt, daß bei kleinen elektrischen Feldstärken die Gesamtzahl der positiven Ladungen (Löcher und Donatoren) in jedem Volumenelement gleich der Gesamtzahl der negativen Ladungen (Elektronen und Akzeptoren) sein muß.

4.22 *Leitfähigkeit in Halbleitern*

Auf Grund der Bändertheorie läßt sich übersichtlich die Energieverteilung der Ladungsträger in Abhängigkeit von der Temperatur angeben. Die Fermi-Dirac-Verteilung der Elektronen in einem *metallischen Leiter* wird durch die Beziehung

$$\mathrm{d}N = \frac{A\sqrt{E}\,\mathrm{d}E}{e^{(E-E_F)/kT}+1} \tag{4/26}$$

beschrieben, wobei A eine Proportionalitätskonstante, E die Elektronenenergie, E_F die Fermi-Energie, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/grd die Boltzmann-Konstante und T die Temperatur bedeuten. Die Fermi-Energie ist für jedes Metall eine charakteristische Größe, die sich aus

$$E_F = \left(\frac{3N}{2c}\right)^{2/3} = 3{,}64 \cdot 10^{-19} N^{2/3} \tag{4/27}$$

berechnen läßt, wenn N die Zahl der Valenzelektronen je Kubikzentimeter angibt. Die Darstellung der Gl. (4/26) in Abb. 4.17a zeigt, daß bei 0 K die größtmögliche Energie durch E_F gegeben ist und alle möglichen Energie-

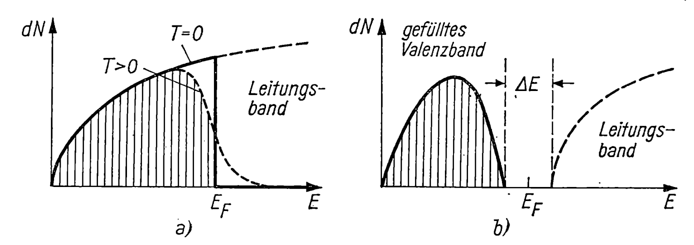


Abb. 4.17 Dichte der Elektronenzustände in einem Metall (a) und im Halbleiter (b)

zustände unterhalb von E_F besetzt sind. Für höhere Temperaturen wird von einer relativ kleinen Anzahl der Elektronen die Fermi-Energie überschritten, wodurch diese in das nichtbesetzte Leitungsband gelangen. Die Bänder stellen eine ungeheuer große, jedoch endliche Anzahl diskreter Energieterme dar, welche durch die Wechselwirkung der Gitteratome entstanden sind.

Im *Halbleiter* (Abb. 4.17b) sind die Valenzelektronen ebenfalls durch ein Energieband begrenzt, das vollständig besetzt ist. Im Gegensatz zum metallischen Leiter jedoch schließt sich das Leitungsband nicht unmittelbar an das

Valenzband an, sondern ist durch eine *Energielücke* der Größe ΔE von diesem getrennt. Aus der Quantenmechanik folgt, daß bei vollkommen gefülltem Energieband die Elektronen nicht am Leitungsmechanismus teilnehmen können, d. h., daß der Halbleiter bei $T = 0$ ein Isolator ist. Bei höherer Temperatur erreicht ein geringer Bruchteil der Elektronen Energien, die größer als ΔE sind und diese in das unbesetzte Leitungsband gelangen lassen. Gleichzeitig hinterlassen diese energiereichsten Elektronen Löcher im Valenzband, die ebenfalls am Leitungsmechanismus teilnehmen können, da dieses nunmehr nicht mehr vollkommen gefüllt ist. Die Erzeugung von Elektron-Loch-Paaren bei höheren Temperaturen ist die Ursache der *Eigenleitfähigkeit* der Halbleiter. Diese berechnet sich aus der Beziehung

$$\varkappa = B\mathrm{e}^{-\Delta E/kT}, \tag{4/28}$$

wobei B eine nur wenig von der Temperatur abhängige Stoffkonstante ist. In *Tabelle 4.4* sind für einige Halbleiter die Werte der Energielücke angegeben.

Tabelle 4.4 Daten verschiedener Halbleitersubstanzen

Halbleiter	Energielücke eV	Beweglichkeit in cm²/V s μ_n	μ_p
SiC	2,8	—	—
Si	1,12	1350	480
Ge	0,72	3900	1900
GaAs	1,35	8500	420
GaSb	0,70	4000	1400
InAs	0,33	33000	460
InSb	0,17	78000	750

Reines Ge besitzt bei 25 °C einen spezifischen Widerstand von etwa 65 Ω cm und $4{,}5 \cdot 10^{22}$ Atome je Kubikzentimeter. Für *reines* Si ist wegen des höheren Wertes von ΔE der Widerstand mit $3 \cdot 10^5\,\Omega$ cm merklich höher.

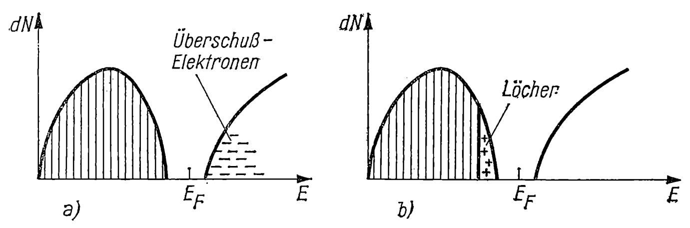


Abb. 4.18 Fremdleitung durch Donatoren (a) und Akzeptoren (b)

Die Wirkung eines Halbleiters als Gleichrichter oder Transistor beruht auf dem Vorhandensein nur eines Typs von Ladungsträgern, d. h. von Elektronen oder Löchern. Die Eigenleitung durch Elektron-Loch-Paare ist unerwünscht. Wie in § 4.21 besprochen und in Abb. 4.18a schematisch dargestellt, können durch Fremdatome der V. Gruppe (Donatoren) des periodischen Systems relativ

freie Überschußelektronen erzeugt werden, die genügend hohe Energie besitzen, um in das Leitungsband zu gelangen. Dort können sie sich am Leitungsmechanismus eines solchen n-Halbleiters beteiligen. Handelt es sich bei den Fremdatomen jedoch um solche der III. Gruppe (Akzeptoren), so bleiben Energieniveaus im Valenzband unbesetzt (Abb. 4.18b); diese Löcher des p-Materials können an der elektrischen Leitung teilnehmen, wobei die Elektronen von Loch zu Loch wandern, bis sie schließlich durch den äußeren Schließungskreis neutralisiert werden. In Abb. 4.19 ist der spezifische Widerstand ϱ von Ge und Si als Funktion des Fremdatomgehaltes dargestellt. Bis zum Einsetzen der Eigenleitung herrscht Proportionalität zwischen ϱ und der reziproken Konzentration der Fremdatome. Die Temperaturabhängigkeit des

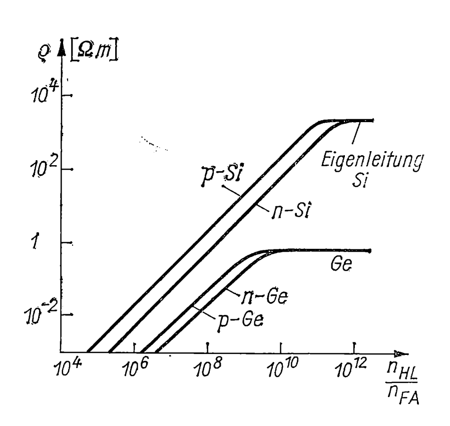


Abb. 4.19 Spezifischer Widerstand von verschieden dotiertem Ge und Si

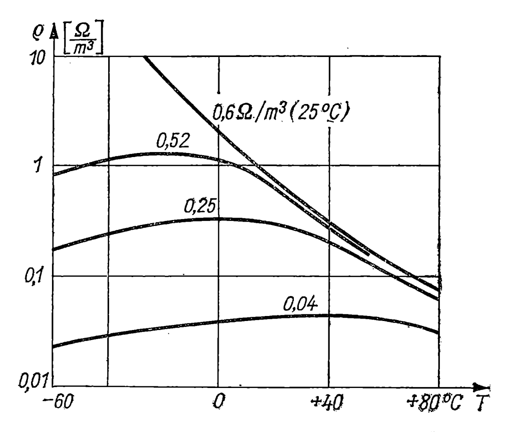


Abb. 4.20 Spezifischer Widerstand von n-Ge als Funktion der Temperatur

spezifischen Widerstandes von n-*Germanium* mit unterschiedlicher Fremdatomkonzentration (angegeben durch den Widerstand bei 25 °C) ist in Abb. 4.20 dargestellt. Man ersieht daraus, daß der durch die Fremdatome hervorgerufene Widerstand mit abnehmender Temperatur kleiner wird und die maximale Betriebstemperatur, unterhalb der die Eigenleitung einsetzt, um so niedriger liegt, je geringer die Fremdatomkonzentration ist. Bei *Silizium* setzt die Eigenleitung wegen der größeren Energielücke ΔE nach Gl. (4/28) bei wesentlich höheren Temperaturen ein.

Elektronen und Löcher im Leitungs- bzw. Valenzband können sich unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes „frei" bewegen. Sie erleiden dabei häufige Stöße, werden gestreut und erreichen eine mittlere *Driftgeschwindigkeit*. Die Driftgeschwindigkeit für die Feldstärke 1 V/cm nennt man *Beweglichkeit*, die für Elektronen mit μ_n, für Löcher mit μ_p bezeichnet wird. Die Beweglichkeit für beide Ladungsträger kann sich beträchtlich unterscheiden, und ihr Verhältnis μ_n/μ_p kann groß sein. Diese Größe hängt auch von der kristallinen Struktur des Halbleiters ab; sie verringert sich, wenn die Einkristallstruktur gestört oder das Material polykristallin ist. Mit abnehmender Temperatur steigt die Beweglichkeit, bis Streuung an den Fremdatomen selbst

einsetzt. Sie nimmt außerdem mit steigendem Fremdatomgehalt und bei sehr hohen elektrischen Feldstärken ab, wo sie einen Sättigungswert erreicht. Bei Zimmertemperatur besitzt *reines Germanium* die Werte $\mu_n \approx 4000$, $\mu_p \approx 2000$ cm²/V s.

Für die Stromdichten der Elektronen und Löcher in einem elektrischen Feld $\boldsymbol{E}$ gelten die Beziehungen

$$\boldsymbol{J}_n = en\mu_n\boldsymbol{E}; \quad \boldsymbol{J}_p = ep\mu_p\boldsymbol{E}; \quad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_n + \boldsymbol{J}_p. \tag{4/29}$$

Dabei sind n und p die Dichte in (1/cm³) der Elektronen bzw. Löcher; e ist die Elektronenladung.

Besteht zwischen den Konzentrationen der Ladungsträger verschiedener Vorzeichen kein Gleichgewicht, so findet eine *Ladungsdiffusion* statt, bis dieses erreicht ist. Die Diffusionsstromdichten sind dann

$$\boldsymbol{J}_n' = eD_n \operatorname{grad} n; \quad \boldsymbol{J}_p' = eD_p \operatorname{grad} p; \quad \boldsymbol{J}' = \boldsymbol{J}_n' + \boldsymbol{J}_p', \tag{4/30}$$

wobei die Diffusionskoeffizienten D_n und D_p gegeben sind durch

$$D_n = kT\mu_n/e; \quad D_p = kT\mu_p/e. \tag{4/31}$$

Als weiterer Begriff ist die *Lebensdauer* τ der Minoritätsträger einzuführen. Darunter versteht man die mittlere Zeit für die Einstellung des Ladungsgleichgewichts, wenn durch besondere Vorgänge (z. B. Ladungsinjektion) das Gleichgewicht gestört war. Bezeichnet man mit n_0 und p_0 die Gleichgewichtskonzentration der Elektronen bzw. Löcher, so betragen die Rekombinationsraten $(n - n_0)/\tau_n$ bzw. $(p - p_0)/\tau_p$. Die Lebensdauer τ nimmt im allgemeinen mit abnehmendem spezifischem Widerstand und fallender Temperatur ab und liegt zwischen 1 ns und 1 ms.

Außerdem wird noch der Begriff der *Diffusionslänge* benötigt, der durch die Ausdrücke

$$L_n = \sqrt{D_n\tau_n} \quad \text{bzw.} \quad L_p = \sqrt{D_p\tau_p}$$

definiert ist.

Die bei der Elektron-Loch-Rekombination frei werdende Energie tritt meistens in Form von Phononen auf. Bei besonderen $A_{III}B_V$-Verbindungen, z. B. in Galliumarsenid, wird hierbei eine hohe Ausbeute infraroter Photonen erzielt.

4.23 pn-Übergang

Ein pn-*Übergang* entsteht, wenn in einem Bereich eines Halbleiters die Leitfähigkeit vom p-Typ in den n-Typ wechselt und ein hohes elektrisches Feld auftritt. Solche Übergänge können dadurch hergestellt werden, daß man den reinen Halbleiter zunächst mit einem Fremdelement der 3. Gruppe, dann mit einem der 5. Gruppe dotiert. Weitere Herstellungsmethoden siehe § 4.26.

Wie in § 4.22 ausgeführt, sind im n-Material viele relativ frei bewegliche Elektronen mit hoher Energie vorhanden. Im p-Material befinden sich vor allem Löcher im Valenzband und einige energiereiche Elektronen im Leitungsband. Eine gewisse Anzahl energiereicher Elektronen im n-Material ist im-

stande, den pn-Übergang zu überschreiten und einige Löcher der p-Seite zu neutralisieren. Durch diesen Elektronenstrom über die pn-Grenze wird das p-Material negativ geladen; im n-Material entsteht ein Elektronenunterschuß und damit eine positive Ladung. Das Ergebnis ist eine stationäre *Grenzschicht,* in der das Vorzeichen der Raumladung wechselt und durch die eine weitere Diffusion der Elektronen unterbunden wird. In Abb. 4.21 ist die Ladungsdichte (*a*), die Feldstärke (*b*) und die Potentialverteilung (*c*) in einer solchen Grenzschicht schematisch dargestellt.

Die Höhe der Potentialdifferenz in der Grenzschicht des pn-Übergangs berechnet sich aus der Beziehung

$$\Phi = \frac{kT}{e} \ln \frac{np}{n_i^2}, \tag{4/32}$$

wenn n_i die Dichte der Elektron-Loch-Paare ist. Die Feldstärke ist von der p-Seite nach der n-Seite gerichtet, d. h., das n-Material ist positiv gegen den

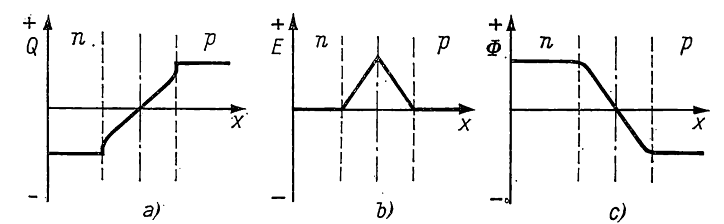


Abb. 4.21 Grenzschicht im pn-Übergang

p-Bereich, da im n-Bereich ein Elektronenunterschuß besteht. Der Potentialabfall findet innerhalb der Grenzschichtdicke von etwa 1 μm statt; der pn-Übergang als ganzer bleibt natürlich elektrisch neutral.

Wird an den pn-Übergang eine äußere Spannung gelegt, so wird im Fall, daß der p-Bereich positiv ist (*Durchlaßrichtung*), die Potentialbarriere abgebaut und ein Stromfluß von Löchern nach der n-Seite sowie von Elektronen nach der p-Seite eingeleitet. Man nennt diesen Vorgang *Injektion,* wobei die injizierten Minoritätsträger durch lokal entstehende Majoritätsträger neutralisiert werden. Bei umgekehrter Stromrichtung erhöht sich die Potentialdifferenz; es werden dem n-Bereich Löcher, dem p-Bereich Elektronen entzogen (*Sperrichtung*).

Unter Berücksichtigung der Diffusion in Grenzschichtnähe findet man theoretisch für die Fläche A

$$I = eA\left(\frac{D_p p_n}{L_p} + \frac{D_n n_p}{L_n}\right)(e^{eU/kT} - 1), \tag{4/33}$$

worin p_n bzw. n_p die Konzentration der Löcher im n-Bereich bzw. die der Elektronen im p-Bereich und L_p bzw. L_n die Diffusionslängen $\sqrt{D\tau}$ sind. In der Durchlaßrichtung ist $U > 0$, in der Sperrichtung $U < 0$ zu setzen. Nach Gl. (4/33) sollte der Strom in der Durchlaßrichtung exponentiell anwachsen und in der Sperrichtung einem sehr kleinen Wert zustreben.

Da im pn-Übergang eine elektrische Ladung gespeichert ist, verhält sich dieser wie ein Kondensator. Seine Kapazität ist in der Sperrichtung am geringsten; sie nimmt für kleine Spannungen zu und erreicht in der Durchlaßrichtung große Werte.

4.24 Halbleitergleichrichter [*4.9, 4.27*]

Dieser Abschnitt umfaßt Gleichrichterelemente für relativ große Ströme (Leistungsgleichrichter) und Dioden, wie sie zur Gleichrichtung von HF-Signalen benutzt werden.

4.241 Gleichrichter für größere Ströme [*4.85*]

Die in § 4.23 besprochene pn-Verbindung, die beiderseits mit metallischen Kontakten versehen ist, stellt einen leistungsfähigen Gleichrichter dar. In Abb. 4.22 sind der Aufbau und die Kennlinie eines Si-Gleichrichters dargestellt. In der Durchlaßrichtung findet man einen exponentiellen Stromanstieg nach Gl. (4/33), dessen Exponent allerdings etwas von der Spannung U abhängt und für höhere Spannungen in einen ohmschen Ast übergeht. In der Sperrichtung (geänderter Ordinatenmaßstab!) tritt für mittlere Spannungen der theoretisch geforderte Sättigungsstrom auf, dem sich ein Durchschlagsgebiet anschließt, in dem der Strom bei praktisch konstanter Spannung hohe Werte annehmen kann. Dieses Durchschlagsgebiet wird Zener-Gebiet genannt, das praktische Anwendung für die Konstanthaltung von Spannungen findet (s. § 4.243, 16.25).

Gleichrichter aus anderen Halbleitern als Si und Ge sind weniger brauchbar, da der ohmsche Bereich in der Durchlaßrichtung bereits bei kleinen Stromdichten einsetzt. Wie aus der Kennlinie in Abb. 4.22 hervorgeht, wird in beiden Stromrichtungen Leistung im Gleichrichter verbraucht und dadurch dessen Temperatur erhöht. Der *thermische Widerstand* ist durch die Temperaturzunahme pro Watt Leistungsverbrauch definiert und hängt weitgehend von der Wärmeabfuhr durch Konvektion, Leitung und Strahlung an den Kühlflächen ab. Er kann einige 0,1 grd/W bei größeren Gleichrichtern betragen. Beim kalten Gleichrichter wird in der Durchlaßrichtung die meiste Energie verzehrt; mit zunehmender Temperatur steigt nach Gl. (4/33) der Strom in der Sperrichtung exponentiell an. Als normale Betriebstemperatur werden 50 °C angenommen; Gleichrichter werden entsprechend ihrer Stromdichte im Durchlaßbereich in solche mit kleinen (bis 0,5 A), mittleren (bis 5 A) und hohen Strömen (bis 50 A) eingeteilt (s. *Tabelle 4.5*). Die Sperrspannung, die maximal angelegt werden kann, liegt zwischen 50 und 1 000 V. Wegen seiner hohen inneren Kapazität wird der pn-Gleichrichter vor allem für niedrige Frequenzen gebraucht.

Gleichrichter mit pn-Übergang sind kleiner und besitzen in der Durchlaßrichtung einen höheren Wirkungsgrad als Röhrengleichrichter (vgl. § 4.13). Andererseits ist der Sperrstrom größer als der einer Röhre, die maximale Betriebsspannung hingegen kleiner. Ge-Gleichrichter besitzen in der Durchlaßrichtung geringeren Widerstand, in der Sperrichtung jedoch größere Leckströme als Si-Gleichrichter, die viel höhere Sperrspannung aufweisen und bei höherer Temperatur betrieben werden können.

Siliziumkarbid-Gleichrichter [*4.11*] sind für große Sperrspannungen geeignet, besitzen einen Spannungsabfall von etwa 3 V bei 1—10 A in der Durchlaßrichtung und eignen sich für Temperaturen bis zu 500 °C. *Galliumarsenid* weist ähnliche Eigenschaften wie Si auf, ist aber nur bis 350 °C brauchbar.

Sperrschicht-Gleichrichter bestehen aus *Selen* oder *Kupferoxydul* (Cu_2O), das zwischen Metallelektroden gepreßt wird. Ihre Sperrspannung liegt zwischen 20 und 50 V; ihre maximale Betriebstemperatur ist mit 125 bzw. 85 °C begrenzt.

Zur Gleichrichtung von höheren Spannungen werden Ge- und besonders Si-Gleichrichterelemente in Serie geschaltet und für relativ kleine Durchlaßströme in Isolierrohre eingeschoben. In dieser Form werden sie direkt in Hochspannungsgleichrichter montiert (s. § 16.41).

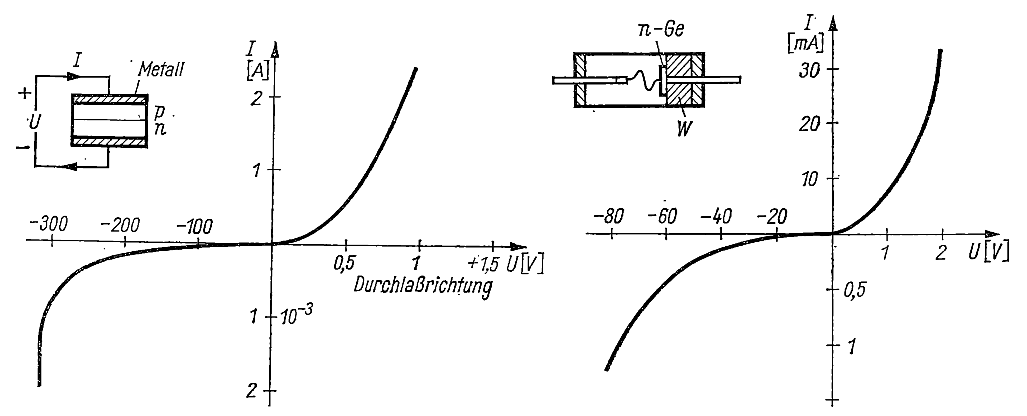


Abb. 4.22 Kennlinie eines Si-Gleichrichters

Abb. 4.23 Kennlinie und Aufbau einer Spitzendiode

4.242 Halbleiterdioden [*4.91*]

Dioden werden für kleine Leistungen, vor allem zur Gleichrichtung von HF-Signalen benutzt; ihr thermischer Widerstand liegt zwischen 10 und 500 grd/W.

Bei der *Spitzendiode* (Abb. 4.23) [*4.8*] drückt ein angespitzter Draht federnd auf ein Halbleiterplättchen (meist Germanium), das auf einer Gegenelektrode aus Molybdän, Gold oder Wolfram aufliegt. Zum Schutz gegen Feuchtigkeit und Fremdstoffe ist der Gleichrichter luftdicht durch eine Glas- oder Keramikhülse abgeschlossen. Die Kontaktstelle wirkt wie ein pn-Übergang; bei Ge-Dioden wird zur „Formierung" vor Gebrauch ein hoher Stromimpuls durch den Kontakt geschickt, der einen dünnen pn-Übergang erzeugt. Die Kennlinien zeichnen sich durch relativ kleine Durchlaßströme von 2—30 mA bei 1 V Spannungsabfall und wenig ausgeprägtem Sättigungsstrom von 5 μA bei 5 V bzw. 50 μA bei 50 V in der Sperrichtung aus. Die maximale Sperrspannung liegt zwischen 20 und 200 V. Infolge der geringen Abmessungen weisen diese Gleichrichter eine Kapazität von nur einigen pF auf, so daß sie bis viele 1000 MHz mit gutem Wirkungsgrad benutzt werden können. *Si-Spitzen-Gleichrichter* werden von 1000—75000 MHz benutzt; ihre Kennlinie ist bis

2···10 μW etwa quadratisch und wird anschließend linear. Ihr Anwendungsbereich ist auf maximal 10 mW beschränkt [*4.4*; *4.38*].

Die pn-*Diode* stellt eine Miniaturversion des in § 4.241 besprochenen Gleichrichters dar, dessen Kenngrößen bezogen auf die entsprechenden Flächen des pn-Übergangs etwa dieselben sind. Dieser Gleichrichter wird in Glas, Keramik oder Plastik eingebettet, aus dem die beiden Anschlüsse herausragen. Als Halbleiter werden Ge, Si, Ge—Si-Legierungen und GaAs verwendet. Beim schnellen Umschalten von der Sperr- in die Durchlaßrichtung wird der Stromanstieg bis zum stationären Wert etwas verzögert. Im umgekehrten Fall tritt in der Sperrichtung zunächst ein größerer Strom auf, der abhängig von den äußeren Schaltmitteln exponentiell auf den kleineren stationären Wert absinkt. Ge-pn-Dioden arbeiten zwischen —65 und +100 °C bei einem Durchlaßstrom von etwa 150 mA und können Stromimpulse von 1 A bei 1 μs Dauer verarbeiten. Die Sperrspannung liegt bei 300 V. *Si-Dioden* sind zwischen —80 und +200 °C brauchbar, besitzen Durchlaßströme zwischen 1 und 400 mA bei 1 V und Sperrspannungen zwischen 5 und 700 V [*4.35*].

4.243 Zener-Dioden

Steigert man in der Sperrichtung eines Gleichrichters die angelegte Spannung, so bleibt der sehr kleine Rückstrom über einen weiten Bereich fast konstant, bis plötzlich fast unstetig ein sehr hoher Strom bei einer bestimmten Spannung, der Zener-Spannung, auftritt. Dieser „Durchschlag" beruht unterhalb von etwa 5 V auf Feldemission (Zener-Effekt); bei höherer Spannung

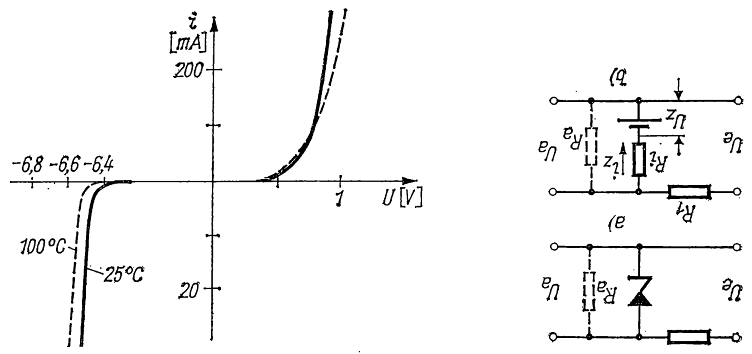


Abb. 4.24 Kennlinie einer Zener-Diode

Abb. 4.25 Stabilisierungsschaltung mit Zener-Diode

handelt es sich um einen echten thermischen Durchbruch. Dieser braucht für die Wirkung der Diode nicht nachteilig zu sein, wenn der maximale Strom durch äußere Mittel begrenzt wird. In Abb. 4.24 ist die Kennlinie einer typischen Zener-Diode wiedergegeben. Im Zener-Gebiet hängt die Durchlaßspannung nur wenig vom Strom und in charakteristischer Weise etwas von der Betriebstemperatur ab. Diese Dioden eignen sich zur Stabilisierung von Spannungen in einem Bereich von 5···500 V. Der Temperaturkoeffizient der Durchbruchspannung nimmt von 0,1 %/grd für 100-V-Dioden auf etwa Null

bei 5-V-Dioden ab und kann bei noch kleineren Durchbruchspannungen sogar negativ werden. In Abb. 4.25 ist eine Stabilisierungsschaltung (*a*) mit einer Zener-Diode dargestellt, durch die eine zeitlich veränderliche Eingangsspannung U_e auf die konstante Spannung U_a gebracht wird. Im Ersatzschema (*b*) ist die Diode durch die Reihenschaltung einer Spannungsquelle U_Z und des dynamischen Innenwiderstandes R_i dargestellt. Die Größe R_i hängt natürlich vom Strom ab und beträgt für 5-V-Dioden 0,1···25 Ω, für 100-V-Dioden 20···500 Ω.

Auch in der Durchlaßrichtung besitzt die Diode einen relativ scharfen Einsatzpunkt (vgl. Abb. 4.24), dessen Spannung für Ge bei 0,2···0,5 V, für Si bei 0,6···0,8 V und für GaAs bei 0,8···1,2 V liegt. Diese Einsatzspannung hat einen negativen Temperaturkoeffizienten von etwa 2 mV/grd. Durch Kombination zweier Dioden mit verschiedener Polarität läßt sich eine Spannungs-

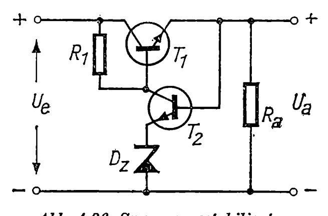


Abb. 4.26 Spannungsstabilisator

quelle im Bereich der Zener-Spannung konstruieren, deren Temperaturkoeffizient $5 \cdot 10^{-6}$/grd in einem Temperaturbereich von −50 bis +150 °C beträgt (vgl. § 16.25).

Für sehr präzise Konstanthaltung einer Gleichspannung durchfließt der Laststrom (Abb. 4.26) den Transistor T_1, dessen Innenwiderstand durch einen zweiten, zum Lastwiderstand R_a parallelgeschalteten Transistor T_2 gesteuert wird. Bei Änderung von R_a wird sich auch U_a verändern, wodurch der Widerstand von T_1 durch T_2 so gesteuert wird, daß U_a wieder den ursprünglichen Wert erhält. Damit der Nebenanschlußtransistor T_2 eine konstante Referenzspannung bekommt, ist sein Emitter über eine Zener-Diode D_Z mit der gemeinsamen Masse verbunden. Da die Spannung an D_Z vom Laststrom unabhängig ist, wird der Innenwiderstand von T_1 so lange nachgeregelt, bis U_a konstant bleibt.

Weitere Anwendungen der Zener-Diode sind: Konstanthaltung des Katodenpotentials von Elektronenröhren, Unterdrückung des unteren Meßbereichs von Gleichstrommessern im mA- oder μA-Bereich, Konstanthaltung von Wechselspannungen, wobei die Zener-Diode in Abb. 4.25 durch zwei in Serie geschaltete, mit entgegengesetzter Durchlaßrichtung ersetzt wird.

4.244 Tunneldiode [*4.19*, *4.68*]

Die *Tunneldiode* besteht aus einem Halbleiter mit np-Übergang mit einer Dotierung, die abweichend vom gewöhnlichen Gleichrichter mit sehr viel höherem Fremdatomgehalt durchgeführt ist. Während bei Dioden $10^{16}\cdots10^{17}$ Fremdatome je Kubikzentimeter zulegiert werden, sind es bei Tunneldioden

$10^{19} \cdots 10^{20}$. Dadurch wird die Dicke des pn-Übergangs (vgl. Abb. 4.21), die bei gewöhnlichen HF-Dioden 1 μm beträgt, auf weniger als 10 nm (d. h. 10^{-6} cm) verringert. Wie in Abb. 4.27a schematisch dargestellt ist, tritt eine Überlappung der Elektronenenergie auf der n-Seite bezüglich der oberen Kante des Valenzbandes auf der p-Seite der Verbindung auf. In „Sperrichtung" (Abb. 4.27b) findet ein quantenmechanischer Tunneleffekt statt, wonach die Elektronen des Valenzbandes, welche höhere Energie als die des Leitungsbandes der n-Seite besitzen, auf unbesetzte Energiezustände des Leitungsbandes

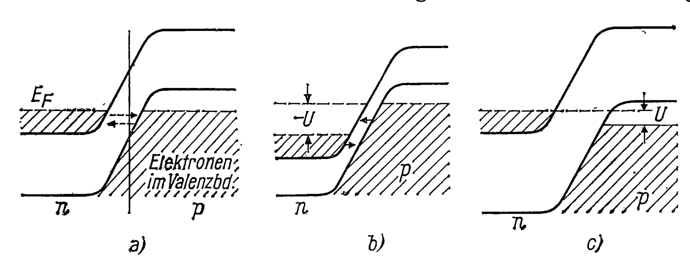


Abb. 4.27 Energiebandschema der Tunneldiode

„tunneln" können. Im Gegensatz zur Diode tritt bei der Tunneldiode in der „Sperrichtung" ein relativ hoher Strom auf (vgl. Abb. 4.28), der theoretisch exponentiell mit der angelegten Spannung anwächst. Für kleine Spannungen in der Durchlaßrichtung wird das Energieniveau auf der p-Seite relativ zur n-Seite abgesenkt (Abb. 4.27c); den Elektronen im n-Typ-Leitungsband stehen auf der p-Seite unbesetzte Zustände gegenüber. Man erhält in der Durchlaßrichtung durch Tunneln dieser Elektronen einen Strom, der aber im Gegensatz

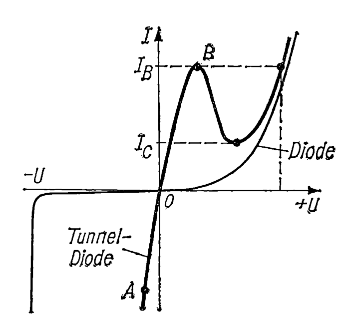


Abb. 4.28 Kennlinien von Tunneldiode und HF-Diode

zum Sperrstrom bei zunehmender Spannung einen Maximalwert erreicht. Für höhere Spannung nimmt der Strom wieder ab, da den Elektronen im Leitungsband der n-Seite das Band der verbotenen Zustände gegenübersteht. Schließlich nimmt der Strom in der Durchlaßrichtung nach Passieren eines Minimums stark zu, nachdem der Tunnelvorgang aufgehört hat. In Abb. 4.28 ist die Kennlinie einer Tunneldiode der einer gewöhnlichen Diode gegenübergestellt.

Tunneldioden werden aus Ge, Si, GaAs [*4.32*] und anderen $A_{III}B_V$-Verbindungen hergestellt. Die zum Punkt D in Abb. 4.28 gehörige Spannung, für die der Strom dem Maximalwert im Punkt B entspricht, ist etwas kleiner als die Bandbreite der verbotenen Zustände (vgl. *Tabelle 4.4*, S. 228). Das Verhältnis der Ströme I_B im Maximum und I_C im Minimum der Kennlinie beträgt 5···15 bei Ge, 3···4 bei Si und 10···50 bei GaAs.

Die große Bedeutung der Tunneldioden liegt darin, daß dem Bereich $B—C$ der Kennlinie ein *negativer Widerstand* entspricht, der zur Anfachung von HF-Schwingungen geeignet ist (s. §§ 5.47; 8.36). Bei Si besteht diese Besonderheit der Kennlinie über einen weiten Temperaturbereich (—270 bis +400 °C). Für kleine Werte von I_B/I_C wird die Tunneldiode in der „Sperrichtung" als HF-Gleichrichter benutzt, dessen Richtstrom größer als der einer gewöhnlichen Diode aus demselben Material ist. Eigenkapazität und Innenwiderstand der Tunneldiode sind außerordentlich klein und erlauben ihre Anwendung im Zentimeterwellenbereich (s. § 8.6).

In *Tabelle 4.5* sind die Eigenschaften einiger Halbleiterdioden und -gleichrichter zusammengestellt.

Tabelle 4.5 Eigenschaften von Halbleiterdioden und -gleichrichtern

Leistungsgleichrichter

Typ	Material	Scheitel-sperr-spannung V	Durchlaßstrom (A) Scheitel-wert	Durchlaßstrom (A) Mittel-wert	Sperrstrom bei 25 °C µA	Wärme-widerstand grd/W
BY127	Si	800	10	0,8	10	70
BY164	Si	60	5	1,4	—	50
BY176	Si	15000	0,25	0,0025	7	—
1N3756	Si	400	1,3	0,125	5	—
40112	Si	400	10	—	—	—
SY110	Si	1000	—	0,8	10	—

HF-Dioden

Typ	Bauform Material	Durchlaß-strom I_F bei $U_R = 0$ mA	Sperrstrom I_R bei $U_R = 10$ V µA	Sperr-spannung U_{RM} V	Verwendung
AA119	Ge-Punktkontakt	35	4,5	45	Demodulation
GA103	„	3	15	65	universell
OA90	„	30	300 (30 V)	30	HF-Diode
BA100	Si-Flächendiode	90	5	60	universell
BA145	„	300	10 (100 V)	350	Schaltdiode
OA905	„	100	0,75	350	—

Tab. 4.5 (Fortsetzung)

Z-Dioden

Typ	Material	$-U_Z$ V	Dynamischer Widerstand R_Z $I_Z = 5\,\text{mA}$	I_R (U_R=1 V) nA	U_R (I_R=1 µA) V	I_{Zmax} mA
BZY83/C4V7	Si	4,7	66 < 90	<500	>1	52 (45°C)
BZY83/C5V6	Si	5,6	20 < 60	<500	>1	43,5
BZY83/C6V8	Si	6,8	3,5 < 8	<100	>1,5	33
BZY83/C8V2	Si	8,2	4 < 7	<100	>3	30
BZY83/C10	Si	10	7 < 15	<100	>4,5	24,5
BZY83/C15	Si	15	24 < 55	<100	>9,5	16,8
BZY83/C20	Si	20	70 < 150	<100	>9,5	12,3
SZ505	Si	5,7	2*	—	—	—
SZ508	Si	8	2*	—	—	—
SZ510	Si	10	4*	—	—	—
SZ516	Si	16	15*	—	—	—

* ($I_Z = 100\,\text{mA}$)

Tunneldioden

Typ	Material	I_B mA	$\frac{I_B}{I_C}$	U_B mV	U_C mV	U_D mV	τ ns
40561	Ge	4,5···5,5	6	—	—	430···590	1,8
40566	Ge	4,7···5,2	8	50···90	305	490···560	1,2
40567	Ge	9,5···10,5	8	55···95	325	510···580	0,6
40568	Ge	19···21	8	65···105	340	530···600	0,4
40569	Ge	47···52	8	80···130	355	550···620	0,2
40570	Ge	95···105	8	90···140	365	550···630	0,1
40058	GaAs	50	12	200	530	1050	0,33
40076	GaAs	200	15	240	600	—	—

Backwarddioden

Typ	Material	I_B mA	U_R (mV) bei $I_R = 10\,\text{mA}$	U_R (mV) bei $I_R = 30\,\text{mA}$	U_F (mV) bei $I_F = 1\,\text{mA}$
1N3861	Ge	0,1···1	170	—	400
1N3863	Ge	0,1···0,5	150	300	455
40054	GaAs	1	300	—	950
40057	GaAs	0,5	275	—	950

4.25 Grundlagen des Transistors [4.23, 4.26, 4.55, 4.56, 4.69, 4.77, 4.79, 4.81, 4.84, 4.86, 4.90]

In § 4.23 wurde gezeigt, daß der Strom eines pn-Übergangs in *Sperrichtung* einen Sättigungswert erreicht, dessen Größe durch die Konzentration der laufend entstehenden Minoritätsträger in der Nähe des pn-Übergangs gegeben ist. Gelingt es, zusätzliche Minoritätsträger in den pn-Übergang zu injizieren, so kann man den Sättigungsstrom von außen steuern. Nun führt aber ein

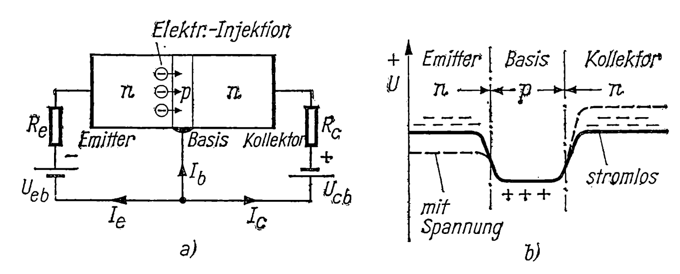


Abb. 4.29 npn-Transistor: Schaltung (a), Potentialverteilung (b)

pn-Übergang in der *Durchlaßrichtung* Elektronen aus dem Leitfähigkeitsband in den Halbleiter hinein, so daß durch diesen Vorgang die erwünschte Steuerung erreicht werden kann. Schaltet man daher einem pn-Übergang einen np-Übergang in der Weise vor, daß die dünne p-Schicht beiden Übergängen gemeinsam ist, so können die Minoritätsträger (Elektronen) in der p-Schicht durch den in der Durchlaßrichtung betriebenen np-Teil dieses als *Transistor* bezeichneten Halbleiterverstärkerelements nachgeliefert und ge-

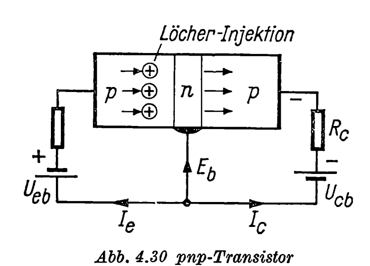


Abb. 4.30 pnp-Transistor

steuert werden. In Abb. 4.29 sind das Prinzip des npn-Transistors und die entsprechende Potentialverteilung dargestellt. Man bezeichnet die Elektrode für die Zuleitung des Durchlaßstroms (linker np-Übergang in Abb. 4.29) als *Emitter*, die positive Elektrode als den *Kollektor* und den Mittelanschluß, d. h. den p-Halbleiter beim npn-Transistor, als die *Basis*.

Bei einem pnp-Transistor (Abb. 4.30) werden in einen np-Übergang, dessen Strom in der Sperrichtung aus Defektelektronen (Löchern) besteht und Sättigungscharakter besitzt, durch einen pn-Übergang Löcher injiziert. Damit kann wie im npn-Transistor der Kollektorstrom I_c durch den Emitterstrom I_e

gesteuert werden. Im Vergleich zum npn-Transistor liegt am Emitter positive, am Kollektor eine negative Spannung U_{eb} bzw. U_{cb} der Stromquellen.

Beim Transistor mit pn-Übergängen ist die erste Diode, der *Emitter*, in der Durchlaßrichtung gepolt. Das bedeutet beim npn-Transistor (vgl. Abb. 4.29), daß der Emitter gegenüber der Basis negative Spannung besitzt. Dadurch erniedrigt sich die Potentialschwelle des np-Übergangs gegenüber dem spannungslosen Zustand. Die Überschußelektronen im Leitungsband der n-Zone werden vom Emitter nachgeliefert, wobei diejenigen mit höherer Energie die schmale Potentialschwelle zur p-Zone überwinden können. Höhe der Potentialschwelle und Dichte dieser energiereichen Elektronen, welche die Basis erreichen, sind von U_{eb} abhängig. Diese Wirkungsweise von U_{eb} als Filter für die Elektronenenergie hat Ähnlichkeit mit der des Steuergitters einer Elektronenröhre.

In der p-Zone des Transistors, der *Basis*, mit ihrem Überschuß an Löchern, wird ein kleiner Bruchteil der passierenden Elektronen durch Löcher neutralisiert. Der größte Teil gelangt in die n-Zone des *Kollektors* und wird dort von der positiven Elektrode aufgenommen. Das Verhältnis der Stromänderungen am Kollektor und Emitter bei konstanter Kollektorspannung, d. h.

$$\alpha_{ce} = -\left(\frac{\partial I_c}{\partial I_e}\right)_{U_{cb}}, \tag{4/34}$$

nennt man *Verstärkungsfaktor für den Kurzschlußstrom* (vgl. Gl. (3/115)). Die Größe α_{ce} erreicht zwar beim *Übergangstransistor* (im Gegensatz zum Spitzentransistor) nur Werte von 0,90—0,995, doch findet in diesem trotzdem eine Verstärkung statt, da die in Durchlaßrichtung im Emitter, d. h. bei kleiner Impedanz, injizierten Elektronen am Kollektor bei einer viel höheren Impedanz entnommen werden. Die Transistorwirkung hängt demnach von der Elektroneninjektion im Basisbereich, vom Durchlauf dieser Elektronen durch die Basis und schließlich von deren Wirkung im Kollektorbereich auf den Sättigungsstrom in Sperrichtung ab. Die Größe $\alpha_{ce} = \alpha^* \beta \gamma$ kann als Produkt der Faktoren α^*, β, γ betrachtet werden, wobei $\alpha^* = \partial I_c/\partial I_{nc}$ der *Kollektorwirkungsgrad*, $\beta = -\partial I_{nc}/\partial I_{ne}$ der *Durchlaßwirkungsgrad* und $\gamma = \partial I_{ne}/\partial I_e$ der *Emitterwirkungsgrad* sind; I_{nc} bzw. I_{ne} sind die Elektronenströme durch den Kollektor- bzw. Emitterübergang.

Der *Emitterwirkungsgrad* γ läßt sich analog zu Gl. (4/33) berechnen. Der Elektronenstrom I_{ne} ergibt sich zu

$$I_{ne} = -eA\,\frac{D_n n_b}{W}\,e^{eU_{eb}/kT} \tag{4/35}$$

und der Defektelektronenstrom I_{pe} durch den Emitterübergang zu

$$I_{pe} = -\frac{eAD_p p_e}{L_{pe}}\,(e^{eU_{eb}/kT} - 1), \tag{4/36}$$

wenn W die Basisdicke, D_p die Diffusionskonstante der Löcher und L_{pe} die Diffusionslänge für Löcher im Emitterbereich sind. Hieraus errechnet sich der

totale Emitterstrom $I_e = I_{ne} + I_{pe}$ aus

$$I_e = -eA\left(\frac{D_n n_b}{W} + \frac{D_p p_e}{L_{pe}}\right) e^{eU_{eb}/kT} - eA\,\frac{D_p p_e}{L_{pe}}. \tag{4/37}$$

Für den Emitterwirkungsgrad γ ergibt sich damit der Ausdruck

$$\gamma = \partial I_{ne}/\partial I_e = \frac{\partial I_{ne}/\partial U_{cb}}{\partial I_e/\partial U_{cb}} = \frac{D_n n_b/W}{D_n n_b/W + D_p p_e/L_{pe}}. \tag{4/38}$$

Mit Benutzung der Einstein-Gleichungen (4/31) und der Gln. (4/29) lassen sich die Ausdrücke in Gl. (4/38) durch die spezifischen Widerstände ϱ_e bzw. ϱ_b im Emitter- und Basisbereich ausdrücken und liefern die Beziehung

$$\gamma = \frac{1}{1 + \varrho_e W/\varrho_b L_{pe}}. \tag{4/38a}$$

Da $L_{pe} > W$ und $\varrho_b > \varrho_e$ ist, wird $\gamma \approx 1$.

Der *Durchlaßwirkungsgrad* β läßt sich auf einfache Weise in erster Näherung für den Fall $W \gg L_{nb}$ berechnen. Nimmt man an, daß $\Delta n/2$ Elektronen neutralisiert werden, entsteht ein Diffusionsstrom, der dem Gradienten $\Delta n/2L_{nb}$ proportional ist. Da bei konstanter Rekombinationsrate der entsprechende Strom der Überschußträgerdichte proportional ist, wird dieser $\sim(\Delta n/2L_{nb}) \times (W/L_{nb})$. Der Diffusionsstrom durch den Basisbereich ist $\Delta n/W$, woraus das Verhältnis von Rekombinations- zu Diffusionsstrom $W^2/2L_{nb}^2$ und der Durchlaßwirkungsgrad

$$\beta = 1 - W^2/L_{nb}^2 \tag{4/39}$$

wird. Für $W = 20\,\mu\text{m}$, $L_{nb} = 500\,\mu\text{m}$ findet man $\beta = 0{,}9992$.

Der *Kollektorsättigungsstrom* $I_{c0}(I_e = 0)$ setzt sich aus dem Elektronenstrom durch den Kollektorübergang

$$I_{nc} = \frac{eAD_n n_b}{W}\, e^{eU_{eb}/kT} \tag{4/40}$$

und dem Defektelektronenstrom im Fall großer Gegenspannung

$$I_{pc} = eAD_p p_c/L_{pc} \tag{4/41}$$

zusammen. Unter Berücksichtigung von Gl. (4/38) ergibt sich

$$I_{c0} = I_{pc} + I_{nc} = eA\left[\frac{D_p p_c}{L_{pc}} + \frac{D_n n_b}{W}(1-\gamma)\right]. \tag{4/42}$$

Der *Kollektorwirkungsgrad* α^* wird ungefähr Eins, wenn man annimmt, daß L_{pc} und p_c durch den Emitterstrom nicht beeinflußt werden und der Leitungsstrom der Löcher im Kollektorbereich zu vernachlässigen ist. In besserer Näherung erhält man für den totalen Kollektorstrom

$$I_c = I_{ne}\left(1 + \frac{p_c\mu_p}{n_c\mu_n}\right) - eA\,\frac{D_p p_c}{L_{pc}}\left(\frac{p_c}{n_c} + 1\right) \tag{4/43}$$

und mit $\beta = 1$ für den npn-Transistor

$$\alpha^* = \frac{\partial I_c}{\partial I_{ne}} \cdot \frac{\partial I_{ne}}{\partial I_{nc}} = 1 + \frac{p_c \mu_p}{n_c \mu_n} \tag{4/44}$$

bzw. für den pnp-Transistor

$$\alpha^* = 1 + \frac{n_c \mu_n}{p_c \mu_p}. \tag{4/44a}$$

Der gesamte Stromverstärkungsfaktor eines npn-Transistors ergibt sich mit den Gln. (4/38a), (4/39) und (4/44) zu

$$\alpha_{ce} = \alpha^* \beta \gamma = \left(1 + \frac{p_c \mu_p}{2 n_c \mu_n}\right)\left(1 - \frac{W^2}{L_{nb}^2}\right)\left(1 + \frac{\varrho_e W}{\varrho_b L_{pe}}\right)^{-1}, \tag{4/45}$$

wobei im Nenner des ersten Terms bei strengerer Behandlung von α^* ein Faktor 2 zustande kommt.

Die hier dargestellte Näherungstheorie beruht auf der Annahme, daß der in der Basis fließende Strom ein reiner Diffusionsstrom unter dem Einfluß der Minoritätsträger allein ist; sie ist bei Stromdichten von 0,1 A/cm² erfüllt.

Für viele Anwendungen ist es nützlich, den *Verstärkungsfaktor für Kollektor-Basis-Kurzschluß*

$$\alpha_{cb} = \left(\frac{\partial I_c}{\partial I_b}\right)_{U_{cb}} \tag{4/46}$$

bei konstanter Kollektorspannung U_{cb} einzuführen. Da $I_b = I_e - I_c$, ergibt sich daraus

$$\frac{\partial I_e}{\partial I_b} = -(1 + \alpha_{cb}) \tag{4/47}$$

und mit Gl. (4/46)

$$\alpha_{cb} = \frac{\partial I_c}{\partial I_e} \cdot \frac{\partial I_e}{\partial I_b} = -\alpha_{ce} \frac{\partial I_e}{\partial I_b}. \tag{4/48}$$

Durch Vergleich der Gln. (4/47) und (4/48) erhält man die wichtige Beziehung

$$\alpha_{cb} = \frac{\alpha_{ce}}{1 - \alpha_{ce}}, \tag{4/49}$$

aus der durch Einsetzen von Gl. (4/45) folgt

$$\alpha_{cb} = \left[\frac{\varrho_e W}{\varrho_b L_{pe}} + \frac{W^2}{2 L_{nb}^2} - \frac{\varrho_c \mu_p}{2 n_c \mu_n}\right]^{-1}. \tag{4/50}$$

Bei kleinem Kollektorwiderstand kann der dritte Term in Gl. (4/50) vernachlässigt werden, und α_{cb} wird dann

$$\alpha_{cb} = \frac{2 \varrho_b L_{nb}^2 L_{pe}}{2 \varrho_e L_{nb}^2 W + \varrho_b L_{pe} W^2}. \tag{4/50a}$$

Für kleine Werte von W und relativ lange Lebensdauern in der Basis, d. h. $\beta \approx 1$ nach Gl. (4/39), kann Gl. (4/50a) noch weiter vereinfacht werden und gewinnt die Form

$$\alpha_{cb} = \frac{\varrho_b L_{pe}}{\varrho_e W}. \tag{4/50b}$$

Aus den Gln. (4/50a) und (4/50b) geht hervor, daß man große Werte von α_{cb} vor allem bei großer Lebensdauer der Minoritätsladungsträger erhält.

Die Kollektorspannung U_{cb} wird so groß gewählt, daß bei $I_e = 0$ der Strom I_{c0} in der Sperrichtung klein gegen den Normalwert von I_c ist und nur wenig von U_{cb} abhängt. Wie bei allen Übergangsdioden (§ 4.242) hängt I_{c0} dagegen stark von der Temperatur ab, da er auf Eigenleitung beruht.

Zum Elektronenstrom kommt der durch die Löcher in der p-Zone der Basis herrührende Strom hinzu, der zum Emitter fließt und von U_{eb} abhängt. Das Verhältnis von Elektronen- zu Löcherstrom im Emitter läßt sich durch die Beziehung

$$I_{ne}/I_{pe} = \frac{L_{pe} \varrho_p}{W \varrho_n} \tag{4/51}$$

ausdrücken. Durch geeignete Werte des Verhältnisses ϱ_p/ϱ_n und der Basisdicke W kann I_{ne}/I_{pe} passend eingestellt werden. Wird an die Basis ein Eingangssignal gelegt, so wird dadurch die Höhe der Potentialschwelle am np-Übergang des Emitters moduliert sowie die Zahl der durch den Emitter injizierten Elektronen und der von der Basis zum Emitter fließenden Löcher entsprechend geändert. Im Transistor wird durch einen Strom im Eingang der Ausgangsstrom gesteuert; sein Verhalten als aktiver Vierpol wird durch die einzelnen Ströme als unabhängige Variable ausgedrückt (vgl. § 3.8).

Das *Hochfrequenzverhalten* des Transistors hängt einmal von der Kapazität des Kollektorübergangs und von der Ladungsspeicherung der Löcher in der hochohmigen Seite des pn-Übergangs ab. Hinzu kommt die Abnahme von α_{ce} bei hohen Frequenzen und der Phasenfehler zwischen Eingangs- und Ausgangssignal, die beide der Größe D_n/W^2 proportional sind.

Die *Temperaturabhängigkeit* von α_{cb} läßt sich aus Gl. (4/50) ableiten. Bei aus der Schmelze gezogenen Übergängen (vgl. § 4.263) ist das Verhältnis ϱ_b/ϱ_e vorgegeben und besitzt die Temperaturabhängigkeit von $b = \mu_n/\mu_p$ für einen npn- oder von $1/b$ für einen pnp-Transistor. Während W temperaturunabhängig ist, werden L_{pe} und L_{ne} mit der Temperatur anwachsen. Für einen npn-Transistor sollte mit höherer Temperatur der erste Term von Gl. (4/50) gegen Null gehen, bis ϱ_b sich der Eigenleitfähigkeit nähert. Der zweite Term wird abnehmen, da L_{nb} mit der Temperatur zunimmt, während der dritte Term dem Wert $1/2b$ zustrebt. Ist der Kollektorwiderstand vergleichbar mit dem oder höher als der Basiswiderstand, so müßte α_{cb} gegen Unendlich gehen, während α_{ce} größer als Eins werden und sich dem Wert $1 + 1/2b$ nähern würde.

Für einen pnp-Transistor sind die Verhältnisse weniger übersichtlich; α_{cb} sollte für $\varrho_c \ll \varrho_b$ innerhalb eines größeren Temperaturbereichs annähernd konstant bleiben und bei höheren Temperaturen abfallen.

4.26 Bauformen von Transistoren

4.261 Spitzentransistor

Die zuerst 1948 von BARDEEN und BRATTAIN angegebene Anordnung eines Transistors bestand aus einer Ge-Diode, die mit einer zweiten Spitzenelektrode versehen war (Abb. 4.31). Emitter E und Kollektor C werden wie bei der Spitzendiode (Abb. 4.23) durch federnde W- oder Au-Drähte gebildet, deren Kontaktstellen auf der Oberfläche des etwa 0,5 mm dicken Ge- oder Si-Kristalls K mit n-Leitung etwa 0,05 mm voneinander entfernt sind.

Durch die positive Emitterspannung werden an der Kristalloberfläche Elektronen aus dem Valenzband abgesaugt und Löcher erzeugt. Wie beim Übergangstransistor wird auch in dieser Anordnung von einer Injektion von Löchern durch den Emitter gesprochen, die in Richtung der negativen Kollektorelektrode diffundieren. Um die Rekombination der Löcher mit freien Elektronen des n-Materials zu verhindern, macht man den Abstand zwischen den beiden Punktelektroden möglichst klein. Im Kollektorbereich

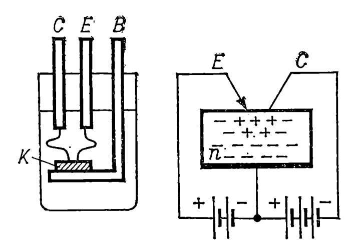


Abb. 4.31 Spitzentransistor

werden die Löcher durch Überschußelektronen neutralisiert, die vom Kollektor injiziert werden. Dieser kann um so mehr Elektronen zuführen, d. h. um so höheren Strom führen, je größer die Anzahl der herandiffundierten Löcher ist. Da außerdem diese eine positive Raumladung darstellen, werden dem Kollektor mehr Elektronen entzogen, die zum größten Teil als Kollektorstrom erscheinen, zum andern einen Basis-Kollektor-Strom bilden.

Da die Beweglichkeit der Elektronen etwa doppelt so groß wie die von Löchern ist, wird im Mittel ein Loch zwei Elektronen neutralisieren. Der Kollektorstrom I_c wird sich daher zu 1/3 aus Elektronen, zu 2/3 aus Löchern zusammensetzen und insgesamt etwa dem dreifachen Emitterstrom I_e entsprechen. Wie beim Übergangstransistor kann der Kollektorstrom durch den Emitterstrom gesteuert werden; der Stromverstärkungsfaktor α_{ce} nach Gl. (4/34) wird etwa den Wert 3 erreichen. Der Eingangswiderstand zwischen E und B liegt im allgemeinen zwischen 100 und 500 Ω; der Ausgangswiderstand zwischen B und C beträgt 10···50 kΩ. Im Mittel läßt sich eine Spannungsverstärkung zwischen 100 und 200 erzielen.

Spitzentransistoren lassen sich auch mit p-leitendem Material herstellen; gegenüber dem n-Transistor sind lediglich die Vorzeichen der Spannungen an Emitter und Kollektor zu wechseln.

4.262 Legierungstransistor

Der *Legierungstransistor* besteht aus einer dünnen Scheibe eines dotierten Halbleiters, auf der durch Legieren mit *Indium* an gegenüberliegenden Stellen pn-Übergänge hergestellt werden. Zu diesem Zweck wird auf den Halbleiterkristall, z. B. n-Germanium, ein Stück metallischen Indiums gelegt und unter einer Schutzatmosphäre geschmolzen. Entsprechend dem Phasendiagramm In—Ge wird Ge in In gelöst, und es entsteht eine kleine Vertiefung im Ge-Kristall. Bei der Abkühlung kristallisiert infolge der stark abnehmenden Löslichkeit Ge aus der Lösung in stark mit In dotierten p-Kristallen aus. Es entsteht also ein pn-Übergang, der durch das ungelöste n-Material und durch das ankristallisierte hochdotierte p-Ge' gebildet wird.

Der pnp-Legierungstransistor entsteht durch gleichzeitiges oder aufeinanderfolgendes Zulegieren von In in der beschriebenen Weise. Die Ausgangsdicke des Ge-Plättchens von etwa 120 μm wird durch Ätzen gewonnen. Durch

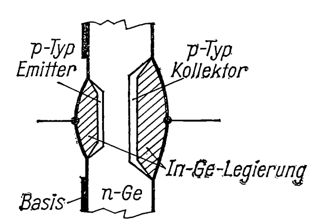


Abb. 4.32 Legierungstransistor

passendes Dosieren der In-Perlen läßt sich erreichen, daß die kollektorseitige Legierung etwa 70 μm, die der Emitterseite etwa 20 μm tief in die Ausgangsprobe eindringt und daher eine Basisdicke von etwa 30 μm übrigbleibt. Die Kollektorfläche beträgt etwa das Doppelte der Emitterfläche, um Verluste an Ladungsträgern durch Diffusion an die Oberfläche zu vermeiden. In Abb. 4.32 ist der Querschnitt durch einen Ge-pnp-Transistor dargestellt. Der Basiskontakt wird meist ringförmig ausgebildet, um einen symmetrischen Stromfluß und geringen Basiswiderstand zu gewährleisten.

Dieses Verfahren läßt sich auf *Silizium* als Ausgangsmaterial übertragen, wobei Al, Al—Si oder Au mit einem Element aus der 3. oder 5. Spalte des periodischen Systems zulegiert werden. Allerdings tritt keine Benetzung des Legierungsmetalls auf; diese werden in Form von Folien angewandt, die durch Gewichtsbelastung während des Legierungsvorgangs in gutem Kontakt mit der Si-Oberfläche gehalten werden.

Legierungstransistoren sind wegen der relativ großen Basisdicke nur für Frequenzen unterhalb einiger MHz zu benutzen. Die Innenwiderstände sind infolge der großen Flächen der np-Übergänge und deren geringen Dicken relativ klein. Da die Basisschicht feldfrei ist, gelangen die in den Basisraum injizierten Ladungsträger nur durch Diffusion zur Kollektorelektrode, wo sie neutralisiert werden. Bei großer Dicke der Basis hängt die obere Grenzfrequenz von diesem Diffusionsvorgang ab.

Beim *Hochfrequenztransistor* [*4.45*] wird die oben beschriebene Legierungstechnik derart abgewandelt, daß Basisdicken von nur einigen Mikrometern entstehen. Ausgehend von einem 75 μm dicken Ge-Plättchen werden durch elektrolytische Strahlätzung flache Vertiefungen an gegenüberstehenden Stellen erzeugt und mit winzigen In-Mengen dotiert. An der dünnsten Stelle beträgt die Basisdicke nur noch 3—4 μm; Emitter und Kollektor besitzen Durchmesser von 50 bzw. 100 μm. Die obere Grenzfrequenz liegt dann bei 50 MHz.

Beim *Drifttransistor* wird der zeitraubende Diffusionsvorgang im Basisraum durch ein elektrisches Feld in diesem beschleunigt. Das Feld wird dadurch erzeugt, daß man die Störstellenkonzentration zum Kollektor hin exponentiell abfallen läßt. Hierzu wird vor dem eigentlichen Legierungsvorgang eine Diffusionsschicht über die gesamte Oberfläche des Ge-Plättchens erzeugt, die vor dem Kollektorbereich durch Ätzen wieder entfernt wird. Beim RCA-Transistor [*4.40*] beträgt die Entfernung zwischen Emitter und Kollektor noch 10 μm und die obere Grenzfrequenz 125 MHz. Die Diffusion wird bei höheren Temperaturen z. B. in Sb-Dampf durchgeführt und dauert einige Stunden.

4.263 Transistor mit pn-Übergängen nach dem Zugverfahren

Diese Transistoren unterscheiden sich vom Legierungstransistor darin, daß die pn-Übergänge bereits während des Herausziehens aus der Schmelze und Wachsens des Einkristalls erzeugt werden. Dieser Unterschied äußert sich sowohl im äußeren Aufbau als auch in den elektrischen Eigenschaften des Transistors.

Die in Bd. I, § 13.3 besprochene Methode nach Czochralski ist zur Herstellung von pn-Übergängen geeignet. Man kann z. B. einen n-leitenden Impfkristall in eine p-leitende Ge-Schmelze eintauchen und einen p-Kristall ziehen, der dann einen scharfen pn-Übergang aufweist. Mehrfache pn-Übergänge können gezogen werden, wenn während des Ziehprozesses der Leitungscharakter der Schmelze durch Zugabe von n- oder p-dotierender Substanz geändert wird.

Technisch bedeutend einfacher ist das *Stufenziehverfahren*, bei dem *beide* Dotierungselemente in der Kristallschmelze in bestimmter Konzentration enthalten sind. Da die Einbaurate insbesondere von Donatoren stark von der Wachstumsgeschwindigkeit des Kristalls abhängt, können durch verschiedene Ziehgeschwindigkeiten sowohl n- als auch p-leitende Kristalle hergestellt werden. Benutzt man Ga und Sb als Akzeptor- bzw. Donatorsubstanz, so erhält man mit Ge bei sehr kleiner Ziehgeschwindigkeit p-Bereiche, bei großer Ziehgeschwindigkeit n-Bereiche, so daß sehr viele pn-Übergänge in einem einzigen Einkristall erzeugt werden können. Diese Methode eignet sich besonders für npn-Übergänge und wird auch bei Si mit Erfolg (heute allerdings nicht mehr häufig) angewandt. Die Dicke der hiernach hergestellten p-Bereiche liegt zwischen 25 und 100 μm.

Die Kristalle werden in dünne Stäbchen von 2 mm Länge und 0,5 mm^2 Querschnittsfläche geschnitten, mit Zuleitungen versehen und in ein Isoliergehäuse eingesetzt. Dabei ist besonders die Basiszuleitung mit besonderer

Sorgfalt auszuführen, damit kein Nebenschluß zum Emitter- oder Kollektorbereich zustande kommt. Die obere Frequenzgrenze liegt bei dieser Bauform bei 5—10 MHz.

Durch zusätzliche Anwendung von Diffusionsvorgängen läßt sich die Breite der Basis besser unter Kontrolle halten und eine höhere Störstellenkonzentration in dieser erreichen. Gleichzeitig ist ein solcher Transistor für wesentlich höhere Frequenzen (bis 20 MHz) verwendbar.

4.264 Mesa-Transistor [*4.70, 4.72, 4.88, 4.95*]

Transistoren für sehr hohe Frequenzen erfordern eine weitgehende Herabsetzung der Basisdicke und eine hohe Störstellendichte. Diese wird durch einen Diffusionsprozeß erzielt, bei dem das Ausgangsmaterial in Form eines rechteckigen Plättchens von p-Ge bei erhöhter Temperatur Arsendampf ausgesetzt wird. Die dadurch erhaltene, arsendotierte n-leitende Schicht ist etwa 1,5 μm dick und wird zum Teil wieder abgetragen. In Abb. 4.33 ist der Schnitt durch einen solchen Aufbau dargestellt. Der Emitter E mit seinem pn-Übergang wird

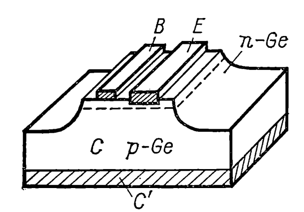


Abb. 4.33 Mesa-Transistor

durch eine aufgedampfte Al-Schicht von 0,1 μm Dicke gebildet, die so weit in die n-Schicht eindringt, bis die gewünschte geringe Basisdicke erreicht ist. Der Emitter besitzt eine Breite von 25 μm und ist etwa doppelt so lang. Der Basiskontakt B besteht aus einer aufgedampften Au—Sb-Schicht von 0,3 μm Dicke, deren Fläche der von E entspricht und in einem Abstand von 12,5 μm angebracht ist. Die Unterseite des Ge-Plättchens ist mit einem Pt-Kontakt C' versehen, der mit In angelötet wird, so daß dieses durch die n-Diffusionsschicht hindurchlegiert. Mit diesen Mesa-Transistoren lassen sich sehr hohe Frequenzen bis zu 800 MHz erzeugen und verstärken.

Das in Abb. 4.33 mit C bezeichnete Kristallstück zwischen Kollektorelektrode C' und Kollektorrandschicht besitzt einen relativ hohen Widerstand und behindert die Aussteuerung zu hohen Strömen. Beim *Mesa-Transistor mit Epitax-Schicht* wird für das Kollektorbahngebiet ein sehr niederohmiges Material ($\varrho \approx 2$ mΩ cm) verwendet und darauf zur Aufnahme der Kollektorrandschicht eine hochohmige Schicht durch *epitaxisches Aufwachsen* erzeugt. Basisschicht, Emitter- und Basiskontakt werden wie beim Mesa-Transistor in die Epitax-Schicht eingebracht. Stromaussteuerung und Schaltverhalten dieser Transistoren sind gegenüber jenen stark verbessert. Das Verfahren ist für Ge- und Si-Transistoren gleicherweise anwendbar.

4.265 Planartransistor [*4.61, 4.67*]

Der *Planartransistor* stellt eine besondere Bauart des Si-Transistors dar, der eine diffundierte Basis- und Emitterzone besitzt. Aus Abb. 4.34 geht der konzentrische Aufbau der einzelnen Bereiche hervor. Beim npn-Planartransistor wird von einer n-Si-Scheibe ausgegangen, die mit einer 1 µm dicken SiO_2-Schicht bedeckt wird. Durch ein fotolithografisches Verfahren wird die Oxidschicht kreisförmig abgetragen; die freigelegte Fläche wird mit Bor behandelt und dort eine p-leitende Diffusionsschicht erzeugt. Hierauf wird die Öffnung wieder mit einer SiO_2-Schicht bedeckt und konzentrisch eine kleinere Kreisfläche freigelegt. Durch Phosphordiffusion wird nun die Emitterzone (n-leitend) erzeugt und wieder oxydiert. Schließlich werden für den Emitterkontakt E und den Basiskontakt B kreis- bzw. kreisringförmige Flächen in der SiO_2-Abdeckschicht derart freigelegt, daß alle pn-Grenzen an der Oberfläche abgedeckt bleiben. Als Kontaktmaterial wird Al aufgedampft.

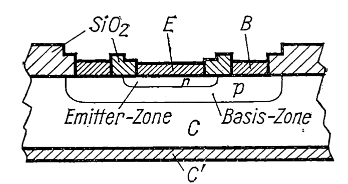


Abb. 4.34 Si-Planartransistor

Planartransistoren können in allen Größen und Formen hergestellt werden. Ihre Anwendung reicht bis zu höchsten Frequenzen (1,5 GHz), hohen Leistungen (50 W) und großen Schaltleistungen. Infolge des geringen Oberflächeneinflusses sind die Kollektor- und Emitterrestströme extrem klein; auch die Rauschzahl (vgl. § 4.9) ist um 10 db geringer als bei vergleichbaren Mesatypen.

4.266 Leistungstransistor

Unter einem *Leistungstransistor* werden solche Transistoren verstanden, die auf der Kollektorseite eine relativ große Leistung, einen hohen Strom oder eine hohe Spannung abgeben können. Dabei spielt die produzierte Wärme, die damit verbundene Temperaturerhöhung und deren Auswirkung auf die Funktion des Transistors eine dominierende Rolle (vgl. § 4.25). Ihre Konstruktion ist wesentlich auf die Mittel zur Abführung der Wärme und auf den Erhalt großer Werte von α_{ce} bei hohen Stromdichten ausgerichtet. Für einen pnp-Transistor gilt analog zu Gl. (4/50) der folgende Ausdruck für $1/\alpha_{cb}$

$$\frac{1}{\alpha_{cb}} = \frac{\varrho_e W}{\varrho_b L_{ne}} + \frac{A_s s W}{A_e D_p} + \frac{W^2}{2 L_{pb}^2} - \frac{n_c \mu_n}{2 p_c \mu_p}, \tag{4/52}$$

wobei A_e und A_s die Emitterfläche bzw. die diese umgebende Ringfläche und s die Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeit der Überschußladungsträger bedeuten. Der erste Term in Gl. (4/52) folgt aus dem Injektionswirkungsgrad

des Emitters und muß für hohe Emitterstromdichten korrigiert werden. Im zweiten Term ist die Abhängigkeit von D_p bei großem Emitterstrom zu berücksichtigen. Die beiden anderen Terme spielen eine untergeordnete Rolle und sollen unberücksichtigt bleiben. Trägt man α_{cb} als Funktion des Emitterstromes I_e auf, wobei als Parameter das Verhältnis Oberflächenrekombinationsterm zu Injektionswirkungsgrad benutzt wird, so findet man zunächst einen Anstieg von α_{cb} mit einem Maximum und für wachsendes I_e einen hyperbolischen Abfall. Aus diesen Kurven lassen sich die optimalen Abmessungen des Leistungstransistors entnehmen. Zum Abführen der Jouleschen Wärme wird der Emitter oder der Kollektor auf eine Kupferscheibe großer Oberfläche gelötet, welche die Wärme direkt durch Wärmeleitung an das Chassis abgibt.

In Abb. 4.35 ist der schematische Aufbau eines Leistungstransistors nach der Legierungsmethode (§ 4.262) dargestellt. Der Kollektorkontakt C ist unmittelbar an einer Kupferscheibe S befestigt, durch die isoliert die Zuleitungen von Emitter E und Basis B geführt sind. Die in der Kollektorrandschicht entstehende Wärme wird auf kürzestem Wege an das Metallchassis M abgegeben, mit dem S verschraubt ist.

Bei Leistungstransistoren aus n-leitendem *Silizium* lassen sich Kollektorspannungen von 100 V und Emitterströme bis 2 A anwenden; bei einer Gehäusetemperatur von 100 °C beträgt die Verlustleistung 50 W. Besonders große Schwierigkeiten bereitet die Erzeugung sehr hoher Frequenzen bei großen Verlustleistungen am Kollektor, da sich die einzelnen Forderungen z. T. widersprechen. Von NELSON et al. [*4.62*] wird ein *HF-Leistungstransistor* beschrieben, der bei 10 MHz noch eine Verlustleistung von 5 W zuläßt.

Für die Wärmeabfuhr spielt der *innere thermische Widerstand* des Transistors eine wichtige Rolle, der entsprechend

$$R_{\text{thi}} = (T_{pn} - T_0)/P$$

das Verhältnis von Temperaturdifferenz zwischen pn-Kollektorübergang und Gehäuse zu Kollektorverlustleistung P darstellt. Vom Gehäuse muß die Leistung durch freie oder erzwungene Konvektion an die Umgebung der Temperatur T_a abgeführt werden, wobei der *äußere thermische Widerstand*

$$R_{\text{tha}} = (T_0 - T_a)/P$$

auftritt, der sich durch vergrößerte Austauschflächen und erzwungene Konvektion verkleinern läßt. Geht man für T_a von Zimmertemperatur aus, so ist für Ge eine Temperaturdifferenz $T_a - T_{pn} = 30$ grd, für Si eine solche von 100 grd zulässig; pro cm² Kollektorfläche können für Ge 0,23, für Si 1,0 kW Verlustleistung abgeleitet werden.

4.267 Feldeffekttransistor [*4.82*]

Die von SHOCKLEY (1952) unter dem Namen *Unipolar-* oder *Feldeffekttransistor* vorgeschlagene Halbleiteranordnung stellt einen variablen Widerstand dar, dessen Stromtransport von Ladungsträgern nur eines Vorzeichens übernommen wird und dessen wirksamer Querschnitt durch Raumladungs-

vorgänge verändert werden kann. In Abb. 4.36 ist schematisch der Feldeffekttransistor und seine Schaltung angegeben. Ein rechteckiger n-leitender Ge-Stab *Ge* ist an den Stirnseiten mit zwei metallischen Anschlüssen versehen, an denen die Batterie U_a und der äußere Lastwiderstand R_a liegen. In der Mitte ist der Stab mit einer diesen umfassenden p-leitenden Steuerelektrode G versehen, die in der Legierungstechnik (s. § 4.262) aufgebracht wird. Zwischen

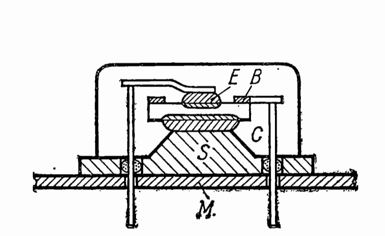


Abb. 4.35 Leistungstransistor nach der Legierungsmethode

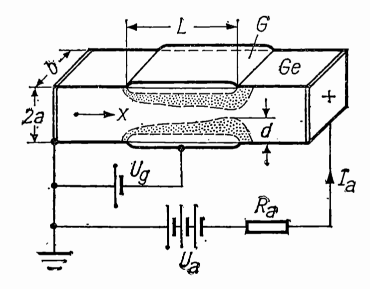


Abb. 4.36 Feldeffekttransistor

G und dem Minus-Pol von U_a ist die Gitterbatterie U_g geschaltet. Bei konstantem U_g bildet sich am pn-Übergang der Steuerelektrode eine Raumladungsschicht aus, deren Dicke d im schwach dotierten n-Bereich des Stabes

$$d = \sqrt{\frac{2\varepsilon\mu_n}{\sigma} U}$$

beträgt, wenn ε die Dielektrizitätskonstante, σ die spezifische Leitfähigkeit und U die in der X-Richtung wirkende Spannung ist. Berühren sich die gegenüberliegenden Randschichten zuerst am rechten Ende von G, tritt Sättigung ein, d. h., es wird $2d = 2a$, und es gilt

$$U_a - U_g \geqq \frac{\sigma a^2}{2\varepsilon\mu_n}.$$

Ist aber bereits $-U_g \geqq U_{g0} = \sigma a^2/2\varepsilon\mu_n$, so bleibt der Ge-Stab für alle Werte von $U_a \geqq 0$ gesperrt. Daraus läßt sich die theoretische *Steilheit* zu

$$S = (\partial I_a)/(\partial U_g)_{U_a} = \frac{2ab\sigma}{L}\left(1 - \sqrt{U_g/U_{g0}}\right) \tag{4/53}$$

berechnen, wobei b die Stabbreite und L die Länge der Steuerelektrode bedeuten. Daraus resultiert die in Abb. 4.37 schematisch dargestellte Kennlinienschar, als deren Parameter die auf U_{g0} bezogene Steuerspannung fungiert. Für große Werte von U_a tritt Sättigung von I_a ein und es ergibt sich ein Verhalten, das dem einer Pentode (s. Abb. 4.10) ähnelt. Der Feldeffekttransistor besitzt eine hohe Eingangsimpedanz und im Sättigungsbereich auch eine große Ausgangsimpedanz. Die Anwendung ist auf Frequenzen unterhalb von einigen MHz beschränkt. Da keine Injektion der Ladungsträger benötigt wird, können auch

Halbleiter mit kleiner Lebensdauer der Minoritätsladungsträger benutzt werden.

Im MOS-Feldeffekttransistor (*M*etal-*O*xide-*S*emiconductor) ist eine Metallsteuerelektrode mit einer isolierenden Oxidschicht auf den Halbleiter aufgebracht. Diese Transistoren besitzen einen sehr hohen Eingangswiderstand und kleinen Temperaturkoeffizienten.

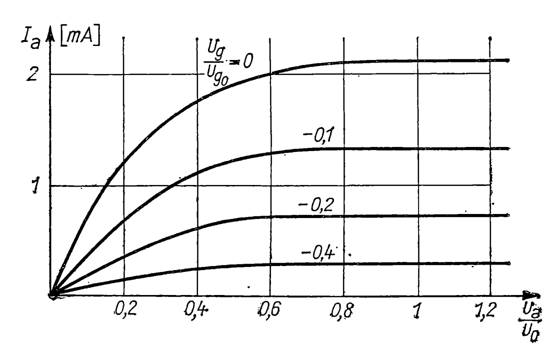


Abb. 4.37 Kennlinien eines Feldeffekttransistors

4.268 Schalttransistor [*4.33, 4.59, 4.80*]

Halbleiterelemente, die für Schaltzwecke geeignet sind, lassen sich auf verschiedene Arten herstellen. Speichernde elektronische Schalter sollen thyratronartige Charakteristik, d. h. einen hochohmigen und einen niederohmigen Kennlinienzweig besitzen, die durch ein Gebiet mit negativer Kennlinienneigung getrennt sind.

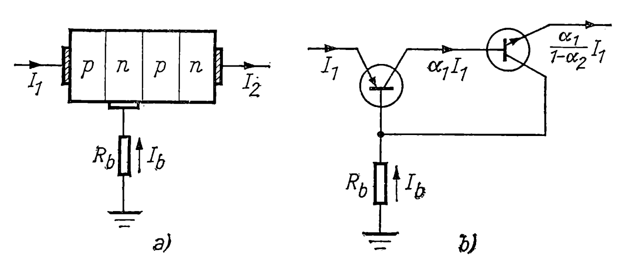


Abb. 4.38 pnpn-Vierschichtentransistor (a), Ersatzschaltbild (b)

Fallende Kennlinien treten bei Transistoren dann auf, wenn $\alpha_{ce} > 1$ ist. Der Basisstrom ist dann so gerichtet, daß der am Basiswiderstand erzeugte Spannungsabfall die Ladungsträgerinjektion am Emitter begünstigt und eine positive Stromrückkopplung bewirkt. Dieser Stromdurchbruch hält so lange an, bis die Kollektorspannung wieder abgebaut ist oder der Strom durch äußere Widerstände begrenzt wird.

In Abb. 4.38 sind ein *Vierschichtentransistor* mit einer pnpn-Struktur und sein Ersatzschaltbild wiedergegeben, das eine Kombination aus einem pnp-

und einem npn-Transistor darstellt. Bezeichnet α_1 die Stromverstärkung des pnp-Transistors, α_2 die des npn-Transistors, so beträgt die Gesamtverstärkung $\alpha = \alpha_1/(1 - \alpha_2)$, und es fließt ein Basisstrom

$$I_b = (\alpha - 1) I_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}{1 - \alpha_2} I_1,$$

der für $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ wegen des Spannungsabfalls in R_b das Basispotential im pnp-Transistor erniedrigt und die Emitteremission und damit I_b weiter erhöht. Der in Abb. 4.38a gezeigte Vierschichten-Transistor wirkt auf die gleiche Art, wobei die äußeren, stark dotierten Schichten als Emitter fungieren und der mittlere pn-Übergang als Kollektor sowohl für die von links indizierten Defektelektronen als auch für die von rechts kommenden Elektronen dient. Über das Ersatzschaltbild der Vierschichtdiode s. [*4.41*].

Zur Herstellung dieser Transistoren wird vor allem die Diffusionstechnik (s. § 4.264) angewandt; großflächige Bauelemente dieser Art werden als *Stromtore* in der Starkstromtechnik eingesetzt [*4.28*, *4.29*, *4.54*, *4.92*].

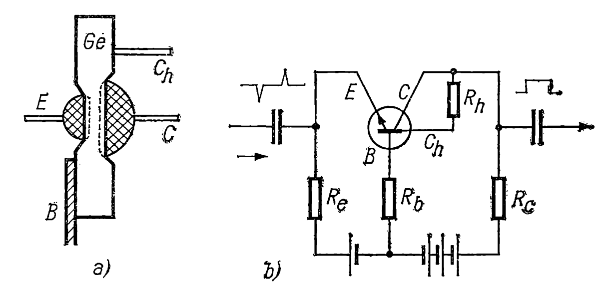


Abb. 4.39 Schalttransistor (a) und Schaltschema (b)

Ein *Schalttransistor* mit kurzen Sprungzeiten [*4.78*] wird nach dem Aufbau der Abb. 4.39 erhalten. Ein Stab aus hochohmigem Ge von rechteckigem Querschnitt besitzt zwei sperrende Legierungskontakte E und C aus Blei-Antimon sowie eine Hilfselektrode C_h in Form eines Spitzenkontakts in der Nähe von C. Besteht der Stab aus p-leitendem Ge, so erhalten die Kontakte E und C eine positive sperrende Vorspannung gegen B; die Hilfselektrode C_h ist über einen Widerstand R_h an C gelegt. Wird z. B. durch einen kurzen negativen Impuls an E dessen Potential gesenkt, so tritt eine Injektion von Elektronen in den Basisraum auf. Da das Basispotential negativer als das Steuerpotential ist, fließen die Elektronen in die Kollektorelektroden C und C_h ab, wodurch der mit C_h verknüpfte Innenwiderstand stark abnimmt und die Injektion von E noch mehr gefördert wird. Dieser instabile Prozeß führt zu hohen Strömen an den Elektroden, welche durch die Außenwiderstände R_e, R_b und R_c (Lastwiderstand) begrenzt werden.

Dieser einfache Schalter stellt im Sperrzustand einen hochohmigen Widerstand ($> 1\ \mathrm{M\Omega}$), im leitenden Zustand dagegen einen sehr niedrigen Widerstand ($< 50\ \Omega$) dar. Bei einer Basisdicke von 50 μm können Schaltzeiten von 0,1 μs erzielt werden.

4.27 Transistoreigenschaften

Der Transistor wird wie die Vakuumröhre zur Verstärkung von Gleich- und Wechselspannungssignalen sowie zur Erzeugung von Wechselspannungen eingesetzt. In die hierzu benutzten Schaltanordnungen (s. § 5) wird der Transistor als *aktiver Vierpol* (vgl. § 3.8) eingeführt, dessen Bestimmungselemente durch die spezielle Konstruktion gegeben und aus den Kennlinien abgelesen werden können. Diese Betrachtungen werden für den pnp-Transistor durchgeführt; nur beim Vergleich der Kennlinienfelder von Röhre und Transistor wird wegen der gleichen Polarität (vgl. Abb. 3.35) der npn-Transistor herangezogen.

4.271 Statisches Kennlinienfeld bei Basisschaltung

In Abb. 4.40 ist ein pnp-Transistor zur Aufnahme seiner Kennlinienschar dargestellt, wobei durch veränderliche Potentiometer die am Transistor liegenden Spannungsdifferenzen beliebig eingestellt werden können. Für die in der Abbildung eingetragenen Spannungen und Ströme gilt:

$$I_e - I_c - I_b = 0; \tag{4/54}$$

$$U_{ec} - U_{cb} - U_{eb} = 0. \tag{4/55}$$

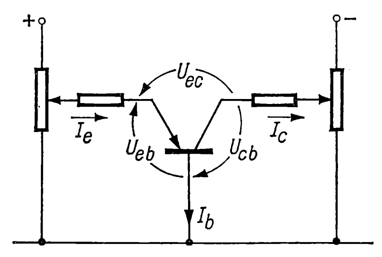


Abb. 4.40 pnp-Transistor in Basisschaltung

In diesen Relationen sind keine Phasenbeziehungen zwischen den sechs Größen enthalten; ihre Gültigkeit ist daher auf relativ kleine Frequenzen beschränkt. Für die in Abb. 4.40 dargestellte *Basisschaltung* wählt man zweckmäßig die Größen I_e, I_c, U_{eb} und U_{cb} als unabhängige Variable, um auf einfache Art den Transistor als Stromverstärker beschreiben zu können. Die entsprechenden Kennlinienfelder sind in Abb. 4.41 dargestellt und liefern die Größen

$$U_{eb} = f_1(I_e, U_{cb}), \tag{4/56}$$

$$I_c = f_2(I_e, U_{cb}) \tag{4/57}$$

als Funktion des Eingangsstroms I_e und der Kollektorspannung U_{cb}. In Differentialform lauten die entsprechenden Beziehungen:

$$\mathrm{d}U_{eb} = \left(\frac{\partial U_{eb}}{\partial I_e}\right)_{U_{cb}} \delta I_e + \left(\frac{\partial U_{eb}}{\partial U_{cb}}\right)_{I_e} \delta U_{cb} = h_{ib}\,\delta I_e + h_{rb}\,\delta U_{cb}; \tag{4/58}$$

$$\mathrm{d}I_c = \left(\frac{\partial I_c}{\partial I_e}\right)_{U_{cb}} \delta I_e + \left(\frac{\partial I_c}{\partial U_{cb}}\right)_{I_e} \delta U_{cb} = h_{fb}\,\delta I_e + h_{ob}\,\partial U_{cb}. \tag{4/59}$$

Die Größen h_{ib}, h_{rb}, h_{fb} und h_{ob} stellen die Neigung der Kurven *a* bis *d* dar. Da die Größen $h_{rb}\,\delta U_{cb}$ und $h_{ob}\,\delta U_{cb}$ gegen $h_{ib}\,\delta I_e$ bzw. $h_{fb}\,\delta I_e$ vernachlässigbar sind, vereinfachen sich die Gln. (4/58) und (4/59) zu:

$$\mathrm{d}U_{eb} \approx h_{ib}\,\mathrm{d}I_e; \tag{4/58a}$$

$$\mathrm{d}I_c \approx h_{fb}\,\mathrm{d}I_e. \tag{4/59a}$$

Näherungsweise stellt demnach h_{ib} den *Eingangswiderstand* dar; für $\delta U_{cb} = 0$, d. h. kurzgeschlossenen Ausgang, ist dies exakt der Fall. Für $h_{ob} = 0$ wird $\mathrm{d}I_c/\mathrm{d}I_e \approx h_{fb} = \alpha_{ce}$ (vgl. Gl. 4/45) ebenfalls bei kurzgeschlossenem Ausgang. Die Größe h_{rb} stellt die *Spannungsrückwirkung* für die Ein- und Ausgangsspannung bei konstantem Emitterstrom dar; h_{ob} ist der Leitwert für den Transistorausgang.

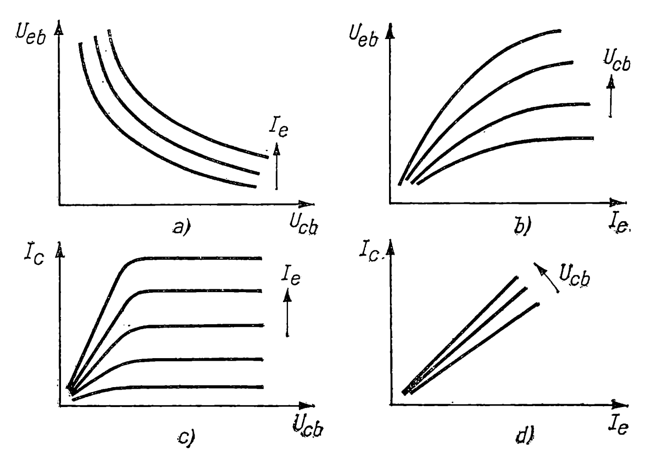


Abb. 4.41 Kennlinienfelder eines pnp-Transistors in Basisschaltung

4.272 Emitterkennlinien

Da in der Basisschaltung im allgemeinen der Eingangswiderstand h_{ib} sehr klein, gleichzeitig der Ausgangswiderstand $1/h_{ob}$ groß ist, wird die direkte Ankopplung bei mehrstufigen Verstärkern erschwert und erfordert Anpassungstransformatoren. Unmittelbar wird dies durch Anwendung der in Abb. 4.42 dargestellten *Emitterschaltung* möglich, bei der der Emitter geerdet ist, während Basis und Kollektor über die Widerstände R_1 und R_2 an den Spannungsquellen $-E_1$ bzw. $-E_2$ liegen. Da E_1 und E_2 dieselbe Polarität besitzen, kann die Vorspannung U_{eb} durch R_1 und E_2 bestimmt werden.

In dieser Schaltung werden die Größen I_c, I_b, U_{ec} und U_{eb} als Variable gewählt, für die analog zu den Gln. (4/56) und (4/57) gilt:

$$U_{eb} = f_3(I_b, U_{ec}); \tag{4/60}$$

$$I_c = f_4(I_b, U_{ec}). \tag{4/61}$$

Durch partielles Differenzieren ergeben sich daraus die folgenden Beziehungen in parametrischer Form:

$$\mathrm{d}U_{eb} = \left(\frac{\partial U_{eb}}{\partial I_b}\right)_{U_{ec}} \delta I_b + \left(\frac{\partial U_{eb}}{\partial U_{ec}}\right)_{I_b} \delta U_{ec} = h_{ie}\,\delta I_b + h_{re}\,\delta U_{ec}; \qquad (4/62)$$

$$\mathrm{d}I_c = \left(\frac{\partial I_c}{\partial I_b}\right)_{U_{ec}} \delta I_b + \left(\frac{\partial I_c}{\partial U_{ec}}\right)_{I_b} \delta U_{ec} = h_{fe}\,\delta I_b + h_{oe}\,\delta U_{ec}. \qquad (4/63)$$

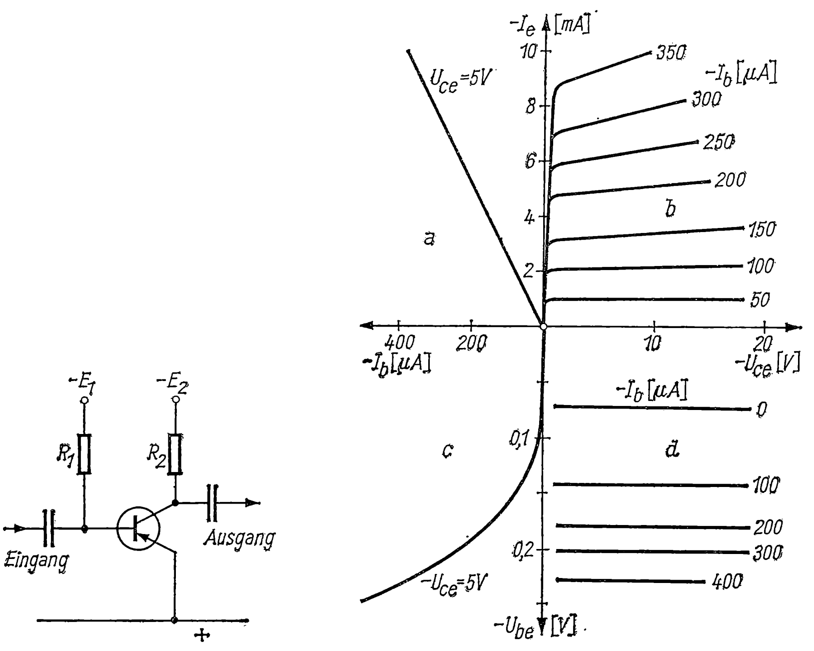


Abb. 4.42 Emitterschaltung

Abb. 4.43 Kennlinien eines pnp-Transistors (OC 303) in Emitterschaltung

In Abb. 4.43 sind die entsprechenden Kennlinien für einen pnp-Transistor (OC 303) dargestellt, aus denen die Hybridparameter h entnommen werden können.

In der *Emitterschaltung* besitzt der Transistor eine hohe Eingangsimpedanz und eine kleinere Ausgangsimpedanz, wodurch sich einfache Kaskadenverstärker (vgl. § 5.265) aufbauen lassen. Beim linearen Verstärker (Abb. 4.43) muß die Basisspannung U_{eb} und damit der Kollektorruhestrom so gewählt werden, daß die Linearität zwischen Eingangsstrom und Ausgangsspannung bewahrt bleibt und die Ausgangsleistung den zulässigen Wert nicht übersteigt. Wie bei der Basisschaltung lassen sich die Terme $h_{re}\,\delta U_{ec}$ und $h_{oe}\,\delta U_{ec}$ gegenüber den anderen vernachlässigen und ergeben die vereinfachten Beziehungen:

$$\mathrm{d}U_{eb} \approx h_{ie}\,\delta I_b; \qquad (4/62\text{a})$$

$$\mathrm{d}I_c \approx h_{fe}\,\delta I_b. \qquad (4/63\text{a})$$

In guter Näherung entspricht die Größe h_{ie} der Eingangsimpedanz; die Größe $\mathrm{d}I_c/\mathrm{d}I_b$ stellt die Stromverstärkung α_{cb} für kleine Signale entsprechend Gl. (4/48) dar, wobei der Vorzeichenunterschied zwischen $\mathrm{d}I_c$ und $\mathrm{d}I_b$ zu beachten ist.

4.273 Kollektorschaltung

Die in Abb. 4.44 dargestellte *Kollektorschaltung* wird wegen ihrer Ähnlichkeit mit dem Katodenfolger mit Elektronenröhren (vgl. § 5.223) auch als *Emitterfolger* bezeichnet. Die entsprechenden Differentialgleichungen mit I_b und U_{ec} als unabhängige Variable ergeben sich aus

$$U_{bc} = f_5(I_b, U_{ec}), \tag{4/64}$$

$$I_e = f_6(I_b, U_{ec}) \tag{4/65}$$

zu

$$\mathrm{d}U_{bc} = \left(\frac{\partial U_{bc}}{\partial I_b}\right)_{U_{ec}} \delta I_b + \left(\frac{\partial U_{bc}}{\partial U_{ec}}\right)_{I_b} \delta U_{ec}; \tag{4/66}$$

$$\mathrm{d}I_e = \left(\frac{\partial I_e}{\delta I_b}\right)_{U_{ec}} \delta I_b + \left(\frac{\partial I_e}{\partial U_{ec}}\right)_{I_b} \delta U_{ec}. \tag{4/67}$$

Führt man wieder die Hybridparameter h ein, so lauten die obigen Beziehungen:

$$\mathrm{d}U_{bc} = h_{ic}\,\delta I_b + h_{rc}\,\delta U_{ec}, \tag{4/66a}$$

$$\mathrm{d}I_e = h_{fc}\,\delta I_b + h_{oc}\,\delta U_{ec}. \tag{4/67a}$$

Für die Stromverstärkung $\alpha_{eb} = \mathrm{d}I_e/\mathrm{d}I_b$ findet man für diese Schaltung unter Berücksichtigung von Gl. (4/54) den Ausdruck:

$$\alpha_{eb} = \frac{\mathrm{d}I_e}{\mathrm{d}I_e - \mathrm{d}I_b} = \frac{1}{1 - \alpha_{ce}}. \tag{4/68}$$

Da $h_{oc}\delta U_{ec}$ in Gl. (4/67a) gegen den ersten Term zu vernachlässigen ist, vereinfacht sich Gl. (4/68) zu

$$\frac{\mathrm{d}I_e}{\mathrm{d}I_b} = \alpha_{eb} \approx h_{fc}. \tag{4/68a}$$

Im Gegensatz zur Emitterschaltung ist $h_{rc}\,\delta U_{ec}$ gegen den ersten Term in Gl. (4/66a) nicht zu vernachlässigen und daher die Größe h_{ic} nicht der Eingangsimpedanz entsprechend. Diese verändert sich beträchtlich mit der Ausgangsimpedanz R_2 und kann in weiten Grenzen annähernd durch das Produkt $\alpha_{eb}R_2$ ausgedrückt werden.

4.274 Vierpoldarstellung (vgl. § 3.8)

Bei der bisher benutzten Schreibweise der Transistorgleichungen mit Hilfe der h-Parameter besitzen diese verschiedene Dimensionen. Man gelangt zu symmetrischen Gleichungen durch geeignete Wahl der Variablen, wobei die

vier auftretenden Parameter Impedanzen werden. Ersetzt man den Transistor, wie in Abb. 4.45 gezeigt, durch einen T-Kreis (s. § 3.5), so lassen sich die Spannungen U_i bzw. U_0 am Ein- bzw. Ausgang des Vierpols durch die entsprechenden Ströme wie folgt ausdrücken:

$$U_i = f_7(I_i, I_0); \tag{4/69}$$

$$U_0 = f_8(I_i, I_0). \tag{4/70}$$

Die verallgemeinerten Symbole U_i und I_i sind in der Emitterschaltung durch U_{be} bzw. I_b, in der Basisschaltung durch U_{be} bzw. I_e zu ersetzen. Analog zu den Gln. (3/113) werden z-Parameter mit der Dimension von Impedanzen in der Form

$$U_i = z_i i_i + z_r i_0; \tag{4/71}$$

$$u_0 = z_f i_i + z_0 i_0 \tag{4/72}$$

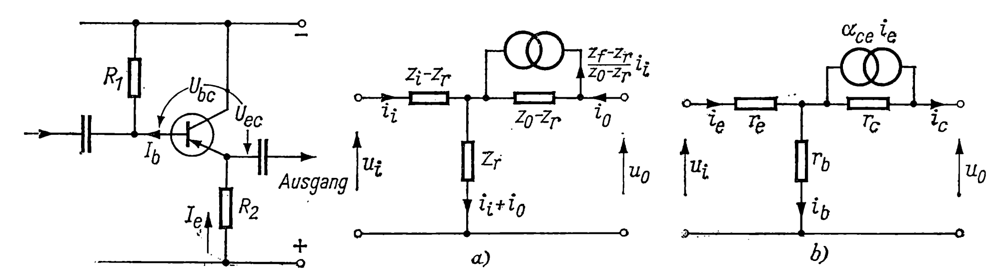


Abb. 4.44 Kollektorschaltung

Abb. 4.45 Ersatz-T-Kreis des Transistors in Basisschaltung

eingeführt. Durch Umstellen und Erweitern ergeben sich daraus die Gleichungen

$$u_i = (z_i - z_r) i_i + z_r (i_i + i_0), \tag{4/71a}$$

$$u_0 = z_r (i_i + i_0) + \frac{(z_f - z_r)(z_0 - z_r) i_i}{(z_0 - z_r)} + (z_0 - z_r) i_0. \tag{4/72a}$$

Diese stellen den Transistor in Basisschaltung (Abb. 4.45a) in Form eines T-Kreises dar, dessen Elemente sich durch Vergleich mit Abb. 4.41b wie folgt ergeben:

Emitterwiderstand	$r_e = z_i - z_r$,
Basiswiderstand	$r_b = z_r$,
Kollektorwiderstand	$r_c = z_0 - z_r$,
Stromverstärkung	$\alpha_{ce} = (z_f - z_r)/(z_0 - z_r)$.

Da z_r viel kleiner als z_f oder z_0 ist, kann man für den Strom des Ersatzgenerators in guter Näherung $\alpha_{ce} i_e$ setzen, wie in Abb. 4.45b geschehen. In *Tabelle 4.6* sind für einige Transistoren die Widerstände für den Ersatzkreis zusammengestellt.

Wendet man den Ersatz-T-Kreis auf die Emitterschaltung des Transistors an, so sind in Abb. 4.45b lediglich die Zweige mit den Widerständen r_e und r_b zu vertauschen. Zweckmäßiger ist es, wie in Abb. 4.46 dargestellt, die Stromverstärkung α_{cb} (vgl. § 4.272) einzuführen, die auf den modifizierten Kollektorwiderstand r_m wirkt. Durch Vergleich der Spannungsabfälle im Ausgangskreis (die Eingangskreise in den Abbn. 4.45b und 4.46 sind identisch) ergibt sich dieser zu

$$r_m = r_c(1 - \alpha_{ce}).$$

Tabelle 4.6 Ersatzwiderstände von Transistoren

Typ	r_e Ω	r_b Ω	α_{cb}	I_c mA
OC71	18	700	41	1
2N105	34	976	51	2
GT47	25	500	100	1
OC202	25	800	70	1

Dieser Ersatz-T-Kreis aus Widerständen oder Impedanzen besitzt den Vorteil, daß nur *ein* aktives Element, die Stromquelle, $\alpha_{cb} i_b$, auftritt. Ein- und Ausgangsimpedanzen sowie Strom- und Spannungsverstärkung können wie bei der Benutzung der Hybrid-Parameter berechnet werden.

4.275 Ersatzkreis bei hohen Frequenzen

Bei hohen Frequenzen läßt sich das Verhalten des Transistors nicht mehr durch ein Netzwerk ohmscher Widerstände beschreiben. Es müssen vielmehr kapazitive Widerstände eingeführt werden, die, wie in Abb. 4.47 für die

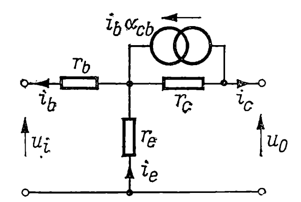


Abb. 4.46 Ersatz-T-Kreis für die Emitterschaltung

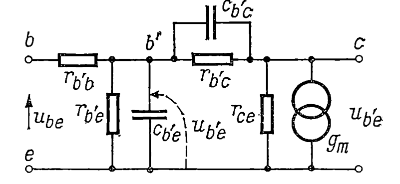


Abb. 4.47 Ersatz-Π-Kreis eines HF-Transistors

Emitterschaltung angegeben, einen *Π-Ersatzkreis* (vgl. § 3.26) bilden. Darin bedeutet der Punkt *b* den Kontakt mit der Basis, deren Material zur Erzielung eines hohen Emitterwirkungsgrades γ entsprechend Gl. (4/38a) einen großen spezifischen Widerstand besitzen muß. Zwischen *b* und dem aktiven Basisbereich *b'* besteht daher ein merklicher Widerstand $r_{b'b}$. Gleichzeitig ist zwischen *b'* und dem Emitter eine Kapazität $c_{b'e}$ anzunehmen, die parallel zum Basis-Emitter-Widerstand $r_{b'e}$ liegt. Die *Sperrschichtkapazität* ist der Fläche des Emitterübergangs sowie $u^{-1/2}$ (Legierungsübergang) bzw. $u^{-1/3}$ (gezogener Übergang) proportional, wenn u die Vorspannung bedeutet. Die *Diffusions-*

kapazität ist proportional zu $\omega^{-1/2}$ und eine Funktion der Basisdicke. In der Durchlaßrichtung des Übergangs ist sie wesentlich größer als die Sperrschichtkapazität, die außerdem in diesem Fall durch einen kleinen Eingangswiderstand geshuntet ist. Die *Kollektorkapazität* $c_{b'c}$ hängt von der Kollektorfläche ab. Außerdem ist in der Ersatzschaltung der Abb. 4.47 ein *gegenseitiger Leitwert* $g_m = -\alpha_{cb}/r_{b'e}$ eingeführt.

Infolge der inneren Kapazitäten des Transistors nimmt seine Stromverstärkung mit wachsender Frequenz ab, da Basis und Emitter durch $c_{b'e}$ geshuntet sind und eine Rückkopplung von Ausgang und Eingang durch $c_{b'c}$ besteht. Für die Beurteilung des HF-Verhaltens wird meist die *Transitfrequenz* f_T angegeben, bei der in der Emitterschaltung die Stromverstärkung α_{cb} theoretisch auf den Wert Eins abfallen würde. In *Tabelle 4.7* sind für einige Transistoren die Ersatzwiderstände sowie f_T entsprechend Abb. 4.47 zusammengestellt.

Tabelle 4.7 Hybrid-π-Parameter von Transistoren

Typ	$r_{b'b}$ Ω	$r_{b'e}$ Ω	$c_{b'e}$ pF	$r_{b'c}$ MΩ	$c_{b'c}$ pF	r_{ce} kΩ	g_m mA/V	f_T MHz
OC45	75	1315	1000	3,33	10,5	62,5	38	6
NKT142	200	2000	400	3,0	20	20	39	12
2N105	250	2700	4500	5,0	17	200	21	1
GT41	100	790	1560	2,6	15	122	38	4
GET874	100	1800	500	2,6	8,5	40	38	15
OC202	250	1800	2000	2,1	29,5	35	39,5	3,2

Die obere Frequenzgrenze liegt bei *Legierungstransistoren* (vgl. § 4.262) bei etwa 10···15 MHz; beim *Drifttransistor*, der eine örtlich variable Störstellenkonzentration im Basisbereich besitzt, liegt diese bei 100 MHz und mehr. Hervorragend geeignet für sehr hohe Frequenzen ist der *Epitaxialtransistor* (vgl. § 4.264), da der Kollektorwiderstand sehr klein gehalten werden kann.

4.276 Konversion von Ersatzkreisen

Außer den besprochenen Ersatzkreisen für den Transistor, dem T- und *Π*-Kreis gibt es noch weitere Möglichkeiten, die auf spezielle Anwendungen oder Schaltungen ausgerichtet sind. Zur bequemen Umrechnung der häufig benutzten *h*-Parameter in den §§ 4.271···3 für die drei Grundschaltungen in die Parameter für die entsprechenden T-Kreise läßt sich *Tabelle 4.8* heranziehen.

Tabelle 4.8 Umrechnung der T- in die h-Parameter von Transistoren

	Basisschaltung	Emitterschaltung	Kollektorschaltung
h_i	$r_e + r_b/\alpha_{be}$	$\alpha_{be} h_{ib}$	$\alpha_{be} h_{ib}$
h_r	r_b/r_c	$\alpha_{be} r_e/r_c$	$r_c/(r_c + \alpha_{be} r_e)$
h_f	$-\alpha_{ce}$	α_{cb}	$-\alpha_{be}$
h_o	$1/r_c$	$\alpha_{be} h_{ob}$	$\alpha_{be} h_{ob}$

In einer weiteren *Tabelle 4.9* ist die Umrechnung der h-Parameter aus der Basisschaltung für die der Emitter- und Kollektorschaltung angegeben.

Tabelle 4.9 Umrechnung der h-Parameter für die drei Schaltarten

Basisschaltung	Emitterschaltung	Kollektorschaltung
h_{ib}	$h_{ib} = \frac{h_{ie}}{1 + h_{fe}}$	$h_{ic} = h_{ie}$
h_{rb}	$h_{rb} = \frac{h_{ie} \cdot h_{oe}}{1 + h_{fe}}$	$h_{rc} = \frac{1}{1 + h_{re}}$
h_{fb}	$h_{fb} = \frac{-h_{fe}}{1 + h_{fe}}$	$h_{fc} = -(1 + h_{fe})$
h_{ob}	$h_{ob} = \frac{h_{oe}}{1 + h_{fe}}$	$h_{oc} = h_{oe}$

4.28 Experimentelle Aufnahme der Transistorkennlinien [*4.77*]

In ähnlicher Weise wie bei der Aufnahme von Röhrenkennlinien (§ 4.17) lassen sich die *statischen* Kennlinien von Transistoren unmittelbar an einem Oszillografen registrieren. In Abb. 4.48 ist ein hierfür geeigneter *Kennlinienschreiber* vereinfacht dargestellt. Im Emitterkreis des pnp-Transistors T kann durch den variablen Widerstand R_e (der groß gegen die Eingangsimpedanz des Transistors sein muß) konstanter Emitterstrom I_e eingestellt und gemessen werden. Im Kollektorkreis liegt die Sekundärwicklung des mit 50 Hz betriebenen Transformators $\ddot{U}$ und die Diode D, die so gekoppelt ist, daß dem Kollektor nur die negative Halbwelle zugeführt wird. Die beiden Verstärker V_1 und V_2, deren Ausgänge an die waage- bzw. senkrechten Plattenpaare des Katodenstrahloszillografen O gelegt sind, dienen zur Messung der Kollektorspannung U_{cb} und des Kollektorstroms I_c, dessen Spannungsabfall an R_c abgegriffen und verstärkt wird. Man erhält mit dieser Anordnung die Kollektorkennlinien

$$I_c = f(U_{cb}) \quad \text{für} \quad I_e = \text{const},$$

wie sie in Abb. 4.41c für die Basisschaltung dargestellt sind. Legt man den Schalter S_1 nach oben um, so wird der Emitter geerdet und dem Verstärker V_1 die Emitterspannung U_{ce} zugeführt. Am Oszillografen werden die Emitterkennlinien

$$I_c = f(U_{ce}) \quad \text{für} \quad I_b = \text{const}$$

registriert (vgl. Abb. 4.43b). Wird S_2 in die obere Schaltstellung gebracht, so wird der Kollektorstrom I_c als Funktion der Eingangsspannung U_{eb} bei konstantem I_e oder I_b dargestellt. Beide Verstärker müssen gleichstromgekoppelte Verstärker sein, da die Signale eine Gleichstromkomponente enthalten [*4.2*].

Eine wichtige Gruppe von Meßgeräten dient zur Bestimmung der quasistatischen Vierpolparameter (vgl. § 4.274). Diese können sowohl aus den Kenn-

linienfeldern grafisch ermittelt als auch unmittelbar mit *Brückenschaltungen* bestimmt werden. In Abb. 4.49 ist eine solche zur Messung des Kurzschlußeingangswiderstandes h_{ie} für die Emitterschaltung dargestellt. Im Emitterkreis wird der Strom I_e durch einen variablen Widerstand R_e auf verschiedene Werte eingestellt, während die Wechselspannung von z. B. 1000 Hz durch einen Generator G überlagert wird. Der Brückenabgleich wird durch das geeichte Potentiometer R_b von 1 kΩ bewirkt und am Röhrenvoltmeter V abgelesen. Durch umschaltbare Widerstände sind Meßbereiche bis 1, 3 und 10 kΩ einstellbar. Analog lassen sich auch die anderen h-Parameter ermitteln [*4.21*, *4.37*, *4.49*, *4.50*].

Zur Messung der HF-Parameter von Transistoren, also der komplexen Ein- und Ausgangswiderstände, können die üblichen Impedanzmeßgeräte (s. § 7.54) benutzt werden, wobei darauf zu achten ist, daß die Aussteuerung des Meßobjektes im Linearitätsbereich bleibt.

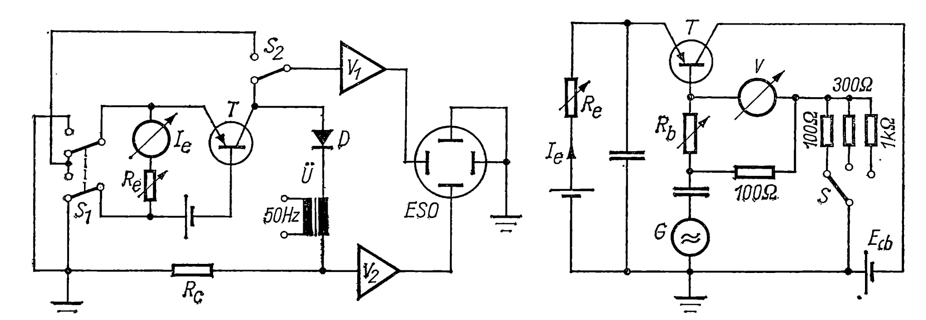


Abb. 4.48 Transistor-Kennlinienschreiber

Abb. 4.49 Brückenschaltung zur Messung von h_{ie}

4.3 Gasentladungsröhren [*4.20*, *4.25*, *4.48*, *4.53*]

Neben Hochvakuumröhren und Transistoren werden auch gasgefüllte Röhren zu Verstärkungszwecken benutzt, in denen eine Gasentladung aufrechterhalten und durch einen Steuerimpuls gezündet wird. Die häufigsten Anwendungen dieser Röhren liegen auf dem Gebiet der Starkstromtechnik, wo sie zur Gleichrichtung und zum sehr schnellen Einschalten von starken Strömen bei hoher Leistung benutzt werden. Diese Anwendungen werden ausführlicher in § 15 behandelt; hier sollen nur einige Grundzüge der Gasentladung sowie Gasentladungsgefäße für kleine Leistungen besprochen werden.

4.31 Durchgang von elektrischem Strom durch Gase [*4.47*]

Legt man an zwei sich gegenüberstehende Elektroden aus Metall in einem abgeschlossenen, mit verdünntem Gas gefüllten Gefäß eine Gleichspannung und trägt diese über dem Entladungsstrom auf, so findet man eine in Abb. 4.50 stark verallgemeinert wiedergegebene Kennlinie, die sich in einzelne Abschnitte unterteilen läßt. Im Bereich A—B hat man es mit einer *unselbstän-*

digen Entladung zu tun, welche einer äußeren Ionisation durch Bestrahlung der Katode mit UV-Licht oder Röntgenstrahlung bedarf. Während im Hochvakuum alle ausgelösten Primärelektronen zur Anode fliegen und der Strom den pro Sekunde ausgelösten Elektronen entspricht, kann der Strom durch eine Gasfüllung um einen von Spannung, Gasart, Gasdichte usw. abhängigen Faktor η verstärkt werden. Die Ursache dafür liegt darin, daß die von der Katode emittierten Elektronen Gasmoleküle ionisieren und pro Zentimeter Weglänge α Ionenpaare bilden, so daß sich für den Verstärkungsfaktor die Beziehung

$$i/i_0 = \eta = e^{\alpha d} \tag{4/73}$$

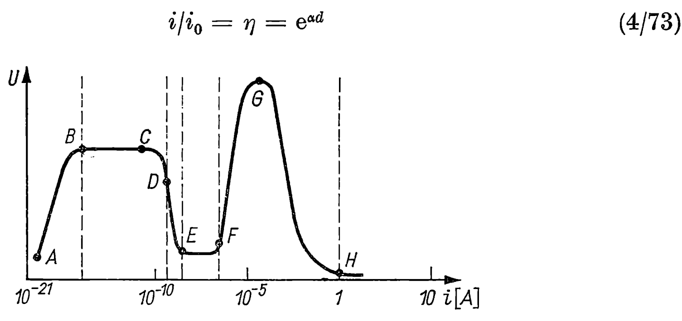


Abb. 4.50 Schematische U,I-Kennlinie einer Gasentladung

ergibt, wenn d der Abstand der Elektronen und α der *1. Townsend-Ionisationskoeffizient* ist. Mit der von TOWNSEND angegebenen Formel

$$\frac{\alpha}{p} = A\,e^{-Bp/E}, \tag{4/74}$$

welche die Abhängigkeit des Koeffizienten α vom Druck p, der Feldstärke E sowie den beiden durch die Gasart bestimmten Konstanten A und B darstellt, ergibt sich aus Gl. (4/73) die Beziehung

$$\ln \eta = A p d\, e^{-Bp/E}. \tag{4/75}$$

Aus dieser geht hervor, daß der Verstärkungsfaktor η sehr schnell und monoton mit der elektrischen Feldstärke und damit mit der Spannung ansteigt. Auch erkennt man aus Gl. (4/75), daß sowohl für $p \to 0$ als auch für sehr große Drucke $\ln \eta$ gegen Null geht, d. h. $\eta \approx 1$ wird.

Im Abschnitt B—C der Abb. 4.50 werden im Entladungsraum nicht nur Ionen erzeugt, sondern diese und auch Photonen treffen auf die Katode, wodurch der Primärstrom so weit vergrößert wird, daß die Entladung auch ohne äußere Ionisationsquelle brennt. Für diesen *dunklen Vorstrom* (Townsend-Strom) gilt im homogenen Feld die Beziehung

$$i = \frac{i_0 e^{\alpha d}}{1 - \gamma e^{\alpha d}}, \tag{4/76}$$

welche im Nenner den Koeffizienten γ für die *Sekundäremission* enthält, der die Zahl der Elektronen angibt, die pro auffallendes Ion aus der Katode befreit werden. Der Bereich des dunklen Vorstroms erstreckt sich von etwa 1 pA bis 1 μA; ein Einfluß der Raumladungen auf den Feldverlauf ist noch nicht vorhanden. Die Trägerbildung im Gas geht ausschließlich durch einfachen Elektronenstoß vor sich. Wird der Nenner in Gl. (4/76)

$$1 - \gamma e^{\alpha d} = 0,$$

so wird der Strom unbestimmt und steigt so weit an, wie dies der vorgeschaltete Widerstand R erlaubt, wobei die *Einsatzspannung*, die von der Größe 1000 V ist, über ein „Plateau" $B-C$ konstant bleibt. Ist R klein genug, so daß der Entladungsstrom auf 1 mA bis 0,5 A ansteigen kann, so findet man zwischen $E-F$ ein zweites Plateau der *normalen Glimmentladung*, deren Brennspannung in der Größenordnung 100 V liegt. Durch geringe Beimengungen anderer Gase kann die Einsatzspannung einer He- oder Ne-Entladung um 50% herabgesetzt werden (Penning-Effekt). Im inhomogenen Feld, wie etwa zwischen koaxialen Zylinderelektroden, ist die Feldstärke an der Oberfläche der Innenelektrode am größten und bewirkt, daß die Elektronen nur in diesem Bereich anregen und ionisieren. Die Innenelektrode erscheint daher besonders bei höheren Drucken mit einer dünnen, leuchtenden Haut überzogen, die man als *Korona* bezeichnet.

Steigert man in einer normalen Glimmentladung den Strom, so wird die Entladung *anomal*, wobei die Brennspannung wieder zunimmt, bis sie nach Überschreiten eines Maximums G auf einen kleinen Wert der Größenordnung 10 V zusammenbricht und in eine *Lichtbogenentladung* (H) übergeht. Die Ursache für dieses Verhalten liegt im Einfluß der Raumladung bei großen Stromdichten; der Vorgang wird nun komplex und muß vom Standpunkt der Plasmaphysik behandelt werden.

4.32 Plasmaentladung [*4.71*]

Die elektrisch leitende und gewöhnlich leuchtende Entladung zwischen zwei Elektroden einer Entladungsröhre wird nach Langmuir *Plasma* genannt. Es stellt ein elektrisch quasi-neutrales Volumen dar, das aus etwa der gleichen Konzentration positiver Ionen und Elektronen sowie neutralen Gasmolekülen besteht. Ionen und neutrale Gasatome bzw. -moleküle befinden sich im thermischen Gleichgewicht und besitzen die gleiche Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung; die Elektronen sind *nicht* im thermischen Gleichgewicht mit den Ionen. Infolge der hohen Beweglichkeit der Elektronen erhält die Elektronenwolke eine sehr viel höhere Geschwindigkeit unter dem Einfluß des geringen Plasmagradienten; doch ist anzunehmen, daß die Elektronen unter sich eine Maxwell-Verteilung besitzen, die einer Temperatur zwischen 20000 und 50000 K entspricht.

Die elektrische Leitfähigkeit eines Plasmas ist annähernd gegeben durch die Beziehung

$$\sigma = n_e e \mu^-, \tag{4/77}$$

wenn n_e die Konzentration und μ^- die Beweglichkeit der Elektronen bedeuten. Für letztere kann die bekannte Langmuir-Formel

$$\mu^- = \frac{0{,}75 e \lambda}{m \bar{c}} \tag{4/78}$$

eingesetzt werden, worin λ, m und $\bar{c}$ freie Weglänge, Masse und mittlere Geschwindigkeit der Elektronen sind. In *Tabelle 4.10* sind die Plasmaeigenschaften für verschiedene Entladungsformen nach [*4.71*] zusammengestellt.

Tabelle 4.10 Eigenschaften des Plasmas für verschiedene Entladungen

Plasmatyp	Gas	Druck Torr	Strom A	n_e cm^{-3}	λ cm	σ $(\Omega\ cm)^{-1}$	T_g K	T_e K
Glimmkatode	Hg	0,005	0,01	10^{10}	6	10^{-2}	300	30000
Ionosphäre	Luft	0,01	—	$>10^{6}$	0,7	10^{-3}	≈ 250	≈ 250
Hg-Gleichrichter	Hg	0,05	50···100	10^{12}	0,6	2	425	15000
Ne-Lämpchen	Ne	5	0,025	$5 \cdot 10^{12}$	$3 \cdot 10^{-3}$	3	400	25000
Lichtbogen	Luft	1 at	≈ 10	10^{14}	$2 \cdot 10^{-4}$	0,2	6500	6500
Hg-Bogen	Hg	1 at	≈ 5	10^{15}	10^{-5}	0,3	6500	6500
Hg-Bogen	Hg	10 at	≈ 5	10^{16}	10^{-6}	0,3	7500	7500
Hg-Bogen	Hg	100 at	≈ 2	10^{17}	10^{-7}	0,4	8000	8000

Bei den meisten Entladungen sind nur 0,001 bis 0,01% der neutralen Gasatome ionisiert; auch im Hg-Hochdruckbogen ist die Ionisation nur als schwach anzusehen. Vollkommen ionisierte Gase erhält man in Hochstromentladungen bei niedriger Gasdichte, wie sie bei Fusionsexperimenten erzeugt werden.

Von großer praktischer Bedeutung für die Wirkungsweise technischer Gasentladungsgefäße ist die *Zerfallzeit* des Plasmas, d. h. die Zeit, die nach Abschalten der Energiezufuhr und damit Neuerzeugung der Träger verstreicht, bis dieses neutralisiert ist. Die *Zeitkonstante* τ_r für den Zerfall hängt vom Gas, der Elektrodengeometrie und vom Druck ab. Für Niederdruckentladungen von einigen Torr Druck (Gleichrichter, Stromtore) gilt annähernd

$$\tau_r = \frac{\Lambda^2}{D_a}, \tag{4/79}$$

wenn Λ die Diffusionslänge und D_a die ambipolare Diffusionskonstante ist, die sich aus der Beziehung

$$D_a = \frac{D^+ \mu^- + D^- \mu^+}{\mu^+ + \mu^-} \tag{4/80}$$

berechnet. Darin bedeuten D^+ und D^- die Diffusionskoeffizienten, μ^+ und μ^- die Beweglichkeit von Ionen bzw. Elektronen. Für Niederdruckentladungen

ist $\mu^- \gg \mu^+$ und $T_e \gg T_i$, wodurch sich Gl. (4/80) vereinfacht zu

$$D_a = \frac{kT_e}{e}\,\mu^+ \tag{4/80a}$$

ergibt.

Bei der *Glimmentladung* treten, wie in Abb. 4.51 schematisch dargestellt ist, an der Katode dunkle und leuchtende Bänder auf, deren Zusammenhang mit der Feldstärke eindeutig ist. Zwischen der Katode K und der ersten Katodenschicht b liegt der Astonsche Dunkelraum, der bei hohen Katodenfällen und in Molekülgasen vollkommen fehlt. Auf die dünne, schwachleuchtende Lichthaut der ersten Katodenschicht b folgt die schwach leuchtende Wolke des Katodendunkelraums c, das negative Glimmlicht d als hellste Lichtpartie des Katodengebietes mit scharfer Begrenzung nach c. Hierauf wird der sehr schwach leuchtende Faradaysche Dunkelraum e beobachtet,

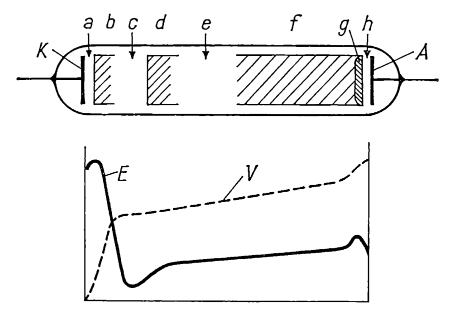


Abb. 4.51 Glimmentladung mit Feld- und Potentialverlauf

der entweder bei kleinem Anodenabstand bis zu dieser reicht oder in die positive Säule f übergeht. Unmittelbar vor A liegen das anodische Glimmlicht g und der Anodendunkelraum h.

Bei kleinem Abstand von Katode zu Anode, wie z. B. bei *Stabilisatorröhren*, fehlt die positive Säule völlig, und der Spannungsabfall entspricht der Potentialdifferenz am Katodenfall. Diese ist, wie aus Abb. 4.50 bei E—F hervorgeht, über einen begrenzten Strombereich konstant. Das Glimmlicht breitet sich mit variabler Stromentnahme über die Katode aus oder zieht sich zusammen, wobei die Brennspannung der Entladung fast vom Strom unabhängig ist (s. § 4.36). Dieser *normale Katodenfall* ist eine Stoffkonstante und hängt von der Kombination Gas—Katodenmaterial ab. Er ist am höchsten bei elektronegativen Gasen, wie O_2 oder Hg-Dampf (300···500 V), am kleinsten bei Edelgasen (Ar—Kr 64 V).

4.33 Lichtbogen [4.96]

Eine normale Glimmentladung wird bei Steigerung der Stromstärke anomal (s. Abb. 4.50 G), d. h., der Katodenfall nimmt zu, übersteigt ein Maximum und fällt dann bei hohen Stromdichten auf kleine Werte ab. Gleichzeitig

schnürt sich die katodische Ansatzfläche der Entladung auf einen *Brennfleck* zusammen, dessen Stromdichte auf 0,5···10 kA/cm² anwächst. Diese durch kleinen Katodenfall und große katodische Stromdichte charakterisierte Entladungsform wird *Lichtbogen* genannt. Durch die ansteigende thermische Belastung der Katode treten zusätzliche Effekte, wie thermische Emission bei hochschmelzenden Katoden oder Verdampfen des Katodenmaterials bei Hg-Katoden, auf. Grundsätzlich lassen sich Lichtbogen in folgende Gruppen einteilen:

1. Bogen in Gasen bei geringem oder Außendruck; Hochdruckbogen,
2. Bogen mit Katoden aus flüssigem Metall wie Hg, Sn, Bi oder Na,
3. thermionische Bogen mit Katoden aus z. B. Wolfram, mit Elektronenemission durch Stromwärme und Ionenbeschuß des Brennflecks,
4. Bogen mit Metallelektroden, die sich wie 2. und/oder 3. verhalten.

Hochdruckbogen zeigen die in Abb. 4.52 schematisch wiedergegebene Potentialverteilung, die durch einen starken *Katodenfall*, einen fast linearen Verlauf in der positiven Säule und einen kleineren *Anodenfall* charakterisiert ist. Der Katodenfall liegt bei 9···12 V und stellt im wesentlichen das Ionisierungs-

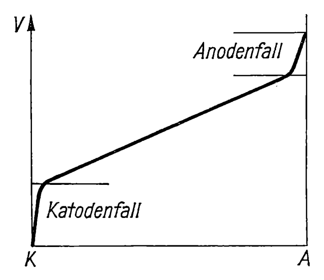




Abb. 4.52 Potentialverteilung an einem Kaltkatodenbogen

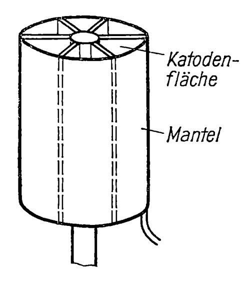


Abb. 4.53 Heizkatode mit Strahlungsschutz

potential des Gases bzw. des Dampfes dar. An der Anode herrscht im Falle des Kohlebogens eine Stromdichte von etwa 40 A/cm², die bei Metallanoden bis 10···100 kA/cm² ansteigen kann. Diese hohe Energiedichte an der Anode bewirkt eine Verdampfung des Anodenmaterials; der Anodenfall liegt in der Größe der Ionisierungsspannung des Metalldampfes der Anode und beträgt 7···10 V.

Heizkatodenbogen sind Niederdruckbogen, die hauptsächlich in Thyratrons (§ 4.35), Fluoreszenzlampen und Hochstromionenquellen benutzt werden. Obwohl bei diesen Bogen die Elektronenemission der Katode durch die äußere Heizung bewerkstelligt wird, ein Katodenfall dazu also nicht erforderlich wäre, tritt ein solcher auf und entspricht wie oben der Ionisierungsspannung des Gases. Als Katoden kommen die bei Elektronenröhren benutzten *Oxidkatoden* (s. § 4.11) oder *Barium—Nickel-Legierungen* zur Anwendung, die bei höherer Temperatur widerstandsfähiger gegen Ionenbeschuß sind.

4.34 Gleichrichter

Heizkatodengleichrichter benutzen eine Bogenentladung mit sehr hohen Stromstärken, wobei der Katodenfall ($\approx$ 10 V) so lange konstant bleibt, wie die Gesamtemission der Katode nicht überschritten wird. Die Stromleitung in der Durchlaßrichtung beginnt, wenn die Anodenspannung gerade die Ionisierungsspannung des Füllgases überschreitet. Um eine lange Lebensdauer der Katode zu erreichen, soll man die Anodenspannung einen bestimmten Wert, z. B. bei Hg 24 V, nicht übersteigen lassen, so daß der Ionenbeschuß der Katode klein bleibt. Aus diesem Grund wird die Katode vor Anlegen der Anodenspannung vorgeheizt. Zur Verminderung der Wärmeabstrahlung und zum gleichzeitigen Schutz der Katodenoberfläche gegen Ionenbombardement wird diese sternförmig (Abb. 4.53) ausgebildet und von einem Nickelrohr umgeben, eine Maßnahme, die bei Hochvakuumröhren wegen der dadurch entstehenden starken Raumladung nicht anwendbar ist. Die Sperrspannung von Hg-Dampfgleichrichtern liegt bei 5···20 kV, die maximalen Ströme zwischen 2 und 100 A. Näheres s. § 15.5.

4.35 Thyratron [4.24, 4.60]

Thyratrons oder *gittergesteuerte Gleichrichter* sind Gastrioden, bei denen zwischen Anode und Katode ein Steuergitter angebracht ist. Sie unterscheiden sich von der Hochvakuumtriode (vgl. § 4.14) dadurch, daß nach dem Zünden der Entladung das Gitter den Anodenstrom nicht mehr zu beeinflussen vermag. Thyratrons sind daher nur in Wechselspannungskreisen zu verwenden, in denen die Anode genügend lange negativ gepolt ist und die Entladung verlöschen kann. In Abb. 4.54 ist das Thyratron im Schnitt dargestellt. Meist

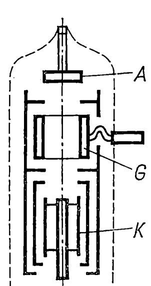


Abb. 4.54 Schnitt durch ein Thyratron

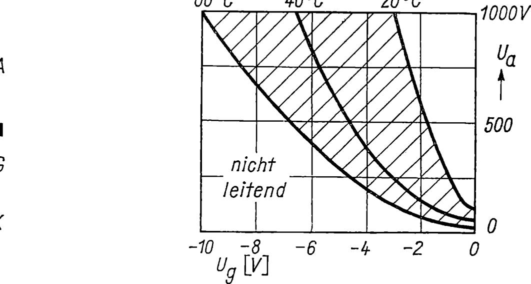


Abb. 4.55 Zündkennlinien eines Thyratrons (GL 5559)

wird eine abgeschirmte Oxidkatode K (s. Abb. 4.53) benutzt, der die Anode A aus Graphitkohle oder Metall gegenübersteht. Dazwischen ist das Gitter G angeordnet, das entweder die Form eines Hohlzylinders oder einer kreisförmigen Scheibe mit vielen runden Löchern hat. Da das Gitter schwach negativ gegen das Plasma geladen ist, fließt ein kleiner Gitterstrom, der aber praktisch nicht ins Gewicht fällt. Das Gitter ist meistens kräftig ausgebildet, um die von A und K zugestrahlte Energie ableiten zu können. Es wirkt als

elektrostatische Abschirmung, die das Anodenfeld gegen die Katode schützt und einen Durchbruch im ungezündeten Zustand verhindert. Wächst die positive Spannung am Gitter an, so nehmen Durchgriff des Anodenfeldes und Dunkelstrom so lange zu, bis eine genügend starke Raumladung erzeugt ist und die Röhre zündet. Durch geeignete Ausbildung des Gitters kann der Zündvorgang mit negativer oder positiver Spannung gegen die Katode eingeleitet werden. In Abb. 4.55 sind die für verschiedene Temperaturen geltenden Zündkennlinien als Funktion der Anodenspannung dargestellt. Die Zündleistung für ein 10-V-Gittersignal liegt bei 0,1 mW; an die Anode werden hiermit bei 1000 V Anodenspannung 5···10 A geschaltet.

Als *Füllgas* kommen Edelgase oder eine Mischung von diesen und Quecksilberdampf zur Anwendung; Hg-Dampf steht im Gleichgewicht mit einem kleinen Tröpfchen Quecksilber, erfordert aber etwa konstante Betriebstemperatur. Für stark wechselnde Temperaturen wird *Xenon* wegen des niedrigen Ionisationspotentials benutzt.

Von Knoop und Kroebel [*4.43*] sowie Knoop [*4.42*] wurde die Eignung des Thyratrons als Impulsverstärkerröhre bzw. der Zündvorgang eingehend untersucht. Als erforderliche Impulsdauer für die Zündung wird etwa 1 μs gefunden, wobei die Zündempfindlichkeit bei 0,1 V liegt.

Wasserstoff-Thyratrons [*4.18*] enthalten anstelle von Xenon, Argon oder Quecksilberdampf als Füllgas *Wasserstoff* wegen seiner sehr kurzen Erholzeit. Um bei längerem Betrieb die Gasaufzehrung durch die Entladung zu vermeiden, werden diese Röhren mit Titan- oder Zirkon-Hydrid-Reservoirs in Katodennähe ausgerüstet, die beim Erhitzen Wasserstoff freigeben. Trotz fortschreitender Verwendung von *Schalttransistoren* (s. § 4.268), mit denen Ströme bis 1000 A innerhalb von 10 ns geschaltet werden können, haben sich die Wasserstoffthyratrons für die Impulsschaltung von 2 kA bei 40 kV Anodenspannung besonders in der Radartechnik einen festen Platz erobert, wobei Impulsleistungen von 30 MW erzielt werden.

Das *Plasmatron* [*4.39*] ist eine He-Gasdiode mit geringer Betriebsspannung, direkt geheizter Katode und einer Hilfskatode zur Steuerung der Hauptentladung.

Das *Glimm-Thyratron* ist eine Glimmröhre mit zusätzlichem Steuergitter, durch das die Zündspannung der Hauptstrecke herabgesetzt wird. Es besitzt vier Metallelektroden, von denen die stabförmige Hilfskatode und die mit einer Zentralöffnung versehene Katode zur dauernden Aufrechterhaltung einer Hilfsentladung dienen. Mit Hilfe eines zwischen Katode und Anode liegenden Steuergitters wird der Durchgriff der vor der Katode vorhandenen Elektronenwolke in die Hauptentladung gesteuert. Anodenstrom und -spannung liegen bei 20 mA bzw. 120 V.

In *Tabelle 4.11* sind die Eigenschaften einiger Thyratrons zusammengestellt.

4.36 *Ignitron* [*4.83*]

Das *Ignitron* ist ein Gasentladungsgefäß mit Quecksilberkatode, an der für jeden Stromdurchgang mit Hilfe einer Zündelektrode ein Lichtbogen eingeleitet wird. Die maximale Stromstärke kann dabei Tausende von Ampere

Tabelle 4.11 Eigenschaften von Thyratrons

Typ	Füllgas	Heizung		Sperr-spannung	Katodenstrom A		Leistung kW	
		V	A	kV	mittl.	max.	mittl.	max.
PL10	Edelgas	1,85	3,4	0,4	0,1	4		
PL57 (5559)	Hg-Dampf	5,0	4,5	1,5	2,5	15		
PL260	Hg-Dampf	5,0	25	2,0	20	200		
GL-3C23	Hg-Dampf	2,5	7,0	1,2	1,5	6		
GL-5855	Hg-Dampf	2,5	34,0	1,5	18	160		
1258	H_2	—	—	1,0	0,05	20	0,025	10
5C22	H_2	—	—	16,0	0,2	325	1,6	$2{,}6 \cdot 10^3$
GL-7390	H_2	—	—	33,0	4,0	2000	60	$33 \cdot 10^3$
S1,3/0,5iV	X	6,3	0,6	1,3	0,1	0,5		
S1,3/10dV	X	2,5	5	1,3	1	10		
S1,5/80dV	X	2,5	21	1,5	6,4	80		
G10/1d	Hg	2,5	5	10/2	0,25/0,51/2			
S15/5d	Hg	5	19	15	2	5		
S3/35iIII	H_2	6,3	2,4	3	0,045	35		

betragen. In Abb. 4.56 ist der Aufbau eines *Quecksilber-Ignitrons* vereinfacht dargestellt. Das Entladungsgefäß *C* besteht aus einem doppelwandigen V2A-Mantel, der von Kühlwasser durchflossen wird; in seinem Boden ist isoliert die Zündelektrode *I* befestigt, die aus einem spitzen Stift aus Wolfram besteht und von oben in die Quecksilberkatode *K* eintaucht. Die Anode *A* besteht aus Graphit und ist an einer zylindrischen Glaseinschmelzung im Gefäßdeckel montiert. Durch einen kurzen Stromimpuls von 1 ms Dauer und 10···30 A Spitzenstrom wird auf der Hg-Katode ein Brennfleck erzeugt, der schnell vom Ignitor wegwandert und auf der Hg-Oberfläche wild herumtanzt. Mit zunehmender Stromstärke bilden sich viele solcher Brennflecken, die dauernd herumwandern. Während des Stromdurchgangs verdampft durch das Bombardement der Hg-Katode mit Hg-Ionen eine große Menge Quecksilber, das an den gekühlten Rohrwänden wieder kondensiert. Da der Spannungsabfall im Lichtbogen nur 15···18 V beträgt, ist der Gesamtwirkungsgrad des Ignitrons auch bei relativ kleinen Spannungen sehr hoch. Die Hauptanwendung dieses gesteuerten Gleichrichters liegt auf dem Gebiet der Leistungssteuerung und -regelung bei großen Motorantrieben, Schweißgeräten u. a.

4.37 Glimmröhren

Glimmentladungsröhren, deren Spannungs-Strom-Charakteristik in Abb. 4.50 durch das Plateau *E—F* wiedergegeben ist, werden hauptsächlich in Form von Kaltkatodenröhren als *Glimmrelais* verwendet. Die Anodenspannung liegt in der Größe 80···150 V; durch eine dritte Elektrode lassen sich relativ kleine Ströme einschalten.

Breite Anwendung für die Spannungsstabilisierung (s. § 16.22) findet die *Spannungsstabilisatorröhre* [*4.5*], die eine großflächige Kaltkatode besitzt. Diese ist z. T. mit einer Glimmentladung konstanter Stromdichte bedeckt; steigt der Strom, so breitet sich die Glimmentladung ohne nennenswerte Änderung der Brennspannung weiter aus. Bei Stromänderungen zwischen 5 und 40 mA steigt die Brennspannung stetig nur um etwa 3% an. Solche Röhren werden für Betriebsspannungen zwischen 75 und 150 V und einen Regelbereich von 1···10 bzw. 50···200 mA hergestellt.

4.4 Hall-Generator [*4.44, 4.73, 4.93, 4.95*]

E. H. Hall hat 1879 entdeckt, daß bei einem bandförmigen Leiter, der in Längsrichtung von einem Strom durchflossen und senkrecht zur Bandebene von einem Magnetfeld durchsetzt wird, an den Schmalseiten eine Potentialdifferenz auftritt. Diese Spannung wird Hall-Spannung genannt. Sie entsteht

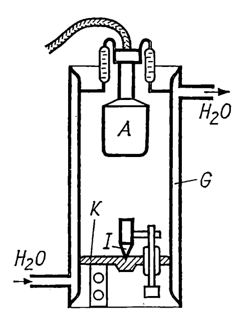


Abb. 4.56 Aufbau eines Ignitrons

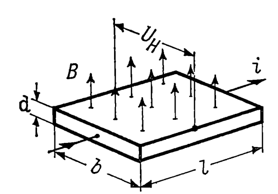


Abb. 4.57 Hall-Generator

durch die Lorentz-Kraft, die auf die Ladungsträger (im allgemeinsten Fall Elektronen und Löcher), senkrecht zur Feld- und Stromrichtung wirkt. Legt man die in Abb. 4.57 eingetragenen Bezeichnungen zugrunde und nimmt man als Ladungsträger Elektronen an, so werden diese an einer Schmalseite der Länge l angereichert, an der anderen Seite verdünnt, wodurch die Hall-Spannung U_H zustande kommt.

Unter Berücksichtigung der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen sowie der thermischen Energie findet man für die Hall-Spannung den Ausdruck

$$U_H = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{n \cdot e} \frac{iB}{d} = R_H \frac{iB}{d}. \tag{4/81}$$

Darin bedeuten n die Elektronenkonzentration, B die magnetische Induktion und d die Dicke des Leiters in Feldrichtung. Der Proportionalitätsfaktor R_H wird *Hall-Koeffizient* genannt. Die Hall-Spannung ist nach Gl. (4/81) dem Produkt aus Strom und magnetischer Induktion proportional und sollte ferner für kleine Elektronenkonzentration anwachsen. Setzt man nach Gl. (4/29) für die elektrische Leitfähigkeit $\sigma = e \cdot n \cdot \mu$, wobei die Beweglichkeit

$\mu = \boldsymbol{v}/\boldsymbol{E}$ ist, so gilt für den Hall-Koeffizienten

$$R_H = \frac{3\pi}{8} \frac{\mu}{\sigma}. \tag{4/82}$$

Große Hall-Spannung tritt in Materialien mit kleiner Ladungsträgerkonzentration und großer Beweglichkeit auf, wie dies bei *Halbleitern* (s. a. § 4.21) der Fall ist. Sind gleichzeitig Elektronen und Defektelektronen vorhanden, so ergibt sich U_H in erster Näherung als Differenz aus beiden Hall-Spannungen. In *Tabelle 4.12* sind für verschiedene Materialien die in Frage kommenden Stoffkonstanten und der Hall-Koeffizient zusammengestellt.

Tabelle 4.12 Stoffkonstanten für den Hall-Effekt

Material	μ cm^2/Vs		ϱ Ω cm	R_H cm^3/As
	Löcher	Elektronen		
Kupfer	—	27	$1{,}6 \cdot 10^{-6}$	$-5{,}3 \cdot 10^{-5}$
Wismut	—	5000	10^{-4}	$-9{,}4 \cdot 10^{-5}$
Silizium	350	1400	$0{,}73 \cdot 10^{6}$	-10^{8}
Germanium	1800	3600	46	$-3{,}5 \cdot 10^{4}$
In—Sb	700	63000	$7 \cdot 10^{-3}$	$-6 \cdot 10^{2}$
In—As	200	30000	0,25	$-9 \cdot 10^{3}$

Abb. 4.58 Belasteter Hall-Generator

Eine Anordnung nach Abb. 4.57 mit einem Halbleiterplättchen, das eine belastbare Hall-Spannung liefert, wird *Hall-Generator* genannt. Das Halbleitermaterial wird vom Steuerstrom i durchflossen und senkrecht dazu vom Steuerfeld B durchsetzt. Die Hall-Spannung ist ferner vom Seitenverhältnis l/b abhängig und erreicht bei großen Werten von l/b den in Gl. (4/81) angegebenen Wert. Soll dem Hall-Generator Leistung entnommen werden, d. h., wird dieser nach Abb. 4.58a mit einem Außenwiderstand R_a belastet, so gilt

$$U_{H0} = U_H + R_i\,(B) \cdot i_H, \tag{4/83}$$

wenn U_{H0} die Leerlaufspannung nach Gl. (4/81) und $R_i(B)$ der vom Magnetfeld abhängige Innenwiderstand ist. Mit $i_H = U_H/R_a$ findet man aus Gl. (4/83)

$$U_H = \frac{U_{H0}}{1 + R_i(B)/R_a}. \tag{4/83a}$$

In Abb. 4.58b ist die Belastungskennlinie des Hall-Generators nach Gl. (4/83) für verschiedene Steuerfelder B dargestellt, wobei $R_i(B)$ als konstant angenommen wurde. Tatsächlich wächst R_i quadratisch mit B an; für $B = 1$ T wird $R_i(B)/R_{i0}$ bei InSb etwa 5, bei InAs 1,05.

Die wichtigsten Anwendungen des Hall-Generators liegen nicht auf dem Gebiet der Leistungs- oder Stromverstärkung, sondern auf dem der Magnetfeldmessung (vgl. § 11.74). Werden gleichzeitig Strom i und magnetische Induktion B verändert, so wirkt dieser als Analogmultiplikator. Er besitzt ferner die Eigenschaften eines nichtreziproken Vierpols.

4.5 Supraleitende Verstärker und Schaltelemente [*4.12, 4.63*]

Seit einigen Jahren werden für spezielle Probleme Schaltelemente angewandt, welche auf den besonderen Eigenschaften eines *supraleitenden Materials* beruhen. Diese Schalt- und Speicherelemente werden fast ausschließlich in Miniaturtechnik durch Hochvakuumaufdampfen auf einem isolierenden Substrat hergestellt; sie zeichnen sich durch äußerst geringen Platzbedarf und hohe Schaltgeschwindigkeiten aus und werden bei der Temperatur des flüssigen Heliums betrieben.

4.51 Magnetisches Verhalten eines Supraleiters

Wie in § 9.8 ausführlicher dargelegt wird, verschwindet bei einer Reihe von Elementen und einer sehr großen Zahl metallischer Legierungen und Verbindungen unterhalb einer charakteristischen Temperatur, dem *Sprungpunkt* T_c, der elektrische Widerstand vollkommen. Durch Anlegen eines Magnetfeldes bestimmter Stärke wird die Supraleitung wieder aufgehoben, wobei der Zusammenhang von Sprungpunkt und Magnetfeld durch die *magnetische Schwellenwertkurve* gegeben ist, die für einige supraleitende Elemente in Abb. 4.59 dargestellt ist. Durch ein Magnetfeld ausreichender Stärke kann daher ein supraleitender Draht in den normalleitenden Zustand „geschaltet“ werden und umgekehrt. Dabei ist es belanglos, ob das Feld von außen angelegt oder durch den Belastungsstrom selbst an dessen Oberfläche erzeugt wird (Silsbee-Hypothese). In den elementaren Supraleitern fließt der Strom nur in einer dünnen Oberflächenschicht, der *Eindringtiefe*, die einige 10 nm dick ist. Für diesen Typ des Supraleiters läßt sich die Schwellenwertkurve der Abb. 4.59 in guter Näherung durch die Beziehung

$$H_c = H_{c0}[1 - (T/T_c)^2] \qquad (4/84)$$

beschreiben, worin H_{c0} das kritische Feld bei $T = 0$ bedeutet.

Eine zweite wichtige Eigenschaft läßt sich am *supraleitenden Ring* (Abb. 4.60) beobachten, wenn dieser in ein magnetisches Feld H parallel zu dessen Achse gebracht wird. Im Gegensatz zur Elektrodynamik des Normalleiters wird im Ring beim Anlegen des äußeren Magnetfeldes (a) ein permanenter Suprastrom erzeugt, der dem Feld proportional und so gerichtet ist, daß der die Ringöffnung durchsetzende magnetische Fluß in der Stärke erhalten bleibt, wie er *vor* dem Anlegen des Feldes war. Steigert man das äußere Feld weiter, bis an

der Ringoberfläche das kritische Magnetfeld, das sich vektoriell aus Außenfeld und Stromfeld zusammensetzt, nach Abb. 4.59 überschritten wird, so bricht die Supraleitung zusammen, und das Außenfeld durchsetzt die gesamte Ringfläche. Schaltet man das Außenfeld ab, so wird der Ring wieder supraleitend, und der in ihm induzierte Strom ist so gerichtet, daß er den ihn durchsetzenden magnetischen Fluß konserviert. Nach Abschalten von H_a bleibt ein eingefrorener Fluß erhalten, der der kritischen Feldstärke H_c proportional ist. In einem zweifach zusammenhängenden, supraleitenden Gebilde, z. B. in einem Ring oder einem dünnen Blech mit Loch, kann durch einen kurzen Feldimpuls ein magnetischer Fluß, d. h. eine Information, gespeichert werden.

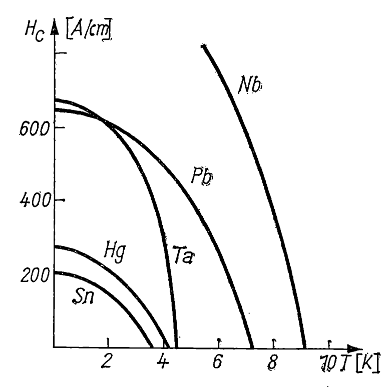


Abb. 4.59 Magnetische Schwellenwertkurve

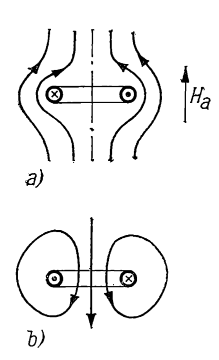


Abb. 4.60 Supraleitender Ring

4.52 Supraleitende Schalter

Wie bereits in § 2.332 beschrieben, wird für besondere Meßaufgaben, z. B. die Messung von Thermospannungen bei sehr tiefen Temperaturen, der durch ein Magnetfeld nach Abb. 4.59 erzwungene Übergang von der Supra- in die Normalleitung dazu benutzt, einen Gleichstrom periodisch zu unterbrechen und abwechselnd seine Richtung umzukehren. Durch einen nachgeschalteten Wechselstromverstärker lassen sich daher sehr kleine Gleichspannungssignale nachweisen.

Olsen [*4.66*] hat 1958 einen supraleitenden Gleichrichter angegeben, dessen Schaltelement — ein Draht oder eine Spule — aus einem supraleitenden Element besteht, das durch ein synchrones magnetisches Steuerfeld abwechselnd supraleitend bzw. normalleitend gemacht wird, wobei allerdings der Widerstand in der „Sperrichtung" dem immer noch kleinen Restwiderstand entspricht. Buchhold [*4.41*] hat diesen Vorschlag weitergeführt und ein Gleichrichterelement für hohe Ströme entwickelt, das in Abb. 4.61 dargestellt ist. Das Schaltelement B besteht aus einem 12 mm breiten und 25 µm dicken bifilar gefalteten Niobiumband, das im supraleitenden Zustand 400···1000 A tragen kann. Dieses Band befindet sich in einem magnetischen Joch J aus „Deltamax"-Material, in dem mit Hilfe der Spule S aus supraleitendem Material ein Feld erzeugt wird, das B transversal durchsetzt und abhängig vom

Strom im Band dessen Supraleitung zwischen 1200 und 2200 A/cm zerstört. Diese Vorrichtung stellt einen fremdgesteuerten Gleichrichter dar, der in einer Schaltung nach Abb. 4.62 in *Halbwellenanordnung* hohe Gleichströme in einem supraleitenden Kreis erzeugen kann. Der Sekundärkreis besteht aus der Sekundärspule des supraleitenden Transformators $Ü$, dem Gleichrichterband B und z. B. einer supraleitenden Kryospule L (s. § 13.34), in der ein starkes Magnetfeld erzeugt werden soll. Durch phasenrichtiges Einschalten des Steuerstroms i_s in bezug auf den Sekundärstrom i erhält dieser eine starke Gleichstromkomponente.

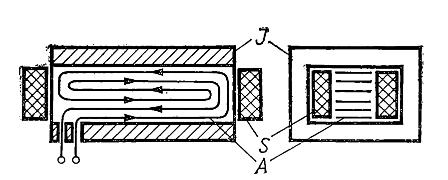


Abb. 4.61 Supraleitender Gleichrichter nach BUCHHOLD [*4.14*]

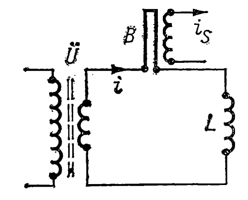


Abb. 4.62 Supraleitender Halbwellengleichrichter

4.53 *Kryotron*

Supraleitende Schaltelemente nach § 4.52 lassen sich nur mit relativ niedrigen Schaltfrequenzen von maximal 50 Hz betreiben. Wesentlich höhere Schaltfrequenzen, wie sie für Digitalrechenmaschinen erforderlich sind, lassen sich mit dem von BUCK [*4.15*] 1956 zuerst angegebenen und erprobten *Kryotron* erzielen. Dieses besteht (Abb. 4.63a) aus einem 25 mm langen Tantaldraht

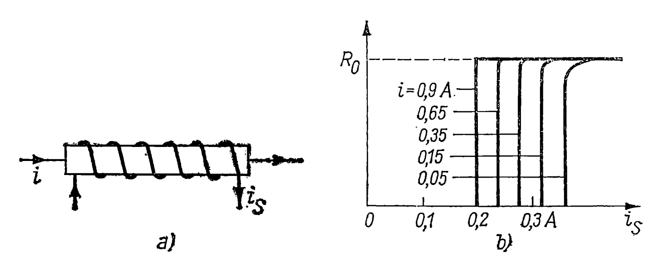


Abb. 4.63 Anordnung und Kennlinien des Kryotrons

von 0,2 mm Durchmesser, der einlagig mit Nb-Draht von 75 µm Durchmesser bewickelt ist; als Isolation dient Formvar. Bezeichnet man den Radius des Schaltdrahtes aus Ta mit R und besitzt die Steuerwicklung N Windungen pro cm, so gilt für den Übergang Supraleitung—Normalleitung, d. h. für den Schalteinsatz,

$$i_s^2 N^2 = H_c^2 - i^2/4\pi^2 R^2. \qquad (4/85)$$

Diese Beziehung ergibt sich aus der geometrischen Addition des vom Steuerstrom i_s erzeugten Axialfeldes $H' = i_s N$ und des vom Schaltstrom i hervorgerufenen Tangentialfeldes $H'' = i/2\pi R$. Erreicht oder überschreitet die Resultierende $|\boldsymbol{H}' + \boldsymbol{H}''|$ die kritische Feldstärke H_c, die nach Abb. 4.59

und Gl. (4/84) von der Temperatur abhängt, so wird der Tantaldraht normalleitend, d. h., sein Widerstand springt von Null auf den Restwiderstand R_0. In Abb. 4.63b sind die Steuerkennlinien für verschiedene Schaltströme dargestellt; mit zunehmendem Schaltstrom erfolgt der Übergang von der Supra- in die Normalleitung immer steiler, was auf die größere Joulesche Wärme im N-Zustand bei großem i zurückzuführen ist. Setzt man in Gl. (4/85) $i_s = 0$, so erhält man den maximalen Schaltstrom, der überhaupt noch durch die Steuerwicklung beeinflußt werden kann, zu $i_c \leqq 2\pi R H_c$. Andererseits findet man aus derselben Gleichung für $i = 0$ den maximalen Steuerstrom $i_{s\max} = H_c/N$. Als *Verstärkungsfaktor* läßt sich daraus die Größe

$$A = i_c/i_{s\max} = 2\pi N R \tag{4/86}$$

gewinnen, die unabhängig von H_c und damit von der Temperatur ist.

Zur Charakterisierung des Kryotrons als Schaltelement ist die *Zeitkonstante* $\tau = L/R$ einzuführen, wobei L die Induktivität der Steuerwicklung und R_0 der Restwiderstand des Schaltdrahtes ist. Mit den Beziehungen $L = \mu_0 l N^2 \pi R^2$ und $R_0 = \varrho_0 l/\pi R^2$ (l Länge der Steuerwicklung, ϱ_0 spezifischer Restwiderstand des Schaltdrahtes) ergibt sich für die Zeitkonstante

$$\tau = \frac{\mu_0 N^2 \pi^2 R^4}{\varrho_0} = \frac{\mu_0}{4\varrho_0} A^2 R^2, \tag{4/87}$$

wenn man Gl. (4/86) berücksichtigt. Für das Bucksche Kryotron findet man Werte für $\tau \approx 50\ \mu s$, was für moderne Rechenanwendung völlig unzureichend ist. Wie aus Gl. (4/87) hervorgeht, läßt sich die Zeitkonstante für dünnere Schaltdrähte und größeren Restwiderstand noch verringern. Der größte Nachteil dieses drahtgewickelten Kryotrons besteht darin, daß die Verbindungsstellen der sehr dünnen Drähte einwandfrei supraleitend ausgeführt werden müssen, was äußerst zeitraubend ist. Für schnelle Schaltoperationen sind daher diese Art supraleitender Schaltelemente bedeutungslos geblieben.

4.54 Filmkryotron

Durch Anwendung der Filmaufdampftechnik gelang es NEWHOUSE und BREMER [*4.64*], eine sehr einfache, raumsparende Anordnung herzustellen, deren Aufbau in Abb. 4.64 dargestellt ist. Auf einer dünnen Glasplatte P sind zwei schmale Filmstreifen gekreuzt aufgedampft und die Kreuzungsstelle durch eine ebenfalls aufgedampfte isolierende SiO-Schicht I elektrisch getrennt. Als Schaltleitung C wird ein *Zinn*-Filmstreifen von 3 mm Breite und 0,3 μm Dicke benutzt, darüber die SiO-Schicht von 0,2 μm Dicke und schließlich als Steuerleitung S ein *Blei*-Film von nur 15 μm Breite und 1 μm Dicke im Hochvakuum aufgedampft. Die Enden der Schaltleitung sind mit ebenfalls vorher aufgedampften Bleikontakten unterlegt, an welche die elektrischen Verbindungen zu den anderen Kryotrons gelötet werden.

Die Wirkungsweise dieses Schaltelementes besteht darin, daß knapp unterhalb der Sprungtemperatur der Schaltleitung aus Zinn ($T_c = 3{,}72$ K) diese im Bereich der Steuerleitung S au sBlei ($T_c = 7{,}22$ K) in die normalleitende Phase übergeht, wenn das durch den Steuerstrom i_s erzeugte Magnetfeld am

Ort von C *überkritisch* wird. Analog zum drahtgewickelten Kryotron hängt dies sowohl von i_s als auch vom Schaltstrom i_c ab. Auch für $i_s = 0$ findet bei einem kritischen Schaltstrom i_c ein strominduzierter Übergang zur Normalleitung statt. Dies läßt sich aus Abb. 4.65 ersehen, in der abhängig von i_s der kritische Schaltstrom i_c sowie der Widerstand R_c der Schaltleitung aufgetragen sind. Letzterer hängt von der Länge des durch i_s verursachten normalleitenden Bereichs, aber wegen der gleichzeitig erzeugten Jouleschen Wärme auch noch von i_c selbst ab. Wie der Vergleich mit Abb. 4.63b zeigt,

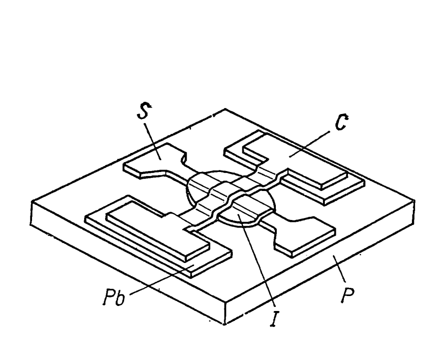


Abb. 4.64 Filmkryotron

Abb. 4.65 Kennlinien des Filmkryotrons

ähneln die Kennlinien des Filmkryotrons denen des drahtgewickelten. Analog zu Gl. (4/86) wird auch beim Filmkryotron der Verstärkungsfaktor A als Verhältnis $i_c/i_{s\max}$ definiert. Da i_c der Breite b_c der Schaltleitung, und das von der Steuerleitung erzeugte Magnetfeld $H_s \sim i_s/b_s$ (b_s Breite der Steuerleitung) ist, muß b_c/b_s für eine hohe Stromverstärkung A groß gewählt werden.

Die *Schaltzeit* des gekreuzten Filmkryotrons beträgt 10 ns und weniger, so daß die Operationsgeschwindigkeit praktisch vom Verhältnis der Kreisinduktivität zu R_c abhängt.

Um die Operationsgeschwindigkeit erhöhen zu können, verringert man die Induktivität der ebenfalls auf die Grundplatte aufgedampften Verbindungsleitungen sowie der Steuerleitung dadurch, daß man auf die Glasunterlage zuerst einen supraleitenden Bleifilm als magnetische Abschirmung, hierauf eine dünne Isolationsschicht und dann erst die in Abb. 4.64 gezeigte Schaltanordnung aufdampft. Aus dem in Abb. 4.66 schematisch dargestellten Schnitt durch ein solches *abgeschirmtes Filmkryotron* läßt sich erkennen, daß das von der Steuerleitung S durch i_s erzeugte Magnetfeld die Abschirmung F wegen ihres quasidiamagnetischen Verhaltens nicht durchdringen kann und im Bereich der Schaltleitung C stark konzentriert wird. Dadurch wird die Induktivität aller aufgedampften Filmschichten stark vermindert und der kritische Schaltstrom $(i_c)_{i_s=0}$ um den Faktor 3 bis 5 erhöht, was nach Gl. (4/86) der Stromverstärkung zugute kommt. Mit $H_c = i_c/b_c$ und $H_s = i_s/b_s$ findet man analog zu Gl. (4/85) als Gleichung für den feldinduzierten Schaltvorgang

$$(i_s/b_s)^2 + (i_c/b_c)^2 = H_c^2, \qquad (4/87)$$

wenn H_c der temperaturabhängige magnetische Schwellenwert (vgl. § 4.51) der Schaltleitung ist. Vernachlässigt man den Einfluß der Eindringtiefe und den der Filmdicke auf H_c, so ergibt sich für die Stromverstärkung der Ausdruck

$$A = b_c/b_s. \tag{4/88}$$

Als *Zeitkonstante* des abgeschirmten Filmkryotrons ergibt sich der Ausdruck

$$\tau = L/R \approx \mu_0 \left(\frac{b_c}{b_s}\right)^2 d \frac{c}{\varrho_0}, \tag{4/89}$$

wenn d die Dicke der Isolierschicht (vgl. Abb. 4.66), c bzw. ϱ_0 Dicke und Restwiderstand der Steuerleitung sind. Aus Gl. (4/89) geht hervor, daß die Zeitkonstante τ durch geeignete Wahl von d klein gehalten werden kann und der Restwiderstand ϱ_0 der Steuerleitung groß sein soll. Beispielsweise findet man für $d = 0{,}3\,\mu\text{m}$, $c = 0{,}3\,\mu\text{m}$, $\varrho_0 = 0{,}6\,\mu\Omega\,\text{cm}$ bei der Temperatur $T = T_c - \Delta T = 3{,}6\,\text{K}$ (für Sn) eine Zeitkonstante $\tau = 5\,\text{ns}$ im Vergleich zu der des drahtgewickelten Kryotrons von etwa 10 µs.

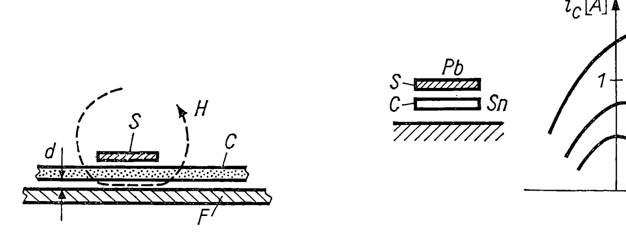


Abb. 4.66 Abgeschirmtes Filmkryotron

Abb. 4.67 Anordnung und Kennlinien des Parallelfilmkryotrons

Im Gegensatz zu dem in Abb. 4.66 dargestellten Filmkryotron mit gekreuzten Leitungen haben Brenneman, McNichol und Seraphim [*4.13*] Steuer- und Schaltleitung parallel und *übereinander* angeordnet, wodurch die beiden von i_s und i_c erzeugten Magnetfelder ebenfalls parallel zueinander liegen. Die in Abb. 4.67 für diese Anordnung dargestellten Kennlinien bei verschiedenen Temperaturen zeigen besonders bei relativ niedrigen Betriebstemperaturen einen steilen Abfall des Schaltstroms i_c bei kleinen Änderungen von i_s. Durch passend gewählten Vorstrom i_{s0} lassen sich eine relativ große Stromverstärkung A und sehr kleine Schaltzeiten erzielen. Nach einem Vorschlag von Marchand [*4.52*] werden Steuer- und Schaltleitung aus demselben Metall (Sn) parallel, jedoch *nebeneinander* gleichzeitig auf eine Glasunterlage im Hochvakuum aufgedampft, wobei Schichtdicken von 40···200 nm benutzt werden. Die Breiten von Steuer- bzw. Schaltleitung liegen bei 100 bzw. 30 µm, ihr gegenseitiger Abstand bei 20 µm. Diese Schaltelemente zeichnen sich durch eine äußerst steile Übergangskurve für den Widerstand der Schaltleitung und große Werte von $A = 4\cdots6$ aus; die Zeitkonstante τ liegt unterhalb von 1 ns.

4.55 Supraleitende Speicherelemente

Die in den §§ 4.53 und 4.54 beschriebenen Kryotrons lassen sich auf zweierlei Weise als Informationsspeicherelemente in Rechenanlagen benutzen: *a*) Verteilung von Strömen von einem supraleitenden Strompfad in einen anderen; *b*) Einspeisen supraleitender Dauerströme in Stromschleifen.

Die einfachste Form eines supraleitenden Speicherelementes [*4.65*], das in Aufdampftechnik hergestellt wird, ist in Abb. 4.68 dargestellt; *a*) zeigt die geometrische Anordnung, *b*) ist das Ersatzschaltbild.

Der Zweig XZ der Speicherschleife stellt zusammen mit der Eingangssteuerung EF ein Filmkryotron (vgl. § 4.54) dar, das durch einen genügend starken Eingangsimpuls normalleitend gemacht werden kann. Der andere Zweig XYZ (aus Blei) bleibt immer supraleitend und kann seinerseits das

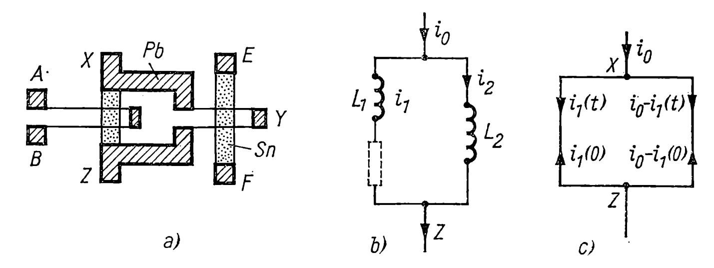


Abb. 4.68 Speicherelement mit Filmkryotrons: Anordnung (a), Ersatzschaltbild (b), Stromverteilung für $R \neq 0$ *(c)*

Ausgangskryotron AB steuern. Die Ersatzinduktivitäten L_1 und L_2 beziehen sich auf den Streifen XZ (aus Zinn) bzw. auf die Bleischleife Y, wobei in der Praxis $L_1 \ll L_2$ ist. Wird im supraleitenden Zustand der Speicherschleife der Strom i_0 zugeführt, so muß der mit dieser verkettete magnetische Fluß erhalten bleiben, d. h., die Einzelströme i_1 und i_2 verteilen sich entsprechend den Induktivitäten wie

$$L_1 i_1 = L_2 i_2 .$$

Da $i_1 + i_2 = i_0$ ist, folgt

$$i_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} i_0 , \tag{4/90}$$

und als Ergebnis wird kein Dauerstrom nach dem Abschalten des Impulses i_0 in der Speicherschleife erzeugt.

Um einen Dauerstrom hervorzurufen, wird das Kryotron XZ während des Stromimpulses i_0 durch einen gleichzeitig wirkenden, überkritischen Eingangsimpuls im Eingangskreis EF normalleitend gemacht und soll den Widerstand R besitzen. Hierfür gilt

$$L_1 \dot{i}_1(t) + R i_1(t) = L_2 \dot{i}_2(t),$$

woraus nach Einsetzen von Gl. (4/90) und Integration

$$i_1(t) = i_1(0) \exp(-t/\tau) \tag{4/91}$$

folgt, wobei

$$\tau = (L_1 + L_2)/R \tag{4/92}$$

und $i_1(0)$ der Wert von i_1 im Zeitpunkt $t = 0$ ist. Unmittelbar vor Abschalten des Stromimpulses i_0 besteht die in Abb. 4.68c angegebene Stromverteilung. Nach Abschalten von i_0 bleibt daher ein Dauerstrom

$$i_d = i_1(0) - i_1(t) = \frac{L_2}{L_1 + L_2} i_0 - i_1(t) \tag{4/93}$$

bestehen, der den Maximalwert dann erreicht, wenn $i_1(t) = 0$ ist, d. h., wenn der ganze Strom sich auf den Zweig 2 verlagert hat, ehe i_0 abgeschaltet wird.

Das *Speicherelement* nach CROWE [*4.22*] war das erste supraleitende Gedächtniselement für Rechenmaschinen und ist heute am weitesten technisch entwickelt. Wie in Abb. 4.69 dargestellt, besteht es aus einer aufgedampften Bleischicht von etwa 100 nm Dicke und einem Loch von etwa 1 mm Durchmesser, das von einem schmalen Steg überbrückt ist. Während die Berandung

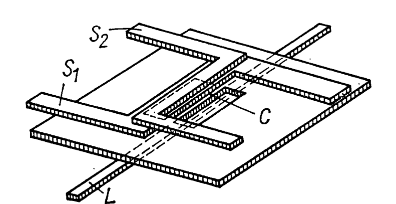


Abb. 4.69 Crowe-Speicherelement

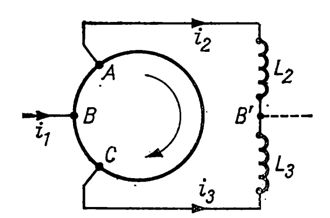


Abb. 4.70 Persistatron

des Loches immer supraleitend bleibt, kann der Steg C durch parallel und isoliert aufgedampfte Steuerleitungen S_1 und S_2 in den normalleitenden Zustand überführt werden, wenn diese von einem ausreichend starken Stromimpuls durchflossen werden. Der wesentliche Unterschied gegenüber einem Parallelfilmkryotron (Abb. 4.67) besteht darin, daß während des magnetisch induzierten Phasenübergangs im Steg das Loch bzw. die beiden D-förmigen Lochhälften von magnetischem Fluß durchsetzt werden und ein Teil des Flusses im Loch festgehalten wird, wenn der Steuerimpuls gerade unterkritisch wird. Das entspricht einem induzierten Dauerstrom im Steg C, dessen Größe nur von den geometrischen Abmessungen und der Temperatur, nicht aber von der Stärke des Steuerimpulses abhängt und dessen *Richtung* die gespeicherte Information (‚1' oder ‚0') darstellt. Bei einem Lochdurchmesser von 0,1 cm, dem Restwiderstand des Steges $R = 0{,}8\ \Omega$ (spez. Widerstand $\varrho = 1\ \mu\Omega$ cm, Stegbreite 125 μm, Stegdicke 100 nm) findet man eine Zeitkonstante $\tau \approx 10$ ns. Das Vorhandensein und die Polarität eines eingefrorenen magnetischen Flusses läßt sich durch einen Abfrageimpuls in der Steuerleitung S_2 feststellen. Dieser bringt oberhalb einer bestimmten Stromstärke den Fluß innerhalb der Zeitkonstanten zum Zerfall, wodurch in einer zusätzlichen,

unterhalb des Loches angebrachten „Lese"-Leitung L ein Spannungsimpuls entsteht.

Das *Persistatron* von BUCKINGHAM [*4.16*] besteht aus einem supraleitenden Ring (Abb. 4.70) mit drei Zuleitungen A, B, C, deren äußere über zwei gleiche Induktivitäten L_2 und L_3 mit dem Symmetrierungspunkt B' verbunden sind. Nehmen wir an, daß zunächst im Uhrzeigersinn ein Dauerstrom i_c fließt, der gerade unterhalb des kritischen Stromes liegt. Wird nun über den Mittelkontakt B ein Stromimpuls i_1 zugeführt, so verteilt sich dieser bei $L_3 = L_2$ zu gleichen Teilen auf den Dauerstrom. In der Richtung BA wird i_c vergrößert, d. h., das Segment BA wird normalleitend, während der Strom im Segment BC verringert wird. Der Strom i_2 wird daher annähernd Null, während $i_3 = i_1$ ist. Das Umgekehrte wird eintreten, wenn der Dauerstrom in entgegengesetzter Richtung fließt. Die Anordnung wirkt wie eine magnetische Weiche, bei welcher der injizierte Stromimpuls i_1 je nach Richtung des Dauerstroms in diese oder die andere Richtung „gesteuert" wird. Das Persistatron ermöglicht bestimmte logische Operationen.

Die bisher besprochenen supraleitenden Speicherelemente setzen physikalische Löcher, d. h. mehrfach zusammenhängende Supraleiter voraus. Von BURNS et al. [*4.17*] wurde ein *strukturfreier Filmspeicher* vorgeschlagen und

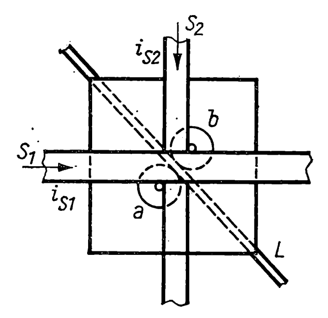


Abb. 4.71 Filmspeicher

theoretisch behandelt, der aus einem homogenen Sn-Film von 200 bis 300 nm Dicke und zwei gekreuzten Steuerleitungen S_1 und S_2 besteht, die untereinander und gegen die Filmunterlage isoliert sind (Abb. 4.71). Die Vektorsumme der von den Steuerströmen i_{s1} und i_{s2} erzeugten magnetischen Felder „stanzt" in die Filmunterlage zwei normalleitende Löcher a und b, in denen nach den Steuerimpulsen ein magnetischer Fluß eingefroren bleibt. Vorhandensein und Polarität dieses Flusses lassen sich durch einen weiteren Abfrageimpuls aus dem induzierten Signal in der Leseleitung L, die in der Winkelhalbierenden unterhalb des Films verläuft, entnehmen. Der Vorteil dieser Speicherelemente liegt in der einfacheren Anordnung und im geringeren Platzbedarf. Hundert solcher Elemente nehmen eine Fläche von etwa 6 cm^2 in Anspruch; die erreichbaren Schaltzeiten liegen bei 20 ns.

4.6 Rauscheigenschaften [*4.58, 4.89*]

4.61 Allgemeines

Mit Hilfe von Elektronenröhren- und Transistorverstärkern lassen sich außerordentlich hohe Verstärkungsgrade erzielen. Dies bedeutet jedoch keinesfalls, daß beliebig kleine Signale festgestellt werden können. Es existiert vielmehr eine untere Grenze hierfür, welche durch die ***Rauscheigenschaften*** der passiven (s. § 3) und aktiven Kreiselemente bestimmt wird und durch die statistischen Schwankungen der Elektronen am Eingang eines Verstärkers sowie in den Verstärkerelementen selbst gegeben sind. Die ***Empfindlichkeit*** eines Verstärkers hängt demnach vom Rauschen des Verstärkereingangs mehr als von der Zahl der Verstärkerstufen ab.

Zur Kennzeichnung der Rauscheigenschaften aktiver Kreise dient die ***Rauschzahl***, welche das Verhältnis der Rauschleistung am Verstärkerausgang zur Eingangsrauschleistung multipliziert mit dem Leistungsverstärkungsgrad angibt. Wird in den Verstärkerelementen (Vakuumröhre, Transistor) kein inneres Rauschen erzeugt, so ist die Rauschzahl Eins; in allen anderen Fällen ist sie größer als Eins. Näheres über Rauschen von Verstärkern s. § 5.27.

4.62 Rauschen in Widerständen

Das Rauschen in Widerständen wird durch die Dichteschwankungen der Transportelektronen infolge ihrer thermischen Bewegung hervorgerufen. Das mittlere Spannungsquadrat $\overline{u_r^2}$ an den Klemmen eines Widerstandes R bei der absoluten Temperatur T berechnet sich nach der Nyquist-Formel zu

$$\overline{u_r^2} = 4kTRB, \qquad (4/94)$$

wenn $k = 1{,}3805 \cdot 10^{-23}$ J/grd der Boltzmann-Faktor und B die Bandbreite in Hz ist. Bei Zimmertemperatur ergibt sich hieraus die Rauschspannung $u_r = 1{,}26 \cdot 10^{-10} \sqrt{RB}$ (V). Die beiden möglichen Ersatzschaltungen für einen Widerstand sind in Abb. 4.72 dargestellt: *a*) als Serienschaltung der Rausch-

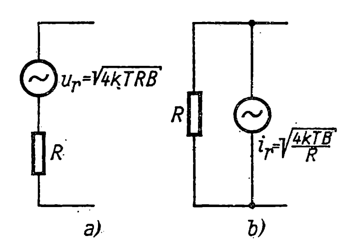


Abb. 4.72 Ersatzschaltungen eines Widerstandes

spannungsquelle mit der Rauschspannung nach Gl. (4/94); *b*) als Parallelschaltung von Widerstand R und Rauschstromquelle der Stärke $i_r = \sqrt{4kTB/R}$.

Infolge der Rauschspannung u_r kann elektrische Leistung aus einem anderen Widerstand übertragen werden; die maximale Übertragungsleistung tritt auf, wenn dieser zweite Widerstand dieselbe Größe R besitzt. Dann wird

$$P_r = \frac{\overline{u_r^2}}{4R} = kTB \tag{4/95}$$

und ist von R unabhängig.

4.63 Rauschen in Hochvakuumröhren

Die Ursachen des Rauschens in Hochvakuumröhren sind vielfältig und lassen sich in *innere* und *äußere* unterteilen.

Die *inneren* Rauschursachen sind:

1. Emissionsrauschen,
   a) Schroteffekt durch statistische Schwankungen des Elektronenstroms,
   b) Reduzierter Schroteffekt durch Raumladungen,
2. Stromverteilungsrauschen zwischen den Elektroden,
3. Gitterstromrauschen durch Ionisation des Gases im Entladungsraum,
4. induziertes Rauschen bei UHF infolge der hochfrequenten Komponenten des Rauschstroms im Gitterkreis.

Äußere Rauschursachen sind:

5. Funkeleffekt durch Emissionsschwankungen von Oxid-Katoden,
6. Rauschen durch die Röhrenkonstruktion (Brumm, schlechte Isolation, mechanische Schwingungen, schwankende Wandladungen).

Der *Schroteffekt* rührt von den statistischen Schwankungen von Elektronengruppen bei der Emission und beim Auftreffen an der Anode her. In der Diode, deren Emission nach Gl. (4/1) von der Katodentemperatur abhängt, hängt der Schroteffekt nur vom Diodenstrom und der Bandbreite B ab. Es läßt sich nachweisen, daß der Rauschstrom einer Diode durch einen Ersatzgenerator

$$\overline{i_r^2} = 2eI_0B \tag{4/96}$$

dargestellt werden kann, wenn $e = 0{,}1602$ aC und I_0 der Diodengleichstrom ist. Dieser ist von der Katodentemperatur sowie vom Widerstand, durch den dieser Strom fließt, unabhängig. Liegt die Diode an einem Außenwiderstand R, so wird in diesem die Rauschleistung $\overline{i_r^2}R$ verbraucht. Eine temperaturbegrenzte Emission von 10 mA in einer Diode erzeugt einen Rauschstrom von 5,65 µA in einem Frequenzband von 1 MHz.

Wird die Emission einer Diode von Raumladung begrenzt, reduziert sich der Schroteffekt merklich, da sich in diesem Fall gegenüber der Anode eine virtuelle Katode (vgl. § 4.12) ausbildet, welche die Schwankungen ausgleicht. In diesem Fall gilt die Beziehung

$$\overline{i_r^2} = 2\Gamma^2 eI_0B, \tag{4/97}$$

deren Größe Γ^2 als *Raumladungsreduktionsfaktor* für das Rauschen bezeichnet wird, der zwischen 0,1 und 0,01 liegt und linear von der Katodentemperatur abhängt.

Das Rauschen von Dioden in Schaltungen ist meist kein ernsthaftes Problem; wegen der einfachen Beziehungen zwischen Rauschstrom und Richtstrom werden Dioden aber oft als *Norm-Rauschquellen* benutzt.

Das Rauschen von *Trioden* wird durch den reduzierten Schroteffekt nach Gl. (4/97) beschrieben. Es ist üblich, das Triodenrauschen durch einen *Äquivalentwiderstand* $R_ä$ im Gitterkreis der Röhre zu ersetzen, dessen Wert

$$R_ä = 2{,}5/S \ (\Omega) \tag{4/98}$$

beträgt, wenn S die Steilheit der Röhre (vgl. Gl. (4/10)) bei den entsprechenden Betriebsbedingungen ist.

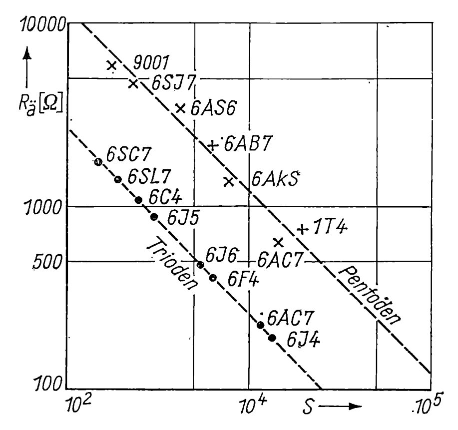


Abb. 4.73 Rauschwiderstand $R_ä$ und Steilheit S von Trioden und Pentoden

In *Pentoden* tritt stärkeres Rauschen als in Trioden auf, da zusätzlich eine Stromteilung zwischen Gitter und Anode vorhanden ist. Der entsprechende Äquivalentwiderstand im Steuergitter erhält die Größe

$$R_ä = \frac{2{,}5}{S} \frac{I_a}{I_e} \left(1 + 8 \frac{I_2}{S}\right),$$

wenn I_e und I_2 Emissions- bzw. Schirmgitterstrom sind. Im allgemeinen wird eine Pentode eine um den Faktor 3—5 höhere Rauschspannung als die Triode aufweisen. In Abb. 4.73 sind äquivalenter Rauschwiderstand $R_ä$ und Steilheit S gängiger Trioden und Pentoden zusammengestellt; daraus ist zu entnehmen, daß die Beziehung (4/98) für Trioden gut erfüllt ist, während bei den Pentoden größere Streuungen auftreten.

Bei sehr hohen Frequenzen tritt, wie in Punkt 4 erwähnt, eine zusätzliche Rauschursache auf, die auf der Induktionswirkung der Elektronen zwischen Katode und Gitter beruht und mit deren Laufzeit zwischen den Elektroden

zusammenhängt. Der äquivalente Gitterwiderstand läßt sich nach der empirischen Beziehung

$$R_ä = \frac{20}{S\,\omega^2\,\tau^2}\;(\Omega)$$

angeben, in der ω die Kreisfrequenz und τ die Laufzeit der Elektronen bedeuten [*4.98*].

Das durch Ionisation und die Röhrenkonstruktion bedingte Rauschen läßt sich im allgemeinen gegen die bereits erwähnten Ursachen vernachlässigen.

4.64 Rauschen in Kristallgleichrichtern

In halbleitenden Materialien entsteht Rauschen durch statistisch verteilte Erzeugung und Rekombination freier Ladungsträger. Halbleitergleichrichter mit Spitzenkontakt (s. § 4.242) sind relativ rauschreicher als Röhrendioden, außer bei sehr hohen Frequenzen. Der Halbleiter wird durch eine *Rauschtemperatur* t_r definiert, die das Verhältnis der Rauschleistung der Diode zu der eines äquivalenten Widerstandes darstellt. Im stromlosen Zustand ist diese Temperatur $t_r = T/T_i \approx 1$, da die Ladungsträger im thermischen Gleichgewicht mit dem Kristall sind. Wird dieser jedoch von Strom durchflossen, so steigt seine Rauschtemperatur stark an, und zwar umgekehrt proportional zur Frequenz. Bei 1 kHz liegt die Rauschspannung oft um den Faktor 10^4 über dem eines Ersatzwiderstandes von der Größe des Diodenwiderstandes.

Das Rauschen von Flächengleichrichtern zeigt ein ähnliches Verhalten, ist jedoch viel geringer als das von Spitzendioden. Die hohen Rauschspannungen in den letzteren haben ihre Ursache in Schwankungen der Austrittsarbeit und des Kontaktwiderstandes über der Kontaktfläche; auch Diffusion von Verunreinigungsatomen kann diesen Effekt verstärken.

Silizium-Spitzengleichrichter, die oft als Mischer im Mikrowellenbereich benutzt werden, besitzen meist wesentlich kleineres Rauschen als entsprechende Hochvakuummischröhren (§ 4.16).

4.65 Rauschen in Transistoren [*4.57, 4.97*]

Hinsichtlich ihrer Rauscheigenschaften sind Transistoren den Hochvakuumröhren ähnlich. Das Rauschen eines Halbleiterwiderstandes ist nahezu temperaturunabhängig und bei niedrigen Frequenzen diesen umgekehrt proportional. Diese $(1/f)$-Abhängigkeit wird bis zu 1···50 kHz beobachtet. Von höheren Frequenzen (100···500 kHz) an nimmt der Rauschfaktor stetig mit f zu; im Zwischenbereich ist er etwa konstant. In Abb. 4.74 ist ein Ersatzschaltbild eines Transistors wiedergegeben, in das fünf verschiedene Rauschquellen eingezeichnet sind, die alle durch verschiedene Rauscheffekte charakterisiert werden können.

In der Emitterleitung liegt ein Rauschgenerator mit der Spannung

$$(u_e^2)_r = 2kT\,r_e\,\mathrm{d}f$$

(äquivalenter Emitterwiderstand $r_e = kT/eI_e$, I_e Emitterstrom), die man analog zu Gl. (4/96) erhält. Ein zweiter Konstantspannungsgenerator charakterisiert das thermische Rauschen des Basiswiderstandes r_b:

$$(u_b^2)_r = 4kTr_b\,\mathrm{d}f;$$

eine dritte Rauschquelle entspricht der Schrotemission des Kollektorsättigungsstromes I_{cs} und erzeugt den Rauschstrom

$$(i_s^2)_r = 2eI_{cs}\,\mathrm{d}f.$$

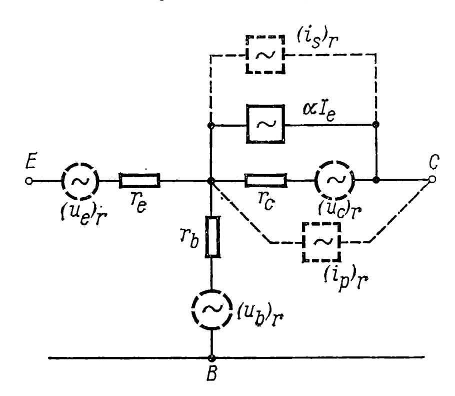


Abb. 4.74 Ersatzschaltbild eines Transistors mit Rauschquellen

Zur Kennzeichnung des Verteilungsrauschens von I_e zwischen Basis und Kollektor ist die Rauschquelle mit dem Strom

$$(i_p^2)_r = 2e\alpha I_e(1 - \beta)\,\mathrm{d}f$$

(α Stromverstärkung, β Durchlaßwirkungsgrad (§ 4.25)) eingetragen, während die fünfte Rauschspannungsquelle mit der Spannung

$$(u_c^2)_r = K/f$$

das Halbleiterrauschen repräsentieren soll. Um die Berechnung des gesamten Rauschverhaltens eines Transistors zu erleichtern, kann man die oben näher gekennzeichneten Rauschquellen durch eine einzige mit dem Strom

$$(i_n^2)_r = 2eI_ä\,\mathrm{d}f \qquad (4/99)$$

ersetzen, die anstelle von $(i_p)_r$ der Abb. 4.74 einzusetzen ist und wobei die Frequenzabhängigkeit des Diodenstroms $I_ä$ experimentell bestimmt werden muß.

§ 5 AKTIVE KREISE (GLEICHRICHTER, VERSTÄRKER, OSZILLATOR) [*5.13, 5.15, 5.18, 5.25, 5.26, 5.33, 5.39, 5.66, 5.77*]

Im Gegensatz zu den *passiven* Kreiselementen (s. § 3.5), in denen zwar Amplitude und Phase der Eingangsspannung im gewünschten Sinn beeinflußt werden können, die am Ausgang verfügbare Leistung jedoch immer kleiner als die eintretende ist, dienen die *aktiven* Kreise der Verstärkung von Gleich- und Wechselspannungen sowie der Erzeugung von Wechselspannungen mit Hilfe von Elektronenröhren und Transistoren. In diesem Abschnitt werden die Grundlagen für diese Operationen behandelt; ihre Anwendung für die besonderen Meßverfahren in der Wechselspannungs- und Hochfrequenztechnik folgt in den §§ 6, 7 und 8. Fragen der Gleichrichtung, Verstärkung und Erzeugung bei hohen Leistungen oder hohen Spannungen werden in späteren Abschnitten besprochen (§§ 15, 16).

5.1 Gleichrichtung [*5.59, 5.45*]

Die grundlegende Eigenschaft eines *Gleichrichters* besteht darin, daß bei angelegter Wechselspannung der durchfließende Strom eine merkliche Gleichstromkomponente enthält. Das bedeutet, daß der Innenwiderstand des Gleichrichters von der Stromrichtung abhängen muß; entsprechende Ausführungsformen sind Hochvakuumdioden (s. § 4.12), Halbleiterdioden (s. § 4.24) und Gasentladungsgleichrichter (§ 4.34).

5.11 Grundsätzliches

Die wesentlichen Bestandteile eines Gleichrichters sind in Abb. 5.1 dargestellt. In der Schaltung (*a*) wird dem Gleichrichter eine Wechselspannung zugeführt, die im Transformator T auf die gewünschte Ausgangsspannung

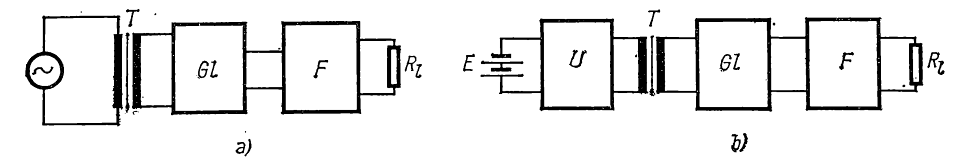


Abb. 5.1 Grundschaltungen von Gleichrichtern

gebracht wird. Am Ausgang des Gleichrichters *Gl* entsteht eine Gleichspannung mit einer Wechselspannungskomponente, die *Welligkeit* genannt wird. Durch ein nachgeschaltetes Filter F, das der Wechselspannungskomponente einen hohen Widerstand bietet, wird die Welligkeit am Ausgang verringert. In Abb. 5.1b ist die Schaltung eines *Gleichspannungskonverters* wiedergegeben, dessen Gleichspannung E durch den Umrichter U in Wechselspannung umgeformt, im Transformator T auf die gewünschte Spannung transformiert und dann, wie in Abb. 5.1a, gleichgerichtet wird. Für viele Anwendungszwecke kann auf das Filter verzichtet werden.

Als Gleichrichterelemente werden *Hochvakuumdioden, Halbleiterdioden, Gasentladungsgleichrichter* und *Mehrschichthalbleiter-Schaltelemente* (vgl. § 4.1···3) benutzt; ihre Auswahl richtet sich nach der Höhe von Spannung und Strom am Ausgangswiderstand R_L, dem *Lastwiderstand.* Die Welligkeit hängt, wie später gezeigt wird, von der Frequenz, der Spannung, dem Strom sowie von der Schaltung des Filterkreises ab.

5.12 Halbwellengleichrichter mit ohmscher Last

Die einfachste Schaltung eines Gleichrichters enthält nur *ein* Gleichrichterelement und besteht aus einer Serienschaltung der Sekundärwicklung des Transformators T, des Hochvakuumgleichrichters Gl und des Lastwiderstandes R, wie in Abb. 5.2a dargestellt ist. Die Vakuumdiode ist nur bei *positiver* Anode leitend und sperrt bei umgekehrter Stromrichtung; wie aus Abb. 5.2b

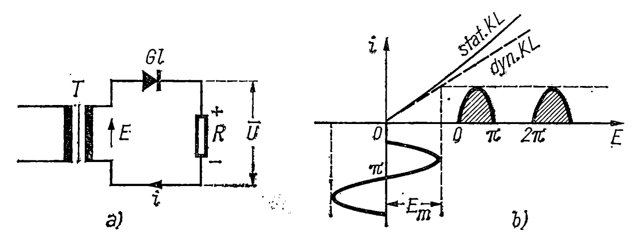


Abb. 5.2 Halbweggleichrichtung: Schaltung (a), Kennlinien (b)

ersichtlich ist, wird nur *eine* Halbperiode der Wechselstromquelle ausgenutzt. Die Diode besitzt eine nichtlineare Strom-Spannung-Kennlinie, die als *statische Kennlinie* in Abb. 5.2b eingetragen ist. Die reziproke Neigung dieser Kurve stellt den Innenwiderstand R_i der Diode dar, der von der angelegten Spannung U abhängig ist. Für die Serienschaltung von Diode und Lastwiderstand R beträgt der Gesamtwiderstand $R_i + R$; die *dynamische Kennlinie* wird für $R_i \ll R$ annähernd eine Gerade.

Bei sinusförmiger Ausgangsspannung $E = E_m \sin \omega t$ des Transformators und linearer dynamischer Kennlinie des Gleichrichterkreises gilt

$$\begin{aligned} i &= E_m \sin \omega t/(R_i + R); \qquad && 0 \leqq \omega t \leqq \pi \\ i &= 0. && \pi \leqq \omega t \leqq 2\pi. \end{aligned} \tag{5/1}$$

Integriert man den im Kreis fließenden Halbwellenstrom über eine volle Periode, so ergibt sich

$$\bar{I} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i \, \mathrm{d}(\omega t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{E_m}{R_i + R} \sin \omega t \, \mathrm{d}(\omega t) = \frac{1}{\pi} \frac{E_m}{R_i + R} = \frac{I_m}{\pi}. \tag{5/2}$$

Mit Gl. (5/2) findet man die Spannung $\bar{U}$ am Lastwiderstand R zu

$$\bar{U} = \bar{I} R = E_m/\pi - \bar{I} R_i. \tag{5/3}$$

Im Leerlauffall mit $\bar{I} = 0$ ist die mittlere Gleichspannung gleich dem Mittel aus der positiven Halbwellenspannung am Transformatorausgang. Mit wachsendem Belastungsstrom nimmt $\bar{U}$ infolge des Spannungsabfalls im Gleichrichter linear ab.

Die vom Transformator gelieferte Wechselstromleistung berechnet sich zu

$$\tilde{P} = I_{\mathrm{eff}}^2 (R_i - R), \tag{5/4}$$

wobei nach Gl. (5/1) der Effektivstrom

$$\bar{I}_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} i^2 \, \mathrm{d}(\omega t)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} I_m^2 \sin^2 \omega t \, \mathrm{d}(\omega t)} = I_m/2 \tag{5/5}$$

wird. Die Fourier-Analyse der halben Sinuskurve am Lastwiderstand ergibt den Ausdruck

$$E = E_m/\pi + \frac{E_m}{2} \sin \omega t - \frac{2E_m}{\pi} \sum_k \frac{\cos k\omega t}{(k+1)(k-1)} \quad (k = 2, 4, 6). \tag{5/6}$$

Der erste Term stellt die Gleichspannungskomponente dar, die z. B. zum Aufladen einer Batterie eingesetzt werden muß; die weiteren Ausdrücke sind Harmonische der Grundfrequenz und bewirken ohmsche Verluste im Gleichrichter und Lastwiderstand.

Die Aufgabe eines Gleichrichters besteht darin, Gleichstrom zu erzeugen und möglichst geringe Verluste durch Wechselstromkomponenten im Lastwiderstand aufzuweisen. Der *Wirkungsgrad* für die Umwandlung von Wechselstrom in Gleichstrom wird durch das Verhältnis

$$\eta_G = \bar{P}/\tilde{P}$$

definiert und ergibt sich für die Halbwellendiode mit Gl. (5/2) zu

$$\eta_G = \frac{[E_m/\pi(R + R_i)]^2 R}{[E_m/2\,(R + R_i)]^2 (R + R_i)} = \frac{4R}{\pi^2 (R_i + R)} = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{1 + R_i/R}. \tag{5/7}$$

Im günstigsten Fall, d. h. für $R_i = 0$, beträgt $\eta_G = 0{,}406$; mit wachsendem Innenwiderstand des Gleichrichterelementes wird dieser Wert unterschritten. Wie in § 5.11 erwähnt, können die Wechselstromkomponenten mit Hilfe eines *Filters* stark unterdrückt und der Wirkungsgrad erhöht werden.

5.13 Vollweggleichrichter; Welligkeit

Größere Gleichstromleistung und höherer Wirkungsgrad lassen sich mit der Vollweggleichrichtung erzielen, deren Schaltung in Abb. 5.3a dargestellt ist. Die Sekundärspule des Transformators T ist mit einer Mittelanzapfung versehen, an die der Lastwiderstand R gelegt ist. Die beiden Gleichrichter Gl_1 und Gl_2 sind derart in die beiden Zweige geschaltet, daß die Teilströme i_1 und i_2 an R einen Spannungsabfall derselben Polarität hervorrufen. Der Last-

widerstand wird daher von halben Sinusstromimpulsen durchflossen, die abwechselnd die beiden Gleichrichter passieren, wie aus Abb. 5.3b hervorgeht.

Nimmt man identische Gleichrichter mit gleichem Innenwiderstand R_i an, so ergeben sich die Ströme zu

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \frac{E_m}{R_i + R} \sin \omega t; \\ i_2 &= 0; \end{aligned}\right\} 0 \leqq \omega t \leqq \pi$$
$$\left.\begin{aligned} i_1 &= 0; \\ i_2 &= -\frac{E_m}{R_i + R} \sin \omega t \end{aligned}\right\} \pi \leqq \omega t \leqq 2\pi. \qquad (5/8)$$

Abb. 5.3 Vollweggleichrichtung: Schaltbild (a), Stromverlauf in R (b)

Die Größe E_m stellt die Maximalspannung der Sinusspannung *einer* Hälfte der Sekundärwicklung des Transformators T dar. Jede Diode arbeitet unter identischen Bedingungen als Halbwellengleichrichter, wobei die Lastströme durch den gemeinsamen Lastwiderstand fließen. Der Gleichstromanteil ergibt sich durch Mittelbildung über den in Abb. 5.3b dargestellten Stromverlauf zu

$$\bar{I} = \frac{2E_m}{\pi(R_i + R)} = 2I_m/\pi. \qquad (5/9)$$

Analog zu Gl. (5/3) findet man die Spannung am Lastwiderstand aus der Beziehung

$$\bar{U} = \bar{I}R = \frac{2E_m}{\pi} - \bar{I}R_i. \qquad (5/10)$$

Im Leerlauffall, d. h. mit $\bar{I} = 0$, erreicht nach Gl. (5/10) die Spannung den Maximalwert $2E_m/\pi$; mit zunehmendem Gleichstrom nimmt sie linear mit diesem ab.

Die gesamte Wechselstromleistung, die vom Transformator zu liefern ist, wird analog zu Gl. (5/4)

$$\tilde{P} = 2\, I_{\text{eff}}^2\, (R_i + R) = 2\left[\frac{E_m}{2(R_i + R)}\right]^2 (R_i + R) = \frac{E_m^{\,2}}{2(R_i + R)}, \quad (5/11)$$

und der Wirkungsgrad des Gleichrichters wird

$$\eta_G = \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{1 + R_i/R}, \tag{5/12}$$

d. h. doppelt so hoch wie beim Einweggleichrichter.

Die Fourier-Analyse der Wellenform in Abb. 5.3b liefert die Reihenentwicklung

$$E = \frac{2E_m}{\pi} - \frac{4E_m}{\pi} \sum_k \frac{\cos k\omega t}{(k+1)(k-1)}, \quad (k = 2, 4, 6, 8 \ldots), \tag{5/13}$$

aus der im Vergleich zu Gl. (5/6) hervorgeht, daß die Grundfrequenz fehlt und die niedrigste Frequenz die doppelte Wechselspannungsfrequenz ist. Für höhere Ströme im Lastwiderstand R wird dadurch die Filterung einfacher. Die *maximale Sperrspannung* an den Dioden beträgt in diesem Fall $2E_m$.

Bei Verwendung von *Glühkatodengleichrichtern* (vgl. § 4.12) werden für die Vollweggleichrichtung diese mit zwei Anoden und einer gemeinsamen Katode in *einem* Röhrenkolben ausgerüstet (Beispiele s. *Tabelle 4.3*).

Welligkeit. Für die meisten Verbraucher sind die Pulsationen der Lastspannung, die man auch *Brumm* nennt, unerwünscht. Als *Welligkeit* k wird der Quotient aus dem Effektivwert der Wechselspannungskomponenten zur mittleren Gleichspannung $\bar{U}$ oder der entsprechenden Ströme bezeichnet. Da der Effektivstrom im Lastwiderstand $I_{\text{eff}} = \sqrt{\bar{I}^2 + \tilde{I}^2}$ ist, ergibt sich für

$$\tilde{I} = \sqrt{I_{\text{eff}}^2 - \bar{I}^2} \tag{5/14}$$

und für die Welligkeit

$$k = \tilde{I}/\bar{I} = \sqrt{I_{\text{eff}}^2 - \bar{I}^2}/\bar{I} = \sqrt{\left(\frac{I_{\text{eff}}}{\bar{I}}\right)^2 - 1}. \tag{5/15}$$

Die Welligkeit ist demnach eine Funktion der Wellenform des Stromes bzw. der Spannung und läßt sich mit Hilfe der Gln. (5/6) und (5/13) für den Einweg- bzw. Vollweggleichrichter berechnen; man findet für den

Einweggleichrichter: $k = 1{,}21$;
Vollweggleichrichter: $k = 0{,}48$.

Die *Vollweggleichrichtung mit gasgefüllten Dioden* (s. § 4.34) unterscheidet sich insofern von der mit Halbleiter- oder Hochvakuumdioden, als die Durchlaßperiode bei diesen kleiner als π ist, da die Röhre erst oberhalb der Zünd- bzw. Löschspannung E_i leitend wird. Dies hat zur Folge, daß anstelle von Gl. (5/12) für den Wirkungsgrad die Beziehung

$$\eta_G = \frac{8}{\pi^2} \frac{(1 - \pi E_i/2E_m)^2}{1 - 2E_i/\pi E_m} \tag{5/16}$$

gilt, wobei $R_i = 0$ gesetzt wird.

5.14 *Gleichrichter mit Filter* [*5.80*; *5.81*]

Es ist bereits darauf hingewiesen worden, daß geeignete Filter (vgl. Abb. 5.1) die Wechselstromkomponenten im Gleichrichterausgang und damit die Welligkeit verringern können. Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten, die im folgenden für die Vollweggleichrichtung behandelt werden.

5.141 Filter mit Nebenschlußkapazität

In Abb. 5.4 sind der Zweiweggleichrichter mit Nebenschlußkapazität sowie die dabei auftretenden Strom- und Spannungsverhältnisse dargestellt. Durch den Kondensator C parallel zur Last R werden die Gleichrichterbedingungen der Dioden Gl_1 und Gl_2 grundsätzlich gegenüber den Schaltungen in § 5.13 geändert. Übersteigt die vom Gleichrichter gelieferte Spannung die Ausgangsspannung U_C, so wird der Kondensator so lange geladen, bis die Maximalspannung E_m erreicht bzw. U_C unterschritten ist. Wird $U_C > E$, so schaltet

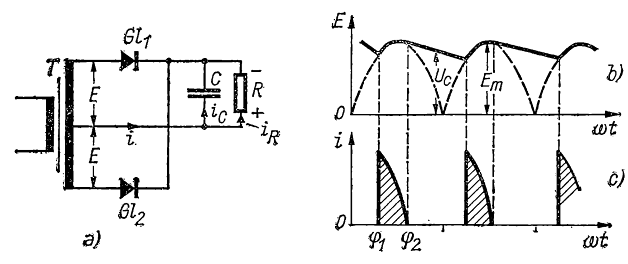


Abb. 5.4 Zweiweggleichrichter mit Nebenschlußkapazität: Schaltung (a), Spannungsverlauf (b), Stromverlauf (c)

die Diode die RC-Kombination ab, da deren Katode nun positiv gegen die Anode vorgespannt ist, und die im Kondensator gespeicherte Energie trägt den Laststrom i_R, bis die Transformatorspannung des zweiten Zweiges erneut U_C erreicht. Wie aus Abb. 5.4c zu ersehen ist, fließen durch die Dioden nur kurze Stromimpulse im Phasenwinkelbereich $\varphi_2 - \varphi_1$.

Unter der Annahme, daß der Innenwiderstand R_i der Diode und der Spannungsabfall in der Sekundärwicklung des Transformators zu vernachlässigen sind, können die Dioden als Schaltorgane betrachtet werden, die den Gleichrichterausgang mit der RC-Kombination nur im Intervall $\varphi_1 \leqq \omega t \leqq \varphi_2$ verbinden. Für diesen Zeitabschnitt gelten die Beziehungen

$$i = i_C + i_R; \tag{5/17}$$

$$U_C = E_m \sin \omega t; \quad (\varphi_1 \leqq \omega t \leqq \varphi_2) \tag{5/18}$$

$$i = C\dot{U} + U_C/R. \tag{5/19}$$

Setzt man Gl. (5/18) in Gl. (5/19) ein, so ergibt sich der Ausdruck

$$i = \omega\, C E_m \cos \omega t + \frac{E_m}{R} \sin \omega t = \frac{E_m}{R} \sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}\, \sin (\omega t + \varphi) \tag{5/20}$$

mit

$$\varphi = \arctan (\omega RC) \tag{5/21}$$

für den Stromimpuls während der Ladeperiode. Bei $\omega t = \varphi_2$ sperrt die Diode; den Wert von φ_2 erhält man aus Gl. (5/20) für $i = 0$ zu

$$-\omega C E_m \cos \varphi_2 = \frac{E_m}{R} \sin \varphi_2 .$$

Daraus folgt:

$$\varphi_2 = \arctan (-\omega RC). \tag{5/22}$$

Für die Länge des Ladeimpulses ist nach Gl. (5/20) der dimensionslose Parameter ωRC maßgebend; für eine sehr große Zeitkonstante erhält man hohe Stromimpulse, die bereits bei $\omega t = \pi/2$ beendet sind. Für kleine Werte von RC verringert sich die Impulshöhe und verlängert sich die Ladeperiode $\varphi_2 - \varphi_1$.

Im Zeitabschnitt $\varphi_2 \leqq \omega t \leqq (\pi + \varphi_1)$ gilt $i_C = -i_R$ und nach Gl. (5/19)

$$-C\dot{U}_C \approx U_C/R$$

mit der Lösung

$$U_C = E_m \sin \varphi_2 e^{-(\omega t - \varphi_2)/\omega RC} \quad \varphi_2 \leqq \omega t \leqq \pi + \varphi_2 . \tag{5/23}$$

Zwischen φ_2 und $\pi + \varphi_1$ fällt die Spannung an R und C exponentiell ab; für $\omega RC = \infty$ wird der Exponent Null und $U_C = E_m = \text{const.}$

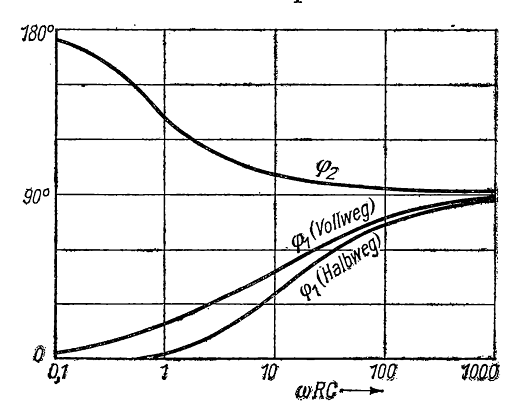


Abb. 5.5 Ein- und Ausschaltphasen der Dioden in Ein- und Zweiweggleichrichtern

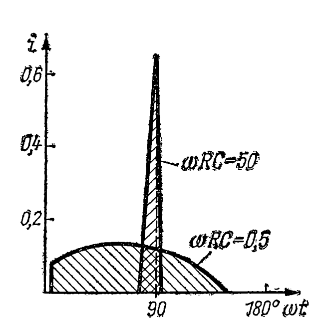


Abb. 5.6 Stromverlauf des Ladeimpulses bei verschiedenem ωRC

Für den Beginn des Schaltimpulses bei $\omega t = \pi + \varphi_1$ muß U_C der vom Transformator gelieferten Spannung $E_m \sin \varphi_1$ entsprechen, d. h.:

$$E_m \sin \varphi_2 e^{-(\pi + \varphi_1 - \varphi_2)/\omega RC} = E_m \sin \varphi_1 ,$$

oder

$$\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2 e^{-(\pi + \varphi_1 - \varphi_2)/\omega RC} . \tag{5/24}$$

Mit Gl. (5/22), aus der φ_2 bestimmt werden kann, läßt sich φ_1 mit Hilfe der Gl. (5/24) grafisch lösen. Das Ergebnis ist für die Ein- und Zweiweggleichrichtung in Abb. 5.5 als Funktion von ωRC dargestellt. Da nach Gl. (5/21) und Gl. (5/22) $\varphi = \pi - \varphi_2$ ist, ergibt sich für den Stromverlauf während der *Ladezeit* aus Gl. (5/20) die Beziehung:

$$i = \frac{E_m}{R}\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}\ \sin(\varphi_2 - \omega t) \qquad \varphi_1 \leqq \omega t \leqq \varphi_2. \tag{5/25}$$

Mit den aus Abb. 5.5 entnommenen Werten für φ_1 und φ_2 sind in Abb. 5.6 für zwei Werte von ωRC die entsprechenden Ladeimpulse konstruiert.

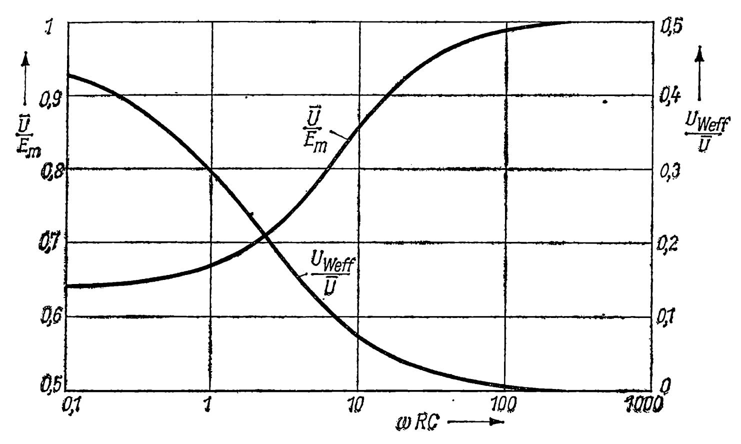


Abb. 5.7 Mittlere Gleichspannung und Welligkeit k für den Vollweggleichrichter

Durch Integration der Gleichrichterausgangsspannung über die durch die Gln. (5/18) und (5/23) beschriebenen Abschnitte erhält man die *mittlere Gleichspannung* zu

$$\overline{U} = \frac{1}{\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} E_m \sin\omega t\, \mathrm{d}(\omega t) + \frac{1}{\pi}\int_{\varphi_2}^{\pi+\varphi_1} E_m \sin\varphi_2\, \mathrm{e}^{-(\omega t - \varphi_2)/\omega RC}\, \mathrm{d}(\omega t)$$

$$= E_m \frac{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}}{\pi}\left[1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\right]. \tag{5/26}$$

In Abb. 5.7 ist das Verhältnis $\overline{U}/E_m$ für den Vollweggleichrichter als Funktion von ωRC dargestellt.

Die *Welligkeit k* läßt sich in guter Näherung unter der Annahme berechnen, daß zwischen φ_1 und φ_2 anstelle von Gl. (5/18) die Spannung infolge der bisher vernachlässigten Widerstände R_i der Dioden und der Transformatorwicklung linear ansteigt. Wird auch der Entladungsvorgang zwischen φ_2 und $\pi + \varphi_1$ als lineare Funktion beschrieben, so erhält man für den Spannungsverlauf eine Sägezahnkurve mit der Maximalspannung E_m bei $\omega t = \varphi_2$ sowie Minima

$E_m - U_w = E_m - E_m \sin \varphi_1$. Als mittlere Gleichspannung findet man daraus den Wert $\bar{U} = E_m - U_w/2$; für die *Brummspannung* ergibt sich die Beziehung

$$U_w = \frac{(\pi + \varphi_1 - \varphi_2)\,\bar{I}}{\omega C}. \tag{5/27}$$

Der Effektivwert der Brummspannung $U_{w\mathrm{eff}}$ ergibt sich zu

$$U_{w\mathrm{eff}} = \frac{U_w}{2\sqrt{3}} = \frac{(\pi + \varphi_1 - \varphi_2)}{2\sqrt{3}\,\omega C}\,\bar{I} \tag{5/28}$$

und damit die Welligkeit zu

$$k = \frac{U_{w\mathrm{eff}}}{\bar{U}} = \frac{\pi + \varphi_1 - \varphi_2}{2\sqrt{3}\,\omega C R}. \tag{5/29}$$

Die Größe k ist mit den aus Abb. 5.5 entnommenen Werten als Funktion von ωRC in Abb. 5.7 dargestellt; die Welligkeit nimmt demnach mit wachsendem Strom (abnehmendem R) und kleiner werdender Kreisfrequenz zu. Eine kleine Welligkeit muß mit sehr kurzen und hohen Ladeimpulsen erkauft werden, die für Hochvakuum- und Gasentladungsgleichrichter eine Gefahr bedeuten können. Gleichrichter mit Nebenschlußkapazitätsfilter sind daher nur für kleine Ströme geeignet.

5.142 Filter mit Serieninduktivität

Schaltet man hinter den Gleichrichter in Serie mit dem Lastwiderstand eine Induktivität, so wirkt diese gleichfalls als Filter, da sie für die Wechselstromkomponente eine hohe Serienimpedanz darstellt. In der Induktivität L wird magnetische Energie gespeichert, wenn der Strom seinen Mittelwert übersteigt, und an den Lastwiderstand abgegeben, wenn der Mittelwert unterschritten wird. Ein Vollweggleichrichter mit Serieninduktivität ist in Abb. 5.8 dargestellt.

Für die Analyse dieser Schaltung soll zunächst der Einweggleichrichter behandelt werden. In der Durchlaßperiode gilt die Differentialgleichung

$$L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t + Ri = E_m \sin \omega t, \tag{5/30}$$

wenn Dioden- und Transformatorwiderstand vernachlässigt werden. Diese Gleichung besitzt die singuläre Lösung

$$i = B\mathrm{e}^{-Rt/L} \tag{5/31}$$

sowie die stationäre Lösung

$$i = \frac{E_m}{R\sqrt{(\omega L/R)^2 + 1}} \sin(\omega t - \Phi), \tag{5/32}$$

worin

$$\Phi = \arctan(\omega L/R). \tag{5/33}$$

Der Diodenstrom summiert sich aus beiden Anteilen und besitzt die Form

$$i = B\,\mathrm{e}^{-Rt/L} + \frac{E_m}{R\sqrt{(\omega L/R)^2 + 1}} \sin(\omega t - \Phi) \qquad 0 \leqq \omega t \leqq \varphi_2;$$

$$i = 0 \qquad \varphi_2 \leqq \omega t \leqq 2\pi. \quad (5/34)$$

Da die Spannung zwischen π und 2π negativ ist, muß der Strom i durch Null gehen, bevor im nächsten Zyklus die Spannung wieder positiv wird. Ein Strom in der Sperrichtung ist aber nicht möglich; dieser wird daher, wie in Abb. 5.9 gezeigt ist, für einen bestimmten Phasenwinkel φ_2, d. h. in dem Augenblick,

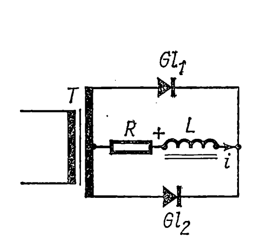


Abb. 5.8 Vollweggleichrichter mit Serieninduktivität als Filter

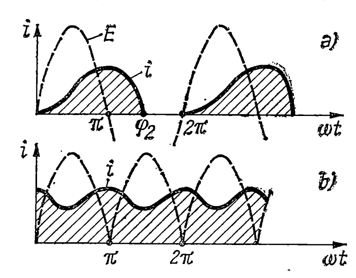


Abb. 5.9 Ladestrom für Halbweggleichrichter (a) und Vollweggleichrichter (b) mit Serieninduktivität

in dem die Diode die Spannungsquelle mit der Last verbindet, Null. Daraus läßt sich die Konstante B in Gl. (5/34) mit $i = 0$ für $\omega t = 0$ berechnen:

$$B = \frac{E_m}{R\sqrt{(\omega L/R)^2 + 1}} \sin \Phi.$$

Damit findet man für die Ladeimpulse den Ausdruck

$$i = \frac{E_m}{R\sqrt{(\omega L/R)^2 + 1}} [\sin(\omega t - \Phi) + \mathrm{e}^{-Rt/L} \sin \Phi] \qquad 0 \leqq \omega t \leqq \varphi_2;$$

$$i = 0 \qquad \varphi_2 \leqq \omega t \leqq 2\pi. \quad (5/35)$$

Mit wachsendem $\omega L/R$ wird der exponentielle Stromabfall auch dann noch nicht beendet, wenn für $\omega t > \pi$ die vom Transformator gelieferte Spannung negativ ist. An der Diode wird durch den Term $L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ zwischen π und φ_2 eine positive Spannung liegen und ein endlicher Strom fließen. Für $\omega L/R = \infty$ wird $\varphi_2 = 2\pi$.

Den Phasenwinkel φ_2 für das Ende des Laststromes erhält man aus Gl. (5/35) für $\omega t = \varphi_2$ und $i = 0$; es gilt dann

$$R/\omega L = \frac{\cos\varphi_2 - \mathrm{e}^{-R\varphi_2/\omega L}}{\sin\varphi_2}. \quad (5/36)$$

Den Winkel φ_2 erhält man grafisch als Funktion von $R/\omega L$; er ist in Abb. 5.10 dargestellt. Man erkennt daraus, daß sich der Phasenwinkel φ_2 mit wachsendem Laststrom, d. h. mit abnehmendem $R/\omega L$ dem Wert 2π nähert.

Durch Integration der Gl. (5/35) über den Zeitabschnitt $0 \leqq \omega t \leqq \varphi_2$ erhält man die Gleichstromgrößen

$$\bar{I} = \frac{E_m}{2\pi R}(1 - \cos\varphi_2);$$

$$\bar{U} = \frac{E_m}{2\pi}(1 - \cos\varphi_2). \qquad (5/37)$$

Für große Induktivität L ($\varphi_2 \to 2\pi$) wird die Ausgangsspannung im Vergleich zu E_m klein; für kleines L ($\varphi_2 \approx \pi$) wird $\bar{U} \approx E_m/\pi$, was nach Gl. (5/3) dem Einweggleichrichter ohne Filter entspricht.

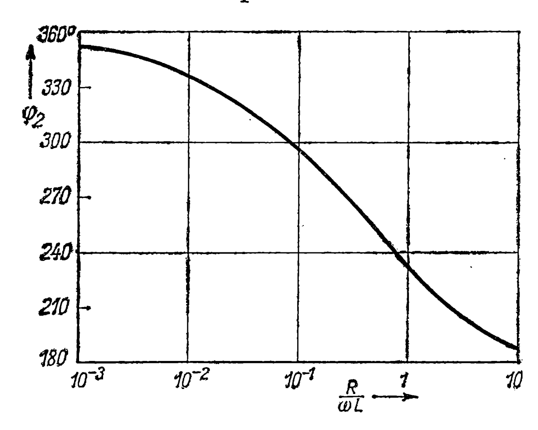


Abb. 5.10 Phasenwinkel φ_2 des Laststroms beim Einweggleichrichter mit Induktivität

Im Falle des Vollweggleichrichters überlappen sich, wie aus Abb. 5.9b hervorgeht, die Laststromimpulse beider Dioden, und der Gesamtstrom wird für nicht zu kleines L stetig. Diese Anordnung läßt sich daher in der Weise behandeln, daß man sich an das RL-Glied eine gleichgerichtete Sinusspannung nach Abb. 5.3b gelegt denkt. Diese Spannung setzt sich aus geraden Harmonischen nach Gl. (5/13) zusammen, für die folgende Reihenentwicklung gilt:

$$E = \frac{2E_m}{\pi} - \frac{4E_m}{3\pi}\cos^2\omega t - \frac{4E_m}{15\pi}\cos 4\omega t - \frac{4E_m}{35\pi}\cos 6\omega t + \cdots \qquad (5/38)$$

Der erste Term stellt die Gleichspannungskomponente dar. Besitzt die Induktivität den Widerstand R_L, so findet man für den Gleichstromanteil

$$\bar{I} = \frac{2E_m}{\pi} \cdot \frac{1}{R + R_L} \qquad (5/39)$$

und für die Gleichspannung am Lastwiderstand

$$\bar{U} = \frac{2E_m}{\pi} \frac{1}{1 + R_L/R}. \tag{5/40}$$

Die Eingangsimpedanz des RL-Filters für die niedrigste auftretende Harmonische 2ω wird $\mathbf{Z}_2 = R_L + R + \mathrm{j}2\omega L$, woraus sich der entsprechende Wechselstrom

$$|I_2| = \frac{4E_m}{3\sqrt{2}\pi(R_L + R)\sqrt{[2\omega L/(R_L + R)]^2 + 1}} \tag{5/41}$$

ergibt. Da für eine gute Filterung $2\omega L/(R_L + R) > 1$ sein sollte, wird hierfür die vierte Harmonische nur etwa 10% von $|I_2|$ betragen, so daß es für die Berechnung der Welligkeit genügt, wenn man nur letztere berücksichtigt. Damit wird

$$k = |I_2|/\bar{I} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{[2\omega L/(R_L + R)]^2 + 1}} \approx \frac{\sqrt{2}(R_L + R)}{6\omega L}. \tag{5/42}$$

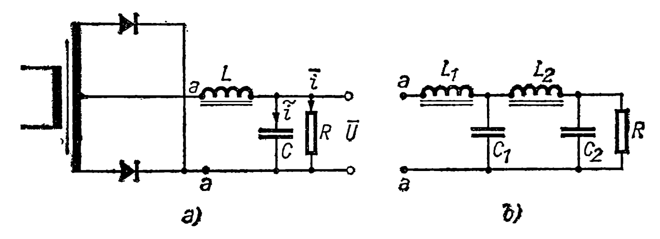


Abb. 5.11 Vollweggleichrichter mit LC-Filter (a) und Filterkette (b)

Mit zunehmendem Strom, d. h. abnehmendem R, sinkt k im Gegensatz zum Kapazitätsfilter.

Das induktive Filter verursacht keine ernsthafte Impulsbelastung der Dioden, liefert eine bessere Stromglättung als das kapazitive Filter, erfordert jedoch eine höhere Eingangswechselspannung im Vergleich zu diesem.

5.143 LC-Filter; Filterkette

Weder die Nebenschlußkapazität noch die Serieninduktivität ist besonders wirtschaftlich, wenn es sich darum handelt, eine gut geglättete Versorgungsspannung zu liefern. Aus diesem Grunde werden LC-Filter sowie Filterketten dem Lastwiderstand parallelgeschaltet, wie das in Abb. 5.11 für den Vollweggleichrichter dargestellt ist. Die Induktivität dient zur Unterdrückung der Wechselstromkomponenten, und die Kapazität schließt die am Lastwiderstand auftretenden Wechselspannungskomponenten kurz; die resultierende Welligkeit ist geringer als mit L oder C allein.

Da C-Filter geringe Welligkeit bei kleinen Strömen und L-Filter eine solche bei starken Strömen, d. h. bei kleinem Lastwiderstand, besitzen, sollte ein

LC-Filter für einen großen Strombereich wirksam sein. Ferner sollte die Impedanz des Filters von der Lastseite aus gesehen für alle Signalfrequenzen eines Verstärkers *klein* sein, damit zwischen den Verstärkerstufen keine Rückkopplung auftritt. Die Nebenschlußkapazität muß groß genug sein, um eine kleine Ausgangsimpedanz zu gewährleisten und bei variabler Last die dynamische Spannungseinstellung zu beschleunigen.

Für großes R wird $\bar{U} \approx E_m$; mit abnehmendem R werden die Dioden, wie in § 5.141 erläutert, nur kurz belastet, während die in der Induktivität gespeicherte magnetische Energie wegen des geringen Stromes kaum von Einfluß ist. Mit wachsendem Strom verlängert sich die Durchlaßzeit der Dioden, bis sie schließlich den Wert π/ω erreicht; von diesem Wert an sind die Dioden ständig von Strom durchflossen und lassen die Serieninduktivität wirksam werden. Aus diesem Grund belastet man Gleichrichter mit LC-Filter auch ohne äußere Last mit einem Widerstand R_B, der so bemessen ist, daß der Diodenstrom kontinuierlich und die Serieninduktivität wirksam ist.

Beschränkt man sich auf die zweite Harmonische der Reihenentwicklung von Gl. (5/38) und nimmt ferner an, daß der Lastwiderstand (einschließlich des parallelgeschalteten Widerstandes R_B) so groß ist, daß nur der Wechselstromanteil $\tilde{i}$ (vgl. Abb. 5.11a) durch L und C fließt, so findet man für den Strom I_2 der Frequenz 2ω die Beziehung

$$I_2 = \frac{4E_m}{3\sqrt{2}\,\pi\,(2\omega L - 1/2\omega C)} = \frac{4\omega C E_m}{3\sqrt{2}\,\pi(4\omega^2 LC - 1)}. \tag{5/43}$$

Dieser Strom soll vollständig durch C fließen und erzeugt am Lastwiderstand die Wechselspannung

$$U_{\text{weff}} = \frac{4E_m}{3\sqrt{2}\,\pi(4\omega^2 LC - 1)}. \tag{5/44}$$

Damit wird die Welligkeit

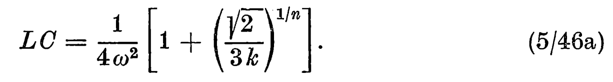
$$k = U_{\text{weff}}/\bar{U} = \frac{U_{\text{weff}}}{2E_m/\pi} = \frac{\sqrt{2}}{3(4\omega^2 LC - 1)}. \tag{5/45}$$

Unter der Annahme, daß in den Dioden der Strom kontinuierlich fließt, ist die Welligkeit vom entnommenen Strom unabhängig. In Abb. 5.12 ist die Welligkeit eines Gleichrichters mit einfachem LC-Filter als Funktion von $\omega^2 LC$ aufgetragen; sie ist, wie der Vergleich mit Abb. 5.7 zeigt, wesentlich kleiner mit L- oder C-Filterung allein. Die Bedingung $4\omega^2 LC = 1$ muß natürlich vermieden werden, da in diesem Fall wegen der Serienresonanz für die Frequenz 2ω eine sehr große Wechselamplitude auftritt.

Zur weiteren Verringerung der Welligkeit können, wie in Abb. 5.11b gezeigt, zusätzliche LC-Glieder nachgeschaltet werden. Die Welligkeit berechnet sich analog zu Gl. (5/45) aus der Beziehung

$$k = \frac{\sqrt{2}}{3\,(4\omega^2 L_1 C_1 - 1)(4\omega^2 L_2 C_2 - 1)(\cdots)}. \tag{5/46}$$

Mit $L_1 = L_2 = L_3 = \cdots = L_n$ und $C_1 = C_2 = C_3 = \cdots = C_n$, also n identischen LC-Gliedern, und der gewünschten Welligkeit k findet man aus Gl. (5/46) den Wert LC für einen Vollweggleichrichter:



$$LC = \frac{1}{4\omega^2}\left[1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3k}\right)^{1/n}\right]. \qquad (5/46a)$$

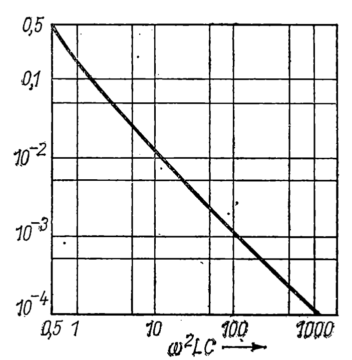


Abb. 5.12 Welligkeit des einfachen LC-Filters

5.144 Kritischer Widerstand R_B

Wie bereits in § 5.142 erläutert wurde, wird beim Vollweggleichrichter mit L-Filter der Laststrom stetig, wenn L einen bestimmten Wert übersteigt. Die Bedingung hierfür ist, daß der Lastwiderstand $R \leqq R_B$, wobei R_B („Bleeder") dem eigentlichen Außenwiderstand parallel geschaltet wird. Das Kriterium für einen stetigen Laststrom liegt bei $\bar{I} = I_{2\text{eff}}$, d. h., wenn die Wechselstromamplitude der 2. Harmonischen dem Gleichstromanteil entspricht. Da nach Gl. (5/39) $\bar{I} = 2E_m/\pi R_B$ (mit Außenwiderstand $R_L = \infty$) und nach Gl. (5/43) $I_{2\text{eff}}$ zu berechnen ist, wird

$$\frac{2E_m}{\pi R_B} = \frac{4E_m}{3\pi(2\omega L - 1/2\omega C)}. \qquad (5/47)$$

Wie bereits gezeigt, muß $2\omega L \gg 1/2\omega C$ sein; damit wird

$$R_B = 3\omega L \qquad (5/48)$$

und der von R_B aufgenommene Strom

$$I_B = \frac{2E_m}{\pi R_B} = \frac{2E_m}{3\pi\omega L}. \qquad (5/49)$$

Um I_B relativ klein zu halten, muß nach Gl. (5/49) die Induktivität L große Werte besitzen, wozu eisengeschlossene Drosseln (s. § 13.1) verwendet werden.

5.145 *Π*-Filter

Wie in § 5.142 behandelt und aus Gl. (5/40) hervorgeht, erniedrigt sich beim Gleichrichter mit Serieninduktivität oder LC-Filter die gelieferte Gleichspannung $\bar{U}$ gegenüber $2\,E_m/\pi$ beträchtlich. Zur Erhöhung der Gleichspannung kann man hierzu dem LC-Filter einen parallel geschalteten Kondensator C_1 vorschalten, der etwa dieselbe Größe wie C_2 des LC-Filters besitzt. Die entsprechende Schaltung ist aus Abb. 5.13 zu entnehmen. Nimmt man zur Vereinfachung der Berechnung an, daß während der Sperrperiode einer Diode der aus C_1 abfließende Strom konstant ist, so ergibt sich die Ausgangsspannung zu

$$\bar{U} = E_m - U_{\omega \mathrm{eff}}/2 - \bar{I} R_L,$$

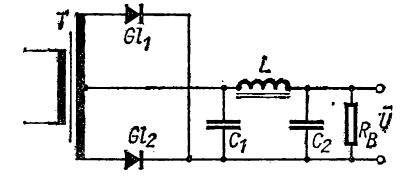




Abb. 5.13 Gleichrichter mit RLC-Filter

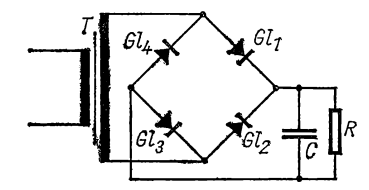


Abb. 5.14 Graetz-Schaltung

wenn R_L der ohmsche Widerstand der Induktivität ist. Die Brummspannung $U_{\omega \mathrm{eff}}$ findet man aus

$$U_{\omega \mathrm{eff}} = \pi \bar{I}/2\omega C_1,$$

so daß sich schließlich ergibt:

$$\bar{U} = E_m - \bar{I}\left(\frac{\pi}{2\omega C_1} + R_L\right). \tag{5/50}$$

Mit wachsendem C_1 nimmt daher die Gleichspannung zu. Für die Welligkeit erhält man schließlich den Ausdruck

$$k = |E_2|/\bar{U} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\omega C_1 R (4\omega^2 L C_2 - 1)}, \tag{5/51}$$

aus dem zu ersehen ist, daß k vom Lastwiderstand abhängt und mit wachsendem Strom zunimmt, während k beim LC-Filter vom Strom unabhängig ist.

5.15 *Graetz-Schaltung*

Im Gegensatz zum Zweiweggleichrichter mit Mittelanzapfung der Sekundärwicklung des Transformators ergibt die Graetz-Schaltung bei gegebener Transformatorgröße eine höhere Gleichstromleistung sowie eine geringere Spannung an den Dioden in der Sperrichtung. Mit Hochvakuumdioden muß dieser Vorteil durch vier zusätzliche Heiztransformatoren erkauft werden. Heute bereitet ihre breite Anwendung durch Benutzung von *Siliziumdioden* [*5.83*] (s. § 4.242) keine Schwierigkeit mehr.

Die Schaltung, die in Abb. 5.14 wiedergegeben ist, besteht aus vier identischen Dioden $Gl_1 \dots Gl_4$, denen an zwei gegenüberliegenden Knotenpunkten die Sekundärspannung des Transformators T zugeführt wird. Von den beiden anderen Knotenpunkten wird die Gleichspannung für den Lastwiderstand R entnommen; zur Siebung ist der parallelgeschaltete Kondensator C vorgesehen. Die Wirkung entspricht der des Vollweggleichrichters mit Ausnahme der Belastung des Transformators, dessen Sekundärstrom um den Faktor $\sqrt{2}$ höher ist.

5.16 *Gleichrichter mit Spannungsvervielfachung*

Eine Anwendung der Gleichrichterschaltung mit Nebenschlußkapazität (s. § 5.141) stellt die *Spannungsverdopplerschaltung* in Abb. 5.15 dar. Diese ähnelt der eines Vollweggleichrichters, enthält aber *zwei* Glättungskondensa-

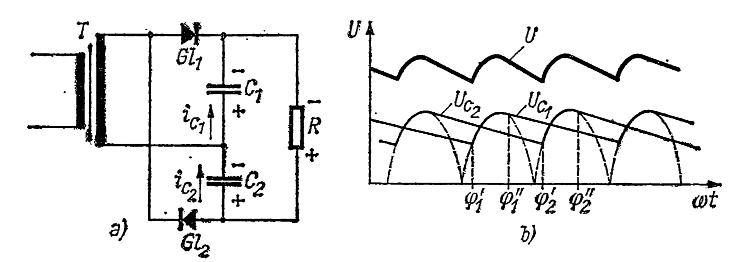


Abb. 5.15 Spannungsverdoppler

toren C_1, C_2 in Reihe, die zum Lastwiderstand R parallel liegen. Die Ausgangsspannung U ist zu jedem Zeitpunkt die Summe der an C_1 und C_2 liegenden Spannungen U_{C1} bzw. U_{C2}. Der Kondensator C_1 wird aufgeladen, wenn die Diode Gl_1 in Durchlaßrichtung gepolt ist; während der folgenden Halbperiode wird der Kondensator C_2 aufgeladen. Im stationären Zustand sind in Abb. 5.15b der zeitliche Spannungsverlauf in den Kondensatoren und die Gesamtspannung angegeben. Beim Phasenwinkel φ_1' beginnt die Diode Gl_1 den Kondensator C_1 aufzuladen, bis bei φ_1'' die vom Transformator gelieferte Spannung kleiner als die von C_1 und Gl_1 gesperrt wird. Für die Diode Gl_2 und den Kondensator C_2 wiederholt sich dieser Vorgang um den Phasenwinkel π verschoben. Für geringe Lastströme ist $\overline{U} \approx 2E_m$ und entspricht der doppelten Spitzenspannung des Transformators. Dieser wird nicht von Gleichstrom durchflossen und ökonomisch ausgenutzt. Von Nachteil ist die Notwendigkeit, den Transformator gegen die doppelte Spitzenspannung isolieren zu müssen.

Frei von diesem Nachteil ist der in Abb. 5.16a dargestellte Spannungsverdoppler mit Halbwellengleichrichtung, der den Transformator ähnlich wie der Vollweggleichrichter in Abb. 5.15 ausnutzt. Der Kondensator C_1 wird durch die Diode Gl_1 auf etwa die Spitzenspannung E_m aufgeladen; in der folgenden Halbwelle addiert sich diese Spannung zu der vom Transformator gelieferten und lädt über die Diode Gl_2 den Kondensator C_2 auf die doppelte

Spitzenspannung $2\,E_m$ auf, wenn der Lastwiderstand R sehr groß ist. Da ein Ende der Transformatorwicklung geerdet ist, sind keine speziellen Isolationsforderungen zu erfüllen. Der grundsätzliche Nachteil gegenüber dem Vollwegspannungsverdoppler liegt in der gegenüber diesem nur halb so großen Brummfrequenz.

Werden dem Spannungsverdoppler eine weitere Diode Gl_3 und ein Kondensator C_3 in der in Abb. 5.16b gezeigten Weise nachgeschaltet, so wird C_3 bei großer Außenimpedanz R auf den dreifachen Wert $3E_m$ aufgeladen. Die Schaltungen der Abb. 5.15 sind Spezialfälle des allgemeinen *Kaskadenverviel-*

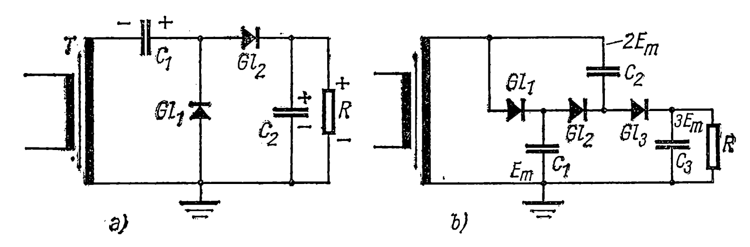


Abb. 5.16 Halbwellengleichrichter mit Spannungsverdopplung (a), mit Spannungsverdreifachung (b)

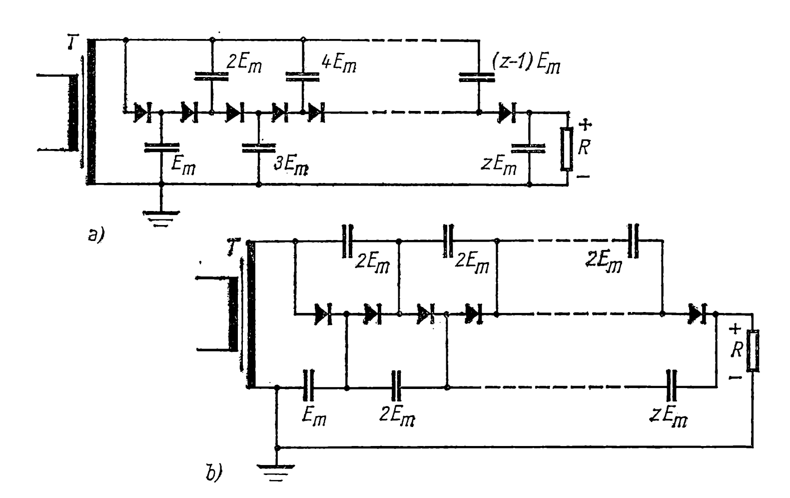


Abb. 5.17 Kaskadenvervielfacher: mit Nebenschlußkapazitäten (a), mit Serienkapazitäten (b)

fachers (Greinacher-Schaltung), dessen zwei grundsätzliche Anordnungen in Abb. 5.17 dargestellt sind und die sich hinsichtlich der Anordnung der Ladekondensatoren unterscheiden. Für relativ niedrige Ausgangsspannung werden in zwei Gruppen angeordnete Nebenschlußkapazitäten (Abb. 5.17a) benutzt. Eine Gruppe ist geerdet, die zweite mit dem Transformatorausgang verbunden. Sie sind durch Dioden in der Weise miteinander verbunden, daß die Ladung nach der letzten Stufe gefördert wird, wobei von Stufe zu Stufe die Spannung

an den Kondensatoren zunimmt. Zur Erzeugung höherer Gleichspannung wird die in Abb. 5.17 b dargestellte Schaltung mit zwei Gruppen in Serie geschalteter Kapazitäten bevorzugt, die jeweils nur mit der doppelten Transformatorspannung beansprucht werden. Bei *gerader* Anzahl z der Stufen fließt durch den Transformator kein Gleichstrom.

Mit idealen Dioden und verschwindender Impedanz der Transformatorwicklung entwickelt ein Kaskadenvervielfacher mit z Stufen aus identischen Serienkapazitäten C eine mittlere Gleichspannung von

$$\bar{U} = zE_m - (z\bar{I}/48fC)(4z^2 + 9z + 2); \qquad (z \text{ gerade})$$
$$\bar{U} = zE_m - (z+1)(\bar{I}/48fC)(4z^2 + 5z + 3). \qquad (z \text{ ungerade})$$

Die entsprechenden Brummspannungen berechnen sich zu

$$U_w = \bar{I}z(z+2)/16fC; \qquad (z \text{ gerade})$$
$$U_w = \bar{I}(z+1)(z+3)/16fC. \qquad (z \text{ ungerade})$$

Darin stellt $\bar{I}$ den Laststrom und f die Frequenz der Spannungsquelle dar. In der Praxis wird $\bar{U}$ durch die Transformatorimpedanz und Diodenverluste gegenüber diesen Formeln reduziert. Für ausreichend große Kapazitäten C lassen sich für jede Stufe die Überlegungen des § 5.141 anwenden, wobei anstelle des Lastwiderstandes der Wert R/z zu setzen ist. Näheres s. § 16.42.

5.17 Gleichspannungskonverter

Wie bereits in § 5.11 ausgeführt, besteht ein Gleichspannungskonverter aus einem Umrichter, der die Gleichspannung in Wechselspannung umformt, und einem Gleichrichter zur Erzeugung der entsprechenden Gleichspannung. Für kleine Leistungen, für die der Gesamtwirkungsgrad des Konverters eine sekundäre Rolle spielt, läßt sich anstelle des Umrichters ein Hochfrequenzsender benutzen, der in der Sekundärwicklung des Ausgangstransformators eine hohe Spannung entwickelt. Beim Transistor-Konverter werden zwei Transistoren als gesteuerte Schalter benutzt (s. § 4.268), durch die die Eingangsgleichspannung in eine Rechteckwechselspannung zerhackt und der Primärwicklung des Transformators zugeführt wird; an die Sekundärwicklung ist ein Gleichrichter angeschlossen. Näheres s. § 15.6.

5.2 Verstärker [*5.10, 5.61, 5.62, 5.74, 5.78*]

In diesem Abschnitt wird im einzelnen die Anwendung von Elektronenröhren und Transistoren zur Verstärkung von Strom, Spannung und Leistung behandelt, deren überragende Bedeutung auch in der physikalischen Meßtechnik nicht näher umrissen zu werden braucht. In § 3.8 ist das Grundsätzliche über Verstärker als *aktive Vierpole* gesagt worden; hier sollen die Eigenschaften von Röhren- und Transistorverstärkern für kleine und große Signale in einem weiten Frequenzgebiet und unter Berücksichtigung einer Rückkopplung vom Verstärkerausgang in den Verstärkereingang abgeleitet werden.

5.21 *Allgemeines*

Eine Unterteilung der Verstärker hinsichtlich ihrer Arbeitsbedingungen läßt sich gemeinsam für Röhren- und Transistorgeräte durchführen, wenn man die Größe des zu verstärkenden Signals auf die Ausdehnung des Kennlinienfeldes bezieht (vgl. § 4.18).

A-Verstärkung: Verstärkung kleiner Signale bei passend gewähltem Arbeitspunkt, so daß im gesamten Aussteuerbereich Strom fließt und lineare Verstärkung erzielt wird. Beim A_1-Verstärker ist das Gitter negativ vorgespannt, so daß der Gitterstrom Null ist. Wird das Gitter teilweise positiv, wodurch während dieser Phase Gitterstrom fließt, spricht man von A_2-Verstärkung. Verstärker dieser Art sind für kleine Leistungen und Spannungen geeignet; ihr Wirkungsgrad beträgt maximal 50% (s. Abb. 5.18a).

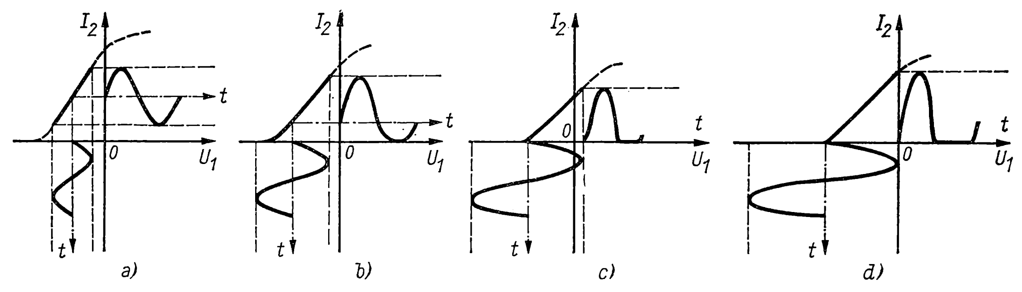


Abb. 5.18 Arbeitsbedingungen in Verstärkern

AB-Verstärkung: Bei dieser Betriebsweise wird die Gitterspannungsamplitude so groß, daß der lineare Teil der Kennlinie verlassen wird und Anodenstrom zwar nicht mehr die ganze, jedoch mehr als die halbe Periode fließt. Um sinusförmigen Ausgang zu erzeugen, sind zwei Verstärkerröhren zu kombinieren. Der theoretische Wirkungsgrad liegt zwischen 50 und 78% (Abb. 5.18b).

B-Verstärkung: In diesem Fall ist die negative Gittervorspannung so gewählt, daß die geradlinige Verlängerung der Kennlinie bei $-U_g$ die Abszisse schneidet. Bei starker Aussteuerung entstehen im Anodenkreis halbe Sinuskurven, wie Abb. 5.18 c zeigt; der maximale Wirkungsgrad liegt bei 78%.

C-Verstärkung: Die Gittervorspannung ist so groß, daß ohne Signal kein Anodenstrom fließt. Im Anodenkreis entstehen sinusförmige Impulse, die kürzer als eine Halbwelle sind. Der theoretische Wirkungsgrad beträgt maximal 100% (s. Abb. 5.18d).

Die *praktisch* erzielbaren Wirkungsgrade in diesen Verstärkern betragen etwa 80% des jeweils angegebenen theoretischen Wertes.

Eine weitere Klassifizierung der Verstärker nach ihrer Funktion unterscheidet *Spannungs-*, *Strom-* und *Leistungsverstärker.* Auch eine Unterteilung in *Gleichspannungs-*, *Niederfrequenz-* und *Hochfrequenzverstärker* ist üblich; auch die Art der Kopplung einzelner Stufen oder des Lastwiderstandes gibt Bezeichnungsmerkmale.

In praktischen Schaltkreisen mit Elektronenröhren und Transistoren müssen gewöhnlich Gleich- und Wechselkomponenten von Strom und Spannung separiert werden. Gleichspannungen bzw. -ströme werden zur Einstellung der

Arbeitsbedingungen benutzt und geben keine Information weiter. Aus diesem Grunde werden die konstanten und die sich ändernden Komponenten von Strom und Spannung in ihrer Bezeichnung unterschieden:

1. Wechselkomponenten werden durch kleine Buchstaben mit kleinen Indizes, z. B. i_a, beschrieben.
2. Mittel- oder konstante Komponenten werden mit großen Buchstaben und großen Indizes bezeichnet, z. B. I_B.
3. Effektivwerte werden durch große Buchstaben und kleine Indizes beschrieben, z. B. I_a.
4. Betriebsspannungen werden mit einem Doppelindex bezeichnet, der die entsprechende Elektrode wiederholt, z. B. U_{gg}.
5. Positive Stromrichtung soll zur Röhre bzw. zum Transistor deuten; positive Spannung ist nach *oben* gerichtet.
6. Ströme zu den Elektroden werden mit einem einfachen Index gekennzeichnet:

k	Katode	b	Basis
g	Gitter	e	Emitter
a	Anode	c	Kollektor.

7. Der Index s wird für die Signalspannung, l für die Last benutzt.

Verstärkungsfaktor. Die Verstärkung stellt das Verhältnis von Ausgangs- zu Signalleistung dar und wird gewöhnlich in logarithmischen Einheiten gemessen. Die Einheit ist das *Dezibel* (dB) und wird definiert durch

$$\mathrm{dB} = 10 \lg (P_2/P_1),$$

wenn P_1 bzw. P_2 Eingangs- bzw. Ausgangsleistung sind. Die Einheit Dezibel wird auch als Maß für Spannungs- bzw. Stromverhältnisse benutzt; da $P \approx I^2$ bzw. U^2 ist, gilt entsprechend

$$\mathrm{dB} = 20 \lg (U_2/U_1) \quad \text{bzw.} \quad 20 \lg (I_2/I_1).$$

5.22 *Verstärker für kleine Signale* [5.55]

Es werden zunächst die *Triode* (s. § 4.14) bzw. der *Transistor* (s. § 4.25) als Verstärkerelemente behandelt, die theoretisch auf sechs verschiedene Arten mit Ein- und Ausgang verbunden werden können, von denen praktisch nur je drei von Nutzen sind. Beide Verstärkerelemente können als *lineare Kreiselemente* betrachtet werden, wenn man ihre Anwendung auf kleine Signale beschränkt.

5.221 Verstärker mit Katode bzw. Emitter an Erde

Die am weitesten verbreitete Schaltanordnung für Elektronenröhren ist die mit geerdeter Katode (Abb. 5.19a), deren Ersatzkreis in Abb. 5.19b dargestellt ist. Wie bereits in § 3.8 mit Gl. (3/106) abgeleitet wurde, beträgt die Spannungsverstärkung dieser Anordnung

$$|U_2/U_1| = \frac{I_2 R_l}{U_1} = -\frac{\mu R_l}{R_i + R_l}, \tag{5/52}$$

wenn R_l den Lastwiderstand, R_i den Innenwiderstand der Röhre und $\mu = 1/D$ den reziproken Durchgriff ($D = -(\partial u_g/\partial u_a)_{I_a}$) bedeutet. Die Frequenz ist dabei so klein, daß Verschiebungsströme in den Röhrenkapazitäten vernachlässigt werden können; dies trifft meist bis 500 kHz zu. Aus Gl. (5/52) ist zu ersehen, daß im Verstärker eine Phasenumkehr stattfindet und die Spannungsverstärkung dem Verstärkungsfaktor μ der Röhre bis auf den Faktor $R_l/(R_i + R_l) < 1$ entspricht. Durch größeres R_l kann dieser Faktor größer gemacht werden, doch sind dem Grenzen dadurch gesetzt, daß der Spannungsabfall $I_2 R_l$ die Spannung an der Anode verringert und damit R_i erhöht. Eine obere Grenze für diesen Faktor liegt bei 2/3. Wie bereits in Abb. 3.33 dargestellt, kann die äquivalente Spannungsquelle μU_1 durch eine Stromquelle

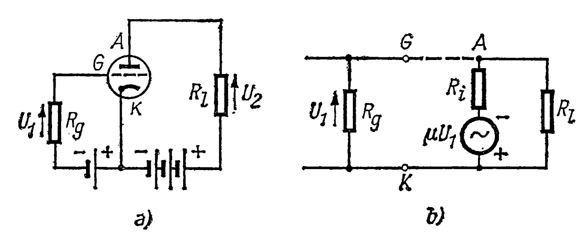


Abb. 5.19 Röhrenverstärker mit geerdeter Katode

SU_1 ersetzt werden, die ihren Strom durch die Parallelschaltung von R_i und R_l schickt (Abb. 5.20a). Als Spannungsverstärkung ergibt sich mit $U_2 = -U_1(SR_i R_l)/(R_i + R_l)$ die Beziehung

$$|U_2/U_1| = -\frac{SR_i R_l}{R_i + R_l}, \tag{5/53}$$

die mit $SR_i = \mu$ in Gl. (5/52) übergeht. Dividiert man Gl. (5/53) durch R_i, so erhält diese die Form

$$|U_2/U_1| = -\frac{SR_l}{1 + R_l/R_i}, \tag{5/53a}$$

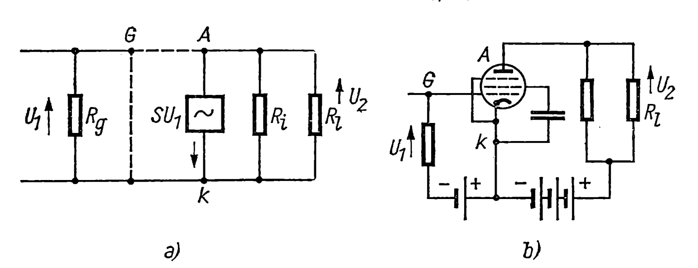


Abb. 5.20 Ersatzschaltbild eines Verstärkers mit geerdeter Katode (a); Pentodenverstärker (b)

die besonders für *Pentoden* mit ihren sehr hohen Innenwiderständen (vgl. § 4.15) nützlich ist. In diesem Fall wird die Spannungsverstärkung $-SR_l$ bis auf den Nenner in Gl. (5/53a), der nur wenig größer als Eins ist.

Mit *Trioden* erhält man eine Spannungsverstärkung von 10···50, mit *Pentoden* zwischen 50 und 300. Der Gitterwiderstand R_g wird bei Verstärkern mit Signalspannungen von einigen Zehntel Volt sehr hoch (einige Megaohm) gewählt und hat lediglich die Aufgabe, die geringen auf das Gitter treffenden Elektronen- und Ionenströme abzuleiten. Die Eingangsleistung liegt daher unter 1 μW, wohingegen die Ausgangsleistung einige Watt betragen kann, d. h., die Leistungsverstärkung ist in diesem Fall außerordentlich groß und erreicht etwa 60 dB pro Stufe, während die Spannungsverstärkung bei 30 dB liegt.

Bei Verwendung von *Transistoren* hingegen muß wegen der verschiedenen Ein- und Ausgangswiderstände die Leistungsverstärkung betrachtet werden. Für den Transistorverstärker nach Abb. 5.21 mit geerdetem Emitter werden die in § 3.8 eingeführten Parameter r_e, r_b, r_c und r_m angewandt, die nach den

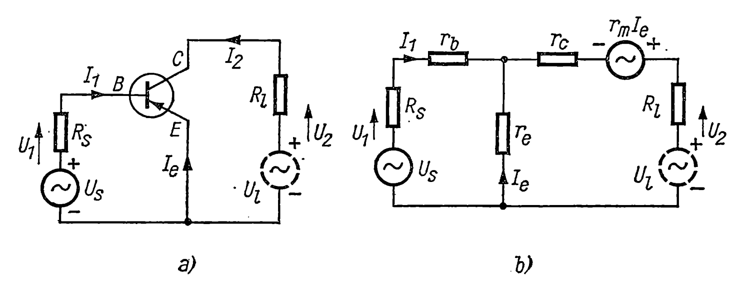


Abb. 5.21 Transistorverstärker mit geerdetem Emitter

Gln. (3/113) aus den Impedanzen z abgeleitet werden. Bezeichnet man mit R_s den Signalquellenwiderstand, mit R_l den Lastwiderstand, so folgen aus dem Ersatzschaltbild der Abb. 5.21 b die beiden Maschengleichungen

$$I_1(R_s + r_b + r_e) + I_2\, r_e = U_s, \tag{5/54}$$

$$I_1 r_e + I_2\,(R_l + r_c + r_e) - I_e\, r_m = U_1, \tag{5/55}$$

woraus mit $I_e = -(I_1 + I_2)$ folgt:

$$I_1(r_e + r_m) + I_2\,(r_c + r_e + R_l + r_m) = U_1. \tag{5/56}$$

In diesen Relationen sind anstelle der Impedanzen z_{ij} ohmsche Widerstände r_{ij} gesetzt, wodurch die Ergebnisse auf relativ kleine Frequenzen beschränkt sind.

Um die Eingangs- und Ausgangsleistung zu bestimmen, ist es nützlich, einen Ausdruck für die *Kreisdeterminante*, d. h. die im Nenner der Stromgleichung auftretende Determinante zu bekommen. Diese lautet

$$\Delta_e = (R_s + r_b + r_e)(R_l + r_e + r_c - r_m) + r_e\,(r_m - r_e). \tag{5/57}$$

Dieser Ausdruck muß *positiv* sein; andernfalls treten auch bei $U_s = 0$ Schwingungen auf (diese Bedingung ist notwendig, jedoch nicht hinreichend). Für

den *Eingangswiderstand* findet man

$$R_1 = U_s/I_1 - R_s = r_b + r_e + \frac{r_e(r_m - r_c)}{R_l + r_e + r_c - r_m} \approx r_e + r_b(1 - \alpha_{ce}), \tag{5/58}$$

wenn $R_l \ll r_c$ und $\alpha_{ce} = I_c/I_e$ für den Kurzschlußfall ist. In ähnlicher Weise wird der Ausgangswiderstand durch die Beziehung

$$R_2 = r_c + r_e - r_m + \frac{r_e\,(r_m - r_c)}{R_s + r_b + r_e} = r_c\,\frac{r_e + r_b\,(1 - \alpha_{ce}) + R_s}{r_e + r_b + R_s} \tag{5/59}$$

ausgedrückt, wobei $r_b \ll r_c$. Als *Ausgangsleistung* $P_2 = I_2{}^2 R_l$ ergibt sich mit Gl. (5/56)

$$P_2 = \frac{(r_m - r_e)^2}{\Delta}\, U_s{}^2 R_l\,. \tag{5/60}$$

Die *Eingangsleistung* P_1 hängt von der Anpassung des Signalquellenwiderstandes R_s an den Eingangswiderstand R_1 ab; die maximale Eingangsleistung ergibt sich für $R_s = R_1$ und beträgt

$$P_{1\max} = U_s{}^2/4R_s\,. \tag{5/61}$$

Ferner lassen sich daraus die Ausdrücke für die *Stromverstärkung*

$$I_2/I_1 = \frac{r_m - r_e}{r_e + r_c - r_m + R_l} \approx \frac{\alpha_{ce}}{1 - \alpha_{ce} R_l/r_c} \tag{5/62}$$

Tabelle 5.1 Verstärkungseigenschaften von Transistoren in der Emitterschaltung

Größe	Legierungs-transistor	Spitzen-transistor
r_e (Ω)	25	150
r_b (Ω)	500	120
r_m (kΩ)	960	60
r_c (kΩ)	1000	40
R_l (kΩ)	20	20
R_s (Ω)	500	0
α_{ce}	0,96	1,5
R_1 (Ω)	925	720
R_2 (kΩ)	63,4	13,3
I_2/I_1	16	3
U_2/U_1	−346	−167
$I_2 U_2/I_1 U_1$	5520 (37,4 dB)	500 (27 dB)

sowie für die *Spannungsverstärkung*

$$U_2/U_1 = \frac{R_l\,(r_e - r_m)}{r_b\,(r_e + r_c - r_m + R_l) + r_e\,(r_c + R_l)} \approx \frac{\alpha_{ce} R_l}{r_e + (1 - \alpha_{ce})(r_b + R_s)} \tag{5/63}$$

ableiten.

In *Tabelle 5.1* sind für zwei verschiedene Transistortypen die für die Verstärkung kennzeichnenden Größen zusammengestellt.

Im Vergleich zu Röhrenverstärkern bereiten Transistoren hinsichtlich ihrer Schwingungsneigung größere Schwierigkeiten. Transistorverstärker werden *immer* instabil sein, wenn die Kreisdeterminante negativ oder Null ist. Dies ist auch der Fall, wenn Eingangs- oder Ausgangswiderstand eine negative Widerstandskomponente enthalten. Kreisdeterminante sowie Ein- und Ausgangswiderstände hängen empfindlich von R_s und R_l ab. Im allgemeinen müssen diese Widerstände so gewählt werden, daß sich ein Kompromiß zwischen Verstärkung und Stabilität ergibt [*5.23*, *5.64*].

5.222 Verstärker mit Gitter bzw. Basis an Erde

Die Eigenschaften eines Verstärkers mit geerdetem Gitter bzw. geerdeter Basis unterscheiden sich wesentlich von denen des § 5.221. In Abb. 5.22 ist zunächst der entsprechende Röhrenverstärker (*a*) und sein Ersatzschaltbild (*b*)

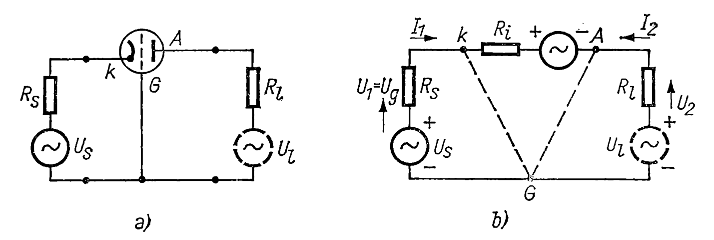


Abb. 5.22 Röhrenverstärker mit geerdetem Gitter (a), Ersatzschaltbild (b)

gezeigt. Dieses stellt eine Serienschaltung des Ein- und Ausgangsgenerators dar; die Röhrenfunktion wird, wie in Abb. 5.19, durch einen Generator mit der Spannung $\mu\,U_{gk}$ und dem Innenwiderstand R_i der Röhre ersetzt.

Ist nur der Signalgenerator in Funktion, so ergeben sich für den Ersatzkreis die Beziehungen

$$U_s - \mu U_{gk} = I_1(R_s + R_i + R_l), \tag{5/64}$$

$$U_{kg} = -U_{gk} = U_s - I_1 R_s. \tag{5/65}$$

Durch Einsetzen von U_{gk} in Gl. (5/64) ergibt sich der *Eingangswiderstand* zu

$$R_1 = U_{kg}/I_1 = \frac{R_i + R_l}{1 + \mu}, \tag{5/66}$$

woraus ersichtlich ist, daß R_1 im Gegensatz zur Katodenschaltung relativ klein wird.

Die *Spannungsverstärkung* $U_2/U_1 = I_1 R_l / U_{kg}$ wird

$$U_2/U_1 = \frac{1+\mu}{R_i + R_l} R_l \tag{5/67}$$

und entspricht nach Gl. (5/53) im Betrag annähernd dem Wert für einen Verstärker mit geerdeter Katode ($SR_i = \mu$ nach Gl. (3/109), da $\mu \gg 1$ ist). Es tritt jedoch *keine* Phasenumkehr zwischen U_1 und U_2 im Gegensatz zu jener Schaltung auf. In praktischen Fällen wird $U_2/U_1 \approx \mu/2$.

Infolge des kleinen Eingangswiderstandes R_1 ist die Eingangsleistung beträchtlich. Da der Strom im Ein- und Ausgang derselbe ist, findet man aus Gl. (5/66) sofort die *Leistungsverstärkung* zu

$$A_N = R_l/R_1 = \frac{R_l(1+\mu)}{R_i + R_l}, \tag{5/68}$$

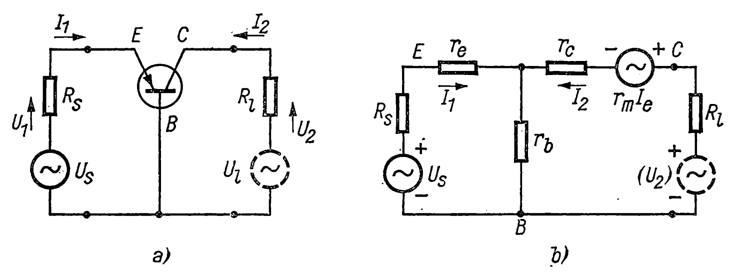


Abb. 5.23 Transistorverstärker mit geerdeter Basis (a); Ersatzschaltbild (b)

welche der Spannungsverstärkung nach Gl. (5/67) entspricht.

Zur Berechnung des *Ausgangswiderstandes* R_2 soll nur der Ausgangsgenerator mit der Spannung U_l in Funktion sein. Man findet hierfür den Wert

$$R_2 = U_2/I_2 = R_i + R_s(1+\mu), \tag{5/69}$$

der praktisch ein Mehrfaches von R_i betragen wird.

Beim *Transistorverstärker* mit geerdeter Basis (s. Abb. 5.23) findet man ähnliche Eigenschaften wie beim entsprechenden Röhrenverstärker. Sie lassen sich aus dem Ersatzschaltbild der Abb. 5.23b ableiten, wobei man von den Maschengleichungen

$$U_s = I_1(R_s + r_b + r_e) + I_2 r_b;$$
$$U_l = I_1(r_b + r_m) + I_2(r_b + r_e + R_l)$$

ausgeht. Man findet folgende Ausdrücke:

Stromverstärkung:

$$I_2/I_1 = -\frac{r_m + r_b}{r_b + r_c + R_l} = -\frac{\alpha_{ce}}{1 + R_l(r_c + r_b)}; \tag{5/70}$$

Spannungsverstärkung: $$U_2/U_1 = \frac{(r_m + r_b)R_l}{r_e(r_b + r_c + R_l) + r_b(r_c - r_m + R_l)}$$

$$= \frac{\alpha_{ce} R_l}{r_e + R_c + r_b(1 - \alpha_{ce})}; \qquad (5/71)$$

Eingangswiderstand: $$R_1 = r_e + r_b - \frac{r_b(r_m + r_b)}{r_b + r_c + R_l}$$

$$= r_e + r_b(1 - \alpha_{ce}); \qquad (5/72)$$

Ausgangswiderstand: $$R_2 = r_b + r_c - \frac{r_b(r_b + r_m)}{R_s + r_e + r_b}; \qquad (5/73)$$

Leistungsverstärkung: $$\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 \frac{R_l}{R_1} = |I_2 U_2/I_1 U_1|.$$

Ein Vergleich mit den entsprechenden Ausdrücken des Transistorverstärkers in Emitterschaltung zeigt, daß der Eingangswiderstand sehr klein ist und annähernd dem Wert von r_e entspricht, der Ausgangswiderstand R_2 sehr hoch ist und die Leistungsverstärkung etwa dem Wert der Spannungsverstärkung entspricht.

In *Tabelle 5.2* sind für die gleichen Transistortypen der *Tabelle 5.1* die charakteristischen Größen für den Basisverstärker zusammengestellt.

Tabelle 5.2 Verstärkungseigenschaften von Transistoren in der Basisschaltung

Größe	Legierungs-transistor	Spitzen-transistor
r_e (Ω)	25	150
r_b (Ω)	500	120
r_m (kΩ)	960	35
r_c (kΩ)	1000	15
R_1 (Ω)	500	500
R_l (kΩ)	20	20
α_{ce}	0,96	2,3
R_1 (Ω)	25	150
R_2 (kΩ)	532	9,66
I_2/I_1	−0,94	−1,0
U_1/U_1	346	133
$I_1 U_2/U_1 I_1$	325 (25,1 dB)	133 (21,24 dB)

Da die *Kreisdeterminante* der Basisschaltung

$$\Delta_b = (R_s + r_e + r_b)(r_b + r_c + R_l) - r_b(r_b - r_m) \qquad (5/74)$$

für zu große Werte von $\alpha_{ce} \approx r_m/r_c$ und r_b negativ werden kann, ist diese Schaltung besonders schwingungsanfällig. Dies hängt damit zusammen, daß der relativ hohe Basiswiderstand r_b für Ein- und Ausgang gemeinsam ist und eine innere Rückkopplung bewirkt. Daher sollen in keinem Fall äußere Widerstände in die Basiszuleitung eingebaut werden. Durch Vergrößerung von R_s und R_l läßt sich hinreichende Stabilität, allerdings auf Kosten der Verstärkung, erreichen.

5.223 Verstärker mit Anode bzw. Kollektor an Erde (Katodenfolger) [*5.37, 5.53, 5.67*]

Beim *Katodenfolger* wird der Lastwiderstand in den Katodenkreis geschaltet, so daß das Katodenpotential etwa dem des Gitters entspricht und die Anode geerdet werden kann (Abb. 5.24). Im Ersatzschaltbild dieses Verstärkers (Abb. 5.24b) liegt im Katodenkreis die Ersatzspannung μU_{gk}, die nach der Beziehung

$$I_2 (R_i + R_l) = -\mu U_{gk}$$

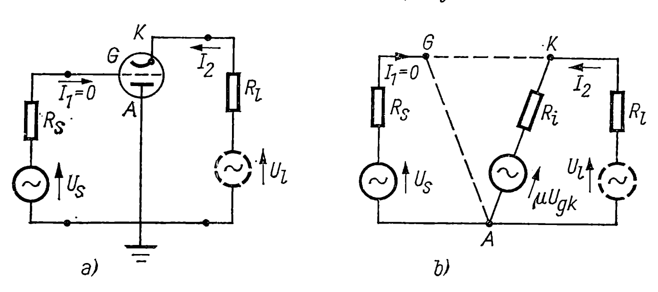


Abb. 5.24 Katodenfolger (a) Ersatzschaltbild (b)

den Laststrom I_2 bestimmt. Summiert man die Spannungen rund um das Netzwerk auf, so gilt

$$-U_{gk} = R_1 I_2 - U_s,$$

und da $I_1 = 0$ ist, findet man die *Spannungsverstärkung* zu

$$U_2/U_1 = \frac{I_2 R_l}{U_s} = \frac{R_l}{R_i + R_l (1 + \mu)} = \frac{1}{1 + 1/\mu + 1/DR_l} \approx 1. \qquad (5/75)$$

Die Spannungsverstärkung beträgt demnach etwa Eins und enthält keine Phasenumkehr. Die Größe des Katodenwiderstandes R_l ist nicht kritisch; sein Wert soll von der Größenordnung des Röhreninnenwiderstandes R_i sein.

Bei relativ niedrigen Frequenzen ist der *Eingangswiderstand* R_1 sehr hoch (von der Größenordnung 1 MΩ). Der *Ausgangswiderstand* R_2 läßt sich mit $U_s = 0$ berechnen. Mit $I_2 = (U_l - U_{gk})/(R_i + R_l)$ und $U_{gk} + U_l = I_2 R_l$ folgt durch Einsetzen

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} - R_l = \frac{R_i}{1 + \mu} \approx \frac{1}{S}. \qquad (5/76)$$

Eine Triode mit $R_i = 7700\,\Omega$ und $\mu = 20$ (12AU7) ergibt mit Gl. (5/76) einen Katodenwiderstand von 385 Ω, d. h., ein solcher Katodenfolger eignet sich gut zur Anpassung an eine Wellenleitung (vgl. § 7.7).

Die Gln. (5/75) und (5/76) zeigen, daß ein solcher Verstärker die Impedanz von hohen Eingangswerten auf kleine Werte transformiert und gleichzeitig *keine* Spannungsverstärkung besitzt.

Im Gegensatz zur gewöhnlich benutzten Verstärkerschaltung mit geerdeter Katode (§ 5.221), bei der die meisten Schaltelemente frei wählbar sind, müssen beim Katodenfolger nach Festlegung des Katodenwiderstandes R_l die rest-

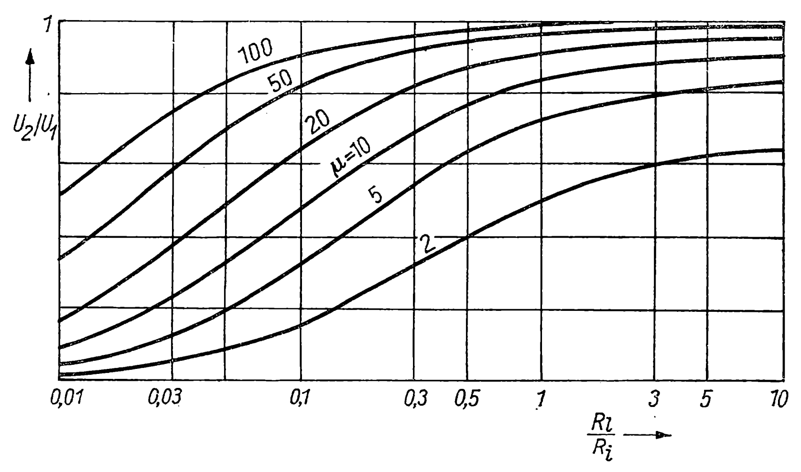


Abb. 5.25 Verstärkung des Katodenfolgers als Funktion von R_l/R_i und μ

lichen Parameter aus den obigen Beziehungen berechnet werden. Für eine vorgegebene Ausgangsimpedanz $\boldsymbol{Z}_2$ läßt sich die geeignete Röhre mit Hilfe der Gl. (5/76) auswählen. Zu diesem Zweck ist in Abb. 5.25 das Verhältnis R_l/R_i als Abszisse und die Spannungsverstärkung nach Gl. (5/75) als Ordinate für verschiedene Werte von μ aufgetragen. Für $\mu > 10$ und $R_l/R_i > 1$ wird die Verstärkung $U_2/U_1 \geqq 0{,}8$ und die Wahl von R_l unkritisch. Wird die Katode mit Wechselstrom geheizt (vgl. § 4.11), so kann über die Heizer-Katoden-Kapazität bei großen Werten von R_l *Netzbrumm* in den Verstärkerkreis eingeleitet werden; in diesem Fall sollte $R_l \leqq 50\,\mathrm{k}\Omega$ gewählt werden.

Einen außerordentlich hohen Eingangswiderstand erhält man mit der Schaltung der Abb. 5.26, in der ein Teil der Ausgangsspannung auf den Eingang rückgekoppelt wird. Zu diesem Zweck ist dem Lastwiderstand R_l im Katodenkreis zur Einstellung der Gittervorspannung ein Widerstand R_v vorgeschaltet und wird an den Gitterableitwiderstand R_g gelegt. Da $R_v \ll R_l$, kann er im Ersatzschaltbild der Abb. 5.26b vernachlässigt werden. Dieses enthält die Ersatzstromquelle $S\,U_{gk}$ und liefert für die Stromverteilung bei K die Beziehung

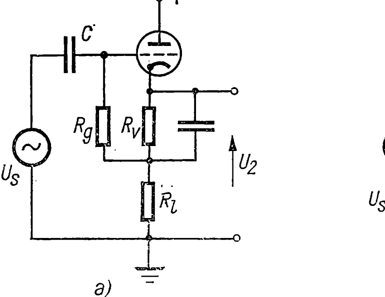
$$I_1 + S\,U_{gk} - U_2\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_l}\right) = 0$$

sowie für die Gitter-Katoden-Spannung den Ausdruck

$$U_{gk} = U_s - U_2 = I_1 R_g .$$

Aus diesen Gleichungen findet man für die Spannungsverstärkung

$$U_2/U_s = \left(1 + \frac{R_g(1 + R_l/R_i)}{R_l(1 + SR_g)}\right)^{-1} \approx \frac{\mu}{\mu + 1}, \qquad (5/77)$$



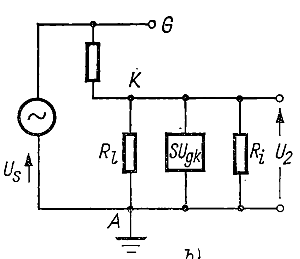
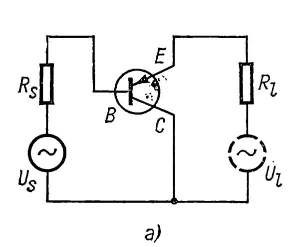


Abb. 5.26 Katodenfolger mit hoher Eingangsimpedanz (a); Ersatzschaltbild (b)



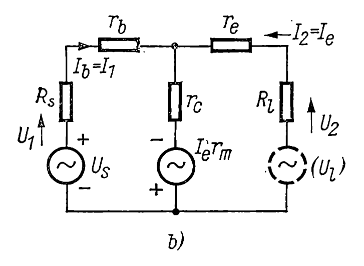


Abb. 5.27 Transistor-Katodenfolger (a); Ersatzschaltbild (b)

wobei die angegebene Näherungsformel für $R_l/R_i \gg 1$ und $SR_g \gg 1$ gilt. Für den Eingangswiderstand findet man mit den gleichen Annahmen

$$R_1 = \frac{U_s}{I_1} = R_g + \frac{R_l(1 + SR_g)}{1 + R_l/R_i} \approx R_g(\mu + 1), \qquad (5/78)$$

d. h. einen um den großen Faktor $\mu + 1$ vergrößerten Gitterwiderstand.

Der *Transistor-Katodenfolger* (Abb. 5.27) ist schwieriger zu analysieren, kann jedoch analog zu den beiden vorhergehenden Schaltungen behandelt werden (s. § 4.273). Auf Grund des Ersatzschaltbildes in Abb. 5.27b lassen sich die folgenden Kreisgleichungen angeben:

$$U_s = I_1(R_s + r_b + r_c) + I_2(r_c - r_m);$$

$$U_l = I_1 r_c + I_2(R_l + r_e + r_c - r_m).$$

Daraus ergeben sich für Eingangs- und Ausgangswiderstand die Beziehungen

$$R_1 = r_b + \frac{r_c}{1 + (1 - \alpha_{ce})(r_c + r_b)/(R_l + r_e)}; \tag{5/79}$$

$$R_2 = r_c + \frac{(1 - \alpha_{ce})(r_c + r_b)}{1 + r_c/(R_s + r_b)}. \tag{5/80}$$

Die *Verstärkungsfaktoren* für Strom und Spannung ergeben sich daraus zu

$$I_2/I_1 = -\frac{r_c}{R_l + r_e + r_c - r_m} \approx \frac{1}{1 + [(r_b + R_s)/R_l](1 - \alpha_{ce})}; \tag{5/81}$$

$$U_2/U_1 = \frac{r_c R_l}{r_b(R_l + r_e + r_c - r_m) + r_c(r_e + R_l)} \approx 1, \tag{5/82}$$

woraus sich die Leistungsverstärkung berechnen läßt. Die Eigenschaften des Transistor-Katodenfolgers hängen vom Stromverstärkungsfaktor α_{ce} ab. Für $\alpha_{ce} \leqq 1$ sind sie dem entsprechenden Röhrenverstärker ähnlich, d. h. hohe Eingangsimpedanz, kleine Ausgangsimpedanz ohne Polaritätsänderung und eine nur wenig von Eins verschiedene Spannungsverstärkung.

In *Tabelle 5.3* sind analog zu den *Tabellen 5.1* und *5.2* für die gleichen Transistortypen die charakteristischen Größen für die Kollektorschaltung auf Grund der obigen Formeln berechnet.

Tabelle 5.3 Verstärkungseigenschaften von Transistoren in der Kollektorschaltung

Größe	Legierungs-transistor	Spitzen-transistor
r_e (Ω)	25	150
r_b (Ω)	500	120
r_m (kΩ)	960	35
r_c (kΩ)	1000	15
R_s (Ω)	500	0
R_l (kΩ)	10	30
α_{ce}	0,96	2,3
R_1 (kΩ)	200	45
R_2 (Ω)	65	50
I_1/I_1	−20	−1,5
U_2/U_1	0,996	0,998
$I_2 U_2/I_1 U_1$	20 (13 dB)	1,5 (1,76 dB)

5.23 *Frequenzverhalten eines Verstärkers* [*5.63*]

Im vorigen Abschnitt sind Verstärker mit verschiedener Schaltung im wesentlichen als Vierpole betrachtet worden, bei denen die *Reaktanzen* im Schaltkreis und in den Verstärkerelementen unberücksichtigt bleiben. In diesem Abschnitt werden Entwurf und Verhalten von Verstärkern behandelt, die in einem großen Frequenzbereich arbeiten und auch ankommende Impulse verstärken sollen.

5.231 Frequenz- und Phasenverhalten des Verstärkers mit geerdeter Katode

Aufgabe eines Verstärker ist die Erhaltung des *Verstärkungsfaktors* sowie des *Phasenwinkels* für ein sinusförmiges Eingangssignal in einem möglichst großen Frequenzbereich. Infolge der Reaktanzen im Verstärkerkreis und in den Verstärkerelementen selbst wird die im idealen Verstärker vorhandene Phasenbeziehung zwischen periodischen Strom- und Spannungsänderungen im Ein- und Ausgang eine Funktion der Frequenz werden. Hinzu kommt der Einfluß der inneren Röhren- bzw. Transistorkapazitäten (vgl. §§ 4.14 und 4.275), besonders bei hohen Frequenzen.

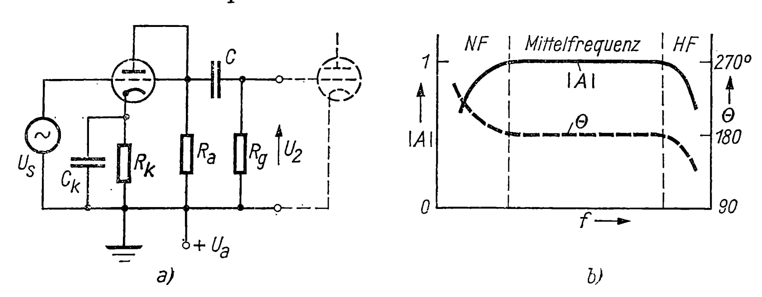


Abb. 5.28 Verstärker mit geerdeter Katode und RC-Kopplung (a), Frequenzgang (b)

Zunächst soll der in Abb. 5.28 dargestellte Röhrenverstärker mit geerdeter Katode (vgl. § 5.221) betrachtet werden, dessen Ausgangssignal durch eine RC-Kopplung an die folgende Verstärkerstufe übertragen wird. Der entsprechende Frequenzverlauf des relativen Verstärkungsfaktors $|\boldsymbol{A}|$ und des Phasenwinkels θ ist schematisch in Abb. 5.28b wiedergegeben. Bei *niedrigen* Frequenzen wirkt sich der große Blindwiderstand des Kopplungskondensators C aus, wodurch $|\boldsymbol{A}|$ mit abnehmender Frequenz f kleiner wird. Bei *mittleren* Frequenzen lassen sich alle Reaktanzen gegenüber den Wirkwiderständen vernachlässigen und ergeben eine von der Frequenz unabhängige Verstärkung. Bei *hohen* Frequenzen wirken sich die Parallelkapazitäten aus und verringern wieder die Größe $|\boldsymbol{A}|$.

In Abb. 5.29a ist in Erweiterung der Abb. 5.19 das Ersatzschaltbild für den Verstärker der Abb. 5.28 entworfen, wobei drei Kapazitäten hinzugefügt sind: der Kopplungskondensator C, der für das Niederfrequenzverhalten maßgebend ist sowie die parallelgeschaltete Kapazität C_{ak} und die Eingangskapazität C_1 für die folgende Röhre. Diese beträgt mit den Bezeichnungen der Abb. 4.4

$$C_1 = C_{gk} + C_{ag}(1 + SR'), \tag{5/83}$$

wobei R' der Realteil der Parallelimpedanz

$$\boldsymbol{Z}' = \frac{R_i \boldsymbol{Z}_a}{R_i + \boldsymbol{Z}_a} = R' + \mathrm{j}X' \tag{5/84}$$

ist, wenn $\boldsymbol{Z}_a$ den komplexen Lastwiderstand darstellt.

Im *Niederfrequenzbereich* stellt C_1 eine sehr hohe Reaktanz dar und kann ebenso wie C_{ak} vernachlässigt werden (Abb. 5.29b). Die zwischen Katode und Anode auftretende Wechselspannung $\boldsymbol{U}_a$ berechnet sich aus

$$\boldsymbol{U}_a = -\boldsymbol{I}_a \boldsymbol{Z}_n = -\frac{\mu \boldsymbol{U}_{gk} \boldsymbol{Z}_n}{R_i + \boldsymbol{Z}_n}, \tag{5/85}$$

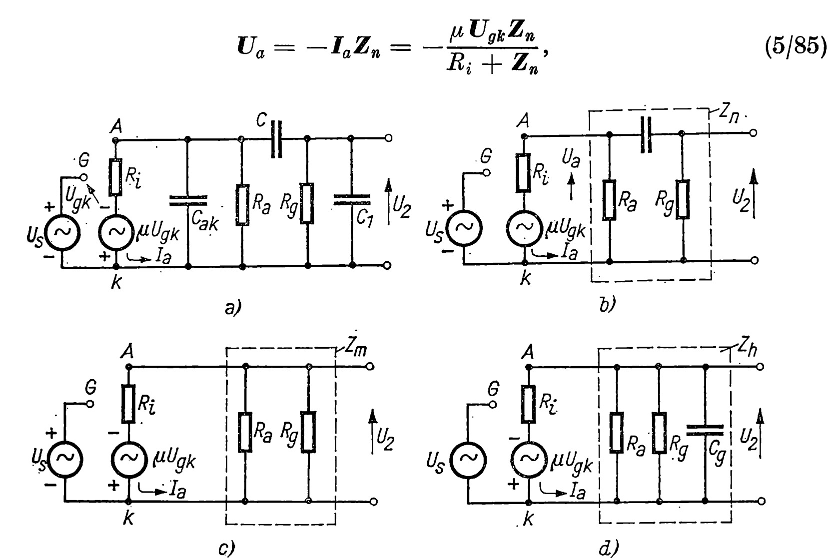


Abb. 5.29 Ersatzschaltbilder des RC-Verstärkers (a), Niederfrequenznäherung (b), Mittelfrequenznäherung (c), Hochfrequenznäherung (d)

wenn mit $\boldsymbol{Z}_n$ die bei niedriger Frequenz auftretende Impedanz aller wechselstromführenden Schaltelemente im Anodenkreis bezeichnet wird, die in der Abbildung gestrichelt umrahmt sind. Mit

$$\boldsymbol{U}_2 = \frac{R_g}{R - \mathrm{j}/\omega C} \boldsymbol{U}_a$$

und

$$\boldsymbol{Z}_n = \frac{R_a(R_g - \mathrm{j}/\omega C)}{R_a + R_g - \mathrm{j}/\omega C} \tag{1/86}$$

findet man den Verstärkungsfaktor bei *niedrigen* Frequenzen zu

$$\boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{U}_2/\boldsymbol{U}_s = \boldsymbol{U}_2/\boldsymbol{U}_{gk} = \frac{-\mu \boldsymbol{Z}_n}{R_i + \boldsymbol{Z}_n} \cdot \frac{R_g}{R_g - \mathrm{j}/\omega C}. \tag{5/87}$$

Aus diesem Ausdruck geht hervor, daß bei sehr niedrigen Frequenzen die Verstärkung zunächst sehr klein ist, mit wachsendem ω zunimmt, bis $1/\omega C \ll R_g$ ist und sich in dem anschließenden *Mittelfrequenzbereich* Gl. (5/87) vereinfacht zu

$$\boldsymbol{A}_m = \frac{-\mu \boldsymbol{Z}_m}{R_i + \boldsymbol{Z}_m} = \frac{-S \boldsymbol{Z}_m}{1 + \boldsymbol{Z}_m/R_i}, \tag{5/88}$$

worin die Mittelfrequenzimpedanz

$$\mathbf{Z}_m = \frac{R_a R_g}{R_a + R_g} \tag{5/89}$$

reell und frequenzunabhängig ist. In Abb. 5.29c ist das entsprechende Ersatzschaltbild gezeigt. Der Phasenwinkel θ ist für diesen Bereich konstant und beträgt 180° (vgl. Gl. (5/52)).

Bei noch höheren Frequenzen wird die Reaktanz von $C_g = C_{ak} + C_1$ mit dem Parallelwiderstand R_a, R_g vergleichbar; für die *Hochfrequenzverstärkung* gilt wieder

$$\mathbf{A}_h = \frac{-\mu \mathbf{Z}_h}{R_i + \mathbf{Z}_h}, \tag{5/90}$$

wobei jedoch für die Impedanz $\mathbf{Z}_h$ des Ausgangskreises der Ausdruck

$$\mathbf{Z}_h = \frac{R_a R_g}{R_a + R_g + \mathrm{j}\omega C R_a R_g} \tag{5/91}$$

zu setzen ist, der mit wachsendem ω abnimmt. Der Phasenwinkel Θ nimmt in diesem Frequenzbereich stetig von 180 auf 90° ab.

Die obigen Ausdrücke lassen sich im Falle einer *Pentode* (s. § 4.15), deren Innenwiderstand $R_i \gg \mathbf{Z}$, vereinfachen, wenn man die Gln. (5/87), (5/88) und (5/90) durch R_i dividiert und Gl. (4/11) beachtet:

$$\mathbf{A}_n = -S\mathbf{Z}_n \frac{R_g}{R_g - \mathrm{j}/\omega C}; \tag{5/87a}$$

$$\mathbf{A}_m = -S\mathbf{Z}_m; \tag{5/88a}$$

$$\mathbf{A}_h = -S\mathbf{Z}_h. \tag{5/90a}$$

Da ferner bei Pentoden C_1 gewöhnlich viel kleiner als bei Trioden ist, verschiebt sich bei ihnen die Grenze zwischen $\mathbf{A}_m$ und $\mathbf{A}_h$ zu höheren Frequenzen,

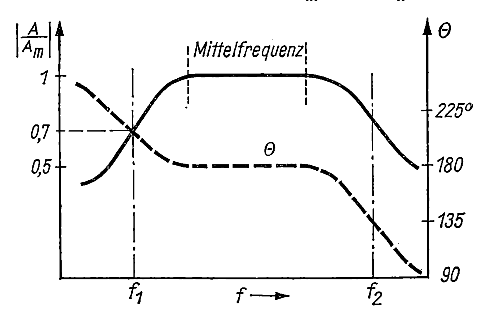


Abb. 5.30 Frequenzkurve für Verstärkungsfaktor und Phasenwinkel des RC-Verstärkers

und der frequenzunabhängige Verstärkungsbereich wird wesentlich erweitert.

Da gewöhnlich R_g von der Größe 1 MΩ und $R_g \gg R_a$ ist, übt dieser Widerstand nur geringen Einfluß auf die Verstärkereigenschaften aus. Der Kopp-

lungskondensator C wird meist zwischen 0,1 nF und 0,25 μF je nach gewünschter unterer Grenzfrequenz gewählt. Der Wert von C_g liegt zwischen 40 und 120 pF für *Trioden* und für *Pentoden* zwischen 5 und 20 pF.

Um RC-Verstärker bequem miteinander vergleichen zu können, trägt man, wie in Abb. 5.30 geschehen, über einer logarithmischen Frequenzskala den relativen Verstärkungsfaktor im linearen Maßstab auf und definiert die Grenzfrequenzen f_1 bzw. f_2 dadurch, daß für diese Werte die Ausgangsleistung auf die Hälfte, d. h. die Verstärkung A auf den Wert $1/\sqrt{2}$ gegenüber dem Mittelfrequenzwert abgesunken ist. Das Frequenzintervall $f_2 - f_1$ wird *Bandbreite* des Verstärkers genannt.

Vergleicht man A_n nach Gl. (5/87) und A_m nach Gl. (5/88) als Funktion der Frequenz f, so findet man aus $|A_n/A_m| = 1/\sqrt{2}$ die Grenzfrequenz f_1 zu

$$f_1 = \frac{1}{2\pi C} \frac{1}{R_g + R_a R_i/(R_i + R_a)}. \tag{5/92}$$

Setzt man diesen Wert in die entsprechenden Ausdrücke für $\boldsymbol{A}_n$ und $\boldsymbol{A}_m$ ein, so ergeben sich die Beziehungen

$$|\boldsymbol{A}_n/\boldsymbol{A}_m| \approx \sqrt{\frac{1}{1 + (f_1/f)^2}}; \quad \Theta_n = \operatorname{arc\,tan}\,(f_1/f) \tag{5/93}$$

wobei Θ_n zur Phasenverschiebung von 180° zu addieren ist. Wendet man die gleichen Überlegungen für die obere Grenzfrequenz f_2 an, so findet man analog

$$|\boldsymbol{A}_h/\boldsymbol{A}_m| = \sqrt{\frac{1}{1 + (f/f_2)^2}}; \quad \Theta_h = -\operatorname{arc\,tan}\frac{f}{f_2}. \tag{5/94}$$

In Abb. 5.31 sind die Beziehungen (5/93) und (5/94) als Funktion der auf f_1 bzw. f_2 bezogenen Frequenzen aufgetragen.

5.232 Vergrößerung der Bandbreite von RC-Verstärkern

Es ist ohne Schwierigkeiten möglich, die untere Grenzfrequenz f_1 entsprechend Gl. (5/92) durch Vergrößerung von C herabzusetzen. Falls dies zu einem zu großen C führt, läßt sich die in Abb. 5.32 dargestellte *Kompensationsschaltung* anwenden. In ihr wird dem Anodenwiderstand R_a einer Pentode ein aus C_c und R_c bestehender Parallelwiderstand vorgeschaltet. Mit der Annahme $R_c \gg 1/\omega C$ wird

$$\boldsymbol{A}_n = -S\,\frac{(\omega C_c R_a - \mathrm{j})}{C_c}\,\frac{C R_g}{(\omega C R_g - \mathrm{j})}, \tag{5/95}$$

und wenn $C_c R_a = C R_g$, vereinfacht sich Gl. (5/95) in die frequenzunabhängige Beziehung

$$\boldsymbol{A}_n = -S\,\frac{C R_g}{C_c}. \tag{5/95a}$$

Bei gleichen Zeitkonstanten $C_c R_a$ bzw. $C R_g$ erweitert sich die Bandbreite nach tiefen Frequenzen hin, wobei gleichzeitig der Phasenwinkel 180° bleibt.

Abb. 5.31 Frequenz- und Phasengang eines RC-Verstärkers

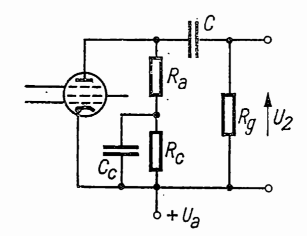


Abb. 5.32 Kompensationsschaltung eines RC-Verstärkers für tiefe Frequenzen

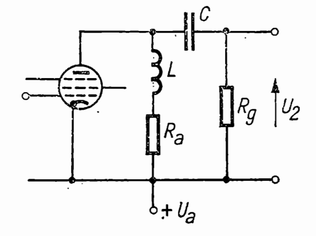


Abb. 5.33 Kompensationsschaltung eines RC-Verstärkers für hohe Frequenzen

Auch die obere Grenzfrequenz f_2 läßt sich erheblich vergrößern, wenn, wie in Abb. 5.33 dargestellt, der Anodenwiderstand R_a durch die Serieninduktivität L erweitert wird. Bei dieser Schaltung liegt L parallel zu C_g, so daß die Verringerung der Lastimpedanz bei hohen Frequenzen kompensiert wird. Nimmt man einen Pentodenverstärker mit großem R_g an, so wird

$$A_h = -SR_a \frac{\omega L/R_a - \mathrm{j}}{\omega C_g R_a + \mathrm{j}(\omega^2 C_g L - 1)}. \tag{5/96}$$

Es läßt sich zeigen, daß für

$$L/C_g R_a^2 = -1 + \sqrt{2} = 0{,}414$$

die Hochfrequenzverstärkung A_h frequenzunabhängig und damit die Bandbreite nach hohen Frequenzen erweitert wird.

5.233 Schmalbandverstärker [*5.6*]

Im Gegensatz zum Breitbandverstärker des vorigen Abschnittes sollen beim *Schmalbandverstärker* Signale innerhalb eines kleinen Frequenzbereichs verstärkt auf die folgende Verstärkerstufe übertragen werden. Zu diesem Zweck wird der Lastwiderstand für die Eingangsröhre T_1, wie in Abb. 5.34a dar-

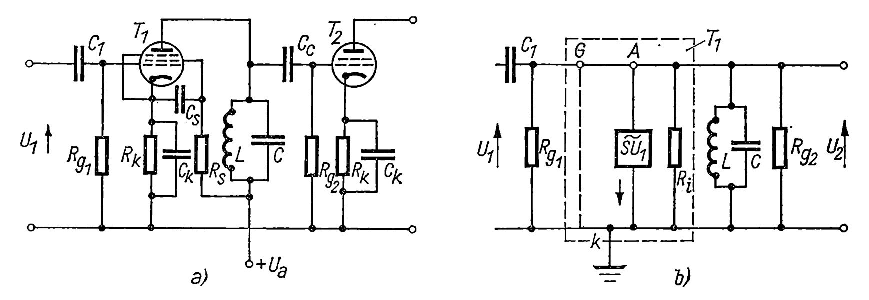


Abb. 5.34 Schmalbandverstärker: Schaltung (a), Ersatzschaltbild (b)

gestellt ist, als *Parallelresonanzkreis LC* (s. § 3.44) ausgebildet und die an diesem auftretende Wechselspannung über den Kopplungskondensator C_c an das Gitter der zweiten, als Pentode angenommenen Röhre T_2 gelegt. Beide Elektronenröhren erzeugen mit Hilfe der Katodenwiderstände R_k die passende Gittervorspannung für den A-Betrieb. Die zu verstärkende Spannung U_1 wird über die Kapazität C_1 an das Steuergitter von T_1 gelegt. Die Kapazitäten C_k, deren Reaktanz klein gegen R_k sein muß, dienen als Bypass von R_k für die Wechselkomponenten des Anodenstroms. Das entsprechende Ersatzschaltbild in Abb. 5.34b gibt die Röhre T_1 als Ersatzstromquelle mit dem Strom SU_{gk} wieder. Da R_{g1} sehr groß ist und die Reaktanz der Eingangskapazität C_1 vernachlässigt werden kann, wird $U_{gk} = U_1$ gesetzt. Die Ersatzschaltung besteht demnach im wesentlichen aus der Stromquelle SU_1, deren Strom durch die Parallelschaltung von R_i, LC-Kreis und R_{g2} geschickt wird. Die Reaktanz

von C_c soll ebenfalls gegen die anderen Widerstände fortfallen können. Als Ausgangsspannung ergibt sich dann

$$\boldsymbol{U}_2 = S\boldsymbol{Z}_p\boldsymbol{U}_1, \tag{5/97}$$

worin $\boldsymbol{Z}_p$ die Impedanz des LC-Kreises mit parallelgeschalteten Widerständen R_i und R_{g2} ist. Nach Gl. (3/62) erreicht $\boldsymbol{Z}_p$ bei der Resonanzfrequenz $\omega_0 = [1/LC - (R/L)^2]^{1/2}$ seinen Maximalwert L/RC, wobei die Parallelschaltung von R_i und R_{g2} den Dämpfungswiderstand R in dieser Formel darstellt, der klein gegen die Impedanz ωL sein soll.

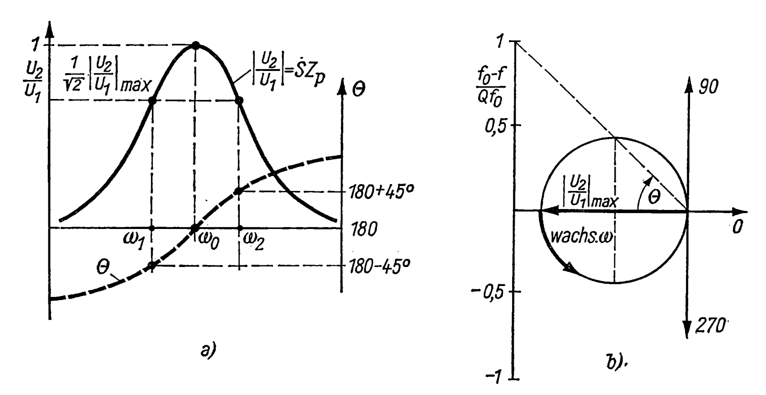


Abb. 5.35 Resonanzverstärker: Verstärkung (a), Ortskurve (b)

Der Verstärkungsfaktor $\boldsymbol{U}_2/\boldsymbol{U}_1$ erreicht bei der *Resonanzfrequenz* ω_0 sein Maximum und wird an dieser Stelle *reell*, d. h., die Phasendifferenz zwischen Ein- und Ausgangsspannung beträgt 180°. Als Maß für die Bandbreite dieses *Resonanzverstärkers* wird der Frequenzabstand $\omega_2 - \omega_1$ benutzt, wobei

$$\omega_{1,2} = \omega_0 (1 \mp 1/2Q) \tag{5/98}$$

und die *Kreisgüte* nach Gl. (3/59) durch $Q = \omega_0 L/R$ gegeben ist. Für die beiden symmetrisch zur Resonanzfrequenz liegenden Frequenzen ω_1 und ω_2 wird $\boldsymbol{U}_2/\boldsymbol{U}_1 = |U_2/U_1|_m \cdot 1/\sqrt{2}$ bei einer Phasendifferenz von $\pm$ 45° (Abb. 5.35a). In Abb. 5.35b ist für diesen Verstärker die *Ortskurve* für den Verstärkungsfaktor dargestellt, die einen *Kreis* mit dem Durchmesser $|U_2/U_1|_{\max}$ ergibt und diesen als Funktion der Frequenz abzulesen gestattet.

5.234 Impulsverhalten des RC-Verstärkers [*5.22*]

Für viele Anwendungen besitzt die Signalspannung keine Sinusform, sondern besteht aus Rechteckimpulsen von ungleicher Dauer und mit unterschiedlichem Abstand. Geeignete Verstärker hierfür besitzen einen besonders breiten Mittelfrequenzbereich (s. Abb. 5.30) mit konstantem Verstärkungsfaktor. Ihre Aufgabe ist es, die Eingangsimpulse möglichst verzerrungsfrei zu verstärken.

Zunächst soll von einem Einzelimpuls (Abb. 5.36a) ausgegangen werden, dessen Zeitdauer $\delta = t_2 - t_1$ beträgt und die Amplitude U_1 besitzen soll. Dieses Eingangssignal wird dem in Abb. 5.36b gezeigten RC-Verstärker zugeführt. Die Ausgangsspannung U_2 wird bei $t = t_1$ entsprechend dem Hochfrequenzverhalten des Verstärkers schnell ansteigen, anschließend bis $t = t_2$ langsam exponentiell und schließlich für $t \geqq t_2$ sehr schnell abfallen.

Um die *Anstiegszeit* für $t \geqq t_1$ zu erfassen, kann der Kopplungskondensator C vernachlässigt und der Ersatzkreis der Abb. 5.36c zugrunde gelegt werden. Ersetzt man die Parallelschaltung der Widerstände R_i, R_a und R_g durch den

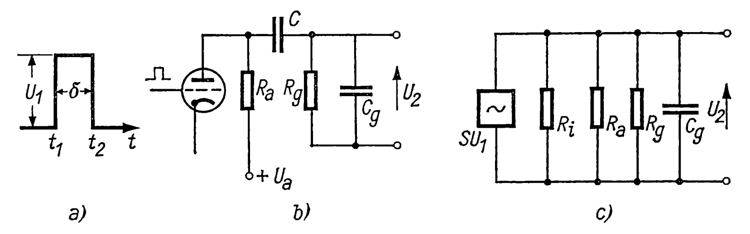


Abb. 5.36 Impuls-RC-Verstärker: Eingangsimpuls (a), Schaltung (b), Ersatzschaltbild (c)

Ersatzwiderstand R_y, so wird das Impulsverhalten dieser Schaltung zusätzlich nur noch durch die Gitterkapazität C_g bestimmt. Es gilt dann

$$\left(\frac{1}{R_y} + \frac{\partial}{\partial t} C_g\right) U_2 = 0 \qquad \text{für } t < t_1$$

$$\left(\frac{1}{R_y} + \frac{\partial}{\partial t} C_g\right) U_2 = -S U_1 \qquad \text{für } t > t_1 .$$

Ist C_g ursprünglich ungeladen, so ergeben diese Beziehungen für die Ladung q_c dieser Kapazität den Ausdruck

$$q_c = -S U_1 R_y C_g (1 - \mathrm{e}^{-(t-t_1)/R_y C_g}),$$

woraus mit $U_2 = q_c/C_g$ der Verlauf der Ausgangsspannung

$$U_2 = -S U_1 R_y (1 - \mathrm{e}^{-(t-t_1)/R_y C_g}) \tag{5/99}$$

folgt. Die Anstiegszeit hängt also von der Zeitkonstanten $\tau = R_y C_g$ ab, während die Verstärkung nur zu R_g proportional ist. Da C_g durch die Röhrenkapazitäten vorgegeben ist, kann die Anstiegszeit nur durch Verringern von R_y und nach Gl. (5/99) auf Kosten der Verstärkung verkleinert werden. Nach $t = 4\tau$ hat der exponentielle Anstieg etwa 98% des Endwertes von U_2 erreicht. Die Zeitkonstante τ als Maß für die obere Grenzfrequenz f_2 kann nach § 5.232 durch eine Induktivität L verkürzt werden.

Für nicht extrem kurze Impulse kann die Anstiegszeit gegen die Impulsdauer δ vernachlässigt werden. Für die Berechnung des Spannungsverlaufs zwischen t_1 und t_2 kann $U_2(t_1) = -S U_1 R_y$ angenommen werden. Die Signalspannung in diesem Zeitintervall beträgt $U_1 = \text{const}$; dementsprechend ist

nunmehr für die Verstärkung das Niederfrequenzverhalten der Schaltung in Abb. 5.36b maßgebend. Hierzu wird zweckmäßig auf diese das Thévenin-Theorem (s. § 3.24) angewandt und daraus das Ersatzschaltbild der Abb. 5.37 abgeleitet, in dem R_x die parallel geschalteten Widerstände R_i und R_a ersetzt. Die Kapazität C_g läßt sich vernachlässigen; die Stromquelle wird durch die Spannungsquelle $S U_1 R_x$ ersetzt. Aus der Spannungssumme im Ersatzkreis

$$\frac{q_c}{C} + (R_g + R_x) \cdot i - S U_1 R_x = 0$$

findet man für die Ladung des Kopplungskondensators C den Ausdruck

$$q_c = S R_x U_1 C \left(1 - e^{-(t-t_1)/C(R_g+R_x)}\right).$$

Mit $i = \mathrm{d}q_c/\mathrm{d}t$ und $U_2 = -R_g i$ ergibt sich die Ausgangsspannung U_2 zu

$$U_2 = -\frac{S U_1 R_x R_g}{R_x + R_g} e^{-(t-t_1)/C(R_x+R_g)} \qquad t_1 < t < t_2. \tag{5/100}$$

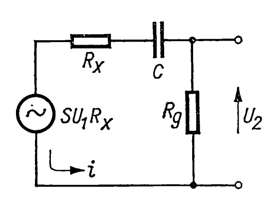


Abb. 5.37 Thévenin-Modifikation der Schaltung in Abb. 5.36b

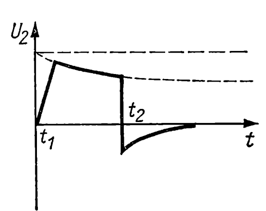


Abb. 5.38 Ausgangsimpuls

Dieser Ausdruck stellt einen exponentiellen Spannungsabfall mit der Zeitkonstanten $C(R_x + R_g)$ dar, die groß gegen die Impulsdauer δ sein muß, wenn eine gute Abbildungstreue erzielt werden soll.

Für $t = t_2$ fällt U_1 auf Null; für q_c gilt die Beziehung

$$\frac{q_c(t_2)}{C} + (R_x + R_g) i = 0,$$

aus der durch Integration der Strom $i(t)$ und daraus die Ausgangsspannung

$$U_2 = -R_g i = \frac{S U_1 R_x R_g}{R_x + R_g} \left(1 - e^{-(t_2-t_1)/(R_x+R_g)} e^{-(t-t_2)/C(R_x+R_g)}\right) \tag{5/101}$$

berechnet wird. In Abb. 5.38 ist der Ausgangsimpuls schematisch dargestellt, wie er durch die Gln. (5/99–101) beschrieben wird.

Die Anstiegszeit der Ausgangsspannung wird nach Gl. (5/99) durch die Zeitkonstante $R_y C_g$ bestimmt, die klein gegen δ sein soll. Der Spannungsabfall nach Erreichen der Impulsamplitude hängt andererseits von der Zeitkonstanten $C(R_x + R_g)$ ab, die um ein bis zwei Größenordnungen größer als δ

sein soll. Da R_g von der Größe 1 MΩ ist, lassen sich folgende Bedingungen für die getreue Verstärkung von Impulsen angeben:

1. kleine Werte von C_g und R_a,
2. die Zeitkonstante $C\ (R_x + R_g) \gg \delta$,
3. großes S der Röhre bei kleinem R_a.

Das Frequenzverhalten des RC-Verstärkers und seine Anwendung für die Impulsverstärkung sind eng miteinander gekoppelt. Aus der Definitionsgleichung (5/92) für die *untere Grenzfrequenz* f_1 erkennt man den direkten Zusammenhang mit dem Spannungsabfall von U_2 nach Gl. (5/100) im Impulsintervall $t_1 < t < t_2$. Für $C(R_x + R_g) \gg \delta$ wird die Impulsamplitude am Verstärkerausgang nur wenig abfallen; eine große Zeitkonstante entspricht einem kleinen Wert von f_1.

Durch Vergleich von Gl. (5/99) mit den Bedingungen für eine hohe *obere Grenzfrequenz* $f_2 = 1/2\pi C_g R_y$ erkennt man, daß die gleiche Zeitkonstante die Anstiegszeit für einen Signalimpuls bestimmt. Für mehrere RC-Verstärker in Kaskade mit den Zeitkonstanten $\tau_1, \tau_2, \ldots$ findet man die resultierende Zeitkonstante durch die Beziehung

$$\tau = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 + \cdots},$$

oder bei gleichen Zeitkonstanten für den n-stufigen Verstärker,

$$\tau_n = \tau\sqrt{n}\ .$$

Aus dieser Betrachtung folgt, daß ein Verstärker, an dessen Eingang eine Sprungfunktion angelegt wird, durch seine Eigenschaften sowohl bei hohen als auch bei niedrigen Frequenzen charakterisiert wird. Legt man eine periodische Rechteckspannung U_1 an den Eingang (Abb. 5.39a) und zeichnet durch einen Elektronenstrahloszillografen die Ausgangsspannung U_2 auf, so findet man mit Hilfe der Größen a und b sofort die Zeitkonstante $C(R_g + R_x)$ aus den Gleichungen

$$b = a\,\mathrm{e}^{-\delta/C(R_x+R_g)} = a\mathrm{e}^{-1/C(R_x+R_g)2f};$$

$$a = \frac{U_1}{1 + \mathrm{e}^{-1/C(R_x + R_g)\,2f}}.$$

Das Hochfrequenzverhalten läßt sich durch Anlegen einer Rechteckspannung mit einer mit f_2 vergleichbaren Frequenz erkennen; mit wachsender Zeitkonstante $R_y C_g$ erscheint der Spannungsanstieg bei $t = t_1$ zunehmend abgerundet.

5.235 Fourier-Zerlegung einer Impulsfolge

Im vorigen Abschnitt konnte gezeigt werden, daß man den Frequenzgang eines Verstärkers aus der Analyse des Verlaufs der Ausgangsspannung ableiten kann, wenn das Eingangssignal Rechteckform besitzt. Wiederholt sich dieses Rechtecksignal periodisch, so lassen sich zusätzliche Angaben über das Fre-

quenzverhalten eines Verstärkers gewinnen, indem man die Rechteckwechselspannung in eine Fourier-Reihe

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_r t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_r t \tag{5/102}$$

verwandelt. Die Koeffizienten A_0, a_k und b_k lassen sich durch bestimmte Rechenregeln bestimmen. Legt man das in Abb. 5.40 gezeigte periodische Intervall von der Dauer $t_r = 2\pi/\omega_r$ zugrunde, multipliziert Gl. (5/102) mit dt

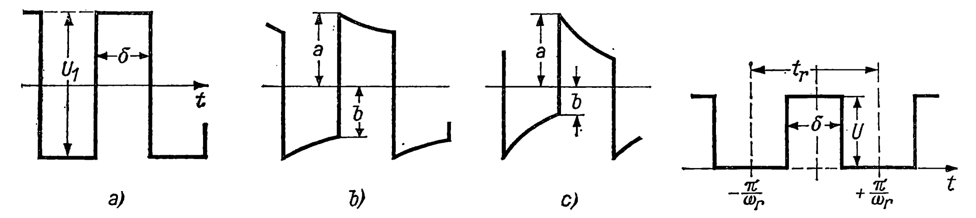


Abb. 5.39 Impulsverhalten des RC-Verstärkers: Eingangsspannung U_1 (a), Ausgangsspannung bei großem $C(R_x + R_g)$ (b), bei kleinem $C(R_x + R_g)$ (c)

Abb. 5.40 Periodische Rechteckspannung

und integriert die Periode $-\pi/\omega_r$ bis $+\pi/\omega_r$, so ergibt sich der *Mittelwert* der Funktion $f(t)$ zu

$$A_0 = \frac{\omega_r}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_r}^{+\pi/\omega_r} f(t)\,dt. \tag{5/103}$$

Multipliziert man Gl. (5/102) mit $\cos k\omega_r t\,dt$ und integriert über eine ganze Periode, so verschwinden alle Sinusterme; es bleibt die Beziehung

$$a_k = \frac{\omega_r}{\pi} \int_{-\pi/\omega_r}^{+\pi/\omega_r} f(t) \cos k\omega_r t\,dt \tag{5/104a}$$

zur Bestimmung der Koeffizienten der Kosinus-Terme. Analog findet man die Koeffizienten für die Sinus-Terme aus

$$b_k = \frac{\omega_r}{\pi} \int_{-\pi/\omega_r}^{+\pi/\omega_r} f(t) \sin k\omega_r t\,dt. \tag{5/104b}$$

Ist $f(t)$ eine *ungerade* Funktion, d. h. $f(-x) = -f(x)$, so enthält Gl. (5/74a) das Produkt aus einer ungeraden und einer geraden Funktion, da die Kosinus-Funktion gerade ist. Das Integral über eine *ungerade* Funktion über gleiche negative und positive Grenzen ist bekanntlich Null. Dies bedeutet, daß für eine ungerade Funktion $f(t)$ die Koeffizienten $a_k \equiv 0$ sind und die entsprechende Fourier-Reihe nur Sinus-Terme enthält. Ähnlich verschwinden für eine *gerade* Funktion $f(t)$ die Koeffizienten b_k; die Fourier-Reihe besteht nur aus Kosinus-Gliedern.

Ist z. B. $t_r = 2\delta$ (s. Abb. 5.40), d. h., ist die Impulsdauer gleich dem gegenseitigen Flankenabstand und $U = 0$ für $-\delta/2 \geqq t \geqq \delta/2$, so findet man für die Gleichspannungskomponente

$$A_0 = U/2$$

und für die entsprechende Fourier-Reihe das Entwicklungsgesetz

$$f(t) = \frac{U}{2} + \frac{2\,U}{\pi k} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi}{2} \cos k\,\omega_r t .$$

Durch die Fourier-Zerlegung einer beliebigen periodischen Zeitfunktion werden sinusförmige Komponenten mit den verschiedensten Frequenzen gefunden. Jede dieser Frequenzkomponenten erhält im Verstärker eine Amplitude und Phase, die durch sein Frequenzverhalten gegeben sind. Das Ausgangssignal stellt die Superposition der Frequenzkomponenten der Fourier-Reihe nach Amplitude und Phase dar.

5.24 *Niederfrequenz-Leistungsverstärker*

Im vorigen Abschnitt wurde das Verhalten von elektronischen Verstärkern bei kleinen und mittleren Eingangssignalen behandelt, wobei die *Verstärkung* durch einen linearen Zusammenhang von Signalspannung zu Röhrenstrom dargestellt werden konnte. Wie in § 5.21 ausgeführt ist, muß bei stärkeren Eingangssignalen die *Nichtlinearität* der Kennlinien berücksichtigt werden. Diese kann in einigen Fällen durch einen Potenzansatz dargestellt werden; für sehr große Signale werden die Kennlinien stückweise durch sich anschließende einfache analytische Funktionen wiedergegeben.

5.241 Verstärkerausgang

In Abb. 5.41 sind verschiedene Schaltungen für den Ausgang eines NF-Leistungsverstärkers angegeben. Beim einfachen Serien-Lastwiderstand der Abb. 5.41a treten durch den Anodengleichstrom in R_a beachtliche Verluste

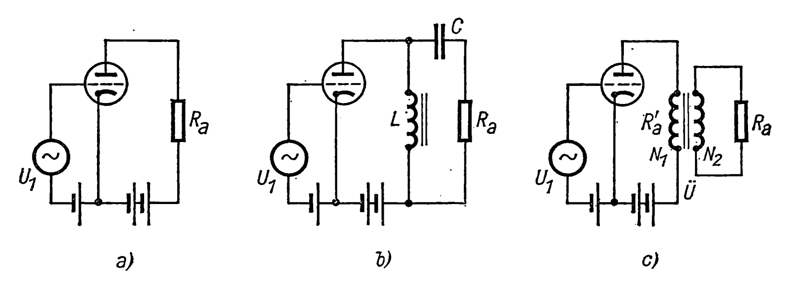


Abb. 5.41 Ausgangskreise für Leistungsverstärker

auf, die den Wirkungsgrad beeinträchtigen. Zum anderen erniedrigt der Spannungsabfall an R_a die Anodenspannung; die Größe von R_a wird selten eine optimale Anpassung für maximale Leistung ermöglichen.

Der Ausgangskreis der Abb. 5.41 b vermeidet Gleichstromverluste und den Spannungsabfall an der Anode, erfordert jedoch eine genaue Anpassung des Lastwiderstandes an die beiden anderen Komponenten L und C. Die gebräuchlichste Schaltung ist der in Abb. 5.41 c dargestellte Transformatorausgang. Besitzt der Ausgangstransformator $\ddot{U}$ das Windungsverhältnis $N_1/N_2 = a$, so gilt für den *idealen* Transformator die Beziehung

$$U_1/U_2 = I_2/I_1 = N_1/N_2 = a,$$

wobei a das *Übersetzungsverhältnis* genannt wird. Der an die Sekundärwicklung angeschlossene Lastwiderstand R_a erscheint an der Primärwicklung um den Faktor a^2 vergrößert; allgemein gilt

$$\boldsymbol{Z}_1 = a^2 \boldsymbol{Z}_2, \tag{5/105}$$

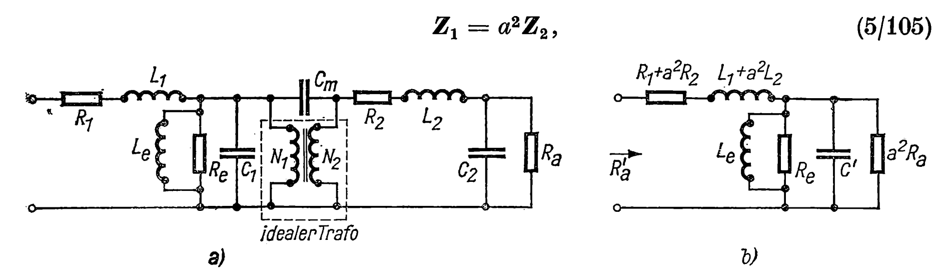


Abb. 5.42 Transformator mit Verlusten (a), Ersatzkreis (b)

wenn sich die Indizes der Impedanzen auf die Primär- bzw. Sekundärwicklung beziehen. Der *ideale* Transformator verändert entsprechend seinem Übersetzungsverhältnis die Amplituden von Strom und Spannung, liefert jedoch keine Phasenverschiebung. Der wirkliche Transformator (Abb. 5.42 a) besitzt die Widerstände R_1 und R_2, die Streuinduktivitäten L_1 und L_2 in der Primär- bzw. Sekundärwicklung, Eisenverluste im Transformatorkern, die durch R_e bzw. L_e ausgedrückt werden, sowie Streukapazitäten C_1, C_2 zwischen den Wicklungen. In der Ersatzschaltung der Abb. 5.42 b sind diese Größen mit Hilfe der Gl. (5/105) auf den Primärkreis bezogen und durch C' alle Kapazitäten zusammengefaßt worden.

Für die Berechnung eines Verstärkers mit Transformatorausgang kann nur näherungsweise die transformierte Ausgangsimpedanz $a^2 R_a$ eingesetzt werden. Besonders bei höheren Frequenzen treten Blindwiderstände auf, die sowohl die Lastimpedanz als auch den Phasenwinkel vergrößern.

5.242 Idealer A-Verstärker

Unter der Annahme einer linearen Kennlinie, welche eine Idealisierung für gewöhnliche Leistungsverstärker darstellt, ergibt sich der Anodenwechselstrom in der einfachen Schaltung der Abb. 5.43 zu

$$\boldsymbol{I}_a = \frac{\mu \boldsymbol{U}_g}{R_i + R_a'}.$$

Daraus findet man die Wechselstrom-Ausgangsleistung im Lastwiderstand, der nach Gl. (5/105) $R_a' = a^2 R_a$ beträgt, zu

$$P = I_a^2 R_a' = \left(\frac{\mu U_g}{R_i + R_a'}\right)^2 R_a'.$$

Durch Division mit R_i ergibt sich daraus der Ausdruck

$$P/U_g^2 = \mu S \frac{R_a'/R_i}{(1 + R_a'/R_i)^2}, \qquad (5/106)$$

der das Verhältnis von Ausgangsleistung zum Quadrat der Signalspannung darstellt und *Leistungsempfindlichkeit* genannt wird. Maximaler Leistungsausgang ergibt sich für die übliche Anpassungsbedingung $R_a' = R_i$.

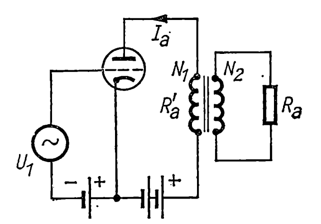


Abb. 5.43 Leistungsverstärker mit Transformatorausgang

Aus der Leistung der Anodenbatterie muß die Ausgangsleistung des Verstärkers, die Verlustleistung im Lastwiderstand oder Ausgangstransformator sowie die Anodenverlustleistung bestritten werden. Als *Wirkungsgrad* des Anodenkreises wird das Verhältnis

$$\eta_a = \frac{I_a^2 R_a'}{U_B I_{as}}$$

bezeichnet, worin U_B die Batteriespannung und I_{as} den Anodenstrom mit Signaleingang bedeutet. Dieser kann theoretisch den Wert 50% besitzen.

5.243 Amplitudenverzerrung, Klirrfaktor

Für große Signalspannung läßt sich die *dynamische* Kennlinie einer Elektronenröhre für einen gegebenen Arbeitspunkt U_a, I_a durch eine Taylor-Reihe darstellen:

$$i_a = a_0 + a_1 \cdot u_g + a_2 u_g^2 + a_3 u_g^3 + \cdots \qquad (5/107)$$

Da für $u_g = 0$, $i_a = a_0$, entspricht der Anodenruhestrom $I_a = a_0$. Durch Differenzieren findet man für die Koeffizienten der Reihe die Werte

$$a_1 = \frac{\partial i_a}{\partial u_g} = S_d; \quad a_2 = \frac{\partial^2 i_a}{\partial u_g^2} = \frac{1}{2!}\frac{\partial S_d}{\partial u_g}; \quad a_3 = \frac{\partial^3 i_a}{\partial u_g^3} = \frac{1}{3!}\frac{\partial^2 S_d}{\partial u_g^2} \cdots$$

Der Koeffizient a_1 entspricht der *Steilheit* S_d der *dynamischen* Kennlinie, und a_2 ist der Steilheits*änderung* proportional. Besitzt die Gitterspannung die

Form $u_g = U_m \cos \omega t$ und setzt man diese in Gl. (5/107) ein, so folgt daraus der Ausdruck

$$i_a = I_a + a_1 E_m \cos \omega t + a_2 E_m^2 \cos^2 \omega t + a_3 E_m^3 \cos^3 \omega t + \ldots,$$

den man in eine Reihe mit Kosinusfunktionen des mehrfachen Argumentes verwandeln kann:

$$i_a = I_a + A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + A_4 \cos 4\omega t + \ldots \tag{5/108}$$

Aus Gl. (5/108) folgt, daß die Nichtlinearität der Kennlinie neben dem Gleichstrommittelwert I_a eine zusätzliche Gleichstromkomponente A_0 hervorruft. Die Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ werden gewöhnlich grafisch aus der gegebenen Röhrenkennlinie bestimmt.

Vergleicht man die Amplituden A_2, A_3 der Harmonischen mit der der Grundwelle A_1, so läßt sich daraus als Maß für die Verzerrung der Ausgangsspannung eines Verstärkers der *Klirrfaktor* einführen, der durch die Beziehung

$$a = \sqrt{(A_2/A_1)^2 + (A_3/A_1)^2 + (A_4/A_1)^2 + \ldots} \tag{5/109}$$

definiert ist.

5.244 Intermodulationsverzerrung

Sind in der Signalspannung Komponenten mit ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz vorhanden, so ergibt sich bei nichtlinearer Röhrenkennlinie eine Verzerrung der Ausgangsspannung, die man *Intermodulation* nennt.

Setzt sich z. B. die Eingangsspannung aus den Komponenten

$$u_g = U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t$$

zusammen und beschreibt man die Kennlinie durch die drei ersten Glieder in Gl. (5/107), so findet man durch Einsetzen folgenden Ausdruck für den Anodenstrom

$$i_a = I_a + \frac{a_2}{2}(U_1^2 + U_2^2) + a_1 U_1 \cos \omega_1 t + a_1 U_2 \cos \omega_2 t + a_2 U_1 U_2 \cos (\omega_1 + \omega_2) t + a_2 U_1 U_2 \cos (\omega_1 - \omega_2) t + \frac{a_2 U_1^2}{2} \cos 2\omega_1 t + \frac{a_2 U_a^2}{2} \cos 2\omega_2 t. \tag{5/110}$$

Neben den ursprünglichen Frequenzen treten demnach die Summen- und Differenzfrequenzen sowie die 1. Harmonischen der Eingangsfrequenzen auf. Die Verzerrungsterme enthalten den Koeffizienten a_2 und treten demnach nur auf, wenn die dynamische Kennlinie nichtlinear ist.

5.245 Transistor-A-Verstärker

Analog zur Behandlung von Röhrenleistungsverstärkern lassen sich auch Transistorverstärker für große Eingangssignale berechnen.

Für den Verstärker mit direkt gekoppeltem Ausgang, wie er in der Emitterschaltung in Abb. 5.44 dargestellt ist, schneidet die *Lastlinie* die Abszisse bei der Batteriespannung U_{cc} für den Kollektorstrom $I_c = 0$. Strom und Spannung am Kollektor hängen nach Gl. (5/56) linear zusammen und ergeben eine Neigung der Lastlinie von $1/R_1$. Die Aussteuerung des Transistors ist aus dem

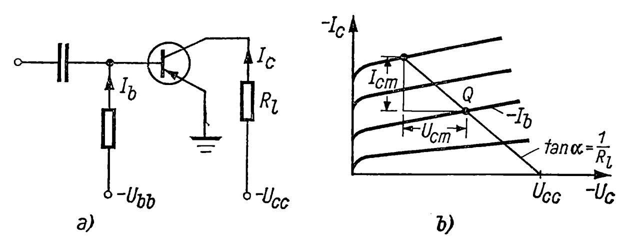


Abb. 5.44 Emitter-A-Verstärker mit direkter Lastankopplung

$I_c - U_c$-Kennlinienfeld zu entnehmen, wenn für den Signal-, d. h. Basisstrom I_b die Schnittpunkte mit der Lastlinie aufgesucht werden. Die Maximalwerte I_{cm} und U_{cm} bestimmen die maximale Ausgangsleistung

$$P_m = U_{cm} I_{cm}/2 = U_{cc}^2/8R_l. \tag{5/111}$$

Wird der Transistor über die Kapazität C an die Last R_l gekoppelt, wobei die Impedanz $1/\omega C \ll R_l$ ist, so findet man den Arbeitspunkt Q (s. Abb. 5.45b) als Schnittpunkt der Geraden mit der Steigung $1/R_2$ durch die Batteriespannung U_{cc} mit der Kennlinie für den Basisruhestrom I_b. Zur Bestimmung der

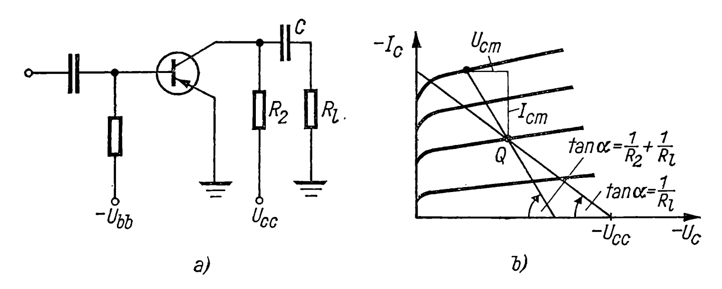


Abb. 5.45 Emitter-A-Verstärker mit RC-Ankopplung

Aussteuerung muß man jedoch durch Q die Lastlinie für Wechselstrombelastung ziehen, welche die Steigung $(R_2 + R_1)/R_2 R_l$, d. h. der Parallelschaltung von R_2 und R_l, besitzt. Damit wird die maximale Ausgangsleistung gegeben durch

$$P_m = \frac{U_{cm} I_{cm}}{2} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_l} = \frac{U_{cc}^2}{8R_l(1 + R_2/2R_l)^2}; \tag{5/112}$$

sie wird also um den Faktor $\dfrac{1}{(1 + R_l/2R_i)^2}$ kleiner als im Fall der direkten Lastankopplung.

Im Fall der Ankopplung des Lastwiderstandes R_l durch eine LC-Schaltung (s. Abb. 5.41 b) oder durch einen Ausgangstransformator, wie sie in Abb. 5.46a dargestellt ist, kann der Gleichstromwiderstand der Primärwicklung bzw. von L vernachlässigt werden. Die Gleichstromlastlinie stellt daher eine Senkrechte durch U_{cc} dar, deren Schnittpunkt mit dem Basisgleichstrom den Arbeitspunkt Q liefert. Die Wechselstromlastlinie erhält die Neigung $\tan\alpha = 1/R_l$ wie bei der direkten Kopplung (Abb. 5.44), jedoch mit einem größeren Aussteuerbereich. Die Ausgangsleistung ergibt sich hierfür zu

$$P_m = U_{cm} I_{cm}/2 = U_{cc}^2/2R_l\,. \tag{5/113}$$

In ähnlicher Weise wie beim Röhren-Leistungsverstärker läßt sich der Klirrfaktor aus dem Verlauf der Kennlinien ermitteln.

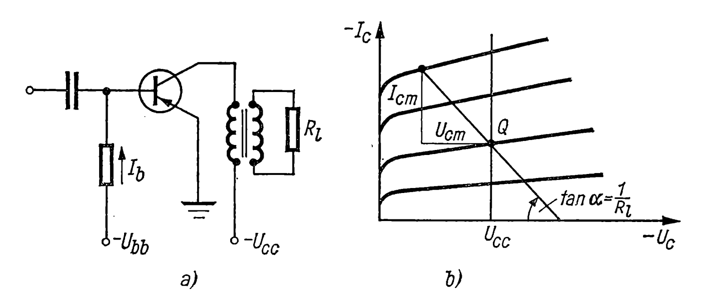


Abb. 5.46 Emitter-A-Verstärker mit Transformatorkopplung

5.246 Gegentaktverstärker [*5.1*; *5.73*]

Wie bereits in § 5.21 erwähnt wurde, ist der Wirkungsgrad bei Anwendung der A-Verstärkung durch den Anodenruhestrom begrenzt, was um so mehr ins Gewicht fällt, je höher die Forderungen nach Verzerrungsfreiheit sind. Durch Verwendung von zwei Verstärkerelementen in B-Schaltung, die abwechselnd eine Halbwelle lang den Laststrom erzeugen, kann sowohl der Wirkungsgrad als auch der Klirrfaktor gegenüber dem A-Verstärker wesentlich verbessert werden.

Man bezeichnet diese Klasse von Verstärkern als *Gegentaktverstärker*; ihre grundsätzliche Schaltung ist in Abb. 5.47a dargestellt. Der Eingangstransformator $Ü_1$ enthält eine symmetrische Sekundärwicklung, in der zwischen der Mittelanzapfung und den beiden Enden gegenphasige Spannungen u_1 und u_2 auftreten. Die beiden gleichartigen Verstärkerröhren T_1 und T_2 besitzen eine gemeinsame Gittervorspannung und als Ausgangslast den Transformator $Ü_2$, der eine Mittelanzapfung der Primärwicklung aufweist und im Sekundärkreis den Lastwiderstand R_l enthält. Da der Anodengleichstrom beide Halbwicklungen im Gegensinn durchfließt, wird der Transformatorkern nicht vormagnetisiert, und es treten hierdurch keine Verzerrungen des Ausgangssignals

auf. In Abb. 5.47b sind die dynamischen Kennlinien der beiden Elektronenröhren symmetrisch in bezug auf die gemeinsame Gittervorspannung U_{gg} und die Richtung der Anodenströme dargestellt. Da die Gitterspannungen für beide Röhren um 180° phasenverschoben sind, entspricht dem Maximalstrom i_{a1} der Röhre T_1 ein Minimum von i_{a2}. Im Falle von Trioden tritt die Verzerrung des Ausgangsstroms fast ausschließlich als zweite Harmonische auf, die sich in dieser Schaltung vollkommen aufhebt.

Stellt man die dynamischen Kennlinien der beiden Röhren durch Gleichungen der Form (5/107) dar und setzt für die Gitterspannungen

$$u_1 = U \sin \omega t; \qquad u_2 = U \sin (\omega t + \pi),$$

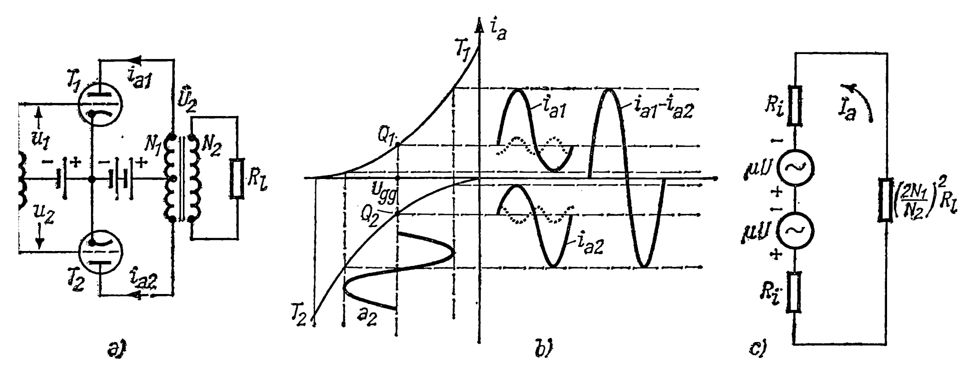


Abb. 5.47 Gegentaktverstärker: Schaltung (a), Wirkungsweise (b), Ersatzschaltbild (c)

so findet man für den Ausgangsstrom $I = (i_{a1} - i_{a2}) N_1/N_2$ schließlich die Beziehung

$$I = \frac{N_1}{N_2} (2B_1 \sin \omega t + 2B_3 \sin 3\omega t + 2B_5 \sin 5\omega t + \ldots). \qquad (5/114)$$

Der Ausgangsstrom I enthält keine geraden Harmonischen, sofern die Kennlinien der Röhren einander entsprechen, und auch keinen Gleichstromanteil. Ebenso hebt sich die Welligkeit der Anodenspannungsquelle (s. § 5.13) im Lastkreis vollkommen auf. Gegentaktverstärker stellen daher geringere Anforderungen an die Filterung der Stromversorgungsgeräte.

Die Gittervorspannung wird für beide Röhren durch einen gemeinsamen Katodenwiderstand erzeugt, der gewöhnlich durch einen großen Kondensator überbrückt wird.

In Abb. 5.47c ist das *Ersatzschaltbild* des Gegentaktverstärkers angegeben, wobei der Lastwiderstand nach Gl. (5/105) auf den gemeinsamen Anodenstrom bezogen und durch $(2N_1/N_2)^2 \cdot R_l$ ausgedrückt wird. Die beiden Ersatzspannungsquellen mit der Spannung μU sind in Phase und liefern den Anodenstrom

$$I_a = \frac{2\mu U}{2R_i + (2N_1/N_2)^2 R_l}. \qquad (5/115)$$

Damit wird die Ausgangsleistung

$$P = \left[\frac{2\mu U}{2R_i + (2N_1/N_2)^2 R_l}\right]^2 \cdot \left(\frac{2N_1}{N_2}\right)^2 R_l; \tag{5/116}$$

sie erreicht mit $2R_i = (2N_1/N_2)^2 R_l$ ihren Maximalwert

$$P_{\max} = \left[\frac{\mu U}{R_i/2 + (N_1/N_2)^2 R_l}\right]^2 \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_l. \tag{5/116a}$$

Erhöht man die Anodenspannung bei konstant gehaltener Anodenverlustleistung und vergrößert die Gittervorspannung, so lassen sich größere Anodenströme und damit eine höhere Ausgangsleistung erzielen. Die Arbeitspunkte Q_1 und Q_2 (s. Abb. 5.47b) nähern sich dabei dem unteren Kennlinienknick und erlauben eine hohe Aussteuerung im Gitterstrombereich. Man spricht in diesen Fällen von B- oder C-Gegentaktverstärkern; wie im obigen Beispiel

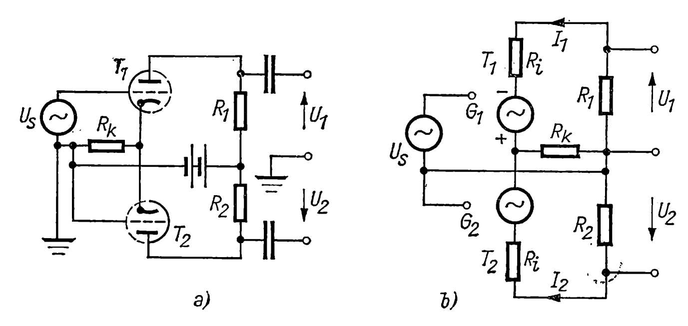


Abb. 5.48 Katodengekoppelter Phasenkonverter (a), Ersatzschaltbild (b)

heben sich die Verzerrungen durch gerade Harmonische im resultierenden Ausgangsstrom auf. Der maximal erzielbare Wirkungsgrad dieser Verstärker beträgt 78,5%.

Der Verstärkereingang besteht entweder, wie in Abb. 5.47a, aus einem Eingangstransformator mit Mittelanzapfung in der Sekundärwicklung oder, bei höheren Anforderungen an einen geringen Klirrfaktor, aus einem *Phasenkonverter*. Dieser hat die Aufgabe, die Signalspannung (gegen Erde) in zwei entsprechende Wechselspannungen mit 180° Phasendifferenz im ganzen interessierenden Frequenzbereich umzuformen. Eine einfache Schaltung hierfür ist der *katodengekoppelte Phasenkonverter*, der in Abb. 5.48 dargestellt ist. Er besteht aus den beiden Röhren T_1 und T_2 mit gemeinsamem Katodenwiderstand R_k und symmetrischen Ausgangswiderständen R_1 und R_2. Die Signalspannung U_s wird dem Gitter von T_1 zugeführt, während die zweite Röhre T_2 das Eingangssignal als Spannungsabfall an R_k erhält.

Mit den Gitterspannungen

$$\boldsymbol{U}_{g1} = \boldsymbol{U}_s - (\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2) R_k$$

und

$$\boldsymbol{U}_{g2} = -(\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2) R_k$$

ergeben sich die Beziehungen für die beiden Anodenstromkreise zu

$$\mu U_{g1} = I_1(R_1 + R_i + R_k) + I_2 R_k;$$

$$\mu U_{g2} = I_2(R_2 + R_i + R_k) + I_1 R_k.$$

Da die Röhren T_1 und T_2 meist die Hälften einer Doppelröhre sind und gleiche Röhrenparameter μ bzw. R_i besitzen, ergibt sich das Verhältnis der Ausgangsspannungen $U_1 = -I_1 R_1$ und $U_2 = -I_2 R_2$ mit $R_1 = R_2 = R_a$ zu

$$|U_1/U_2| = \frac{R_a[R_a + R_i + (\mu + 1)R_k]}{(\mu + 1)R_k R_a} = 1 + \frac{R_a + R_i}{(\mu + 1)R_k}. \quad (5/117)$$

Wählt man $(\mu + 1)R_k \gg R_a + R_i$, so werden die Ausgangsspannungen praktisch einander gleich und weisen die bezweckte Phasenverschiebung auf.

5.247 Transistor-Gegentaktverstärker [*5.69*]

Durch die Vervollkommnung komplementärer npn- und pnp-Transistoren, deren Kennlinien sich also nur durch das Vorzeichen von Strom oder Spannung unterscheiden, können sehr einfache Gegentaktverstärker gebaut werden. In Abb. 5.49a ist eine solche Schaltung schematisch angegeben. Die beiden Tran-

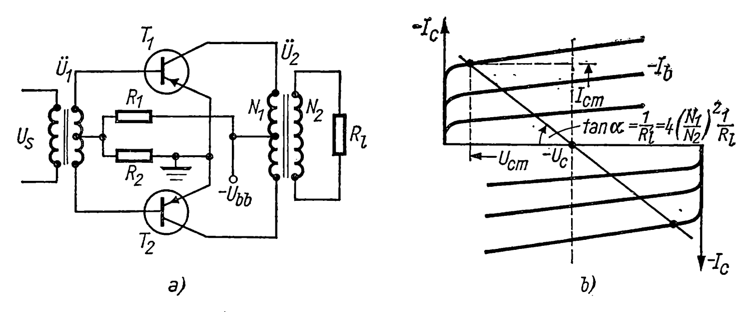


Abb. 5.49 Transistor-Gegentaktverstärker (a), Kollektorkennlinienfeld (b)

sistoren T_1 und T_2 mit pnp-Übergang sind in Emitterschaltung an den Eingangstransformator $Ü_1$ gelegt, der primär von der Signalspannung betrieben wird. Durch den Spannungteiler $R_1 R_2$ wird der Arbeitspunkt festgelegt, wobei $R_2 < R_1$, um diesen bei Änderungen der Transistoren oder deren Temperatur stabilisieren zu können. Im gemeinsamen Kollektorstromkreis liegt die Primärwicklung des Ausgangsübertragers $Ü_2$ und an dessen Sekundärwicklung die Last R_l. Die resultierende Kollektorkennlinie in Abb. 5.49b findet man analog zur Konstruktion in Abb. 5.47b; auch die Neigung der Lastgeraden entspricht der von Abb. 5.46b. Besitzt der Ausgangstransformator $N_1/2$ Windungen pro Wicklungshälfte und N_2 Sekundärwindungen, so ist die reziproke Neigung der Lastgeraden $R_l' = 1/4\,(N_1/N_2)^2 R_l$. Damit ergibt sich die Ausgangsleistung der Verstärkerstufe zu

$$P = U_{cm} I_{cm}/2$$

und erreicht mit idealen Kennlinien den Maximalwert

$$P_{\max} = U_{cc}^2/2R_l', \tag{5/118}$$

der mit dem für den Emitter-A-Verstärker (Gl. (5/113)) identisch ist.

Während der Gleichstromzufluß in der Elektronenröhre nur von der Anode zur Katode möglich ist, kann er im Fall der Transistoren vom Kollektor zum Emitter (npn) oder umgekehrt (pnp) verlaufen. Dies ermöglicht neuartige Schaltungen besonders für Gegentaktverstärker. In Abb. 5.50 ist eine Transistorgegentaktstufe mit einer Treiberstufe T_3 dargestellt, bei der die beiden Transistoren T_1 und T_2 komplementär zueinander sind. Die Kollektorspannung ist so gewählt, daß T_1 und T_2 in B-Verstärkung arbeiten (s. § 5.21). Bei positiver Basisspannung wird der npn-Transistor T_1 leitend und läßt eine halbe Sinuswelle durch den Lastwiderstand R_l fließen. Für negative Basisspannung wird

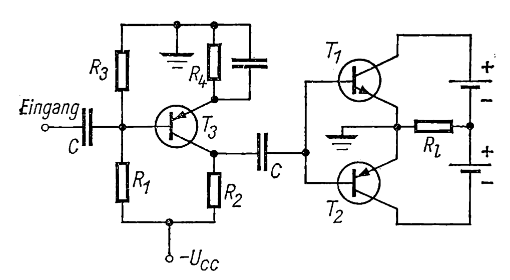


Abb. 5.50 Gegentaktverstärker in Emitterschaltung mit Treiberstufe und komplementären Transistoren

der pnp-Transistor T_2 leitend und liefert die andere Hälfte des Sinusstroms in entgegengesetzter Richtung. Gleichstrom durchfließt beide Transistoren in Serie; der Lastwiderstand ist gleichstromfrei. Auch auf der Basisseite tritt kein Nettogleichstrom auf, weshalb diese Schaltung sich gut für RC-Kopplung eignet. Eine günstige Anpassung von R_l an den Ausgangswiderstand der Transistoren ist bei dieser *eisenlosen Endstufe* meist zu erzielen. Nachteilig ist dabei, daß die Betriebsstromquellen an der Seite des Lastwiderstandes sitzen, an der das Signal auftritt. Man kann sie auch in die Emitterzuleitungen legen, nimmt dann aber den Nachteil in Kauf, daß die Batteriespannung in Reihe mit der Signalspannung liegt und ihre Welligkeit mitverstärkt wird.

Erdet man im Gegensatz zu Abb. 5.50 die Kollektorseite der Transistoren, so lassen sich die oben angeführten Nachteile vermeiden. Die Anpassung an niederohmige Lastwiderstände ist bei dieser Kollektorschaltung (vgl. § 5.223) leicht zu realisieren. Infolge des geringen Verstärkungsfaktors ist eine relativ hohe Treibspannung erforderlich.

5.25 *Rückkopplung im Verstärker* [5.7, 5.9, 5.48]

Unter *Rückkopplung* versteht man den Vergleich der Ausgangsgröße eines aktiven Vierpols mit der Eingangsgröße nach Amplitude und Phase. Dies geschieht in der Weise, daß ein Teil der Ausgangsspannung eines Verstärkers an dessen Eingang gekoppelt wird. Die Rückkopplung wird als *positiv* be-

zeichnet, wenn dadurch die Eingangsspannung vergrößert wird. Die Folge ist eine Erhöhung des Verstärkungsgrades, aber auch der Instabilität. Mit *negativer* Rückkopplung erzielt man eine große Stabilität des Verstärkers auf Kosten des Verstärkungsfaktors.

In Abb. 5.51 ist schematisch ein Verstärker mit *Spannungsrückkopplung* (*a*) und dessen symbolische Darstellung (*b*) gezeigt. Der Verstärker besitzt den Verstärkungsfaktor für die Spannung (vgl. Gl. (3/105))

$$A = U_2/U_1, \tag{5/119}$$

wobei sich U_1 von der Signalspannung U_s um die rückgekoppelte Spannung U_b unterscheidet, die durch die Beziehung

$$\beta = U_b/U_2 \tag{5/120}$$

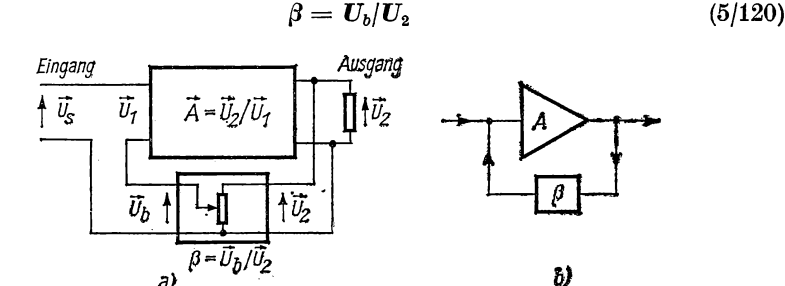


Abb. 5.51 Verstärker mit Spannungsrückkopplung

definiert ist, wenn mit β die komplexe Spannungsübertragung (vgl. § 3.5) des Rückkopplungsnetzwerks (in Abb. 5.51 ein einfaches Potentiometer) bezeichnet wird. Es gilt dann

$$U_1 = U_s + \beta U_2, \tag{5/121}$$

und für den Verstärkungsfaktor A_r *mit Rückkopplung* mit Gl. (5/119) die Beziehung

$$A_r = U_2/U_s = \frac{U_2}{U_1 - \beta U_2} = \frac{A}{1 - \beta A}. \tag{5/122}$$

Der Spannungsverstärkungsfaktor ändert sich also um den Faktor $1 - \beta A$. Er enthält ein negatives β, wenn die Rückkopplungsspannung der Eingangsspannung entgegenwirkt. Bei einem Verstärker mit negativer Rückkopplung hat man daher einen positiven Nenner in Gl. (5/122). Ist $|1 - \beta A| < 1$, so wird $A_r > A$; man spricht von *positiver* Rückkopplung und von einem *Regenerativkreis*, dessen Stabilität hierdurch verringert wird.

Da nach Gl. (5/121) $U_s = U_1 - \beta U_2$ ist, wird für negative Rückkopplung $U_s \approx \beta U_2$ und die Verstärkereingangsspannung U_1 sehr klein. Es ergibt sich sofort aus den Gln. (5/119) und (5/121)

$$\frac{U_s}{U_1} = \frac{1}{1 - \beta A}. \tag{5/123}$$

Die Größe βA, die man *Rückkopplungsfaktor* nennt, muß sehr groß gegen Eins sein, wenn $U_1 \ll U_s$; er ist im allgemeinen eine Funktion der Frequenz. Für die meisten Anwendungen der Rückkopplung ist es von Bedeutung, den Phasenwinkel von βA Null oder 180° zu machen. Für $|\beta A| \gg 1$ folgt aus Gl. (5/122) die wichtige Beziehung

$$A_r = -1/\beta, \tag{5/124}$$

die besagt, daß bei großem Rückkopplungsfaktor der Verstärkungsfaktor A_r unabhängig von den Röhren- bzw. Transistoreigenschaften, den Betriebsspannungen und Schaltungsänderungen gemacht werden kann. Durch Differenzieren von Gl. (5/122) folgt, daß das Verhältnis

$$\frac{\Delta A_r/A_r}{\Delta A/A} = \frac{1}{1-\beta A} \tag{5/125}$$

ist, d. h., daß das Verhältnis der relativen Änderungen der Verstärkungsfaktoren *mit* und *ohne* Rückkopplung nur von βA abhängt und im allgemeinen sehr klein sein wird.

Auch nichtlineare Verzerrungen werden durch negative Rückkopplung verringert. Bezeichnet man mit D die Amplitudenverzerrung bei einer bestimmten Frequenz, so kann diese als Funktion der Ausgangsspannung $D = f(U_2)$ angesehen werden. Bei negativer Rückkopplung gilt dann

$$D_r = f(U_2) + A\beta D_r,$$

wenn D_r die Verzerrungsamplitude *mit* Rückkopplung ist. Daraus folgt

$$D_r/D = \frac{1}{1-\beta A}. \tag{5/126}$$

d. h., die Verzerrung wird um denselben Faktor wie die Verstärkung nach Gl. (5/122) reduziert. Dabei muß jeder Frequenzbereich hinsichtlich seines Wertes von β gesondert betrachtet werden. In Abb. 5.52 ist der Frequenzgang des Verstärkungsfaktors eines RC-Verstärkers ohne und mit verschieden starker negativer Rückkopplung dargestellt. Im ersten Fall (a) liegt der Verstärkungsfaktor bei 35,5 dB und die untere bzw. obere Grenzfrequenz (s. § 5.23) bei 190 Hz bzw. 25 kHz. Mit 10%iger negativer Rückkopplung ($\beta = 0{,}1$) vermindert sich A_r auf 14,3 dB, während sich gleichzeitig f_1 auf 15 Hz und f_2 auf 90 kHz erweitert. Bei einer weiteren Zunahme von β auf den Wert 0,55 wird $A_r = 5{,}3$ dB, wobei sich f_2 auf 200 kHz erhöht (c).

Rauschspannungen (s. § 4.63), die im Verstärker selbst, vorzugsweise in der Eingangsstufe, erzeugt werden, erscheinen verstärkt im Verstärkerausgang. Beim rückgekoppelten Verstärker werden die Rauschspannungen im Verhältnis $1/(1-\beta A)$ reduziert, d. h. im selben Maße wie die Signalspannung. Das Signal-Rausch-Verhältnis bleibt demnach beim rückgekoppelten Verstärker unverändert [*5.78*].

Obwohl die Anwendung der Rückkopplung oftmals recht vorteilhaft ist, kann es schwierig werden, ein stabiles Arbeiten über einen großen Frequenzbereich zu erreichen. Für den Fall, daß der Rückkopplungsfaktor βA den

Phasenwinkel Null und die Größe Eins besitzt, verschwindet der Nenner von Gl. (5/122), und der Verstärker wird bei der Frequenz, für die $\beta A = 1$ ist, selbsttätig schwingen. In Abb. 5.53a ist als Beispiel ein einstufiger Verstärker mit negativer Rückkopplung dargestellt, welche durch die Serienschaltung von R_2 und C_1 erfolgt. Die Kapazität C_1 soll so groß sein, daß ihr Blindwiderstand

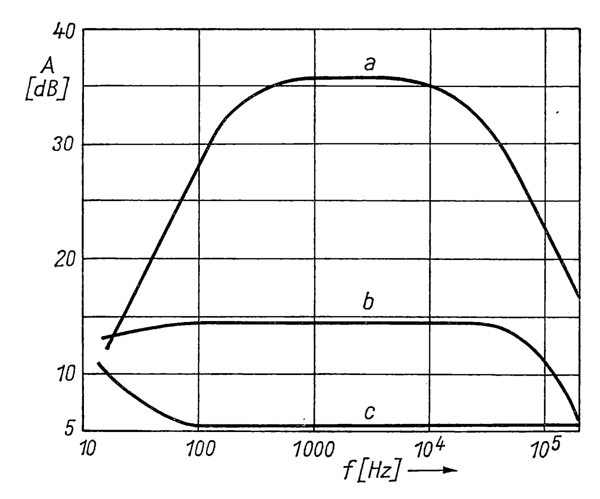


Abb. 5.52 Frequenzgang eines RC-Verstärkers bei verschiedener Rückkopplung

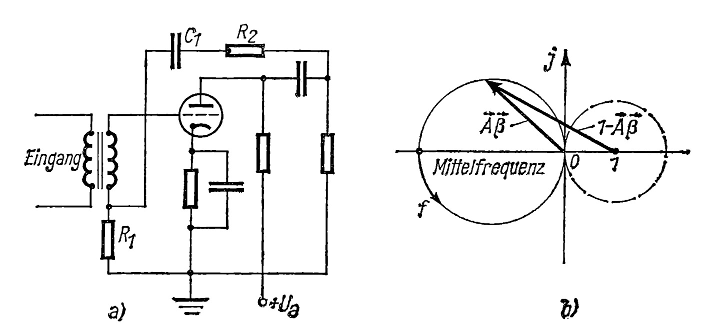


Abb. 5.53 Einstufiger Verstärker mit negativer Rückkopplung (a), Frequenzkurve (b)

zu vernachlässigen ist. Damit wird der Rückkopplungsgrad $\beta = R_1(R_1 + R_2)$ mit einer Phasenverschiebung von 180°, die bereits in der Röhre erzeugt wird. Obwohl β im wesentlichen konstant ist, hängt der Rückkopplungsfaktor $A\beta$ von der Frequenz ab, wie in § 5.231 gezeigt ist, und bildet als Ortskurve einen Kreis durch den Nullpunkt (Abb. 5.53b). Andererseits folgt aus Gl. (5/122), daß der Verstärker nur dann *stabil* arbeitet, wenn der Nenner nicht verschwindet, d. h. die $(1 - \beta A)$-Linie *nicht* im Inneren des um den Punkt (1,0) gezogenen Kreises mit dem Radius 1 endet. Diese Darstellung wird Nyquist-

Diagramm genannt [*5.46*]; es stellt ein allgemeingültiges Kriterium für die Stabilität eines Verstärkers dar.

Der in Abb. 5.53 dargestellte Verstärker arbeitet mit *Spannungsrückkopplung*, da dem Eingang eine zur Ausgangsspannung proportionale Spannung zugeführt wird. Im Gegensatz hierzu wird bei der *Stromrückkopplung*, wie aus Abb. 5.54 ersichtlich, ein Teil des durch die Ausgangslast Z_l fließenden Stromes durch den Katodenwiderstand R_k geschickt, der im Nebenschluß *keine* Kapazität enthält. Der Rückkopplungsgrad beträgt in diesem Fall R_k/R_2, wenn R_2 der Ersatzwiderstand für die parallelgeschalteten Widerstände R_l und R_g ist. Dieses Verhältnis wird so gewählt, daß die Verstärkung *mit* Rückkopplung etwa ein Drittel derjenigen beträgt, die bei Vorhandensein einer Kapazität im Nebenschluß zum Katodenwiderstand auftritt. Allgemein gilt

$$\beta = \frac{\boldsymbol{U}_r}{\boldsymbol{U}_2} = \frac{I_2 \boldsymbol{Z}_r}{I_2 \boldsymbol{Z}_l} = \frac{\boldsymbol{Z}_r}{\boldsymbol{Z}_l}.$$

Kombinationen von negativer und positiver Rückkopplung sind möglich.

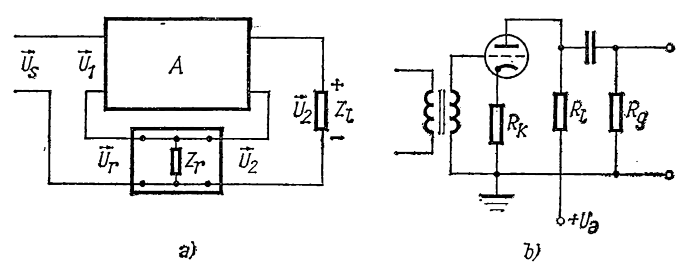


Abb. 5.54 Einstufiger Verstärker mit Stromrückkopplung

Durch elektrische oder magnetische Kopplung kann unerwünschte positive oder negative Rückkopplung zwischen dem Ein- und Ausgang eines Verstärkers hervorgerufen werden. Durch Abschirmen, Isolieren und sorgfältige Verdrahtung kann das verhindert werden. Durch *Entkopplungskreise*, die aus *RC*-Filtern (vgl. § 3.6) bestehen und in Gitter- und Anodenzuleitungen gelegt werden, lassen sich unerwünschte Kopplungen durch die Versorgungsstromquellen vermeiden. Die Zeitkonstanten dieser Filter sollten mindestens das 10fache der niedrigsten zu verstärkenden reziproken Frequenz betragen.

5.26 Direkt gekoppelter Verstärker

Der direkt gekoppelte Verstärker ist in der Lage, sowohl die Gleichspannungskomponente eines Signals als auch die Wechselspannungskomponenten zu verstärken. Er wird dann angewandt, wenn die untere Frequenzgrenze des zu verstärkenden Signals kleiner als etwa 10 Hz ist. Da solche Verstärker keine Blindwiderstände als Koppelglieder enthalten können, spielen Phasenverschiebung und Frequenzgang keine Rolle; sie treten nur bei hohen Frequenzen infolge der Röhren- und Schaltkapazitäten auf. Da das Verstärkerelement in einem direkt gekoppelten Verstärker zwischen Eingangssignal und Gitter-

vorspannungsänderung nicht unterscheiden kann, treten hinsichtlich der *Nullpunktsdrift* beim Signal Null spezielle Probleme auf. Da diese Verstärker auch für Gleichspannungen anwendbar sind, spricht man auch von *Gleichspannungsverstärkern,* obwohl direkt gekoppelte Verstärker sowohl Gleich- als auch Wechselspannungen verstärken können.

Grundsätzlich besteht der direkt gekoppelte Verstärker aus hintereinandergeschalteten Röhren oder Transistoren, wobei das verstärkte Signal der Vorstufe (Spannungsabfall am Anodenwiderstand) dem Gitter der folgenden Stufe direkt zugeführt wird. Die erforderlichen Betriebsspannungen werden einem Potentiometer mit passenden Abgriffen entnommen, an dessen Enden die Summe der Anodenspannungen *aller* Stufen angelegt werden muß. Bei dieser von LOFTIN und WHITE [*5.36*] zuerst angegebenen Schaltung erhöht sich das Bezugspotential (Katodenpotential) der einzelnen Stufen um etwa die Anodenspannung einer Stufe, so daß hohe Spannungen zwischen Heizer und Katode auftreten und auch das Ausgangssignal gegen die hohe Gesamtspannung gemessen wird. Sie eignen sich zur Verstärkung extrem niedriger Frequenzen und liefern weder Phasen- noch Frequenzverzerrung. Die Versorgung der Betriebsspannung geschieht durch einen Netzgleichrichter mit einem gemeinsamen Lastwiderstand, der mit den erforderlichen Abgriffen versehen ist. Der Nachteil dieser Schaltung liegt in den auftretenden Instabilitäten infolge Änderung der Kennlinien sowie der Heiz- und Betriebsspannung. In modernen direkt gekoppelten Verstärkern lassen sich diese Nachteile durch spezielle Schaltungen weitgehend vermeiden.

5.261 Widerstandsgekoppelter Verstärker

Um die unerwünschte Kopplung durch das gemeinsame Versorgungspotentiometer bei der Loftin-White-Schaltung zu vermeiden, kann man die in Abb. 5.55 wiedergegebene Schaltung anwenden, welche zwei Spannungsquellen

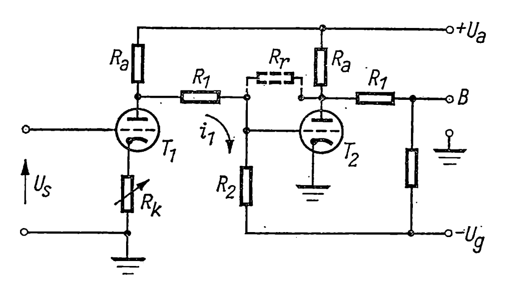


Abb. 5.55 Widerstandsgekoppelter Verstärker

erfordert, die positive und negative Spannung gegen „Erde" liefern. Durch passende Einstellung des Katodenwiderstandes R_k der Eingangsröhre T_1 läßt sich das Potential der Ausgangsklemme B derart verändern, daß dieses in der Mitte zwischen $+U_a$ und $-U_g$ liegt und ohne Signal gegen „Erde" verschwindet. Bei Verwendung stabilisierter Spannungsquellen und gealterter Röhren beträgt die Drift nur einige Zehntel Volt pro Stunde. Über den Span-

nungsteiler R_1, R_2 wird nur ein Teil der Ausgangsspannung der 1. Stufe dem Gitter der zweiten Röhre zugeführt. Man findet die Verstärkung pro Stufe aus der Beziehung

$$A = \frac{-\mu R_a R_2/(R_a + R_1 + R_2)}{R_i - [R_a(R_1 + R_2)/(R_a + R_1 + R_2)]},$$

wobei für große Verstärkung $R_2 \gg R_1$ ist. Diese Schaltung ermöglicht eine Verstärkung mit direkter Kopplung bei gemeinsamer Versorgung aller Stufen durch eine Anodenspannungsquelle; eine Drift des Verstärkerausgangs läßt sich durch die variable Gittervorspannung der Eingangsröhre eliminieren. Die richtige Dimensionierung der Widerstände R_1, R_2 im Verhältnis zum Anodenwiderstand R_a ist bei vorgegebenem Arbeitspunkt leicht zu finden. Zur Verbesserung der Stabilität kann der Rückkopplungswiderstand R_r eingeschaltet werden.

5.262 Katodenkopplung

Alle bisher besprochenen direkt gekoppelten Verstärker weisen eine Nullpunktsdrift auf. Diese kann ihre Ursache in kleinen Änderungen der Heizspannung indirekt geheizter Röhren oder der Anodenspannung haben. Auch

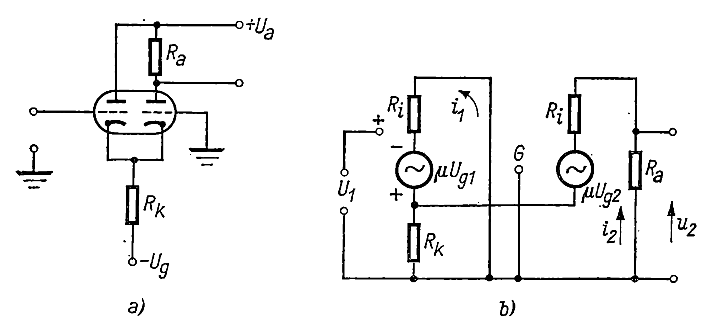


Abb. 5.56 Kompensierte Eingangsstufe zur Driftkompensation (a), Ersatzschaltbild (b)

bei konstanten Versorgungsspannungen bleibt noch eine Drift infolge der Röhrenalterung übrig. Diese ist unmittelbar nach Inbetriebnahme am größten, weshalb neue Röhren wenigstens 24 h vor Benutzung in Betrieb genommen werden sollten. Nach diesem Alterungsprozeß ist die Drift unter etwa 1 mV/h abgesunken.

Es sind eine Anzahl wirkungsvoller Kompensationsschaltungen angegeben worden [*5.5*, *5.79*], von denen ein bekanntes Beispiel in Abb. 5.56 dargestellt ist. Die beiden Hälften einer Doppeltriode sind derart geschaltet, daß gleiche Änderungen in ihren Kennlinien eliminiert werden. Da die vom Heizer und der Alterung herrührende Drift bei einer Doppelröhre kleiner als bei zwei einzelnen Röhren ist, kann diese etwa um eine Größenordnung verringert werden. Jede Hälfte arbeitet hinsichtlich Anodenstrom und -spannung wie beim gewöhnlichen Verstärker für kleine Signale. Der gemeinsame Katoden-

widerstand R_k wird so gewählt, daß der in ihm verursachte Spannungsabfall durch $(i_1 + i_2)$ der Gittervorspannung $-U_g$ entspricht. Nimmt man identische Röhrenparameter für beide Hälften an, so folgt aus dem Ersatzschaltbild (Abb. 5.56b) mit

$$u_{g1} = u_1 - (i_1 + i_2)R_k; \qquad u_{g2} = -(i_1 + i_2)R_k;$$

$$\mu u_{g1} = i_1(R_i + R_k) + i_2 R_k; \qquad \mu u_{g2} = i_1 R_k + i_2(R_1 + R_a + R_k)$$

der Verstärkungsfaktor

$$A = u_2/u_1 = -i_2 R_a/u_1 = \frac{\mu R_a}{[(R_i + R_a)/(\mu + 1)]\,(R_i/R_k) + 2R_i + R_a}.$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich für große Werte von μ zu

$$A = \frac{\mu R_a}{2R_i + R_a}. \qquad (5/127)$$

Durch Vergleich mit Gl. (5/52) erkennt man, daß im vorliegenden Fall die Verstärkung etwa halb so groß wie die eines gewöhnlichen Verstärkers ist. Tritt ein Signal jedoch gleichzeitig in beiden Röhrenhälften auf, so ist hierfür die Verstärkung viel geringer, da der gemeinsame hohe Katodenwiderstand wirksam wird. Der Anodenwiderstand R_a kann wahlweise an die eine oder andere Anode gelegt werden, wobei eine Phasenumkehr des Ausgangssignals auftritt. Das Gitter der 2. Röhrenhälfte wird zweckmäßig mit einem Potentiometer zur Einstellung des Nullpunkts verbunden. Die Anwendung einer negativen Rückkopplung bringt keinen zusätzlichen Vorteil. Neben den Instabilitäten der Röhren wirken sich auch noch kleine Änderungen der Widerstände durch Alterung, Temperatur und Feuchtigkeit nachteilig auf die Nullpunktskonstanz aus. Es sollten daher in diesen Verstärkern drahtgewickelte Widerstände oder solche mit aufgedampften Schichten (keine Kohleschichtwiderstände!) verwendet werden.

5.263 Differenzverstärker [*5.8, 5.43, 5.47*]

Zur Kompensation von Spannungsschwankungen werden oft *Gegentaktverstärker* (s. § 5.246) verwendet, deren Eingangsstufe einen *Phaseninverter* (s. Abb. 5.48) darstellt, mit dem das auf „Erde" bezogene Eingangssignal in zwei gleich große, jedoch um 180° phasenverschobene Spannungen verwandelt wird. Diese werden den Gittern eines vollkommen symmetrischen Gegentaktverstärkers zugeführt. Das Ausgangssignal ist symmetrisch gegen „Erde"; die Balance für das Nullsignal wird in der Eingangsstufe eingestellt.

Eine einfachere Version eines kompensierten Gleichspannungsverstärkers, die auch *Differenzverstärker* genannt wird, läßt sich aus Abb. 5.56 ableiten und ist in Abb. 5.57 dargestellt. Die beiden Anoden der Doppeltriode enthalten je einen Widerstand R_a, denen über ein Potentiometer P die Anodenspannung zugeführt wird. An das Gitter von T_1 wird die zu messende Spannung u_s gelegt; das zweite wird geerdet. Der Verstärkerausgang wird durch ein hochohmiges, empfindliches mV-Meter M gemessen. Diese Schaltung wird sehr

häufig bei *Röhrenvoltmetern* (§ 2.32) angewandt; der Nullabgleich erfolgt über das Potentiometer *P*.

Aus den Gleichungen für die durch die Röhrenhälften fließenden Anodenströme

$$i_1 = \frac{\mu u_s [R_a + R_i + (\mu + 1) R_k]}{2(R_a + R_i)\,[1 + (\mu + 1) R_k]},$$

$$i_2 = \frac{-\mu(\mu + 1) u_s R_k}{2(R_a + R_i)\,[1 + (\mu + 1) R_k]}$$

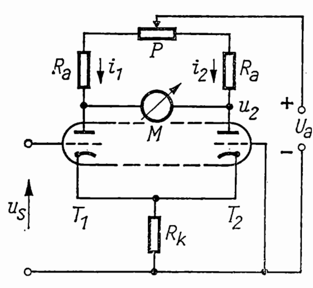


Abb. 5.57 Differenzverstärker

und den Potentialen $u_2 = U_a - i_2 R_a$, $i_1 = U_a - i_1 R_a$ findet man durch Einsetzen die am Instrument liegende Spannungsdifferenz zu

$$u_M = u_2 - u_1 = (i_1 - i_2) R_a = \frac{\mu u_s R_a [R_a + R_i + 2(\mu + 1) R_k]}{2(R_a + R_i)\,[1 + (\mu + 1) R_k]}. \qquad (5/128)$$

Durch passende Wahl der Widerstände läßt sich die Bedingung $(R_a + R_i) \ll (\mu + 1) R_k$ erfüllen; damit ergibt sich aus Gl. (5/128) die einfache Beziehung

$$u_M = \frac{\mu R_a}{R_a + R_i}\, u_s, \qquad (5/129)$$

wobei der durch *M* fließende Strom vernachlässigt ist. Bei Verwendung von Doppeltrioden sind Änderungen der Heiz- und Anodenspannung ohne Einfluß auf die Anzeige.

5.264 Elektrometerröhrenverstärker

Elektrometerröhrenverstärker sind direkt gekoppelte Verstärker, bei denen der Eingangsstrom äußerst klein ist; er soll 0,1 nA nicht überschreiten und erreicht bei besseren Geräten 1 fA. Bei der Konstruktion hat die Oberflächen- und Volumenleitfähigkeit der benutzten Isolierstoffe eine besondere Bedeutung. Für die Eingangsstufe werden Spezialröhren (s. § 4.14, Tabelle 4.3) mit hoher Gitterisolation und kleinen Betriebsspannungen benutzt. (Näheres s. § 2.32.)

5.265 Direkt gekoppelte Transistorverstärker [5.75]

Beim Transistor-Gleichstromverstärker, der meist nur für kleine Signale verwendet wird, ist das Hauptproblem die Kompensation der durch Temperaturänderungen bedingten Drift. Zur Überwindung dieser Schwierigkeiten kann man, wie in § 4.268 beschrieben, die Gleichstromgröße durch einen Zerhacker in ein Wechselstromsignal umformen und dieses durch einen Schmalbandverstärker (s. § 5.233) weiter verstärken. Dadurch kann mit Röhren über mehrere Stunden eine minimale Drift von 1 μV erreicht werden, wobei die Eingangsleistung etwa 1 aW beträgt. Mit *Transistoren* als Schalter und Verstärker muß man mit 10 μV bzw. 0,1 pW rechnen.

Die Dimensionierung einer Gleichstromverstärkerstufe erfolgt, abgesehen von der Driftkompensation, ähnlich wie bei Wechselstromverstärkern nach § 5.22. Bei gegebener Transistorkennlinie $I(U)$ und der Arbeitspunktspannung U_0 findet man die zu einer Spannungsänderung ΔU gehörende Stromänderung

$$\Delta I = I(U_0 + \Delta U) - I(U_0). \tag{5/130}$$

Durch Entwicklung von $I(U_0 + \Delta U)$ in eine Taylor-Reihe

$$I(U_0 + \Delta U) = I(U_0) + \left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}U}\right)_{U=U_0} \Delta U + \dots \tag{5/131}$$

folgt bei kleiner Aussteuerung, d. h. im linearen Kennlinienbereich, der Eingangsleitwert

$$G = \frac{\Delta I}{\Delta U} = \left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}U}\right)_{U=U_0}. \tag{5/132}$$

Dieser entspricht aber dem quasistatischen Wechselstromwert, wie er bei der Dimensionierung von Leistungsverstärkern (s. § 5.24) benutzt wird.

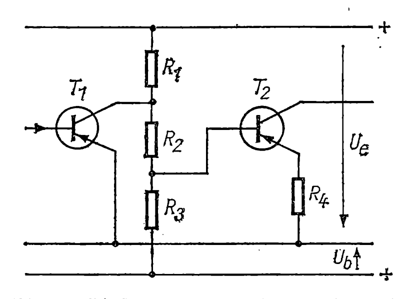


Abb. 5.58 Direkte Kopplung zweier Transistorstufen

Bei den entsprechenden Röhrenverstärkern (vgl. § 5.261) ist die direkte Kopplung wegen der unterschiedlichen Ein- und Ausgangswiderstände schwierig. Für einen Transistorverstärker wird man die Ankopplung der Folgestufe nach dem Beispiel der Abb. 5.58 vornehmen. Die beiden Transistoren T_1 und

T_2 in Emitterschaltung (vgl. § 5.221) werden durch eine gemeinsame Spannung U_e gespeist. Zwischen dem Plus-Pol von U_e und dem der Batterie U_b liegt als Kopplungsglied die Serienschaltung R_1, R_2, R_3, die so ausgelegt ist, daß beide Transistoren die passende Arbeitspunktspannung erhalten. Da R_2 sehr viel kleiner als die Parallelschaltung von R_3 und der nachfolgenden Stufe sein soll, kann man diesen zweckmäßig als Zener-Diode ausbilden. Durch besondere Schaltungsmaßnahmen, z. B. das Einschalten eines Emitterwiderstandes R_4 in die zweite Stufe, können die Teilerverhältnisse der einzelnen Stufen so gewählt werden, daß der Arbeitspunkt für die nachfolgende Stufe günstig liegt. Auf diese Weise lassen sich kompensierte mehrstufige Gleichstromverstärker einfach aufbauen; reicht der Spannungsabfall an R_3 für den Arbeitspunkt von T_2 aus, kann $U_b = 0$ gewählt werden.

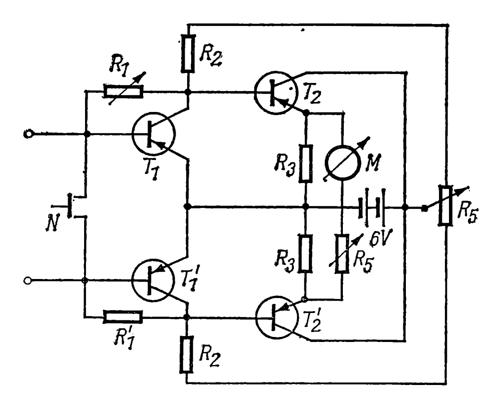


Abb. 5.59 Gegentaktmeßverstärker mit Transistoren OC 17 ($R_1 = 110\,\text{k}\Omega, R_1' = 100\,\text{k}\Omega, R_2 = 20\,\text{k}\Omega, R_3 = 3\,\text{k}\Omega$ $R_4 = 1\,\text{k}\Omega, R_5 = 1\,\text{k}\Omega$)

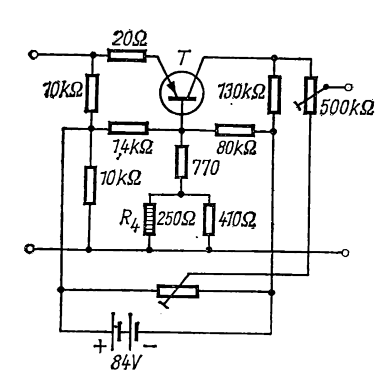


Abb. 5.60 Stabilisierter Verstärker mit Heißleiter

Gegenüber dem Geradeausverstärker liefern — wenigstens theoretisch — Gegentaktverstärker (vgl. § 5.247) mit symmetrischem Aufbau bei gleicher Drift eine ideale Kompensation. In Abb. 5.59 ist als Beispiel hierfür ein aus vier ausgesuchten Transistoren aufgebauter Gegentaktmeßverstärker dargestellt, bei dem die Eingangsstufen in Emitterschaltung, die zweiten Stufen in Kollektorschaltung arbeiten, die nach Gl. (5/82) einen Spannungsverstärkungsfaktor von etwa 1 besitzt. Die Drift des Meßverstärkers ist kleiner als 10 nA/h, während die Leistungsverstärkung 10^4 und die kleinste meßbare Eingangsleistung 1 pW beträgt. Das Anzeigeinstrument M mit 0,1 mA Meßbereich und 1 500 Ω Innenwiderstand gibt eine Anzeige zwischen 0 und 1 μA. Da ohne Signalspannung Ein- und Ausgang des Verstärkers spannungsfrei sein sollen, muß dieser bei offener und gedrückter Kurzschlußtaste N durch die veränderlichen Widerstände R_1 und R_5 kompensiert werden.

Bei einem symmetrisch aufgebauten Verstärker ist der gesamte Batteriestrom nicht von der Aussteuerung, sondern nur von der Temperatur abhängig. Durch einen temperaturabhängigen Spannungsteiler kann daher die Drift weitgehend kompensiert werden. In Abb. 5.60 ist eine Schaltung nach diesem

Prinzip für kleine Ströme von 0,1 bis 10 μA dargestellt. Der Verstärker enthält einen Silizium-Transistor T (OC 440) in Basisschaltung, die einen kleinen Eingangswiderstand von 1 kΩ bei großem Ausgangswiderstand (100 kΩ) besitzt. Im Basiswiderstand ist in Parallelschaltung der temperaturabhängige Heißleiter R_H (250 Ω) enthalten, der eine Temperaturkonstanz von etwa 0,5%/grd bewirkt.

Einfache Verstärker mit hoher Stromverstärkung lassen sich durch direktes Hintereinanderschalten mehrerer Transistoren aufbauen, wie die in Abb. 5.61 dargestellten Beispiele zeigen. Da in solchen Verbundschaltungen alle Restströme in den nachfolgenden Stufen mit verstärkt werden, soll der Arbeitspunktstrom des Eingangstransistors nur sehr klein sein; die Temperaturkonstanz dieser Schaltungen ist aus diesem Grunde gering. Man koppelt meist nur zwei Transistoren in dieser Weise direkt und verwendet Stromableitwiderstände innerhalb der Schaltung.

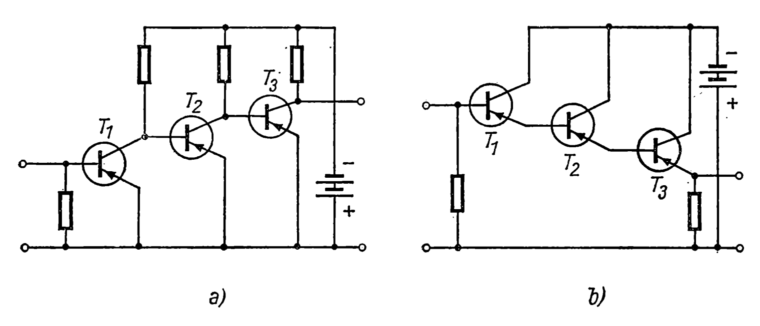


Abb. 5.61 Dreistufige direkt gekoppelte Transistorverstärker: e-e-e-Kopplung (a), c-c-c-Kopplung (b)

5.266 Modulierter Gleichspannungsverstärker [*5.56*]

Die Schwierigkeiten direkt gekoppelter Verstärker können umgangen werden, wenn das Eingangssignal in eine Wechselspannung verwandelt, diese konventionell verstärkt und wieder gleichgerichtet wird. Es handelt sich also um eine Folge von Modulation, Verstärkung und Demodulation. Für die Umwandlung von Gleich- in Wechselspannung wird ausschließlich Amplitudenmodulation angewandt, wobei der Modulator (Zerhacker) mit dem Gleichrichter synchronisiert ist, damit beide Halbwellen am Verstärkerausgang ausgenutzt werden können. Außer mechanischen Zerhackern und Gleichrichtern sind Transistoren, Dioden und Fotodioden als Modulatoren geeignet. Für Spezialzwecke werden supraleitende Schaltelemente (s. § 2.332) oder Schwingkondensatoren verwendet. Die Nullpunktsdrift wird bei diesen Verstärkern hauptsächlich durch die Eigenschaften des Modulators bestimmt. Sie ist um mehrere Größenordnungen geringer als bei direkter Gleichspannungsverstärkung und erreicht bei den besten Ausführungen 10 nV [*5.17*, *5.21*, *5.31*].

Nachteilig bei dieser Art von Verstärkern ist die von der Zerhackerfrequenz abhängige zeitliche Auflösung des Eingangssignals. (Näheres s. § 2.33.)

5.27 *Rauschen im Verstärker*

Über das Rauschen in Gleichrichter- und Verstärkerelementen ist das Grundsätzliche bereits in § 4.6 gesagt worden.

Bei einem Verstärker ist die oberste Grenze des Verstärkungsgrades durch das Rauschen des Verstärkereingangs gegeben. Die in Widerständen und Röhren bzw. Transistoren erzeugte *Rauschleistung* P_r ist in den §§ 4.62···64 behandelt. Ist im einfachsten Fall der Eingang eines Verstärkers durch den Gitterwiderstand R_g gegeben und nimmt man eine parallelgeschaltete Gitterkapazität C an, so ist für die Rauschspannung nach Gl. (4/94) der Realteil der Impedanz

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{1/R_g + \mathrm{j}\omega C} = \frac{R_g}{1 + (\omega R_g C)^2} - \frac{\mathrm{j}\omega R_g C}{1 + (\omega R_g C)^2}$$

einzusetzen. Damit wird die mittlere quadratische Rauschspannung

$$\overline{U_r^2} = \int\limits_0^\infty \overline{u_r^2}\,\mathrm{d}f = \frac{2}{\pi}\,kT\,R_g \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{1 + (\omega R_g C)^2} = \frac{kT}{C}. \qquad (5/133)$$

Bezeichnet man den Frequenzgang des Verstärkers mit $\mathbf{F}(\omega)$, so ergibt sich die Rauschspannung am Verstärkerausgang entsprechend zu

$$\overline{U_r^2} = \frac{2}{\pi}\,kT\,R_g \int\limits_0^\infty \frac{\mathbf{F}(\omega)}{1 + (\omega C R_g)^2}\,\mathrm{d}\omega. \qquad (5/134)$$

Die Rauschspannung hängt demnach von der Bandbreite oder, allgemeiner, vom Frequenzverlauf des Verstärkers ab. Von Maier-Leibnitz [*5.44*] ist das Rauschverhalten von Impulsverstärkern durch die Elementarvorgänge des Rauschens und die Antwortfunktion des Verstärkers beschrieben worden. Ankel und Wintermeyer [*5.4*] berechnen für einen Verstärker mit phasenrichtiger Gleichrichtung die niedrigste, durch das Rauschen bedingte Meßgrenze. Von Dubrau [*5.19*] wird das Rauschen gegengekoppelter ladungsempfindlicher Vorverstärker, von Mansfeld [*5.40*] das einer Verstärkereingangsstufe eingehend behandelt.

5.3 **Rechenverstärker** [*5.2, 5.12, 5.27, 5.28, 5.32, 5.51*]

Eine bedeutende Anwendung der in § 5.25 behandelten direkt gekoppelten Verstärker mit negativer Rückkopplung stellen die *Rechen-* oder *Operationsverstärker* dar. Sie besitzen ohne Rückkopplung hohe Verstärkung und lassen sich durch verschiedene Arten der Rückkopplung für mathematische Operationen, wie Summieren, Differenzieren, Integrieren, verwenden. Durch Benutzen von Transistoren lassen sich kompakte, mechanisch stabile und beliebig miteinander zu verbindende Einheiten realisieren, mit denen *Analogierechnungen* ausgeführt werden können.

5.31 *Wirkungsweise*

In Abb. 5.62 ist der prinzipielle Aufbau eines Rechenverstärkers dargestellt; dieser besteht aus einem direkt gekoppelten Verstärker mit dem Verstärkungsfaktor

$$A = -u_2/u' \tag{5/135}$$

und einer *ungeraden* Zahl von Phasendrehungen. Die in der Abbildung eingetragenen Spannungen und Ströme sind zeitliche Augenblickswerte und durch die Beziehungen

$$u = iR; \quad u = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = Lpi; \quad u = \frac{1}{C}\int_{t_1}^{t_2} i\,\mathrm{d}t = \frac{i}{Cp} \tag{5/136}$$

miteinander verknüpft, wobei der Operator $p = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$ eingeführt ist. Als *Operationsimpedanz* ist allgemein die Relation

$$u/i = Z(p)$$

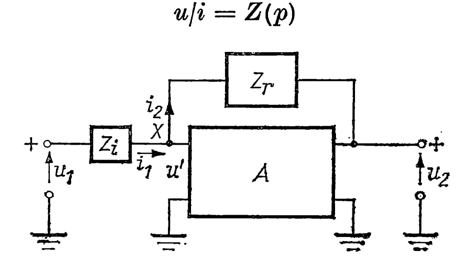


Abb. 5.62 Aufbau eines Rechenverstärkers

definiert; dies gilt im einzelnen auch für die in Abb. 5.62 eingetragene Eingangsimpedanz $Z_i(p)$ und Rückkopplungsimpedanz $Z_r(p)$. Da der Verstärkungsfaktor für $Z_r = \infty$ („open loop operation") sehr hoch sein soll, wird sich die Spannung u' nur wenig von Null unterscheiden; man bezeichnet den Punkt X auch als „virtuelle Erde". Damit wird $i_1 = i_2$, und es gilt

$$\frac{u_1 - u'}{Z_i(p)} = \frac{u' - u_2}{Z_r(p)}. \tag{5/137}$$

Eliminiert man mittels Gl. (5/135) die Eingangsspannung u', so findet man die Grundgleichung des Rechenverstärkers

$$-u_2 = \frac{Z_r(p)}{Z_i(p)} \frac{1}{1 + (1/A)\,[1 + Z_r(p)/Z_i(p)]}\, u_1, \tag{5/138}$$

aus der für große Werte von A wegen $A \gg 1 + Z_r(p)/Z_i(p)$ die einfache Beziehung folgt

$$u_2 = -\frac{Z_r(p)}{Z_i(p)}\, u_1. \tag{5/138a}$$

Die Genauigkeit, mit der die durch Gl. (5/138a) beschriebenen Operationen ausgeführt werden, hängt davon ab, ob die Forderung nach hoher Verstärkung A erfüllt ist. Dies macht im allgemeinen keine Schwierigkeiten.

Für den in der Abbildung eingetragenen Richtungssinn sind die Spannungen u_1 und u_2 *gegenphasig*. Setzt man $Z_r(p) = Z_i(p) = R$ (z. B. 1 MΩ), so wird der Verstärkungsfaktor des rückgekoppelten Verstärkers $A_r' = u_2/u_1 = -1$, d. h., es ändert sich nur das Vorzeichen des Eingangssignals (Konverter). Für beliebige ohmsche Widerstände R_r und R_i findet man

$$u_2 = -\frac{R_r}{R_i} u_1 = -k u_1, \qquad (5/138\text{b})$$

also eine mit der Konstanten k multiplizierte Eingangsspannung.

Bezeichnet man die nach Gl. (5/138) tatsächlich vorhandene Verstärkung mit $A_r' = -u_2/u_1$ und setzt $R_r/R_i = A_r$, so findet man durch Einsetzen in Gl. (5/138) mit $A \gg A_r$ und $A \gg 1$ einen relativen Fehler

$$\frac{A_r - A_r'}{A_r} = \frac{1}{A}(1 + G). \qquad (5/139)$$

Dieser wird um so kleiner, je größer A und je kleiner A_r ist; er beträgt z. B. für $A = 10^5$ und $A_r = 10$ nur noch 0,011%.

5.32 *Rechenoperationen* [*5.54*]

Wird $Z_r(p)$ durch eine Kapazität C dargestellt, deren Operationsimpedanz nach Gl. (5/136) gleich $1/Cp$ ist, und wird $Z_i(p) = R_i$ gesetzt, so wird aus Gl. (5/138a)

$$u_2 = -\frac{1}{R_i C}\frac{1}{p} u_1. \qquad (5/140)$$

Der Verstärker stellt damit einen *Integrator* in bezug auf die Zeit dar, dessen Resultat mit der Konstanten $1/R_i C$ multipliziert ist. Da die Eingangsspannung $u' = u_2/A \ll u_2$ ist, liegt der Punkt X praktisch an „Erde" und an C die Ausgangsspannung u_2. Das ist für die Festlegung der Anfangsbedingungen für die Integration von Bedeutung.

Durch Vertauschen von R und C im Integrator erhält man die Beziehung

$$u_2 = -R C_i p u_1, \qquad (5/141)$$

d. h. eine Ausgangsspannung, welche die negative Ableitung der Eingangsspannung darstellt (*Differentiator*). In Abb. 5.63 sind die Prinzipschaltungen für die verschiedenen Rechenoperationen zusammengestellt. In Abb. 5.63d sind drei verschiedene Eingangsimpedanzen angegeben, durch die die Ströme i_a, i_b und i_c fließen sollen. Da $i_a + i_b + i_c = i_2$ ist, ergibt sich mit $i_a = u_a/Z_a(p)$ usf. die Beziehung

$$-u_2 = \frac{Z_r(p)}{Z_a(p)} u_a + \frac{Z_r(p)}{Z_b(p)} u_b + \frac{Z_r(p)}{Z_c(p)} u_c, \qquad (5/142)$$

und mit $Z_r(p) = Z_a(p) = Z_b(p) = Z_c(p) = R$
folgt

$$-u_2 = u_a + u_b + u_c. \tag{5/143}$$

Der Verstärkerausgang liefert also die Summation der Eingangsspannungen. Sind die Quotienten R_r/R_a usf. verschieden groß, so werden die Summanden mit Konstanten multipliziert. Wird R_r durch eine Kapazität C ersetzt, so

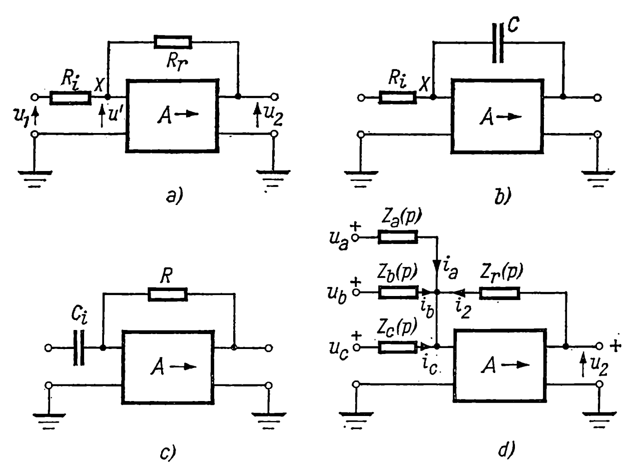


Abb. 5.63 Rechenverstärker: Multiplikation mit einer Konstanten (a), Integration (b), Differentiation (c), Summation (d)

lassen sich drei Integrale summieren. Wird an den Eingang des Integrators die Sinusspannung $u_1 = U_1 \sin \omega t$ gelegt, so ergibt sich nach Gl. (5/140) die Ausgangsspannung

$$u_2 = -\frac{1}{R_i C} \int U_1 \sin \omega t \, dt = \frac{U_1}{\omega C R_i} \cos \omega t$$

oder für die Effektivwerte der Zusammenhang

$$\boldsymbol{U}_2 = -\boldsymbol{U}_1 / \mathrm{j} \omega R_c C. \tag{5/144}$$

Daraus ist zu ersehen, daß die Ausgangsspannung des Integrationskreises mit $1/\omega$ abfällt, was eine einfache Prüfung der Integratorgenauigkeit ermöglicht. Im Falle des Differentiators wird

$$\boldsymbol{U}_2 = \mathrm{j} \omega R C_i \boldsymbol{U}_1,$$

also pro Oktave um 6 dB zunehmen. Mit $RC_i = 1$ und $\omega = 314$ (50 Hz) beträgt die Ausgangsspannung das 314fache der Eingangsspannung; unerwünschter 50-Hz-Brumm am Eingang wird sich mit diesem Faktor am Ausgang bemerkbar machen. Wegen der starken Zunahme des Verstärkungsfaktors mit der Frequenz und der damit verbundenen Schwierigkeiten bei

Rauschspannungen vermeidet man im allgemeinen Differentiatoren in Analogrechnern.

Man kann auch Parallel- oder Serienschaltungen von R und C für Z_r bzw. Z_i anwenden und die Ausgangsspannung aus Gl. (5/138a) berechnen. Will man die Antwort des Verstärkers für nicht sinusförmige Signale erhalten, so wendet man hierzu die Laplace-Transformation an. In Abb. 5.64 ist für einige Rechenverstärker das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung angegeben.

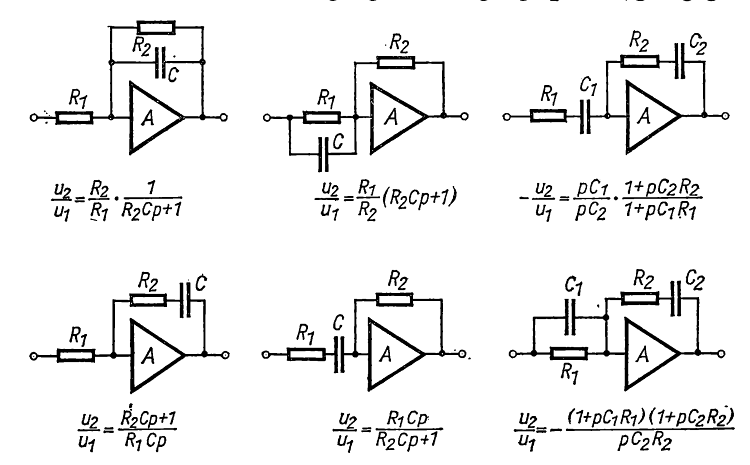


Abb. 5.64 Verschiedene Rechenverstärker

5.33 *Analogrechner*

Mit Hilfe von Analogrechnern, die mit Operationsverstärkern arbeiten, lassen sich Lösungen von mathematischen Problemen bei vorgegebenen Randbedingungen finden. Die erzielbare Genauigkeit hängt von den einzelnen Verstärkergliedern und der Genauigkeit ab, mit der der Funktionalverlauf der Eingangsgröße reproduziert werden kann. Im Gegensatz hierzu hängt die erreichbare Genauigkeit eines *Digitalrechners* nur von der Rechenkapazität ab und liegt im allgemeinen weit über der eines Analogrechners. Die Anwendung des letzteren ist daher meist auf Ingenieurprobleme, speziell auf die Lösung linearer und nichtlinearer Differentialgleichungen beschränkt. Die Lösungen erscheinen in Form gezeichneter Kurven oder Oszillogramme, wobei eine der Variablen *immer* die Zeit ist.

Nimmt man als Beispiel die inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$a\,\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2 + b\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}t + cy = f(t),$$

so beginnt man zunächst mit der höchsten Ableitung $a\ddot{y}$, die in einen Integrator gegeben wird und bei passend gewählten R_1 und C_1 die Größe $-b\dot{y}$ liefert. Eine zweite Integration (vgl. Abb. 5.65) liefert daraus die Größe $+cy$. Als nächster Schritt erfolgt die Summation in der Form

$$a\ddot{y} = f(t) - b\dot{y} - cy,$$

wobei die Funktion $f(t)$ als Eingangsspannung mit beliebigem Zeitverlauf, z. B. als Sprung-, Treppen- oder Sinusfunktion vorgegeben wird. Das Blockschaltbild für den geschlossenen Rechenkreis in Abb. 5.66 zeigt die beiden Integratoren I und II, welche die Größe $+cy$ im Ausgang liefern; von der 1. Ableitung $-b\dot{y}$ wird im Phasenkonverter III das Vorzeichen geändert. Die Störfunktion $f(t)$ wird ebenfalls einem Konverter IV zugeführt, so daß der Addierverstärker V die Summation $-b\dot{y} - cy + f(t)$ ausführen und bei C der Rechenkreis geschlossen werden kann. An den Ausgang A ist zur Aufzeichnung der gesuchten Funktion $y(t)$ z. B. ein Katodenstrahloszillograf oder bei langsameren Vorgängen ein Kompensationsschreiber (s. § 2.63)

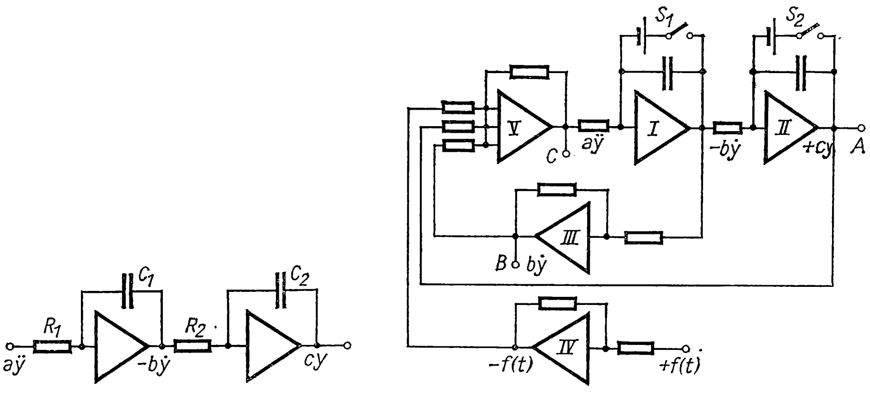


Abb. 5.65 Zweifache Integration

Abb. 5.66 Analogrechner zur Lösung von $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = f(t)$

angeschlossen. Schließt man das Registriergerät an die Punkte B oder C an, so erhält man den Verlauf der Größen $b\dot{y}$ bzw. $a\ddot{y}$. Die Schaltrelais S_1 und S_2, welche im geschlossenen Zustand frei wählbare Spannungen an die Rückkopplungskapazitäten der Integratoren legen und die Anfangsbedingungen festlegen, werden bei $t = 0$ gleichzeitig mit dem Triggerimpuls für die Störspannung $f(t)$ geöffnet. Zur Herstellung der Störspannung benutzt man *Funktionsgeneratoren,* die in der einfachsten Form Potentiometer sein können, die von einem motorangetriebenen Kontakt abgegriffen werden.

5.34 *Nichtlineare Rechenelemente*

Quadrieren und Wurzelziehen sind mit den besprochenen linearen Rechenverstärkern nicht auszuführen. Die hierzu erforderlichen nichtlinearen Kennlinien lassen sich stückweise durch gerade Kennlinien zusammensetzen, wie in Abb. 5.67 illustriert ist. Hierzu wird die Eigenschaft der *Diode* (s. § 4.24) ausgenutzt, einen von der angelegten Spannung betätigten Schalter darzustellen. Liegt im Diodenkreis eine feste Gegenspannung E sowie ein Widerstand $R \gg R_i$ (R_i Innenwiderstand der Diode in Durchlaßrichtung), so wird bei einer von außen angelegten Signalspannung $U < E$ kein Strom fließen und für $U > E$ die Strom-Spannungs-Charakteristik durch eine Gerade mit

der Neigung $1/R$ und dem Fußpunkt bei E dargestellt. Schaltet man, wie in Abb. 5.67a, mehrere solcher nichtlinearer Kreiselemente parallel, wobei $E_2 > E_1$ und $R_0 > R_1 > R_2$, so ergibt sich die in Abb. 5.67b dargestellte Kennlinie. Durch eine symmetrische Anordnung für entgegengesetzte Stromrichtung läßt sich auch die Fortsetzung für negative Spannungen darstellen, wobei die beiden Dioden D_- und D_+ dafür sorgen, daß die eine oder andere Hälfte des Schaltkreises wirksam ist. Eine quadratische Kennlinie $I = kU^2$ läßt sich mit einer Genauigkeit von 1% durch je 5 gerade Abschnitte realisieren. (Solche Kombinationen können auch als Rückkopplungsglieder in Operationsverstärkern benutzt werden und liefern zusätzliche interessante Verstärkereigenschaften.)

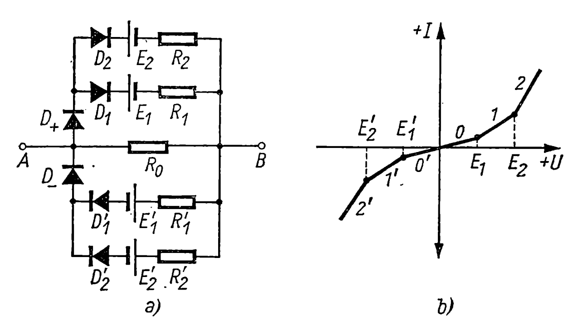


Abb. 5.67 Nichtlinearer Widerstand aus parallelgeschalteten Dioden

Mit Hilfe solcher Kennlinien lassen sich Quadraturen mit großer Genauigkeit ausführen. Eine interessante Anwendung, die von CHANCE [*5.14*] angegeben wurde, beruht auf der Beziehung

$$(u_1 + u_2)^2 - (u_1 - u_2)^2 = 4u_1u_2.$$

Diese besagt, daß zwei Spannungen u_1 und u_2 miteinander multipliziert werden können, wenn ihre Summe und ihre Differenz quadriert und die daraus erhaltenen Resultate voneinander subtrahiert werden. Zum Quadrieren werden die oben beschriebenen parabolischen Kennlinien mit parallelgeschalteten vorgespannten Kristalldioden benutzt.

5.35 *Ausgeführte Operationsverstärker*

Seit der Entwicklung integrierter Operationsverstärker in Si-Technik und in Form von Bausteinen kleinster Abmessungen, hoher Temperaturkonstanz und großer Zuverlässigkeit mit selektierten Bauelementen und Dualtransistoren mit annähernd gleichen elektrischen Eigenschaften ist die Verwendung von Röhren-Rechenverstärkern vollkommen zurückgetreten. Es ist heute möglich, vollständige Operationsverstärker auf einem Chip zu integrieren und zusätzlich durch Kompensationsdioden eine gute thermische Stabilität zu erzielen. Ihr großer Vorteil ist der sehr kleine Raumbedarf, der Fortfall von Heizstromquellen, die kleinen Betriebsspannungen und der geringe Preis.

Moderne Operationsverstärker erfordern zu ihrer Herstellung eine hochentwickelte Technologie, bei der auf einem Si-Chip (Einkristall) von höchstens $1 \times 1\ mm^2$ Fläche durch Dotieren, Aufdampfen, Diffundieren und Kontaktieren eine größere Anzahl von Transistoren, Dioden und Widerständen hergestellt und verschaltet werden. Als Beispiel ist in Abb. 5.68 die Schaltung eines Verstärkers der Familie CA 3008 dargestellt, der 10 Transistoren und zwei Dioden sowie 18 Widerstände enthält. Der Verstärker ist mit zwei Eingängen (nichtinvertierend und invertierend) versehen, besitzt eine Leerlaufspannungsverstärkung A_0 von 60 dB, eine Eingangsimpedanz $Z_i = 14\ k\Omega$, eine Ausgangsimpedanz $Z_{0i} = 200\ \Omega$ und wird mit $\pm$ 6 V betrieben.

Betriebsspannung. Wegen der heute erreichbaren Verlustleistung in Si-Operationsverstärkern können Betriebsspannungen bis zu $\pm$ 18 V zugelassen werden, wobei maximale Kollektor-Emitter-Spannungen des Einzeltransistors bis zu 25 V erreicht werden.

Eingangsruhestrom. Zur Einstellung des Arbeitspunktes ist ein bestimmter Ruhestrom von 5···10 μA erforderlich, der bei Gleichspannungskopplung durch die steuernde Eingangsspannung geliefert werden muß. Bei Spannungsquellen mit hohem Innenwiderstand ist eine MOS-FET-Stufe (s. § 4.267) vorzuschalten, deren Eingangsruhestrom von der Größenordnung pA ist.

Als *Eingangs-Offset-Strom* bezeichnet man denjenigen Strom, der am Verstärkereingang notwendig ist, um eine Ausgangs-Offset-Spannung auszugleichen. Er ist die Folge von Fertigungstoleranzen und der Unterschiede in den elektrischen Eigenschaften der Komponenten. Die Größenordnung des Offset-Stromes liegt bei 1 μA; er nimmt im allgemeinen mit wachsender Betriebstemperatur ab.

Als *Eingangs-Offset-Spannung* wird die Differenz zwischen den Eingangs-Gleichspannungen bezeichnet, die zum Nullabgleich der Ausgangsgleichspannung erforderlich ist. Sie ist für die Beurteilung der Qualität des Operationsverstärkers von großer Bedeutung, da der Nullpunkt des Ausgangssignals von ihr abhängt und die Nullpunktsabweichung direkt proportional zu A_0 ist. Durch einen Spannungsteiler am Verstärkereingang kann die Offset-Spannung eingestellt werden; sie liegt in der Größenordnung 1 mV. Die idealen Werte von *Eingangs-* und *Ausgangsimpedanz* $Z_i \to \infty$ bzw. $Z_{0i} \to 0$ sind praktisch nicht realisierbar. Es ist jedoch wichtig, daß die Abschlußwiderstände am Verstärkereingang klein gegen Z_i und der Lastwiderstand und der Gegenkopplungsspannungsteiler (vgl. Abb. 5.62) groß gegen Z_{0i} sind.

Die Höhe der *Leerlaufspannungsverstärkung* $A_0(\omega)$ ist nicht wesentlich, wenn sie größer als 60 dB ist, da nach Gl. (5/138) die Spannungsverstärkung für große Werte von $A_0(\omega)$ nur noch vom Verhältnis $Z_r(p)/Z_i(p)$ abhängt. Der Abfall von $A_0(\omega)$ bei höheren Frequenzen wird durch die Grenzfrequenz der Transistoren sowie interne Kapazitäten hervorgerufen. Durch die Gegenkopplung kann bei Verlust an Betriebsverstärkung der bei höheren Frequenzen auftretende Verstärkungsabfall z. T. kompensiert werden. In Abb. 5.69a ist für den in Abb. 5.68 dargestellten Operationsverstärker die Spannungsverstärkung als Funktion der Betriebsfrequenz wiedergegeben. Mit dem Abfall der Verstärkung ist gleichzeitig eine *Phasendrehung* zwischen Ein- und Ausgangssignal verbunden, die bei einem Verstärkungsrückgang von 3 dB bereits

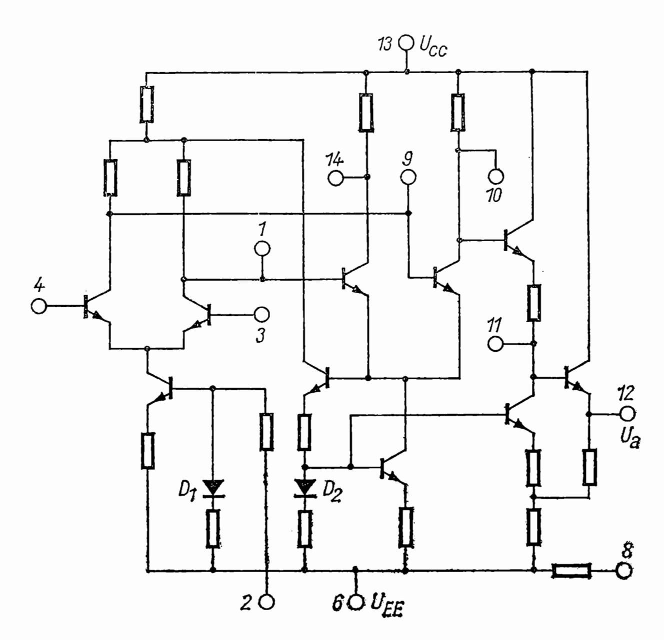


Abb. 5.68 Schaltung eines Operationsverstärkers

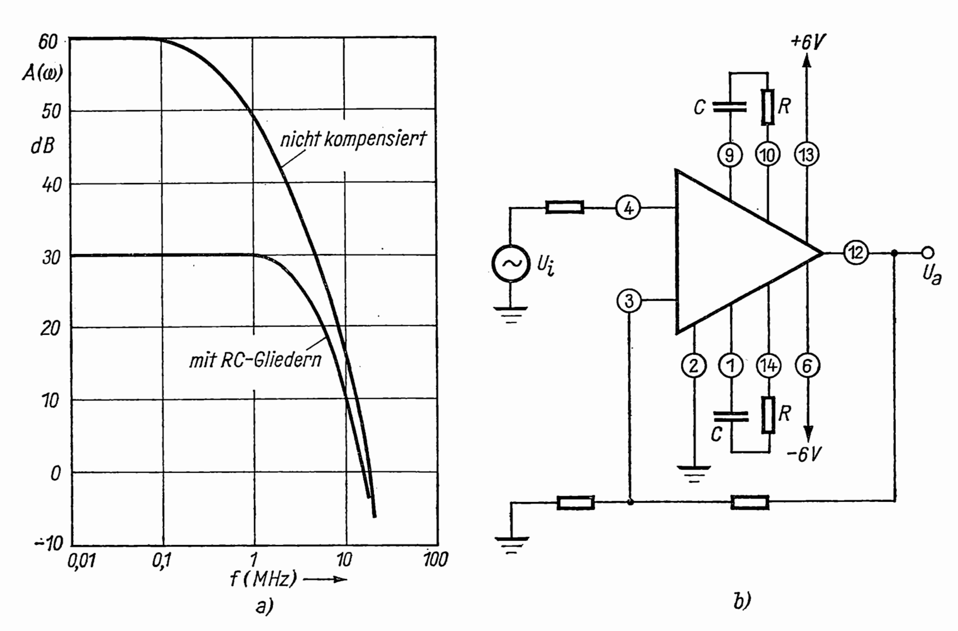


Abb. 5.69 Spannungsverstärkung und Schaltung eines frequenzkompensierten Operationsverstärkers

45° beträgt. Der gegengekoppelte Verstärker kann bei hohen Frequenzen zu einem rückgekoppelten werden, instabil werden und zum Schwingen neigen. Durch zusätzliche RC-Glieder, die — wie in Abb. 5.69b gezeigt ist — extern zum Operationsverstärker hinzugeschaltet werden, kann man die Verstärkung oberhalb des Arbeitsbereiches so stark herabsetzen, daß die kritische Phasenlage erst bei sehr viel höheren Frequenzen erreicht wird (vgl. Abb. 5.69a).

Wie die Schaltung in Abb. 5.68 zeigt, stellt die Eingangsstufe im allgemeinen einen Differenzverstärker dar, d. h., der Operationsverstärker gibt am Ausgang nur dann eine Wechselspannung ab, wenn die beiden Eingänge gegenphasig angesteuert werden. Bei Ansteuerung mit gleichphasigen und amplitudengleichen Signalen soll die Ausgangsspannung Null sein (*Gleichtaktunterdrückung*). Diese Forderung wird im allgemeinen nicht erfüllt, doch wird eine Gleichtaktunterdrückung von 85···100 dB erzielt.

Die *Anwendung* kommerzieller Operationsverstärker ist vielseitig und kann durch externe Phasenkorrekturglieder und frequenzabhängige Gegenkopplungsimpedanzen dem gewünschten Zweck angepaßt werden. Für einen *Breitbandverstärker* sind wie in Abb. 5.69b RC-Glieder anzuwenden. Durch eine frequenzabhängige Gegenkopplung erhält der Verstärkungsverlauf als Funktion von ω einen *Bandpaß*charakter, d. h., es wird nur ein bestimmter Frequenzbereich bevorzugt übertragen. Zur *Resonanzverstärkung* kommt nur der invertierende Operationsverstärker zur Anwendung, da nach Gl. (5/138) $A_0(\omega)$ nur bei diesem gegen Null gehen kann. In den Gegenkopplungszweig ist hierzu ein Parallelresonanzkreis geschaltet, dessen Impedanz ober- und unterhalb der Resonanzfrequenz klein ist und eine Absenkung der Spannungsverstärkung bewirkt. Schließlich läßt sich der invertierende Operationsverstärker zur *Summenbildung* benutzen, wenn an den invertierenden Eingang die zu addierenden Spannungsquellen über geeignete Vorwiderstände gelegt werden.

Es werden heute *integrierte Schaltkreise* hergestellt, die auf *einem* Si-Chip mehrere unabhängige Verstärker einschließlich der Kompensationsglieder enthalten, wobei bei kleinen Leistungen die obere Frequenzgrenze bei 200 MHz liegt.

Wegen ihrer besonderen Leistungen und Eigenschaften gewinnen Operationsverstärker in der experimentellen Technik zunehmend an Bedeutung, zumal sie leicht auszuwechseln und äußerst billig sind.

5.4 Oszillatoren [*5.20, 5.72*]

In diesem Abschnitt werden Röhren- und Transistoroszillatoren behandelt, welche annähernd sinusförmige Ausgangssignale erzeugen und deren Frequenz durch ihre eigenen Parameter bestimmt ist. Erzeuger nichtsinusförmiger periodischer Signale, wie Multivibratoren u. a., werden gesondert in § 5.6 besprochen. Spezielle Oszillatoren für sehr hohe Frequenzen s. § 8.3.

Für die Zwecke der experimentellen Forschung sind primär Oszillatoren für relativ kleine Leistungen von Interesse. Diese lassen sich einteilen in: *a*) Oszillatoren mit äußerer Rückkopplung, *b*) direkt gekoppelte Oszillatoren und *c*) Oszillatoren mit fallender Kennlinie.

5.41 *Rückkopplung in Oszillatoren*

Oszillatoren mit Elektronenröhren oder Transistoren sind die gebräuchlichsten Wechselspannungsquellen für alle Frequenzen oberhalb von 10 kHz. Trotz der großen Anzahl von Oszillatorschaltungen lassen sich die charakteristischen Eigenschaften auf die *positive Rückkopplung* in einem Verstärker zurückführen (s. § 5.25).

Geht man von einem Verstärker mit dem Verstärkungsfaktor

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_2/\boldsymbol{U}_1 \tag{5/145}$$

aus (s. Abb. 5.70), dessen Ausgangsspannung U_2 auf den Eingang über einen Vierpol mit dem Spannungsübertragungsfaktor $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{U}_r/\boldsymbol{U}_2$ rückgekoppelt ist, so gilt

$$\boldsymbol{\beta U}_2 = \boldsymbol{U}_r = \boldsymbol{U}_1. \tag{5/146}$$

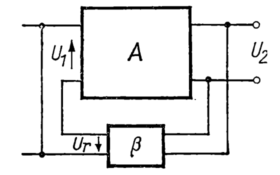


Abb. 5.70 Rückgekoppelter Oszillator

Der Rückkopplungskreis muß so beschaffen sein, daß $\boldsymbol{U}_r$ und $\boldsymbol{U}_1$ in Amplitude und Phase übereinstimmen. Daraus folgt die Bedingung

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_2/\boldsymbol{\beta U}_2 = 1/\boldsymbol{\beta}; \quad \boldsymbol{A\beta} = 1 \tag{5/147}$$

für das Zustandekommen selbsterhaltender Schwingungen. Da β nie größer als Eins werden kann, muß $|A|$ größer als Eins sein, wenn Schwingungen erzeugt werden sollen. Mit der allgemeinen Beziehung (3/106)

$$\boldsymbol{A} = \frac{-\mu \boldsymbol{Z}_l}{R_i + \boldsymbol{Z}_l}$$

ergibt sich aus Gl. (5/147) die wichtige Gleichung

$$\boldsymbol{\beta} = -\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{S\boldsymbol{Z}_l}\right), \tag{5/148}$$

die als *Barkhausen-Kriterium* für die Selbsterhaltung von Schwingungen bezeichnet wird. Wird die Lastimpedanz $\boldsymbol{Z}_l$ von einem ohmschen Widerstand gebildet, muß der Rückkopplungskreis die durch das Minuszeichen in Gl. (5/148) angedeutete Phasenumkehr rückgängig machen, damit $\boldsymbol{U}_r$ und $\boldsymbol{U}_1$ gleichphasig schwingen. Bei beliebiger Lastimpedanz $\boldsymbol{Z}_l$ wird eine zusätzliche Phasenverschiebung nötig. Über die verschiedenen Methoden der Rückkopplung s. § 5.43.

Da für $\boldsymbol{A\beta} = 1$ nach Gl. (5/122) der Verstärkungsfaktor $\boldsymbol{A}_r$ unendlich werden würde, sind Schaltelemente zur Amplitudenbegrenzung vorgesehen.

5.42 *Betriebsweise des rückgekoppelten Oszillators*

Am Beispiel des in Abb. 5.71a dargestellten Oszillators mit Anodenschwingkreis sollen die grundsätzlichen Beziehungen für den rückgekoppelten Oszillator dargestellt werden. Hierbei wird vorausgesetzt, daß der Gitterstrom Null ist, die Röhrenkoeffizienten konstant sind und der Strom sinusförmig sei, was für den meist als C-Verstärker arbeitenden Generator allerdings nur angenähert zutrifft. Unter diesen Voraussetzungen lassen sich für den Ersatzstromkreis der Abb. 5.71b folgende Gleichungen angeben:

$$\boldsymbol{U}_g - \mathrm{j}\,\omega M \boldsymbol{I}_1 = 0; \tag{5/149a}$$

$$\mu \boldsymbol{U}_g - (R + \mathrm{j}\,\omega L_1)\boldsymbol{I}_1 - R_i \boldsymbol{I}_2 = 0; \tag{5/149b}$$

$$(R + \mathrm{j}\,\omega L_1 - \mathrm{j}/\omega C)\boldsymbol{I}_1 - \mathrm{j}\,\boldsymbol{I}_2/\omega C = 0. \tag{5/149c}$$

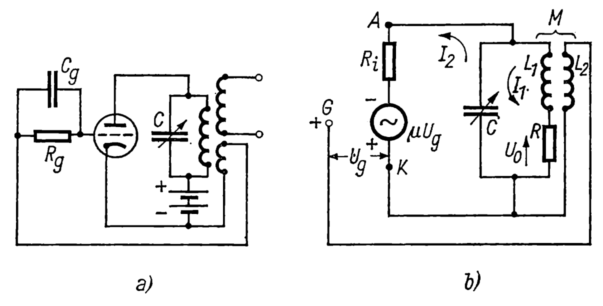


Abb. 5.71 Oszillator mit Anodenschwingkreis (a), Ersatzschaltbild (b)

Die Ausgangsspannung am Anodenschwingkreis berechnet sich zu

$$\boldsymbol{U}_0 = -(R + \mathrm{j}\,\omega L_1)\boldsymbol{I}_1. \tag{5/150}$$

Über die angekoppelte Induktivität L_2 erfolgt die Rückkopplung in den Röhreneingang; mit den Gln. (5/149a) und (5/150) findet man für den Rückkopplungsfaktor β die Beziehung

$$\beta = \frac{\boldsymbol{U}_g}{\boldsymbol{U}_0} = \frac{\mathrm{j}\,\omega M \boldsymbol{I}_1}{-(R + \mathrm{j}\,\omega L_1)\boldsymbol{I}_1} = \frac{-\mathrm{j}\,\omega M}{R + \mathrm{j}\,\omega L_1}. \tag{5/151}$$

Andererseits läßt sich zur Berechnung des Verstärkungsfaktors aus den Gln. (5/149b) und (5/149c) die Ausgangsspannung berechnen:

$$\boldsymbol{U}_0 = \frac{-\mu \boldsymbol{U}_g (R + \mathrm{j}\,\omega L_1)}{R + \mathrm{j}\,\omega L_1 + R_i + \mathrm{j}\,\omega C R_i (R + \mathrm{j}\,\omega L_1)}. \tag{5/152}$$

Damit findet man den Verstärkungsfaktor

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_0/\boldsymbol{U}_g = \frac{-S}{1/R_i + 1/(R + \mathrm{j}\,\omega L_1) + \mathrm{j}\,\omega C}. \tag{5/153}$$

Damit Schwingungen aufrechterhalten werden, muß das Kriterium (5/147) erfüllt sein. Durch Multiplikation der Gln. (5/151) und (5/153) ergibt sich

$$\left(\frac{M}{L_1} - \frac{1}{\mu} - \frac{RC}{SL_1}\right) + \mathrm{j}\left(\frac{R}{\mu\omega L_1} + \frac{1}{\omega L_1 S} - \frac{\omega C}{S}\right) = 0. \qquad (5/154)$$

Durch Nullsetzen des Realteils findet man sofort die Barkhausen-Bedingung (5/148), wenn man für L_1/RC die Resonanzimpedanz R_L des Schwingkreises und für $-M/L_1$ die Größe β setzt. Durch Nullsetzen des Imaginärteils der Gl. (5/154) findet man die bekannte Frequenzbeziehung

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}\left(1 + \frac{R}{R_i}\right)} \qquad (5/155)$$

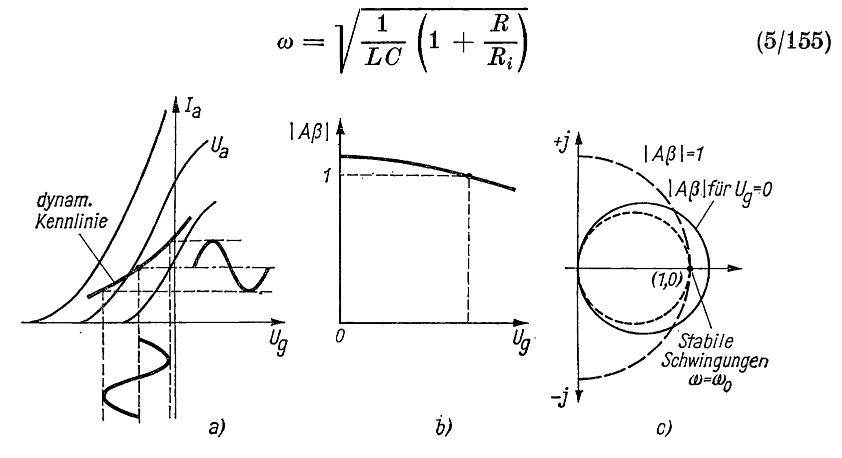


Abb. 5.72 Dynamische Kennlinie einer Triode (a), Rückkopplungsfaktor $A\beta$ (b), Ortskurvendarstellung (c)

als zweite Bedingung für den selbsterregten Oszillator. Da im allgemeinen $R < R_i$ ist, wird die Schwingungsfrequenz fast der Resonanzfrequenz des Schwingkreises entsprechen, wenngleich diese grundsätzlich eine Funktion des Oszillator-Lastwiderstandes ist. Zur Schwingungserzeugung muß $A > 1$ sein und auf Grund von Gl. (5/154) die Steilheit die Bedingung

$$S \geqq \frac{1}{R_L(M/L_1 - 1/\mu)} \qquad (5/156)$$

erfüllen. Für den Einschwingvorgang muß S zunächst größer als der Grenzwert nach Gl. (5/156) sein; im stationären Zustand fließt durch R_g ein Gitterstrom und liefert die für die C-Verstärkung erforderliche Gittervorspannung. Da mit wachsender Schwingungsamplitude Gitterstrom und negative Gittervorspannung zunehmen und damit die Steilheit S verringern, stellt sich sehr bald ein Gleichgewichtszustand ein. Dieses Ergebnis läßt sich aus Abb. 5.72a ablesen, in der die statischen Röhrenkennlinien $I_a = f(U_g)$ für verschiedene Anodenspannung U_a (vgl. Abb. 5.53b) aufgetragen sind. Diese entsprechen einem verschwindenden Anodenlastwiderstand Z_L. Für $Z_L \neq 0$ nimmt die entsprechende Spannung an der Anode mit wachsendem Anodenstrom ab,

wodurch eine schwächer geneigte *dynamische Kennlinie* entsteht. Dies bedeutet geringere Verstärkung und daher schwächere Rückkopplung, was zu einem kleineren Schwingungsstrom führt. In Abb. 5.72b ist der Rückkopplungsfaktor $|A\beta|$ als Funktion des Eingangssignals U_g für den Fall aufgetragen, daß $A\beta$ für $U_g = 0$ größer als Eins ist. Mit wachsendem Eingangssignal nimmt $A\beta$ ab, bis bei $|A\beta| = 1$ schließlich stabile Schwingungsbedingungen erreicht werden. Die entsprechende Ortskurve (vgl. Abb. 5.53b) ist in Abb. 5.72c dargestellt. Die *Stabilität* des Oszillators hängt von der Neigung der $A\beta$-Kurve beim Wert 1 ab; je größer diese ist, um so stabiler wird der Generator arbeiten. Durch nichtlineare Elemente wie Thermistoren oder Glühlämpchen kann die Stabilität vergrößert werden.

5.43 RC-Oszillator [*5.24*]

Die Bedingungen für die Schwingungserzeugung — Rückkopplung von Ausgang in Eingang, Lastwiderstand mit Frequenzselektivität und Nichtlinearität zur Stabilisierung der Oszillatoramplitude — lassen sich auch durch ein *RC*-

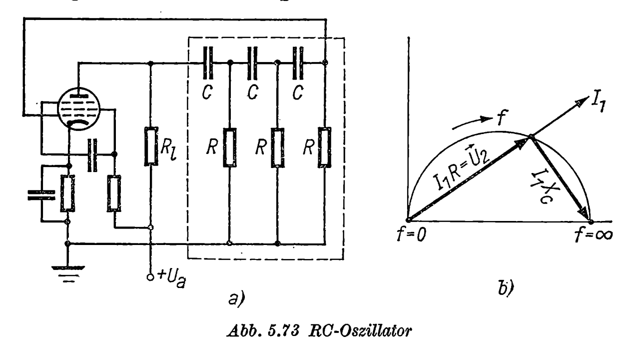


Abb. 5.73 RC-Oszillator

Netzwerk erfüllen. Ein Beispiel eines solchen *Phasenschieberoszillators* ist in Abb. 5.73a dargestellt. Dieser besteht aus einem einstufigen Pentodenverstärker, dessen Rückkopplungskreis von einer *RC*-Kette gebildet wird. Betrachtet man einen Abschnitt (Abb. 5.73b) dieser Kette, durch den der Strom I_1 fließen soll, so liegt die Ausgangsspannung U_2 auf einem Halbkreis durch den Ursprung und besitzt für $f = 0$ den Wert Null bei 90° Phasenverschiebung, während für $f = \infty$ die Phase Null und $U_2 = U_1$ wird. Bei Serienschaltung von drei *RC*-Gliedern beginnt die Ortskurve von $|A\beta|$ bei $f = 0$ mit 90° Phasenverschiebung, nimmt mit wachsender Frequenz zunächst ab, um für $f \to \infty$ etwa 180° zu werden. Bei ausreichendem Verstärkungsfaktor der Röhre lassen sich stabile Schwingungen erzielen. Eine genaue Berechnung des Phasenwinkels ergibt, daß der erforderliche Wert von 180° bei der Frequenz

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{6}\, RC} \tag{5/157}$$

erreicht wird, die Spannungserniedrigung gleichzeitig 1/29 beträgt, d. h., daß die Verstärkung mindestens 29fach sein muß.

5.44 Direkt gekoppelter Oszillator

Das Kennzeichen direkt gekoppelter Oszillatoren ist eine direkte Verbindung zwischen Aus- und Eingang einer Röhre oder eines Transistors. Das bedeutet eine Phasenverschiebung um 180°, die, wie unten gezeigt wird, auch zur Anfachung von Schwingungen geeignet ist. In Abb. 5.74 sind zwei Ausführungsformen solcher Oszillatoren dargestellt, die Colpitts- bzw. Hartley-Oszillator genannt werden. Jeder dieser Oszillatoren besitzt einen dem Gitter und der Anode gemeinsamen, abgestimmten Schwingungskreis.

Der einfachere Colpitts-Oszillator enthält einen aus der Induktivität L und den Serienkapazitäten C_1 und C_2 bestehenden Schwingungskreis, der über die Kondensatoren C_g und C_a mit Gitter und Anode verbunden ist. C_g und C_a verhindern, daß am Schwingungskreis unmittelbar Gleichspannung liegt,

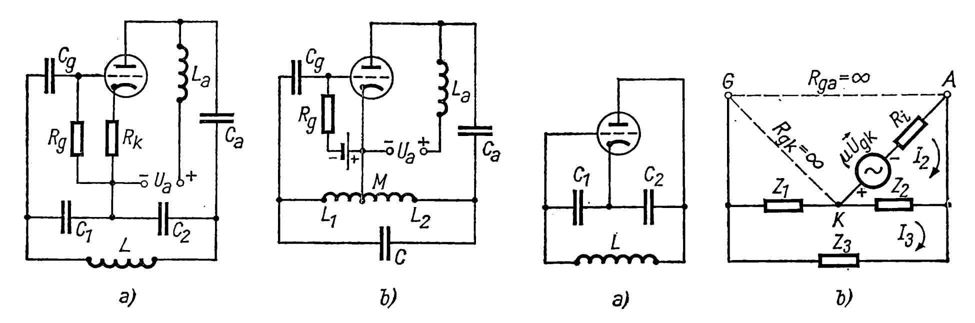


Abb. 5.74 Direkt gekoppelte Oszillatoren: Colpitts-Schaltung (a), Hartley-Schaltung (b)

Abb. 5.75 Colpitts-Oszillator: Schema (a), Ersatzschaltbild (b)

beeinflussen andererseits infolge ihres hohen Blindwiderstandes die Wechselstromimpedanzen nicht merklich. Die Gitterspannung wird über den Gitterwiderstand R_g, die Anodenspannung über die Drosselspule L_a zugeführt. Bei Oszillatoren mit kleinem Ausgangssignal wird die Gittervorspannung durch einen Katodenwiderstand R_k erzeugt. Das ermöglicht einen stabilen Schwingungszustand, da bei großen Eingangssignalen Gitterstrom fließt, der in R_g eine zusätzliche negative Gittervorspannung hervorruft.

Der Hartley-Oszillator (Abb. 5.74b) besitzt eine direkte Verbindung von Anode und Gitter über die Schwingkreiskapazität C. Eine Kopplung zwischen beiden Elektroden wird über die Gegeninduktivität M bewerkstelligt. Im übrigen unterscheidet sich diese Schaltung nicht wesentlich von der des Colpitts-Oszillators; sie hat jedoch den Vorteil, daß die Frequenz durch einen *einzigen* variablen Kondensator eingestellt werden kann.

Zur Analyse der direkt gekoppelten Oszillatoren geht man vom Ersatzschaltbild aus und ermittelt die Beziehungen zwischen den Kreis- und Röhrenparametern. Zur Erzeugung der Schwingungen muß die Determinante der Kreisgleichungen Null werden. Betrachtet man nach diesen Gesichtspunkten die Colpitts-Schaltung in vereinfachter Form (Abb. 5.75a), so läßt sich das Ersatzschaltbild der Abb. 5.75b angeben, wenn die Widerstände R_{kg} und R_{ga}

unendlich groß angenommen werden, d. h., wenn A-Verstärkung (vgl. § 5.21) vorausgesetzt wird. Die Röhrenkapazitäten C_{kg}, C_{ga} und C_{ka} sollen in die äußeren Impedanzen $\boldsymbol{Z}_1$, $\boldsymbol{Z}_3$ und $\boldsymbol{Z}_2$ einbezogen sein. Ist keine äußere Spannung eingeprägt, lauten die Maschengleichungen mit den Strömen $\boldsymbol{I}_2$ und $\boldsymbol{I}_3$

$$0 = \boldsymbol{I}_2(R_i + \boldsymbol{Z}_2) - \boldsymbol{I}_3\boldsymbol{Z}_2 + \mu\boldsymbol{U}_{kg} = \boldsymbol{I}_2(R_i + \boldsymbol{Z}_2) - (\boldsymbol{Z}_2 - \mu\boldsymbol{Z}_1)\boldsymbol{I}_3;$$

$$0 = \boldsymbol{I}_2\boldsymbol{Z}_2 - \boldsymbol{I}_3(\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_3).$$

Setzt man $\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_3 = \boldsymbol{Z}_0$ und die Determinante der Kreisgleichungen gleich Null, so folgt

$$0 = -\boldsymbol{Z}_0(R_i + \boldsymbol{Z}_2) + (\boldsymbol{Z}_2 - \mu\boldsymbol{Z}_1)\boldsymbol{Z}_2. \tag{5/158}$$

Sollen Real- und Imaginärteil von Gl. (5/158) verschwinden, so muß

$$\mathrm{j}X_0R_i = 0 \quad \text{oder} \quad X_0 = 0 \tag{5/159}$$

sein, d. h., der aus C_1, C_2 und L bestehende Serienkreis muß in Resonanz schwingen. Soll auch der Realteil von Gl. (5/158) Null sein, so gilt

$$X_0X_2 - X_2^2 + \mu X_1X_2 = 0$$

und, da $X_0 = 0$ ist,

$$\mu = X_2/X_1 = C_1/C_2. \tag{5/160}$$

Das Verhältnis der Kapazitäten C_1/C_2 muß also dem Verstärkungsfaktor μ entsprechen; bei zu kleinem μ wird der Anodenspannungsquelle Energie entzogen und klingen die Schwingungen ab. Bei einem zu großen Wert von μ treten Schwingungen auf und verändern die Röhrenparameter so lange, bis obige Beziehung erfüllt ist.

Die Oszillatorschaltung nach Abb. 5.75 läßt sich noch dadurch verallgemeinern, daß zwischen G und K ein endlicher Gitterwiderstand R_{gk} ange-

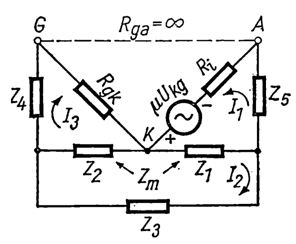


Abb. 5.76 Ersatzschaltbild des verallgemeinerten Röhrenoszillators

nommen und das Gitter G mit einem Gitterableitwiderstand versehen wird [*5.34*]. Dieses Ersatzschaltbild ist in Abb. 5.76 dargestellt und läßt sich analog zur Schaltung in Abb. 5.75b behandeln. Für die drei Maschenströme $\boldsymbol{I}_1$, $\boldsymbol{I}_2$ und $\boldsymbol{I}_3$ ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\boldsymbol{U}_{gk} = \boldsymbol{I}_1(R_i + \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_5) + \boldsymbol{I}_2(\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_m) - \boldsymbol{Z}_m\boldsymbol{I}_3;$$

$$0 = \boldsymbol{I}_1(\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_m) + \boldsymbol{I}_2\boldsymbol{Z}_0 - \boldsymbol{I}_3(\boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_m);$$

$$0 = -\boldsymbol{I}_1\boldsymbol{Z}_m - \boldsymbol{I}_2(\boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_m) + \boldsymbol{I}_3(R_{gk} + \boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_4).$$

Darin bedeuten $U_{gk} = I_3 R_{gk}$; $Z_0 = Z_1 + Z_2 + Z_3 + 2Z_m$ und Z_m die Gegenimpedanz zwischen Z_1 und Z_2. Wie oben wird das Schwingkriterium dadurch gefunden, daß man die Kreisdeterminante Null setzt, was zu zwei Bestimmungsgleichungen für den Real- bzw. Imaginärteil führt. Einer dieser Ausdrücke liefert die Oszillatorfrequenz, der andere eine Beziehung zwischen den Reaktanzen und den Röhrenparametern, welche die Stabilität der Schwingungen garantiert. Dabei ergibt sich, daß für bestimmte Werte von Z_4 und Z_5 die Oszillatorfrequenz gleich der Resonanzfrequenz der isolierten I_2-Schleife und unabhängig von den Röhrenkonstanten gemacht werden kann (*Reaktanz- und Widerstandsstabilisierung* [*5.30, 5.71*]).

In Abb. 5.77 ist ein direkt gekoppelter *Transistoroszillator* in Basisschaltung dargestellt, der die positive Rückkopplung zwischen Kollektor und Emitter enthält. Der Rückkopplungskreis stellt einen Serienresonanzkreis dar, der bei

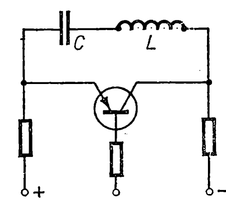


Abb. 5.77 Transistoroszillator in Basisschaltung

der Resonanzfrequenz maximalen Rückkopplungs*strom* liefert. Diese Oszillatoren lassen sich bequem am Emitter oder an der Basis für Impulsbetrieb schalten. Weitere Transistoroszillatoren s. [*5.49, 5.57*].

5.45 Transistoroszillatoren [*5.49*]

Für eine Reihe von Transistoroszillatoren gibt es keine analoge Röhrenschaltung; in diesem Abschnitt sollen Oszillatorkreise, deren Grundform in Abb. 5.78 dargestellt ist, behandelt werden. Analog zum Transistorverstärker

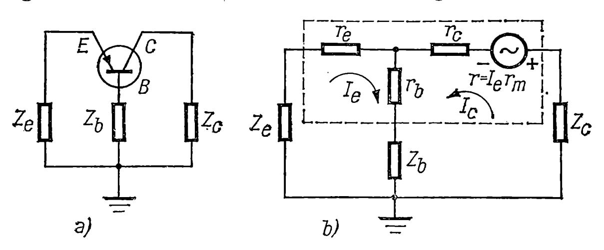


Abb. 5.78 Transistoroszillator in Basisschaltung (a), Ersatzschaltbild (b)

in Basisschaltung (vgl. § 5.222) läßt sich auf Grund der Ersatzschaltung (Abb. 5.78b) die Kreisdeterminante

$$\Delta = [(Z_e + r_e) + (Z_b + r_b)]\,[(Z_b + r_b) + (Z_c + r_c)] \\ -(Z_b + r_b)\,[(r_b + Z_b) + r_m] \qquad (5/161)$$

berechnen. Wie beim direkt gekoppelten Röhrengenerator fordert die Stabilitätsbedingung, daß $\Delta \geqq 0$ ist. Um die Beziehungen zwischen den Kreiselementen für die Schwingungsbedingung deutlich zu machen, formt man Gl. (5/161) um in die Ungleichung

$$\frac{Z_e + r_e}{Z_b + r_b} < \frac{r_m - Z_e - r_e}{Z_c + r_c} - 1. \qquad (5/161\,a)$$

Daraus lassen sich die verschiedenen Möglichkeiten für die Erzeugung stabiler Schwingungen sofort entnehmen; diese sind in Abb. 5.79a···c dargestellt.

Fall *a*): große Impedanz Z_b durch Parallelschwingkreis in der Basisleitung; Fall *b*): kleine Impedanz im Emitterkreis durch einen LC-Serienresonanzkreis; Fall *c*): geringe Impedanz im Kollektorkreis ebenfalls durch parallelgeschalte-

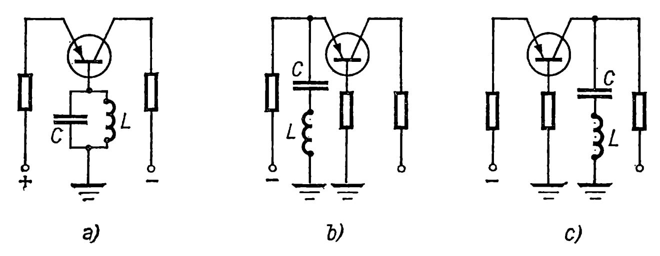


Abb. 5.79 Transistoroszillatoren in Basisschaltung bei verschiedenen Schwingungskriterien

ten LC-Serienresonanzkreis. Als Oszillatorfrequenz stellt sich immer die des entsprechenden Resonanzkreises in den Fällen *a*)···*c*) ein. Auch Kombinationen der drei Schaltungen sind möglich und in Anwendung.

5.46 Quarzgesteuerter Oszillator

Eine außerordentlich hohe Frequenzkonstanz läßt sich erzielen, wenn der Schwingungskreis eines Oszillators durch einen *Schwingquarz* ersetzt wird (vgl. Bd. I, § 3.52). Im einzelnen werden diese Generatoren, die vorzugsweise im HF-Bereich benutzt werden, in § 7.14 behandelt; hier soll nur auf das Grundsätzliche eingegangen werden.

Die Wirkungsweise eines Schwingquarzes beruht auf dem *piezoelektrischen Effekt*, der die Beziehungen zwischen mechanischer Spannung bzw. Elongation eines prismatisch angenommenen Quarzstäbchens und den elektrischen Oberflächenladungen bzw. der elektrischen Feldstärke beschreibt. Dieser Effekt läßt sich zur elektromechanischen Kopplung eines mechanischen Resonators und einer schwingungsfähigen Röhren- oder Transistorschaltung benutzen. Für hohe Frequenzen besitzt ein typischer Kristall 0,1 cm Dicke und 1 cm Durchmesser und wird zwischen die ebenen Platten eines Luftkondensators gebracht; seine Dicken- oder Scherschwingungen müssen sich ungedämpft ausbilden können (Abb. 5.80). Der entsprechende Ersatzkreis in Abb. 5.80b läßt sich durch einen schwach gedämpften Serienresonanzkreis RLC mit parallelgeschalteter Kapazität C_1 darstellen. Der RLC-Kreis läßt sich aus den

Abmessungen und den piezoelektrischen Eigenschaften berechnen. Der *Gütefaktor Q* liegt zwischen 10^4 und $5 \cdot 10^5$.

Geeignete Schaltungen sind in Abb. 5.81 dargestellt. In der ersten (*a*) bildet der Quarzkristall *Q* einen Gitterresonanzkreis, der durch die Gitter-Anoden-Kapazität C_{ga} oder zusätzlich durch eine separate Kapazität C_a rückgekoppelt ist. Wegen der kleinen erforderlichen Eingangsspannungen werden gewöhnlich Pentoden benutzt. Der Anodenresonanzkreis ist nicht exakt, sondern auf der steilen induktiven Seite der Resonanzkurve (s. Abb. 5.35) auf die Eigenschwingung des Quarzes abgestimmt. Das zweite Schaltbild (*b*) zeigt den

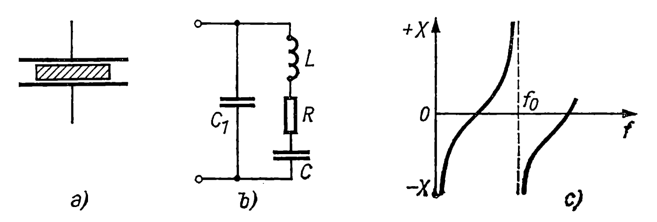


Abb. 5.80 Schwingquarz (a), Ersatzschaltung (b), Impedanz (c)

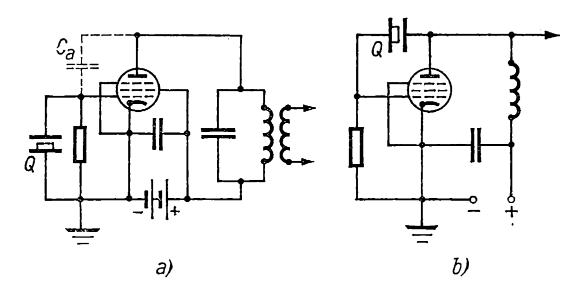


Abb. 5.81 Quarzgesteuerte Oszillatoren

sogenannten Pierce-Oszillator, der im Anodenkreis keinen Schwingungskreis enthält. Man kann ihn als modifizierten Hartley-Oszillator (s. § 5.44) ansehen, dessen Resonanzkreis durch den Quarz dargestellt wird.

Bei Transistoroszillatoren mit Quarzsteuerung besteht eine Schwierigkeit darin, daß der Quarz eine hohe Impedanz besitzt. Man benutzt daher oft einen zweistufigen Oszillator, dessen Eingangsstufe als Impedanzwandler für die folgende Stufe wirkt. In Abb. 5.82 sind zwei *einstufige* Transistoroszillatoren dargestellt; die erste Schaltung (*a*) ist vom Emittertyp und benutzt einen Diffusionstransistor (2N1747), der bei 15 MHz eine Leistung von 20 mW bei 25% Wirkungsgrad abgibt. Bei dem in Abb. 5.82b dargestellten Oszillator ist der Kollektorkreis auf eine Harmonische der Quarzfrequenz abgestimmt. Diese Schaltung eignet sich für einen breiten Frequenzbereich, besitzt aber einen kleinen Wirkungsgrad.

Anstelle von Quarz werden auch Barium–Titan-Keramikschwinger benutzt, die eine wesentlich höhere Impedanz, jedoch geringeren Gütefaktor besitzen.

Quarzoszillatoren können über längere Zeiträume auf etwa 10^{-6} ihrer Resonanzfrequenz stabilisiert werden, wenn der Quarzkristall geeignet geschnitten ist und seine Arbeitstemperatur auf 10^{-2} grd konstant gehalten wird [*5.41*].

5.47 Oszillator mit fallender Kennlinie [*5.29*]

Grundsätzlich stellt der Oszillator mit fallender Kennlinie eine Entladungsform in Röhren und Halbleiterelementen dar, die für Wechselströme in einem angeschlossenen Schwingungskreis einen negativen Widerstand bietet.

Die in § 4.15 besprochene *Tetrode*, eine Vierelektrodenröhre ohne Bremsgitter, zeigt in einem bestimmten Anodenspannungsbereich eine fallende

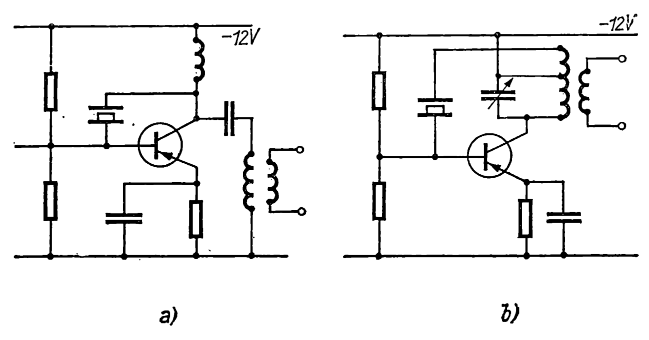


Abb. 5.82 Transistoroszillatoren mit Quarzsteuerung

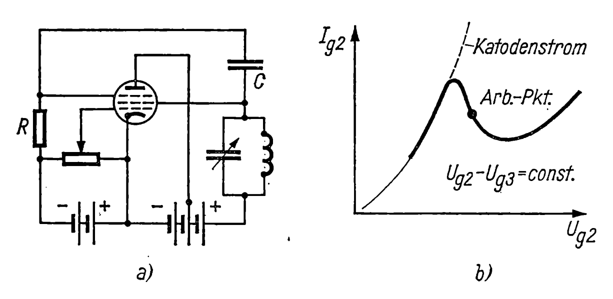


Abb. 5.83 Transistronoszillator

$I_a - U_a$-Kennlinie und eignet sich zur Schwingungserzeugung (*Dynatron*). Als *Transistron* [*5.11*] bezeichnet man eine unkonventionelle Schaltungsvariante einer Pentode, die in Abb. 5.83 dargestellt ist. Hierbei wird eine kleine Anodenspannung angewandt und das schwach negative Bremsgitter über einen großen Kondensator C mit dem Schirmgitter der Röhre verbunden. Da wegen der negativen Vorspannung das Bremsgitter U_{g3} keinen Strom führt und daher bei Wechselströmen dasselbe Potential wie das Schirmgitter besitzt, findet man oberhalb einer bestimmten Schirmgitterspannung U_{g2} einen mit U_{g2} fallenden Schirmgitterstrom $\boldsymbol{I}_{g2}$, dessen Verlauf aus Abb.

5.83b zu ersehen ist. Dieser Kreis eignet sich gut zur Schwingungserzeugung, wenn man den Anodenkreis mit einem Schwingungskreis versieht.

Analog lassen sich auch mit Transistoren Kennlinien mit negativer Strom-Spannungs-Charakteristik abschnittweise herstellen und zur Schwingungserzeugung benutzen. Verbreiteter hierfür ist jedoch die Verwendung von *Tunneldioden* (s. § 4.244), die einen np-Übergang in hoch dotiertem Halbleiter besitzen. Wenngleich ihr Anwendungsbereich als Oszillator bei sehr hohen Frequenzen (bis 100 GHz) liegt und in § 8.3 im einzelnen darauf eingegangen wird, soll hier die Grundlage für die Schwingungserzeugung behandelt werden.

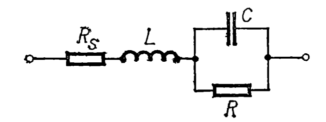


Abb. 5.84 Ersatzschaltbild der Tunneldiode

Der in Abb. 5.84 dargestellte Ersatzkreis besteht aus der Diodenkapazität $C(U)$, dem Diodenwiderstand $R(U)$, dem Serienwiderstand R_s und der Induktivität der Zuführung L. Hieraus berechnet sich die Serienimpedanz dieser Schaltung zu

$$Z_d = R_s + \mathrm{j}\omega L - \frac{R + \mathrm{j}R^2\omega C}{R^2C^2\omega^2 + 1}. \tag{5/162}$$

Man erhält hieraus das Schwingungskriterium, wenn man den Imaginärteil der Gl. (5/162) Null setzt und findet

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{R^2C^2} \quad \text{für } L < R^2C. \tag{5/163}$$

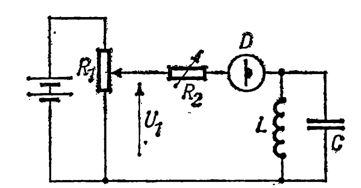


Abb. 5.85 Oszillator mit Tunneldiode

Setzt man Gl. (5/163) in den Realteil von Gl. (5/162) ein, so ersieht man, daß für diese Frequenz die Diode als *negativer Widerstand* mit dem Wert $-L/CR$ fungiert. In Abb. 5.85 ist ein typischer Oszillatorkreis mit einer Tunneldiode D dargestellt, dessen Frequenz durch die Serienimpedanz L_1 und die Diodenparameter gegeben ist. Die Widerstandskette $R_1R_2R_3$ dient zur Herstellung der passenden Vorspannung.

5.5 Nichtlineare Kreise

Jedes Gleichrichter- und Verstärkerelement arbeitet im Grunde auf einer *nichtlinearen* Kennlinie. Der Grad der Nichtlinearität hängt vom Verhältnis Signal zu Aussteuerbereich ab, d. h., bei kleinen Signalen kann man in guter

Näherung meist mit einem linearen Ausgang des Verstärkers, Oszillators oder Gleichrichters rechnen. Typisch nichtlineare Verhältnisse trifft man in der B- und C-Verstärkung (s. § 5.21) und bei Gleichrichtern an. Die mathematische Behandlung des nichtlinearen Verhaltens aktiver Kreise ist oft nicht möglich, da die entsprechenden Differentialgleichungen keine konstanten Koeffizienten besitzen; es werden daher verschiedene Näherungsverfahren angewandt.

5.51 Begrenzer

Begrenzer sind Vorrichtungen, mit denen unstetige Veränderungen an einem Signal in der Art vorgenommen werden, daß ein bestimmter Amplitudenwert nicht überschritten werden soll. Die Wirkungsweise eines Begrenzers für beide

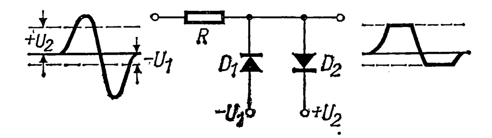


Abb. 5.86 Begrenzer

Polaritäten geht aus Abb. 5.86 hervor. Im einfachsten Fall besteht diese Stufe aus zwei Hochvakuum- oder Halbleiterdioden D_1 und D_2, die auf die gewünschten Abschneidespannungen vorgespannt und parallel zum Spannungspfad angebracht sind. Ein symmetrisches Eingangssignal wird dann oberhalb der Spannung U_1 bzw. unterhalb von U_2 wegen des kleinen Innenwiderstandes der Dioden abgeschnitten, so daß das auf der rechten Seite der Abbildung gezeigte Ausgangssignal entsteht. Der Serienwiderstand R dient zur Begrenzung des maximalen Stromes.

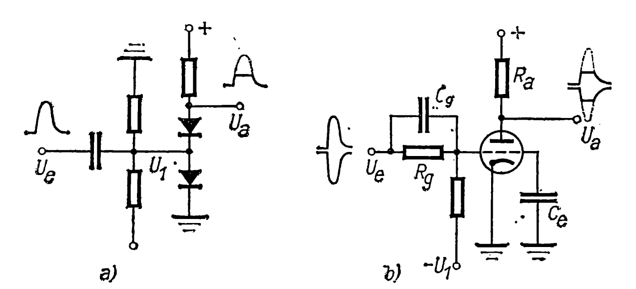


Abb. 5.87 Begrenzerschaltungen

Soll der Begrenzer auf Nullpotential liegen, so kann die Schaltung der Abb. 5.87a angewandt werden, bei der die Vorspannung durch ein Potentiometer geliefert wird. Erreicht das Signal die Amplitude $|U_1|$, hält die Diode D_2 den Ausgang auf Nullpotential. Eine analoge Schaltung arbeitet bei negativen Signalen. Begrenzung durch eine Röhre kann in der Schaltung der Abb. 5.87b bei positiven und negativen Signalen angewandt werden. Bei negativen Signalen sperrt die Röhre entsprechend der Schärfe des unteren

Kennlinienknicks; bei positiven Signalen fließt Gitterstrom, der das Gitter etwa auf Nullpotential hält. Bei kurzdauernden Signalen muß außer dem Gitterkondensator C_g ein zweiter Kondensator C_e vorgesehen werden. Im Gegensatz zu Dioden verstärken Röhrenstufen unterhalb der Grenzschwelle.

Beim *Diskriminator* muß das Signal erst eine Schwelle U_1 überschreiten, ehe es weitergeleitet wird (Näheres siehe § 5.54.)

5.52 *Gleichrichtung* (s. a. § 5.1)

Grundsätzlich versteht man unter Gleichrichtung die Änderung oder Erzeugung einer Gleichspannungskomponenten durch ein nichtlineares Element. Beim konventionellen Gleichrichter (§ 5.1) liegt der Verbraucher mit dem Gleichrichter in Serie am Ausgang einer Wechselspannungsquelle, z. B. dem Ausgang eines Transformators. Entsprechend der Charakteristik des Gleichrichters wird der Strom in der Sperrichtung Null, und es bleiben die halben Sinuswellen oder,

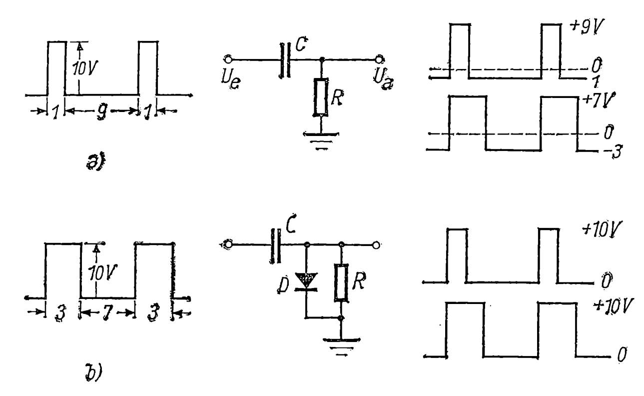


Abb. 5.88 Restorer-Kreis

bei der Vollweggleichrichtung, beide Hälften mit gleicher Polarität übrig. Das Kennzeichnende dabei ist, daß bei abnehmenden Signalen das Erd- bzw. Nullpotential festgehalten wird.

Vielfach ist es erforderlich, daß eine Referenzspannung für weiterzuleitende Signale konstant zu halten ist. Als Beispiel ist in Abb. 5.88a ein RC-Glied wiedergegeben, dessen Eingangssignal eine Folge von Impulsen verschiedener Dauer bei gleicher Folgefrequenz darstellt. Für eine Zeitkonstante RC, die viel größer als die Signaldauer ist, wird die Spannung am Kondensator C etwa konstant bleiben. Während einer Impulsfolge werden diesem Kondensator Ladungen zu- und abgeführt, und das Nullpotential stellt sich so ein, daß das zeitliche Integral über eine Impulsfolge verschwindet. Für das gewählte Beispiel der Abb. 5.88a wird daher die Bezugsspannung des Ausgangsimpulses einmal 1 V, für die längeren Impulse 3 V unterhalb des sich einstellenden Nullpotentials liegen. Wird, wie in Abb. 5.88b gezeigt, eine Diode parallel zu R geschaltet, so bleibt das Nullpotential und damit die Höhe des Ausgangsimpul-

ses über dem Nullpotential unabhängig von der Impulsdauer erhalten. Eine Reihe weiterer Aufgaben bei der Fortleitung, Zählung und Aufzeichnung von Impulsen wird in § 7.43 näher behandelt.

5.53 *Multivibrator* [*5.42, 5.62, 5.65, 5.70*]

Als *Multivibrator* wird eine Schaltung bezeichnet, welche zwei Röhren oder Transistoren enthält, die derart miteinander gekoppelt sind, daß immer nur eines der beiden Elemente stromführend, das andere aber gesperrt ist. Die Umschaltung geschieht zyklisch entweder durch die Zeitkonstante des Kreises selbst oder durch einen Synchronisier- oder Auslöseimpuls.

Grundsätzlich stellt der Multivibrator einen Oszillator ohne eigenen Resonanzkreis dar, dessen Ausgangsstrom und -spannung im Sättigungsbereich liegen. Die in Abb. 5.89 dargestellte Schaltung besteht aus zwei RC-Verstärkern (s. § 5.234), deren Ausgangsspannung zum Teil auf den Eingang der anderen Stufe rückgekoppelt wird. Bei geringer Rückkopplung (Stellung „a" am Potentiometer R_{g1}) entsteht am Ausgang eine Sinusspannung, bei stärkerer Rückkopplung (Stellung „b") eine *Rechteckspannung*. Der Schwingungseinsatz ist nach Gl. (5/147) wieder durch die Beziehung $A\beta = 1$ gegeben, wenn β der Rückkopplungsfaktor ist. Ist $A\beta$ nur wenig größer als Eins, entstehen Sinuswellen, deren Stabilität hinsichtlich Frequenz und Amplitude gering ist, da sich der Verstärkungsfaktor A nur wenig mit der Amplitude ändert. Bei größeren Werten von β muß A abnehmen, wobei bei zunehmender Signalgröße Verzerrungen auftreten.

Gewöhnlich wird beim Multivibrator die volle Ausgangsspannung auf die zweite Stufe rückgekoppelt. Es wird zunächst angenommen, daß beide Röhren T_1 und T_2 Strom führen und die Spannung am Gitter von T_1 zunimmt. Dadurch wächst der Anodenstrom in dieser Röhre, und gleichzeitig werden Gitterspannung und Strom in T_2 erniedrigt, wodurch der Strom in T_1 weiter steigt. Dieser Vorgang geht sehr schnell vonstatten, bis die Gittervorspannung in T_2 so groß ist, daß diese sperrt und der Strom in T_1 seinen Maximalwert erreicht. Nun werden sich die Ladungen in den Kapazitäten C_1 und C_2 über R_{g1} bzw. R_{g2} ausgleichen, bis schließlich T_2 anfängt, stromführend zu werden und sich der Zyklus für die zweite Röhre T_2 wie oben wiederholt.

Da in der stromführenden Röhre Gitterstrom fließt, wird sich die angeschlossene Kopplungskapazität schneller als die der gesperrten Röhre entladen, so daß als Zeitkonstante für die Wiederholung des Zyklus die Größe $C_1 R_{g2}$ oder $C_2 R_{g1}$ maßgebend ist, sofern $R_g \gg R_a$. Im allgemeinen wird die Anstiegszeit der abgegebenen Rechteckspannung durch die gleichen Faktoren bestimmt, die für das Hochfrequenzverhalten des Verstärkerelements maßgebend sind. Bezeichnet man mit U_{aa} die angelegte Anodenspannung und mit U_{g0} die Gittersperrspannung ($I_a = 0$), so errechnet sich für einen symmetrischen Kreis die volle Umschaltperiode zu

$$T = 2t_1 = 2R_g C \ln \frac{U_{aa} - u_a}{U_{g0}}, \qquad (5/164)$$

wenn u_a das Anodenpotential der stromführenden Röhre ist. Zur Verbesserung der Schwingungsform, d. h. zur Vermeidung des Überschwingens und der

abgerundeten Ecken, können die Gitterströme durch hochohmige Widerstände begrenzt werden. Für sehr kurze Impulse kann das Gitter jeder Röhre besser durch eine *Klammerdiode* (s. § 5.52) festgehalten werden, die den Gitterstrom abfängt und die negative Spitze des Anodenstroms glättet.

Zur Erzeugung sehr kurzer Impulse bei relativ langen Perioden werden *asymmetrische Multivibratoren* benutzt, bei denen sich die beiden Zeitkonstanten $R_{g1}C_2$ und $R_{g2}C_1$ stark voneinander unterscheiden. (Näheres s. § 7.15.)

Multivibratoren lassen sich natürlich auch mit *Transistoren* aufbauen; nähere Angaben s. [*5.58*, *5.68*]. Da man mit diesen Verstärkerelementen verschiedene Kombinationen für den Aufbau eines *RC*-Verstärkers (s. § 5.22)

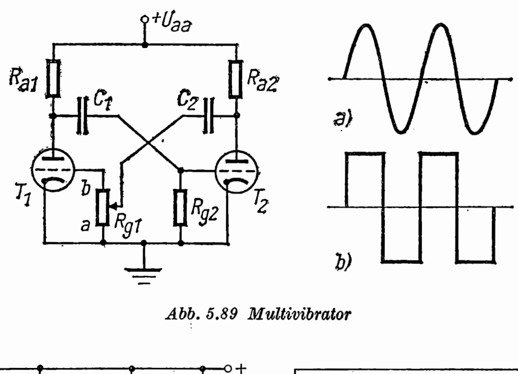


Abb. 5.89 Multivibrator

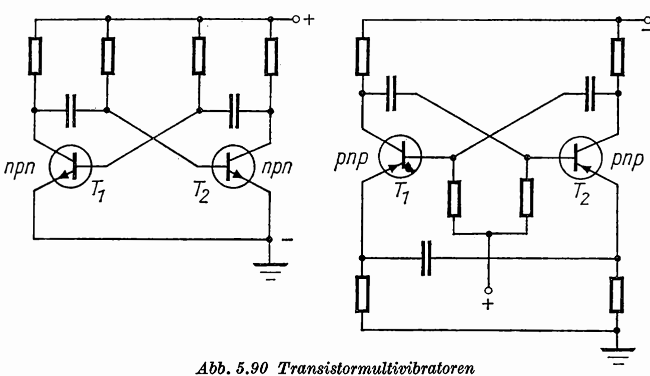


Abb. 5.90 Transistormultivibratoren

anwenden kann, ist die Zahl der möglichen Multivibratorschaltungen sehr groß. Als Beispiel sind in Abb. 5.90 zwei Schaltungen mit npn- bzw. pnp-Transistoren angegeben, die symmetrische Rechteckspannung erzeugen. Die Frequenz hängt von den *RC*-Gliedern, die Steilheit der Flanken vom HF-Verhalten der Transistoren (s. § 4.275) ab. Im Gegensatz zum Röhrenmultivibrator hängt die Umschaltzeit bei hohen Folgefrequenzen von den inneren Eigenschaften ab.

Die Frequenz eines Multivibrators ist nicht sehr konstant. Durch Anlegen eines steilen Synchronisierimpulses an die gemeinsame Zuleitung der Gitter-

widerstände R_g in Abb. 5.89 läßt sich die Frequenzkonstanz wesentlich steigern. Die Auskopplung der vom Multivibrator erzeugten Spannung erfolgt durch Kapazitäten an den beiden Anoden; werden kleine Amplituden benötigt, liefert die Auskopplung an kleinen Katodenwiderständen meist eine bessere Kurvenform.

5.54 Triggerkreis [5.52, 5.62]

Die Auslösung eines Vorganges beim Eintreffen eines Signals, wie es beim Umgang mit nichtperiodischen Signalfolgen erforderlich ist, nennt man *Triggern.* Durch das triggernde Signal wird eine in Ruhe gesperrte Stufe über eine nichtlineare Schwelle aktiviert, um eine einmalige Funktion zu erfüllen. Diese kann die Abgabe eines bestimmten Signals, Öffnen eines Stromtores, Auslösen eines Schaltzyklus u. a. sein.

Der *Trigger,* der zuerst von ECCLES und JORDAN (1919) angegeben wurde, ist eine Weiterentwicklung des Multivibratorkreises; er besitzt zwei stabile Zustände, die durch einen unstabilen Bereich getrennt sind. Ihre Strom-

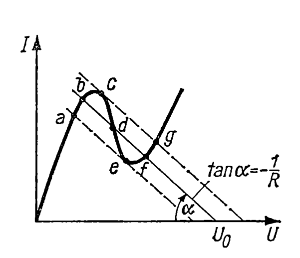
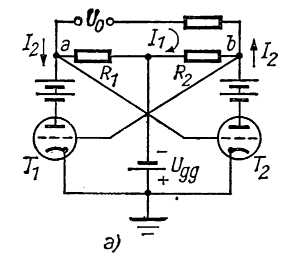


Abb. 5.91 Schema eines Triggerkreises



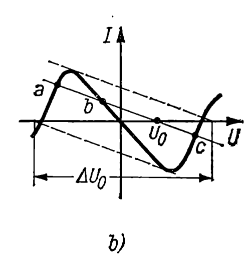


Abb. 5.92 Trigger nach ECCLES-JORDAN *(a), Charakteristik (b)*

Spannungs-Charakteristik ist S- oder N-förmig, wie in Abb. 5.91 schematisch dargestellt ist, und enthält einen Spannungsbereich mit *negativem Widerstand.* Schaltet man einen positiven Widerstand R in Serie mit einer Anordnung, die einen Abschnitt mit negativem Widerstand enthält, und schließt eine Spannung U_0 an, so liegt an diesem die Spannung

$$U = U_0 - IR.$$

Diese Beziehung beschreibt die Lastlinie als Gerade durch U_0 für $I = 0$ mit der Steigung $-1/R$. Mögliche Gleichgewichtsfälle sind durch die Schnittpunkte b, d und f mit der vorgegebenen Charakteristik $I = I(U)$ dargestellt, von denen lediglich die Zustände b und f, die einem positiven Widerstand entsprechen, *stabil* sind. Verändert man die Generatorspannung U_0 zwischen dem unteren und dem oberen (in der Abbildung gestrichelten) Wert, so findet man zwischen den Punkten a und c stabile Betriebszustände. Bei weiterer Steigerung der angelegten Spannung springt der Arbeitspunkt nach g. Analog findet man auch zwischen g und e mit abnehmender Spannung einen stabilen Bereich. Wird die dem Punkt e entsprechende Spannung etwas unterschritten, so springt

der Arbeitspunkt nach *a*. Mit relativ kleinen Spannungsänderungen können demnach beide stabile Bereiche unstetig erreicht werden.

Es gibt eine große Anzahl von Anordnungen mit Röhren oder Transistoren, welche die für eine Triggerung notwendige *I*-*U*-Charakteristik besitzen. In Abb. 5.92 ist die bekannte Eccles-Jordan-Schaltung im Prinzip dargestellt. Sie entspricht einer Multivibratorschaltung nach Abb. 5.89, in der jedoch die kapazitive Kopplung der Röhrengitter durch eine direkte ersetzt ist. Die in Abb. 5.92b gezeigte *I*-*U*-Charakteristik dieser Anordnung besitzt N-Form und rührt von dem durch den Strom I_1 hervorgerufenen Spannungsabfall zwischen den Punkten *a* und *b* her, dem sich der durch I_2 hervorgerufene überlagert. Eine an *b* liegende positive Spannung verursacht in der Röhre T_1 einen starken Anodenstrom, der einem negativen Widerstand entspricht, bis T_1 gesättigt

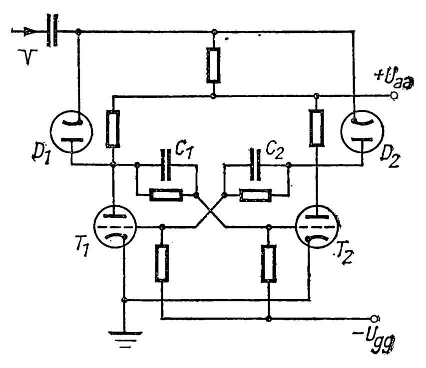


Abb. 5.93 Bistabiler Röhrentriggerkreis

und T_2 abgeschaltet ist. Aus Abb. 5.92b wird ersichtlich, daß für die Spannung U_0 die Punkte *a* und *c* stabil sind, der Punkt *b* instabil ist. Zur Umschaltung von einem positiven zu einem negativen Strom ist eine Spannungsänderung ΔU_0 erforderlich, deren Höhe vom Widerstand *R* abhängig ist.

In modernen Schaltungen (s. Abb. 5.93) werden die Röhren durch negative Impulse abwechselnd in die Flußrichtung getriggert, die über die Dioden D_1 und D_2 zugeführt werden. Diese bezwecken, daß der Kreis auf positive Eingangsimpulse nicht anspricht. Der Ausgang wird an eine der beiden Anoden angeschlossen.

Im Gegensatz zu diesen Röhrenschaltungen lassen sich bereits mit *einem* Transistor Kennlinien mit einem Bereich negativen Widerstandes herstellen [*5.3, 5.35, 5.60, 5.68*]. Auf diesen Umstand ist bereits in § 5.221 bei der Ableitung der Kreisdeterminanten Gl. (5/57) hingewiesen worden. Üblich sind jedoch Triggerschaltungen mit zwei Transistoren; ein Ausführungsbeispiel ist in Abb. 5.94 dargestellt. Die Umschaltung von einer Stromrichtung zur anderen geschieht durch aufeinanderfolgende negative Impulse derselben Polarität. Solche Kreise erfordern eine geringe Eingangsleistung bei nur wenigen Zehntel Volt Spannung. Sie können in sehr kompakter Form gebaut werden. Dieser Umstand ist besonders bei der Anwendung von Triggerkreisen in der digitalen Rechentechnik von großer Bedeutung.

Auch die bereichsweise negative Widerstandscharakteristik von *Tunneldioden,* die bereits in § 5.47 besprochen wurde, ist für den Aufbau eines einfachen Triggerkreises geeignet [*5.76*]. Bei der in Abb. 5.95 gezeigten Schaltung eines solchen Kreises sind die beiden Dioden D_1 und D_2 symmetrisch angeordnet und werden über den Eingangswiderstand R_1 und eine Kapazität C_1 an den Eingang gelegt. Die Induktivität L stellt einen Kompromiß von guter Triggerung und schneller Erholungszeit dar. Mit Widerstandswerten um 50 Ω und $L = 200$ nH lassen sich Schaltfrequenzen von 100 MHz erreichen.

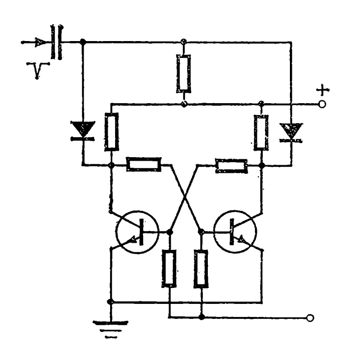


Abb. 5.94 Triggerkreis mit Transistoren

5.55 *Scalerkreise*

Als *Scaler* bezeichnet man Schaltkreise mit zwei oder mehr stabilen Zuständen, die durch Triggerung von einem in die anderen Zustände gebracht werden können. Sie sind für die Untersetzung von Impulsfolgen oder auch hochfrequenten Sinusspannungen geeignet und spielen in der Zähltechnik eine besondere Rolle. (Näheres siehe § 7.43.)

5.6 Ablenkkreise [*5.50*]

Ablenkkreise dienen zur Erzeugung einer Spannung, deren Verlauf stetig und eine eindeutige und reproduzierbare Funktion der Zeit ist. Von besonderer Bedeutung ist die Herstellung einer mit der Zeit linearen Spannung in Form einer *Sägezahnkurve.* Da ihr größter Anwendungsbereich in der Zeitablenkung von Katodenstrahloszillografen liegt, werden diese Schaltungen als Ablenkkreise bezeichnet. Mit ihrer Hilfe kann man Zeitintervalle direkt ablesen oder allgemeiner eine zeitliche Zuordnung verschiedener Vorgänge gewinnen. Sie dienen auch als Normalspannungsverlauf für digitale Spannungsmesser.

5.61 *Glimmröhren*

Der klassische periodische Sägezahngenerator besteht aus einer gasgefüllten Kaltkatodenröhre (s. § 4.37) mit parallelgeschalteter Kapazität C und einem Vorwiderstand R (s. Abb. 5.96), deren Spannung zwischen der *Zündspannung* U_1 und der *Löschspannung* U_2 oszilliert. Unter der Annahme, daß der Konden-

sator zur Zeit $t = 0$ ungeladen war, ergibt sich seine Spannung aus Gl. (3/27) zu

$$U_C(t) = U_0 - (U_0 - U_2)\,e^{-t/RC}, \tag{5/165}$$

wenn U_0 die Spannung der Stromquelle ist. Erreicht U_C die Zündspannung U_1, fließt der Strom mit kleinem Widerstand durch die Röhre, wobei gleichzeitig die Spannung sehr steil bis auf den Wert U_2 der Löschspannung abfällt. Bei dieser Spannung erlischt die Glimmentladung, und der Ladevorgang wiederholt sich. Dieser Zyklus ist periodisch und liefert die in Abb. 5.96b dargestellte

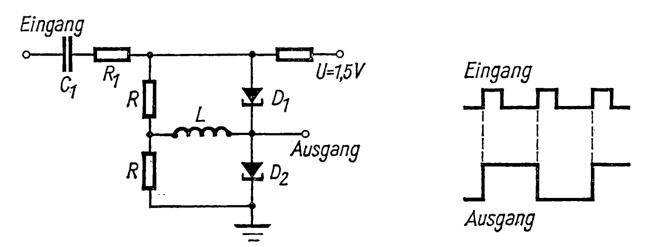


Abb. 5.95 Triggerkreis mit Dioden

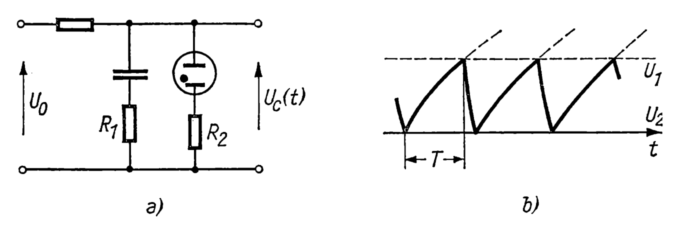


Abb. 5.96 Sägezahngenerator mit Glimmröhre

Sägezahnspannung der Periode T, dem Zeitintervall, das zur Aufladung der Kapazität von U_2 nach U_1 erforderlich ist. Aus Gl. (5/165) ergibt sich mit $U_1 = (U_C)_{t=T}$

$$T = RC \ln \frac{U_0 - U_2}{U_0 - U_1}. \tag{5/166}$$

Während der Entladungsperiode, die sehr viel kleiner als T ist, können an den beiden Serienwiderständen R_1 und R_2 Impulse abgenommen werden, die man zum Synchronisieren benutzen kann. Entwickelt man Gl. (5/165) in eine Reihe

$$U_c(t) = U_2 + (U_0 - U_2)\left(\frac{t}{RC} - \frac{t^2}{2R^2C^2} + \frac{t^3}{6R^3C^3} - \cdots\right),$$

so gilt für kleine Werte von t/RC

$$U_C \approx U_2 + (U_0 - U_2)\,t/RC, \tag{5/167}$$

d. h., die Ausgangsspannung ist in erster Näherung zeitproportional. Bezieht man alle Spannungen auf die Löschspannung U_2, d. h., setzt man $U_0 - U_2 = E_0$,

$U_1 - U_2 = E_1$, so findet man die relative Abweichung ΔU_1 zwischen den Ausdrücken der Gln. (5/165) und (5/167) aus

$$1 - \Delta E_1/E_1 = \frac{E_0}{E_1}(1 - e^{-E_1/E_0}). \tag{5/168}$$

Für kleine Werte von E_1/E_0 nimmt die Abweichung der tatsächlichen Ablenkspannung von der zeitlinearen Spannung nach Gl. (5/167) etwa linear mit E_1/E_0 zu. Sie beträgt bei $E_1/E_0 = 0{,}1$ etwa 5%.

5.62 *Thyratronablenkkreise*

Der in Abb. 5.96 gezeigte Ablenkkreis weist geringe Stabilität hinsichtlich Frequenz und Amplitude infolge der variablen Zündspannung von Glimmröhren auf. Benutzt man statt einer Glimmröhre ein *Thyratron* (s. § 4.35) in

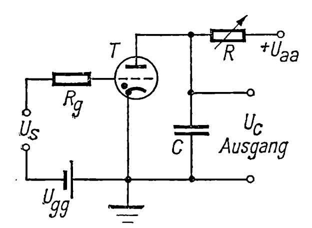


Abb. 5.97 Ablenkkreis mit Thyratron

einer RC-Schaltung, so läßt sich die Zündspannung in weiten Grenzen durch Gittersteuerung von außen verändern. Außerdem ist die Löschspannung U_2 relativ gering (< 10 V) und der Maximalstrom der Röhre im Verhältnis zu dem der Glimmröhre groß ($I_{\max} \approx 1$ A). Ein solcher Ablenkkreis ist in Abb. 5.97 dargestellt. Die Anodenspannung U_{aa} wird über einem variablen Widerstand R an den Kondensator C gelegt, der als Nebenschluß das Thyratron T enthält. Die Röhre, deren Gitter eine negative Vorspannung U_{gg} besitzt, wird durch eine Wechsel- oder Rechteckspannung U_s periodisch gezündet. Die Zeitkonstante RC bestimmt wie oben die Ablenkfrequenz $1/T$. Wegen des Zeitverzugs beim Triggern ($\approx 1\,\mu$s) und der Entionisierungszeit ($\approx 10\,\mu$s) sind Thyratronablenkkreise nur für Ablenkfrequenzen bis zu 30···50 kHz geeignet.

5.63 *Ablenkkreis mit Elektronenröhre*

Höchste Ablenkfrequenzen lassen sich mit Elektronenröhren in einer RC-Schaltung erreichen. Betrachtet man die in Abb. 5.98 gezeigte Schaltung, so wird für $U_s = 0$ die Spannung am Ladekondensator $U_C = U_{aa} - I_a R$. Wird nun an das Gitter der Röhre eine negative Spannung angelegt, welche die Röhre praktisch sperrt, so wird $I_a = 0$, und der Kondensator C wird über den Widerstand R entsprechend Gl. (5/165) aufgeladen, bis die Anodenspannung erreicht ist. Um eine zeitproportionale Ablenkspannung zu erhalten, bringt man nach einer bestimmten Zeit das Gitter wieder auf Katodenpotential,

wodurch sich die Kapazität schnell über die Röhre entladen kann. Ablenkfrequenz und -amplitude werden durch die Rechteckspannung U_s am Gitter bestimmt. Um eine kurze Entladungszeit T_2 zu erzielen, verwendet man bevorzugt Trioden mit kleinem Innenwiderstand.

5.64 Linearisierung der Ablenkspannung [*5.38*]

Bei den bisher besprochenen Anordnungen wird der Ladekondensator an eine Quelle mit konstanter Spannung über eine Schaltröhre gelegt. Um einen zeitlinearen Spannungsverlauf zu erzielen, kann nur der Anfangsbereich des

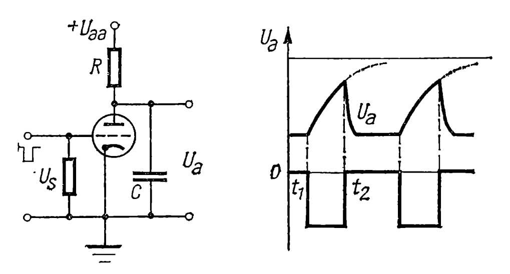


Abb. 5.98 Kippkreis mit Elektronenröhre

Ladevorgangs verwertet werden. Wird durch spezielle Methoden der Lade*strom* konstant gehalten, so wird

$$U_C = \frac{I_0}{C} t + U_0,$$

d. h. exakt proportional zur Zeit.

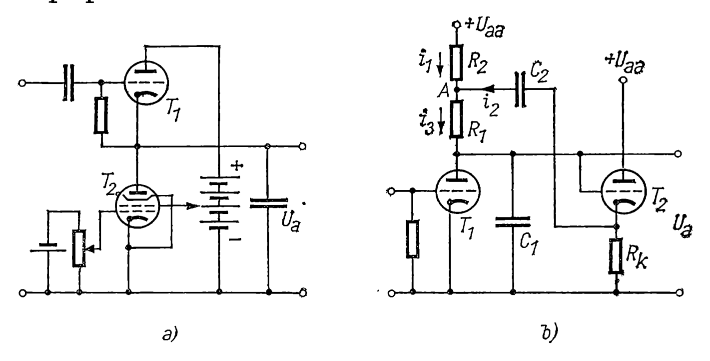


Abb. 5.99 Kippkreise mit linearisierter Ablenkspannung

Da die *Pentode*, wie aus Abb. 4.11 hervorgeht, einen Anodenstrom liefert, der fast unabhängig von der Anodenspannung ist, kann man diese als konstante Stromquelle betrachten und in einem Kippgenerator anwenden. In Abb. 5.99a ist eine solche Schaltung angegeben, bei der die Pentode T_2 kon-

stante Gitter- und Schirmgittervorspannung erhält und bei gesperrter Schaltröhre T_1 den Kondensator C mit konstantem Strom auflädt.

Bei einer zweiten, in Abb. 5.99b wiedergegebenen Schaltung wird durch Rückkopplung konstanter Ladestrom erzeugt. Die Eingangsröhre T_1 wird durch Rechteckimpulse ein- und ausgeschaltet; in ihrem Ausgang liegt der Ladekondensator C_1 sowie das Gitter der zweiten Röhre T_2. Die Kapazität C_1 wird über die Widerstände R_1 und R_2 durch den Anodenstrom i_3 aufgeladen, der sich aus i_1 und i_2 zusammensetzt. Die Stromkomponente $i_2 = C_2\, \mathrm{d}U/\mathrm{d}t$ entsteht durch die zeitliche Änderung der Potentialdifferenz zwischen dem Punkt A der Verzweigung und der Katode der zweiten Röhre T_2. Es läßt sich leicht nachweisen, daß die Bedingung für $i_3 = \text{const}$ erfüllt ist, wenn

$$i_3 = \frac{U_a}{R_1 + R_2} \quad \text{und} \quad i_2 = \frac{U_0}{R_2}. \tag{5/169}$$

Abb. 5.100 Miller-Integrator

Da der Spannungsabfall an R_k des Katodenfolgers (s. § 5.223) während des Ladevorgangs zunimmt, läßt sich die zweite Bedingung in Gl. (5/169) erfüllen, wenn der Verstärkungsfaktor von T_2 den Wert Eins hat. Diese Schaltung bewirkt, daß der Kondensator C_1 nicht auf die Spannung U_{aa}, sondern auf eine ständig zunehmende Spannung $U_{aa} + (1/C) \int i\, \mathrm{d}t$ aufgeladen wird, so daß der Spannungsabfall an R_1 konstant bleibt. Die effektive Linearisierung hängt weitgehend vom Verstärkungsfaktor des Katodenfolgers ab; beträgt dieser 0,95 oder mehr, so verringert sich die in Gl. (5/168) abgeleitete Abweichung von der Geraden um den Faktor 2 bis 3.

Diese Schaltung läßt sich auch mit Transistoren ausführen; bei optimaler Einstellung des Verstärkungsfaktors der Katodenfolgerstufe läßt sich eine bis auf 0,3% genaue Linearität erreichen.

Weit verbreitet sind die sogenannten Miller-Schaltungen, bei denen nicht wie bei der oben beschriebenen Schaltungsgruppe der Widerstand R, sondern die Kapazität C virtuell während des Spannungsanstiegs vergrößert wird. In Abb. 5.100 ist die Grundform des oft als Miller-Integrator bezeichneten Sägezahngenerators dargestellt. Im Ruhezustand ist das Gitter G_3 der Pentode

T durch die Spannung U_{g3} negativ vorgespannt, so daß kein Anodenstrom fließt. Wird ein positiver Eingangsimpuls auf G_3 gegeben, so kann sich der Anodenstrom wegen der kapazitiven Kopplung auf G_1 nur langsam aufbauen. Entsprechend der Zeitkonstanten RC bleibt die Stufe im dynamischen Gleichgewicht mit nahezu linear abfallender Anodenspannung, bis die Ladekapazität C sich auf die Anodenspannung U_{aa} entladen hat. Der Wert von C und damit auch $T = RC$ erscheint um den Faktor $(1 + \mu)$ größer, als es dem numerischen Wert entspricht. Die lineare Änderung der Anodenspannung berechnet sich annähernd zu $\mathrm{d}U_a/\mathrm{d}t \approx U_{aa}/RC$ und ist so lange konstant, bis die Batteriespannung U_{aa} erreicht wird. Sägezahnamplituden von 300 V sind daher leicht zu erreichen. Zur Regelung des Spannungsgradienten werden R oder C geändert; die Amplitude läßt sich bei konstanter Steigung durch eine *Klammerdiode* an der Anode bestimmen oder regeln. Durch eine Diode am Steuergitter kann der Rücklauf beschleunigt werden. An Katode und Schirmgitter können Rechteckimpulse von gleicher Länge wie der lineare Anstieg abgenommen werden. Durch geeignete Wahl der Gittervorspannung an G_3 lassen sich ansteigende oder abfallende Sägezahnspannungen erzeugen. Auch Trioden sind für diese Schaltung geeignet.

Durch Rückkopplung über G_2 und G_3 läßt sich der Kippvorgang periodisch aufrechterhalten (*Phantastron* [*5.16, 5.82*]).

5.65 Spezielle Ablenkkreise

Die gebräuchlichste Zeitablenkung für Katodenstrahloszillografen (s. § 6.73) macht von den Ablenkkreisen der §§ 5.61—4 Gebrauch. Für spezielle Zwecke (vgl. Bd. I, § 3.74), wie z. B. die Messung sehr kleiner Zeitdifferenzen, führt man den Elektronenstrahl auf einem Kreis um den Schirmmittelpunkt, indem man den Ablenkplattenpaaren zwei um 90° phasenverschobene Wechselspannungen zuführt. Für andere Zwecke läßt sich die Zeitachse als Spiralbahn abbilden, die mit einem angestoßenen gedämpften Schwingungskreis erzeugt wird (s. Bd. I, § 21.24).

§ 6 NIEDERFREQUENTER WECHSELSTROM [*6.16, 6.86, 6.111, 6.118, 6.129, 6.135*]

Unter *niederfrequentem Wechselstrom* versteht man den Frequenzbereich bis etwa 1 kHz, wobei die Erzeugung, Fortleitung und Messung des technischen 50-Hz-Wechselstroms im Vordergrund steht. Die meisten in diesem Abschnitt besprochenen Meßverfahren sind jedoch auch im Mittel- oder *Tonfrequenzbereich* bis 20 kHz verwendbar. Es handelt sich dabei um die Strom- und Spannungsmessung mit Anzeigeinstrumenten und Verstärkergeräten, um Methoden zur Messung der Frequenz, der Phase und der Leistung, ferner um die Aufzeichnung der Kurvenform mit Hilfe von Oszillografen oder magnetischen Verfahren. Die Erzeugung von Wechselströmen in diesem Frequenzbereich (§ 6.2) wird an dieser Stelle nur für kleine Leistung behandelt; die mehr technischen Aspekte sind dem § 15 vorbehalten.

6.1 Definition der Wechselstromgrößen

Ein beliebiger einwelliger Wechselstrom von sinusförmigem Verlauf ist durch die Beziehung

$$i = \hat{\imath} \sin (\omega t + \varphi_i) \tag{6/1}$$

gegeben, worin i den Augenblickswert, $\hat{\imath}$ den Scheitelwert oder die Amplitude, $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz und φ_i die relative Phase bedeutet. Für die *Spannung* gilt analog

$$u = \hat{u} \sin (\omega t + \varphi_u), \tag{6/2}$$

wobei der Phasenwinkel φ_u im allgemeinen von φ_i verschieden sein wird.

6.11 Effektiv- und Mittelwerte

Den *Effektivwert* des Stromes findet man als quadratisches Zeitmittel während einer Periode von der Dauer $T = 1/f$ durch die Beziehung

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 \, \mathrm{d}t} \tag{6/3}$$

und analog den der Spannung aus

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 \, \mathrm{d}t}. \tag{6/4}$$

Der Effektivwert entspricht dem Gleichstromwert, der in einem ohmschen Widerstand dieselbe Wärmewirkung hervorruft. Setzt man die Ausdrücke (6/1)

und (6/2) in die entsprechenden Definitionsgleichungen (6/3) und (6/4) ein, so findet man

$$I = \hat{\imath}/\sqrt{2}\,; \qquad U = \hat{u}/\sqrt{2}. \tag{6/5}$$

Wechselstrom- und -spannungsmesser sind in der Regel in Effektivwerten geeicht. Genaue Anzeigen liefern Instrumente mit Thermoumformern, Hitzdrahtinstrumente, dynamometrische und elektrostatische Instrumente. Gleichrichter und Dreheiseninstrumente, z. T. auch Röhrenvoltmeter, zeigen fehlerhaft an, wenn die Kurvenform von der Sinusfunktion abweicht.

Der *zeitlich lineare Mittelwert* (Gleichwert) entsteht durch zeitliche Mittelung über die Periode T:

$$I_0 = \frac{1}{T}\int_0^T i\,\mathrm{d}t; \qquad U_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u\,\mathrm{d}t. \tag{6/6}$$

Dieser Mittelwert ist für die elektrolytischen Wirkungen maßgebend und entspricht dem Gleichstromanteil des betreffenden Wechselstromes.

Schließlich ist noch der zeitlich lineare Mittelwert des Betrages, der *Gleichrichtwert* aufzuführen, der durch

$$I_m = \frac{1}{T}\int_0^T |i|\,\mathrm{d}t; \qquad U_m = \frac{1}{T}\int_0^T |u|\,\mathrm{d}t \tag{6/7}$$

definiert ist. Dieser Wert stellt die Gleichkomponente eines Wechselstromes nach dem Durchgang durch einen Zweiweggleichrichter (s. § 5.13) dar. Für reinen Sinusstrom gilt

$$I_m = 2I\sqrt{2}/\pi; \qquad U_m = 2U\sqrt{2}/\pi.$$

Als *Scheitelfaktor* wird das Verhältnis von Scheitel- zu Effektivwert, d. h. $\hat{u}/U$ bzw. $\hat{\imath}/I$, bezeichnet; er beträgt für reine Sinusform $\sqrt{2}$. *Formfaktor* nennt man das Verhältnis von Effektivwert zu Gleichrichtwert, d. h. U/U_m bzw. I/I_m, das für Sinusform $\pi/2\sqrt{2} = 1{,}1107$ wird.

6.12 *Wechselstromleistung*

Für die *Leistung*, die in einem Lastwiderstand verbraucht wird, gilt während der Periode T die Definitionsgleichung

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,\mathrm{d}t; \tag{6/8}$$

durch Einsetzen der Gln. (6/1) und (6/2) erhält man

$$P = UI\cos\varphi, \qquad \text{wenn } \varphi = \varphi_i - \varphi_u. \tag{6/8a}$$

Die für die Leistung kennzeichnende Größe $\cos\varphi$ wird *Leistungsfaktor* genannt.

Über die Darstellung von Wechselstromgrößen in der komplexen Schreibweise siehe § 3.41.

6.13 Mehrwelliger Strom

In der Praxis weichen die Kurvenformen der Wechselströme meist von der reinen Sinusform ab. Zur analytischen Behandlung solcher nichtsinusförmiger, periodischer Ströme oder Spannungen werden die Wechselstromgrößen entsprechend § 5.235 in Fourier-Reihen zerlegt. Diese lassen sich in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} i = I_0 + i_{a1}\cos\omega t + i_{a2}\cos 2\omega t + i_{a3}\cos 3\omega t + \cdots \\ + i_{b1}\sin\omega t + i_{b2}\sin 2\omega t + i_{b3}\sin 3\omega t + \cdots \end{aligned} \qquad (6/9)$$

Darin bedeuten I_0 das Gleichstromglied, das bei reinem Wechselstrom verschwindet, das Glied mit dem Index 1 die 1. *Harmonische* oder *Grundschwingung* und die höheren Glieder die *höheren Harmonischen* oder *Oberwellen*. Zur

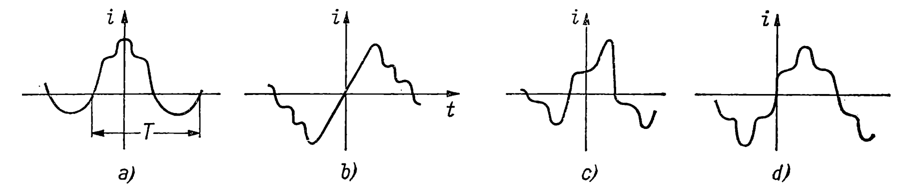


Abb. 6.1 Periodische Ströme

experimentellen Untersuchung mehrwelliger Wechselstromgrößen werden *Oszillografen* (s. § 6.7) oder auch Analysatoren benutzt, wie sie z. B. in Bd. I, § 22.4 für akustische Aufgaben beschrieben werden. Zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten lassen sich die Gln. (5/74) sinngemäß anwenden. Weist der Stromverlauf bestimmte Symmetrieeigenschaften auf, dann fallen in ihrer Darstellung bestimmte Glieder fort. Ist z. B. die Kurve, wie in Abb. 6.1a, symmetrisch zur Ordinatenachse, so fallen die Sinusglieder in Gl. (6/9) fort; ist sie zum Ursprung symmetrisch (Abb. 6.1b), so fallen alle Kosinusglieder und das Gleichstromglied I_0 fort. Sind die Halbwellen spiegelbildlich zur Abszissenachse (Abb. 6.1c), so wird $I_0 = 0$, und es sind nur ungeradzahlige Harmonische vorhanden ($i_{an} = i_{bn} = 0$ für $n = 2, 4, 6, \ldots$). Für Halbwellen spiegelbildlich zur Abszissenachse und symmetrisch zum Ursprung treten nur ungeradzahlige Sinusglieder ($I_0 = 0$, $i_{an} = 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$, $i_{bn} = 0$ für $n = 2, 4, 6, \ldots$) auf.

Die Summe von zwei oder mehreren Teilströmen gleicher Frequenz ergibt wieder einen Strom der gleichen Frequenz, der nur solche Harmonische enthält, die auch in den Teilströmen vorkommen.

Den *Effektivwert* eines beliebigen periodischen Wechselstroms erhält man aus der Beziehung

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^3 + I_3^2 + \cdots}, \tag{6/10}$$

wobei I_0 das Gleichstromglied ist und I_n die Effektivwerte der n-ten Harmonischen sind, für die gilt

$$I_n = \frac{\hat{i}_n}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{i_{an}^2 + i_{bn}^2}. \tag{6/11}$$

Der arithmetische Mittelwert über die ganze Periode entspricht dem Gleichstromglied I_0.

Als *Klirrfaktor* k (vgl. § 5.243) wird das Verhältnis von Effektivwert des Oberwellengemisches zu Effektivwert des Gesamtstroms bezeichnet, d. h.,

$$k = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \cdots}}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \cdots}}. \tag{6/12}$$

In ähnlicher Weise findet man für die *Leistung* den Ausdruck

$$P = U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + U_3 I_3 \cos\varphi_3 + \cdots, \tag{6/13}$$

der die Summe der Einzelleistungen der Harmonischen darstellt, wobei sich die Phasenwinkel φ_i auf U_i bzw. I_i beziehen.

6.14 *Mehrphasenströme*

Als *Mehrphasensystem* bezeichnet man ein Stromsystem, bei dem im Generator mehrere, gegeneinander phasenverschobene Spannungen erzeugt werden; hierbei ist das *Dreiphasensystem* mit drei um je 120° verschobenen Spannungen von besonderer Bedeutung. Dieses auch als *Drehstrom* bezeichnete Stromsystem benötigt zur Fortleitung nur drei Leitungen und ermöglicht die Konstruktion sehr einfacher kollektorloser Motoren (s. § 15.1).

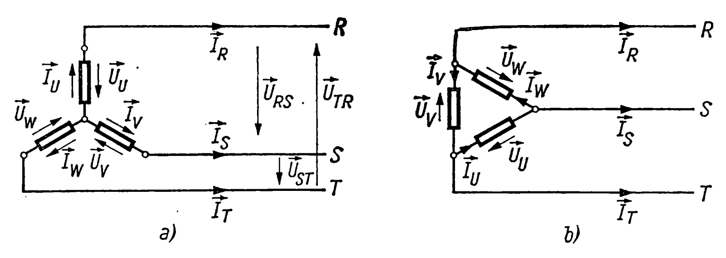


Abb. 6.2 Drehstromsysteme

Bei der *Sternschaltung* (Abb. 6.2a) werden die Leiter mit R, S, T bezeichnet, wohingegen im Verbraucher oder Generator Spannungen und Ströme in den einzelnen, sternförmig zusammengeschlossenen Wicklungen oder auch Widerständen mit den Indizes U, V, W gekennzeichnet sind. Die Größen $\boldsymbol{U}_U$, $\boldsymbol{U}_V$, $\boldsymbol{U}_W$

werden als *Phasenspannungen*, $\boldsymbol{U}_{RS}$, $\boldsymbol{U}_{ST}$, $\boldsymbol{U}_{TR}$ als *Netz-* oder *Dreieckspannungen* und die entsprechenden Ströme $\boldsymbol{I}_U$, $\boldsymbol{I}_V$, $\boldsymbol{I}_W$ bzw. $\boldsymbol{I}_R$, $\boldsymbol{I}_S$, $\boldsymbol{I}_T$ als *Phasenströme* bzw. *Netzströme* bezeichnet.

Bei symmetrischen Sinusspannungen ergibt sich der Zusammenhang zwischen den einzelnen Spannungen aus den Beziehungen

$$\boldsymbol{U}_U = \boldsymbol{U}_V e^{j\frac{2}{3}\pi} = \boldsymbol{U}_W e^{j\frac{4}{3}\pi}; \quad \boldsymbol{U}_U + \boldsymbol{U}_V + \boldsymbol{U}_W = 0; \tag{6/14}$$

$$\boldsymbol{U}_{RS} = \boldsymbol{U}_U - \boldsymbol{U}_V; \quad \boldsymbol{U}_{ST} = \boldsymbol{U}_V - \boldsymbol{U}_W; \quad \boldsymbol{U}_{TR} = \boldsymbol{U}_W - \boldsymbol{U}_U; \tag{6/15}$$

$$\boldsymbol{U}_{RS} + \boldsymbol{U}_{ST} + \boldsymbol{U}_{TR} = 0. \tag{6/16}$$

Für die *Effektivwerte* gilt

$$U_{RS} = U_{ST} = U_{TR} = \sqrt{3}\,U_u = \sqrt{3}\,U_v = \sqrt{3}\,U_w. \tag{6/17}$$

Vernachlässigt man den Strom im Mittelleiter, nimmt also symmetrische Spannungen und Lastwiderstände an, so muß die Summe der Netz- oder auch Phasenströme verschwinden, d. h., es wird dann

$$\boldsymbol{I}_R + \boldsymbol{I}_S + \boldsymbol{I}_T = 0; \quad \boldsymbol{I}_R = \boldsymbol{I}_u; \quad \boldsymbol{I}_S = \boldsymbol{I}_v; \quad \boldsymbol{I}_T = \boldsymbol{I}_w. \tag{6/18}$$

Wegen der Symmetrie der positiven und negativen Halbwelle treten nur ungeradzahlige Harmonische (besonders die 3., 9. und 15.) als Oberwellen auf, die in der Phasenspannung gleiche Amplitude und Phase besitzen.

Bei der in Abb. 6.2b dargestellten *Dreieckschaltung* gelten sinngemäß ähnliche Beziehungen wie bei der Sternschaltung:

$$\boldsymbol{U}_{RS} = \boldsymbol{U}_w; \quad \boldsymbol{U}_{ST} = \boldsymbol{U}_u; \quad \boldsymbol{U}_{TR} = \boldsymbol{U}_v; \tag{6/19}$$

$$\boldsymbol{I}_R = \boldsymbol{I}_w - \boldsymbol{I}_v; \quad \boldsymbol{I}_S = \boldsymbol{I}_u - \boldsymbol{I}_w; \quad \boldsymbol{I}_T = \boldsymbol{I}_v - \boldsymbol{I}_u. \tag{6/20}$$

Bei symmetrischer Last findet man für die Ströme

$$I_R = I_S = I_T = \sqrt{3}\,I_u = \sqrt{3}\,I_v = \sqrt{3}\,I_w. \tag{6/21}$$

Verschiedentlich werden auch Kombinationen von Stern- und Dreieckschaltung bei Transformatoren benutzt.

Bei beiden Schaltungen findet man für Sinusströme und symmetrische Belastung die mittlere *Wirkleistung* zu

$$P = 3\,U_u I_u \cos\varphi = \sqrt{3}\,U_{RS} I_R \cos\varphi; \tag{6/22}$$

es genügt demnach, die Leistung einer Phase zu messen und diese mit dem Faktor 3 zu multiplizieren.

6.2 Wechselstromerzeuger

6.21 Wechselspannungsmaschine

Wechselspannungen und -ströme im technischen Frequenzbereich werden für mittlere und große Leistungen mit Hilfe rotierender Maschinen (Generatoren) bei hohem Wirkungsgrad erzeugt (Einzelheiten s. § 15.1).

6.22 Röhrengenerator

Mit den in § 5.4 aufgeführten Röhren- und Transistoroszillatoren lassen sich Wechselspannungen im Frequenzbereich zwischen 100 Hz und sehr hohen Frequenzen für große Leistungen erzeugen. Am verbreitetsten ist der *LC*-Oszillator, dessen Frequenzstabilität etwa 10^{-4} beträgt. Die zweite Gruppe von Oszillatoren im NF-Bereich benutzt meist im Gitterkreis Quarz- oder Magnetostriktionsschwinger (s. § 5.46), für die untere Frequenzgrenze auch elektromagnetisch angetriebene Stimmgabeln. Solche Generatoren erzeugen nur feste Frequenzen, weisen andererseits aber eine hohe Frequenzkonstanz auf. Die in § 5.43 behandelten *Phasenschieberoszillatoren* sind bis unterhalb von 1 Hz für kleine Leistungen brauchbar. Zu den Röhrengeneratoren gehören auch die gesondert in § 6.23 behandelten *Schwebungssender*, die als Tonfrequenzgeneratoren weit verbreitet sind.

6.221 *LC*-Oszillator

Häufig wird der in Abb. 5.71 dargestellte *LC*-Oszillator für die Erzeugung niederfrequenten Wechselstroms benutzt; Abb. 6.3 zeigt die Schaltung eines Hartley-Oszillators. Der die Frequenz bestimmende Schwingungskreis ist $L_1 C_3$;

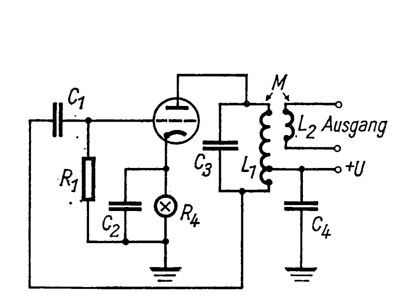


Abb. 6.3 Hartley-Oszillator

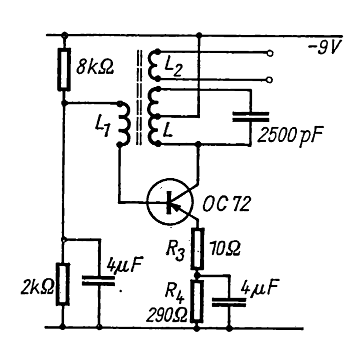


Abb. 6.4 Transistor-Oszillator

der Ausgang wird induktiv durch die Kopplungsspule L_2 ausgekoppelt. Als Katodenwiderstand R_4 dient aus Stabilitätsgründen ein Glühlämpchen mit nichtlinearer Widerstandskennlinie. Je nach Lage des Abgriffs an der Induktivität L_1 verschiebt sich der Arbeitspunkt der Röhre vom A_1- zum B- oder C-Betrieb. Die beiden Kapazitäten C_2 und C_4 werden relativ groß gewählt. Die erzielbare Frequenzstabilität hängt von der genauen Einstellung des Abstimmkreises, der Rückkopplung, der Gittervorspannung, der Anodenspannung und der Kopplungskonstanten für den Ausgang ab. Bei Generatoren für größere Leistung koppelt man meist die Last über einen geeigneten Verstärker an, der als Impedanzwandler fungiert.

Eine äquivalente Schaltung eines *LC*-Generators mit Transistoren ist in Abb. 6.4 dargestellt (vgl. § 5.45). Aus Gl. (5/155) ist zu ersehen, daß die Oszillatorfrequenz ω außer von L und C auch durch das Verhältnis R/R_i, im

Falle des Transistors durch den Wirkwiderstand des Schwingungskreises verglichen mit dem Verstärkungsfaktor α_{ce} bestimmt ist. Da α_{ce} von der Temperatur abhängt, muß diese bei hohen Stabilitätsforderungen konstant gehalten werden. Desgleichen soll die Kreisgüte Q des Schwingungskreises hoch sein. Beim Oszillator nach Abb. 6.4, der bei 10 kHz für eine Ausgangsleistung von 50 mW bei 100 Ω Lastwiderstand ausgelegt ist, wird der Transistor OC 72 bei einem mittleren Strom von 10 mA benutzt. Die Widerstände R_3 und R_4 sind so bemessen, daß an ihnen ein Spannungsabfall von 3 V auftritt. Der Übertrager $\ddot{U}$ mit HF-Kern (s. § 12.8) besitzt 3 Wicklungen als Schwingkreisinduktivität L, zur Rückkopplung L_1 und zur Auskopplung L_2.

Nach Edwards [*6.37*] betragen die Frequenzänderungen bei einer Nennfrequenz von etwa 1 kHz zwischen −60 und +45°C etwa 1%; bei konstant gehaltener Temperatur läßt sich die Frequenz über mehrere Tage unter 10^{-4} konstant halten.

6.222 Quarzgesteuerter Oszillator [*6.122*]

Die in § 5.46 besprochene Anordnung zeichnet sich durch hohe Frequenzkonstanz aus, die 10^{-8}/d betragen kann. Die entsprechenden Grundschaltungen hierfür sind in den Abbn. 5.81 und 5.82 wiedergegeben. Die im Niederfrequenzbereich erforderlichen kleinen Eigenfrequenzen lassen sich nicht mehr mit Dickenschwingern erzeugen. Statt dessen werden *Längsbiegeschwinger* [*6.98*] von quadratischem Querschnitt aus Quarz benutzt, die bei geeignetem Schnitt zwischen 4 seitlichen Elektroden in Biegeschwingungen versetzt werden. Hiermit lassen sich Frequenzen zwischen 1 und 50 kHz erzeugen; eine Anregung in Oberschwingungen ist möglich.

Anstelle des piezoelektrischen Resonators lassen sich auch *magnetostriktive Schwinger* (vgl. Bd. I, § 18.6) in einer Rückkopplungsschaltung verwenden, die schematisch in Abb. 6.5 wiedergegeben ist. Hierbei wird als Resonator S ein zylindrischer Stab aus *Nickel, Permalloy* (50 Fe, 50 Ni) oder aus anderen Eisenlegierungen verwendet. Er wird in der Spule L des Schwingungskreises LC periodisch magnetisiert und infolge des magnetostriktiven Effektes in Längsschwingungen erregt. Am anderen Stabende werden durch den inversen Effekt phasenrichtig Eingangssignale für das Gitter der Oszillatorröhre erzeugt und damit stationäre Schwingungen aufrechterhalten. Die Eigenfrequenz des Generators errechnet sich aus der Resonatorlänge und dem Elastizitätsmodul, der bei den üblichen Werkstoffen zwischen 1,3 und $2{,}5 \cdot 10^6$ kp/cm² liegt. Die Resonanzschärfe dieser Schwinger ist infolge der inneren Dämpfung des Materials geringer als die von Quarzresonatoren. Der Anwendungsbereich liegt bei Frequenzen oberhalb von 1 kHz, die Frequenzstabilität bei 10^{-4}.

Noch kleinere Frequenzen lassen sich mit *Stimmgabeln* (vgl. Bd. I, § 3.41) erzeugen, die elektromagnetisch oder kapazitiv in einem rückgekoppelten Generator zu stationären Schwingungen erregt werden. Das Prinzipschaltbild eines solchen Generators ist in Abb. 6.6 wiedergegeben; es enthält im Anoden- und im Gitterkreis der Röhre je eine Spule L_1 bzw. L_2; durch L_1 wird die Stimmgabel G in Schwingungen versetzt, während in L_2, wie in Abb. 6.5, das Eingangssignal für die Oszillatorröhre erzeugt wird. Die schwache Kopplung

zwischen L_1 bzw. L_2 und G ist nur bei Resonanz für die Eigenerregung ausreichend.

Der Anwendungsbereich dieser Generatoren liegt zwischen 20 und 10000 Hz; durch sorgfältiges Altern der aus gehärtetem Stahl bestehenden Stimmgabel läßt sich eine Frequenzstabilität von 10^{-5}/a erreichen. Diese kann durch Einbringen der Stimmgabel in einen Thermostaten, der mit Wasserstoff oder Helium unter vermindertem Druck gefüllt ist, noch verbessert werden. Da die

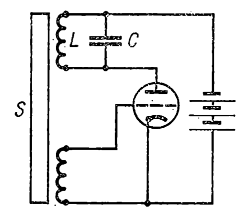


Abb. 6.5 Magnetostriktionssender

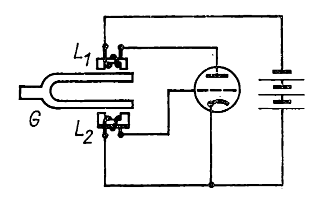


Abb. 6.6 Stimmgabel-Oszillator

Resonanzfrequenz der Stimmgabel auch von der Amplitude abhängt, muß diese konstant gehalten werden. Nach MERCADIER berechnet sich die Stimmgabelfrequenz f_0 aus der Beziehung

$$f_0 = k \frac{a}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\varrho}},$$

worin a die Zinkenstärke, l deren Länge, E der Elastizitätsmodul und ϱ die Dichte bedeuten; k ist eine von der Formgebung abhängige Konstante. Der Temperatureinfluß auf die Frequenz f_0 verschwindet annähernd, wenn der *thermoelastische Koeffizient* ε dem linearen thermischen Ausdehnungskoeffizienten $-\alpha$ des Materials gleich ist. Das ist etwa bei *Elinvar* (Eisen-Nickel-Chrom-Legierung) in einem begrenzten Temperaturbereich der Fall.

Nach KAROLUS [*6.63*] lassen sich für hohe Frequenzkonstanz Quarzbiegeschwinger in Stimmgabelform verwenden, wobei Längsachse und Y-Richtung zusammenfallen. Bei Längen von 90···35 mm liegen die Frequenzen bei 1···10 kHz; der Temperaturkoeffizient ist bei 30 °C gleich Null. Die Anregung erfolgt wie bei gewöhnlichen Biegeschwingern durch elektrische Ankopplung, wozu Pentoden benutzt werden. Sind die Betriebsspannungen auf 1%, die Temperatur auf 0,01 grd konstant, so beträgt die Frequenzkonstanz nach längerer Einlaufzeit 10^{-9}.

6.223 *RC*-Oszillator

Die in § 5.43 grundsätzlich besprochenen Generatoren unterscheiden sich von den *LC*-Oszillatoren dadurch, daß der abgestimmte *LC*-Schwingungskreis durch ein *RC*-Netzwerk als Rückkopplungsglied zwischen Ausgang und Eingang verwendet wird.

Für niedrige Frequenzen wird als Phasenschieber die Wien-Brücke [*6.85*] benutzt (s. § 10.526), deren Gleichgewichtseinstellung nur bei einer bestimmten

Frequenz möglich ist und die erforderliche Phasendrehung von 180° liefert. Sie besteht, wie in Abb. 6.7a gezeigt ist, aus den ohmschen Zweigen R_0 bzw. kR_0 und zwei kapazitiven Zweigen C bzw. C_1, welche die Widerstände R und R_1 in Serie bzw. parallel enthalten. Aus der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung

$$\mathbf{Z}_1/\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3/\mathbf{Z}_4$$

mit $\mathbf{Z}_1 = (1/R_1 + j\omega C_1)^{-1}$, $\mathbf{Z}_2 = kR_0$, $\mathbf{Z}_3 = R_0$ und $\mathbf{Z}_4 = R + 1/j\omega C$ ergeben sich nach Trennung von Real- und Imaginärteil die Beziehungen

$$R_1(1 - kC_1/C) = kR;$$

$$\omega RR_1C_1 - 1/\omega C = 0.$$

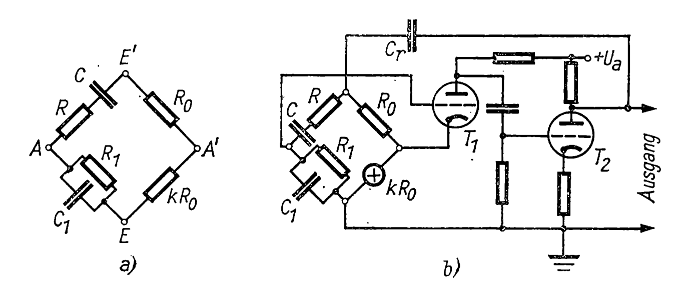


Abb. 6.7 Wien-Brücken-Oszillator: Wien-Brücke (a), Schaltung (b)

Aus der letzten Gleichung findet man die *Resonanzfrequenz* zu

$$\omega^2 = 1/RR_1CC_1, \tag{6/23}$$

wobei zwischen den Klemmenpaaren AA' und EE' keine Phasendifferenz besteht. Zur Aufrechterhaltung von Schwingungen muß der Verstärkungsfaktor der Oszillatorröhre

$$A \geqq \frac{C_1}{C} + \frac{1}{k} + 1 \tag{6/24}$$

sein. In einer unvollkommenen abgeglichenen Brücke tritt beim Überstreichen der Resonanzfrequenz f_0 eine Phasenänderung von -90 auf $+90°$ innerhalb eines kleinen Frequenzbereichs auf, wobei die Signalspannung durch ein Minimum geht. Eine Ausführungsform eines solchen Oszillators ist in Abb. 6.7b dargestellt. Die Rückkopplung erfolgt über die Kapazität C_r vom Ausgang her, während die Brückenspannung zwischen Katode und Gitter der Röhre T_1 angelegt wird. Der Widerstand kR_0 ist durch ein Glühlämpchen ersetzt, das für die Amplitudenkonstanz sorgt. Obwohl die Wien-Brücke im Vergleich zu LC-Kreisen eine geringere Selektivität aufweist, werden Schaltungen dieser Art häufig im Tonfrequenzbereich benutzt und erreichen etwa die gleiche Frequenzstabilität. Die Frequenz ist proportional zu $1/C$ und wird durch die veränderlichen Kapazitäten C bzw. C_1 eingestellt; der Abstimmbereich beträgt etwa 1:10. Durch spezielle Schaltungen läßt sich letzterer auf 1:1000 erweitern [*6.70*].

Soll der Oszillatorausgang oberwellenarm sein, so muß die Oszillatorröhre in A-Schaltung arbeiten; die Amplitude wird durch ein nichtlineares Glied, wie im Fall der Abb. 6.7b durch das Lämpchen kR_0, stabilisiert.

Weitere RC-Brücken-Oszillatoren siehe [*6.29*].

Ein Ausführungsbeispiel für einen RC-Generator mit Transistoren für sehr kleine Frequenzen ist in Abb. 6.8 wiedergegeben. Als Rückkopplungsnetzwerk ist eine RC-Kette vorhanden, die über einen variablen 10kΩ-Widerstand vom Ausgang der zweiten Stufe gespeist wird. Bei sehr niedrigen Frequenzen müssen verlustarme Kapazitäten benutzt werden. Für $C = 80\,\mu\text{F}$ wird $f_0 \approx 10^{-2}$ Hz; für $C = 0{,}1\,\mu\text{F}$ ergibt sich $f_0 = 11$ Hz.

6.224 Mehrphasen-RC-Oszillator

Mit LC- und RC-Oszillatoren größerer Leistung lassen sich zwei um 90° phasenverschobene Spannungen durch geeignete Spannungsteiler herstellen. Von besonderem Interesse ist der von Smiley [*6.114*] angegebene Dreiphasen-

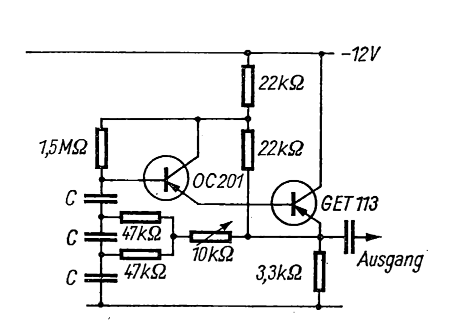



Abb. 6.8 RC-Oszillator für sehr kleine Frequenzen

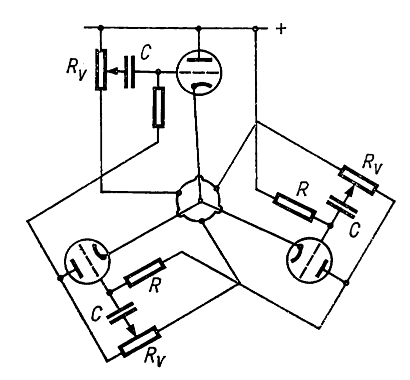


Abb. 6.9 Dreiphasen-Oszillator

LC-Oszillator, der sich für die Erzeugung sehr kleiner Frequenzen eignet. Um die hierfür erforderlichen sehr großen Kapazitäten zu vermeiden, wird der sogenannte Miller-Effekt (s. § 5.64) angewandt, mit dem durch kleine Kapazitäten virtuelle große Kapazitäten simuliert werden können.

Der in Abb. 6.9 vereinfacht dargestellte Dreiphasenoszillator besteht aus drei RC-Kreisen in Sternschaltung (vgl. § 6.14) mit gemeinsamer Spannungsquelle. Da die Summe der Phasenströme im Sternpunkt verschwindet, tritt an der Spannungsquelle keine Wechselspannung auf. Der Oszillator stellt einen in sich geschlossenen dreistufigen Verstärker dar, der bei ausreichender Rückkopplung schwingt, wenn in jedem der drei identischen RC-Kreise eine gegenseitige Phasenverschiebung von 60° vorhanden ist. Bei der Resonanzfrequenz tritt in jedem RC-Kreis eine Schwächung des Signals um den Faktor 2 auf, weshalb die Gesamtverstärkung mindestens $2^3 = 8$ betragen muß. Dieser Oszillator ist äußerst stabil gegen Änderungen der Versorgungsspannungen und kann in einem Frequenzbereich von 1:3 abgestimmt werden.

6.225 Oszillator mit Rechenverstärkern

Von HOWE und LEITE [*6.55*] wird ein elektronischer Analogierechner zur Erzeugung niederfrequenter Sinusspannungen angegeben, der die Differentialgleichung der harmonischen Bewegung löst. Er besteht aus einem Rechenverstärker (s. § 5.33) hoher Verstärkung, dessen Rückkopplungsimpedanzen eine Vorzeichenumkehr und zwei Integrationen bewirken. In Abb. 6.10 ist schematisch dieser Analogierechner dargestellt. Im Verstärker A_1, dessen Eingangs- und Rückkopplungswiderstände R_1 gleich sind, wird das Eingangssignal konvertiert. Die Verstärker A_2 und A_3 mit den Eingangswiderständen R und den Rückkopplungskapazitäten C integrieren das Eingangssignal über die Zeit und multiplizieren dieses jedes Mal mit dem Faktor $-1/RC$. Der Kreis gehorcht damit der Differentialgleichung

$$(RC)^2 \frac{d^2 u_0}{dt^2} + u_0 = 0,$$

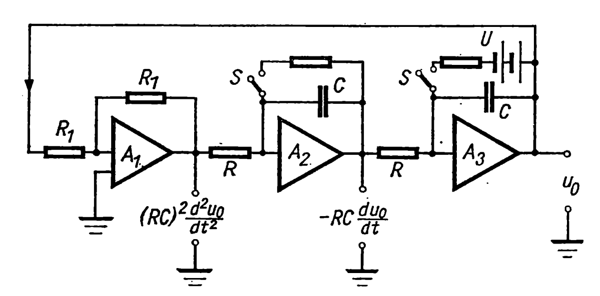


Abb. 6.10 Oszillator für sehr niedrige Frequenzen

deren Lösung Sinusschwingungen mit der Kreisfrequenz $\omega = 1/RC$ darstellen. Mit Hilfe der Schalter S werden zur Zeit $t = 0$ die Anfangsbedingungen $du_0/dt = 0$, $u_0 = U$ eingestellt. Beim Öffnen von S erzeugt der Rechenkreis die Ausgangsspannung $u_0 = U \cos (t/RC)$. Die Genauigkeit der Sinusform hängt vor allem von den Verlustwiderständen der Kapazitäten C, ferner von Verstärkungsfaktor, Bandbreite und Nullpunktskonstanz des Verstärkers ab. Die Amplitudenabnahme der Schwingung erfolgt mit einer Zeitkonstante $\tau = RCA$ (A Verstärkungsfaktor) und beträgt einige 10^{-4} über mehrere Stunden. Bei $A = 8000$, spannungsstabilisierter Stromversorgung und einer Ausgangslast von $10^5\ \Omega$ erreicht dieser Oszillator in einem Frequenzbereich von 0,0016 bis 16 Hz eine Scheitelspannung von 90 V.

6.23 Schwebungsgenerator [*6.94*]

Schwebungsfrequenzgeneratoren sind Oszillatoren, bei denen das Ausgangssignal durch Überlagern von zwei Sinusspannungen verschiedener Frequenz entsteht. Die zu überlagernden Spannungen der Frequenz f_1 und f_2 werden von zwei, meist gleichartigen Oszillatoren erzeugt, wobei *eine* Frequenz (f_2)

konstant gehalten wird, während die andere Eigenfrequenz f_1 variabel ist. Für die Erzeugung der konstanten Frequenz f_2 werden meist quarzgesteuerte Oszillatoren (s. § 5.46) benutzt. In Abb. 6.11 ist das Blockschaltbild eines Schwebungsgenerators dargestellt. Dieser besteht aus den Oszillatoren O_1 und O_2, einem Mischkreis M, in dem die beiden Frequenzen f_1 und f_2 überlagert werden, und einem Filter F zur Aussiebung der hohen Frequenzen. Am Ausgang der Mischstufe treten als Folge der nichtlinearen Überlagerung der beiden Eingangssignale (s. § 7.6) neben den Ursprungsfrequenzen die Summe $f_1 + f_2$,

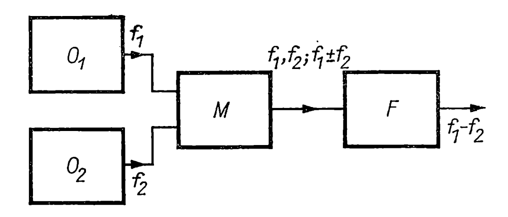


Abb. 6.11 Blockschaltbild eines Schwebungsgenerators

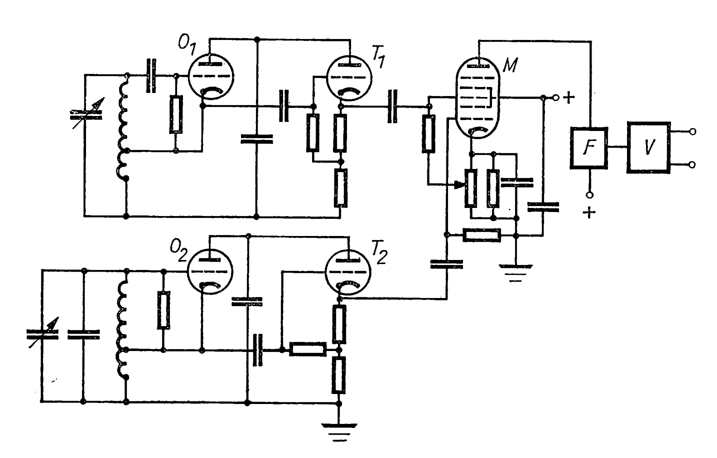


Abb. 6.12 Schwebungsgenerator

die Differenz $f_1 - f_2$ und Glieder höherer Frequenz auf. Im Filter F wird der gewünschte Frequenzbereich $f_1 - f_2$ herausgesiebt, während alle höheren Frequenzen unterdrückt werden.

Zur Erzeugung von Wechselspannungen im Tonfrequenzbereich wird die Differenz $f_1 - f_2$, die klein gegen die Frequenzen f_1 und f_2 ist, ausgefiltert. Durch Verändern der Frequenz f_1 über einen relativ kleinen Frequenzbereich lassen sich Frequenzen zwischen 20 und 20000 Hz herstellen; die entsprechende Variation von f_1 liegt z. B. zwischen 190000 und 210000 Hz. Das maximale Verhältnis von $(f_1 - f_2)/f_1$ hängt von der Durchlaßbreite des Filters ab. Der kleinste Wert dieses Verhältnisses wird durch das „Ziehen" der beiden Oszillatoren auf Grund der Kopplung im Mischkreis oder durch die gemeinsame Span-

nungsversorgung bestimmt. Meist ist die Wahl der Oszillatorfrequenzen durch die geforderte Frequenzkonstanz für das Ausgangssignal bestimmt: Bei einer Änderung der Frequenz f_1 um 10^{-5} im obigen Beispiel würde sich die Differenzfrequenz $f_1 - f_2$ bereits um 2 Hz ändern!

In Abb. 6.12 ist ein Ausführungsbeispiel für einen Tonfrequenzgenerator nach diesem Prinzip vereinfacht dargestellt. Die beiden Oszillatoren O_1 und O_2 in Hartley-Schaltung (s. § 5.44) sind mit je einer Treiberstufe (T_1, T_2) ausgestattet und erzeugen an den beiden Steuergittern der Mischröhre M HF-Spannungen der Frequenz f_1 bzw. f_2. Durch richtige Arbeitspunkteinstellung dieser Röhre lassen sich Verzerrungen der Differenzfrequenz weitgehend vermeiden, sofern die Amplitude der beiden HF-Spannungen konstant gehalten wird. Der Ausgang der Mischröhre M wird in das Tiefpaßfilter F geführt, und schließlich in einem Gegentaktendverstärker V (s. § 5.246) auf die Endleistung verstärkt.

Um die resultierende Frequenz- und Amplitudendrift zu verringern, werden für O_1 und O_2 identische Schaltungen benutzt. Durch geringe Klirrfaktoren in den Ausgangsfrequenzen f_1 und f_2 läßt sich eine weitgehend oberwellenarme Ausgangsspannung erreichen, sofern die Mischröhre eine echte Produktbildung ausführt oder durch eine andere Mischeinrichtung eine quadratische Kennlinie erzielt wird.

Über Mischröhren siehe § 4.16; Multiplikation zweier Spannungen mit Hilfe einer quadratischen Strom-Spannungs-Kennlinie siehe § 5.34.

Da beide Oszillatoren gleichartig aufgebaut sind, läßt sich die durch Temperaturänderungen verursachte Drift minimal halten. Bei sorgfältig konstruierten Schwebungsoszillatoren ist die Ausgangsfrequenz auf $\pm 0{,}5$ Hz konstant. Von FLEMING et al. [*6.44*] wird ein Schwebungsgenerator für den Frequenzbereich von 0···50 Hz angegeben, dessen Oszillatoren bei 5 kHz arbeiten.

Will man die Frequenzkonstanz eines quarzgesteuerten Oszillators ausnutzen und gleichzeitig in einem kleinen Bereich die Frequenz verändern können, so überlagert man additiv die Frequenz eines Quarzoszillators mit der niedrigeren eines gewöhnlichen RC-Oszillators.

6.24 Spezielle Niederfrequenzgeneratoren

Wechselspannungen sehr kleiner Frequenzen und guter Sinusform können mit Hilfe eines Potentiometers erzeugt werden, das von konstantem Gleichstrom durchflossen wird und dessen Abgriff durch einen motorisch angetriebenen Kurbeltrieb mit der gewünschten Frequenz bewegt wird. Auch ein drahtgewickelter Widerstand auf einem flachen Isolierkörper, der durch zwei auf einem Kreis rotierende Kontakte abgegriffen wird, ist hierzu geeignet.

Eine sehr gute Sinusform im Frequenzbereich von 10^{-3} bis 2 Hz erzielt man nach PENTON [*6.89*] mit Hilfe eines zylindrischen elektrolytischen Troges. Dieser enthält zwei planparallele Elektroden, die von einer konstanten Spannung gespeist werden, und rotiert um die Symmetrieachse mit der gewünschten Umdrehungszahl. An zwei Platinstiften, die symmetrisch zwischen die Elektroden eintauchen, kann die gewünschte Wechselspannung abgenommen werden (s. a. Bd. I, § 12.55).

6.25 *Transformator*

Zur Anpassung der von den Wechselspannungsgeneratoren erzeugten Spannung an den Verbraucher mit einer vorgegebenen Lastimpedanz benutzt man *Transformatoren.* Diese bestehen für den Niederfrequenzbereich aus einem Eisenkern aus lamelliertem Dynamoblech und zwei daraufgewickelten Spulen. Für den streufreien Transformator verhalten sich die Leerlaufspannungen an den Spulenenden umgekehrt wie die entsprechenden Windungszahlen (s. a. § 3.46). Näheres siehe § 15.4.

6.26 *Leistungsverstärker*

Vielfach ist die von Wechselspannungsgeneratoren abgegebene elektrische Leistung von der Größe einiger Watt und reicht für viele Anwendungsfälle nicht aus. Mit Hilfe eines nachgeschalteten *Leistungsverstärkers* lassen sich fast beliebige Ausgangsleistungen erzielen; diese sind ausführlich in § 5.24 behandelt. Über Transistor-Leistungsverstärker s. z. B. auch [*6.54*].

6.3 Strom- und Spannungsmessung bei Wechselstrom

Die Messung von Strom und Spannung bis zu Frequenzen von etwa 20 Hz wird mit zwei Instrumentengruppen durchgeführt: 1. Messungen bei niedrigen Frequenzen, insbesondere bei 50 Hz mit Hilfe von Dreheisen-, elektrodynamischen und in Einzelfällen thermischen Instrumenten; 2. Messungen bei höheren Frequenzen mit Gleichrichter-, elektrostatischen und thermischen Geräten. Für selektive Messungen kleiner Ströme und Spannungen werden Resonanzinstrumente benutzt. Der Anwendungsbereich verschiedener Instrumente überschneidet sich vielfach mit denen, die in der Hochfrequenzmeßtechnik (s. § 7.3) verwendet werden.

6.31 *Wechselstrominstrumente* [*6.8*]

In diesem Abschnitt werden direkt anzeigende Wechselstrominstrumente besprochen, die in erster Linie für technische Meßaufgaben benutzt werden.

6.311 Dreheiseninstrument

Das Prinzip der Dreheiseninstrumente beruht darauf, daß vom Meßstrom feststehende und bewegliche Eisenteile magnetisiert werden und die zwischen diesen auftretenden Kräfte den Zeiger betätigen. Das Meßwerk besteht aus einer vom Meßstrom durchflossenen Spule, welche die Eisenteile enthält und eine Induktivität L besitzt, die eine Funktion der gegenseitigen Lage dieser Teile ist. Damit errechnet sich das auf das Meßsystem ausgeübte Drehmoment zu

$$M_I = \frac{1}{2} I^2 \, \mathrm{d}L/\mathrm{d}\alpha, \qquad (6/25)$$

wenn α der Ausschlagwinkel ist. Die Größe M_I ist auch eine Funktion des Winkels α, die von der Formgebung der Eisenteile abhängt. In Abb. 6.13 sind

schematisch für eine bestimmte Systemausführung die zu verschiedenen Meßströmen gehörigen Momentkurven als Funktion des Ausschlags dargestellt. Das bewegliche System ist im Gleichgewicht, wenn das meist zum Winkel proportionale Gegendrehmoment der Rückstellfeder $M_F = M_I$ ist. Die Skaleneinteilung findet man aus den Schnittpunkten der Geraden mit M_F mit den zu verschiedenen Meßströmen gefundenen M_I-Kurven. Durch geeignete Formgebung der Eisenteile kann diese fast beliebig gestaltet werden.

In Abb. 6.14 ist das Dreheisenmeßwerk mit *Mantelkernen* vereinfacht dargestellt. Es besteht aus der vom Meßstrom durchflossenen Spule S, dem mit der Spule verbundenen Eisenteil E_1 in Form eines kreisförmig gekrümmten Blechstreifens abnehmender Breite und dem auf der Achse A des Systems montierten kreisförmigen Blechstreifen E_2. Durch die Rückstellfeder F wird

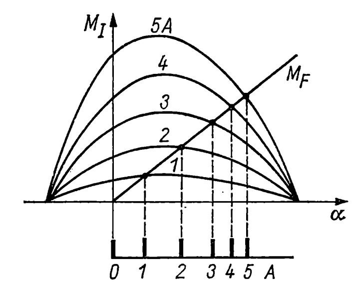


Abb. 6.13 Drehmomentkurve eines Dreheisenmeßwerks

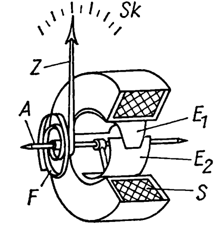


Abb. 6.14 Dreheisenmeßwerk mit Mantelkernen

ein zum Ausschlag proportionales Moment M_F erzeugt. Vermittels des in Achsenrichtung verlaufenden magnetischen Feldes der Spule S werden beide Blechstreifen gleichsinnig magnetisiert, so daß sie sich abstoßen. Durch die Formgebung von E_1 und E_2 läßt sich die Skalencharakteristik begrenzt beeinflussen. Bei anderen Bauformen erstreckt sich der Umfang von E_1 fast über einen vollen Kreisumfang, während E_2 nur ein schmaler Blechstreifen mit größerer axialer Länge ist. Mit dieser Anordnung lassen sich Kreisskaleninstrumente konstruieren.

Anstelle zylindrischer Eisenteile werden beim Meßwerk mit *Streifenkernen* zwei Eisenblechstreifen E_1 und E_2 (s. Abb. 6.15) benutzt, deren Flächen radial zur Systemachse in einer längeren Stromspule S angeordnet sind. Wie oben, stoßen sich die beiden Streifen im Magnetfeld ab. Die Abstoßungskraft ist proportional zu $1/a^2$, wenn a den mittleren Abstand der beiden Streifen bedeutet. Da die Magnetisierung der Streifen mit I^2 zunimmt, kompensieren sich diese Charakteristiken annähernd und ergeben fast eine mit dem Meßstrom lineare Skalenteilung. Für Präzisionsinstrumente wird dieses Meßsystem mit einer *Spannbandaufhängung* (s. § 2.225) versehen, wobei E_1 durch zwei diametral gegenüberstehende Streifen gebildet und ein symmetrisch zur Achse angeordneter beweglicher Streifen verwendet wird.

Beim Dreheisenmeßwerk nach dem Prinzip des Nadelgalvanometers (s. § 2.25) sind keine festen Eisenteile vorhanden. Das mit der Zeigerachse ver-

bundene längliche Eisenblättchen E sitzt, wie aus Abb. 6.16 hervorgeht, symmetrisch zwischen den beiden Stromspulen S_1 und S_2, die ein axiales Magnetfeld erzeugen und das ursprünglich fast senkrecht zur Feldrichtung orientierte Blättchen auslenken. Das auf die Achse ausgeübte Drehmoment ist frei von radialen Kräften, jedoch erheblich kleiner als bei Meßwerken mit festem Eisen. Zur Verringerung des Einflusses fremder Magnetfelder ist das Meßwerk von einem doppelten magnetischen Schirm aus einer hochpermeablen Legierung (s. § 12.53) umgeben.

Der *Skalenverlauf* von Dreheiseninstrumenten kann durch die Form der Eisenteile, ihre räumliche Anordnung, die Wahl der Eisensorte und auch durch

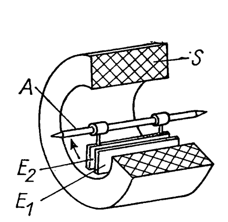


Abb. 6.15 Dreheisenmeßwerk mit Streifenkernen

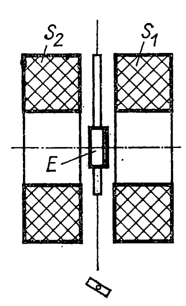


Abb. 6.16 Dreheiseninstrument mit Nadelmeßwerk

besondere Schaltungen beeinflußt werden. Verbreitet sind neben der meist gewünschten linearen Teilung solche, die am Skalenbeginn oder -ende auseinandergezogen sind, um in diesen Bereichen die Ablesegenauigkeit zu erhöhen. Eine fast lineare Skala läßt sich mit dem Streifenkernmeßwerk nach Abb. 6.15 erreichen, wobei eine Sondereisensorte benutzt wird, deren magnetische Induktion bei kleinem Feld in der Meßspule viel stärker als bei gewöhnlichem Dynamoblech ansteigt (vgl. § 12.54).

Als *Strommesser* läßt sich das Dreheisenmeßwerk von 1 mA bis zu einigen Hundert Ampere unmittelbar verwenden. Um über mehrere Meßbereiche zu verfügen, versieht man die Spule mit mehreren Wicklungen, oder es werden entsprechende Meßwandler (s. § 6.33) verwendet. Zur *Spannungsmessung* wird ein temperaturunabhängiger Vorwiderstand aus *Manganin* von mindestens dem 5fachen Betrag der Meßspule vorgeschaltet; der niedrigste Spannungsmeßbereich liegt bei 1 V, mit separaten Vorwiderständen sind Spannungsmesser bis 100 kV möglich.

Dreheiseninstrumente sind billige Geräte und werden vor allem als Betriebsmeßgeräte der Klassen 1, 1,5 und 2,5 gebaut. Nach Toeller [*6.125*] kann dieser Instrumententyp auch als Präzisionsinstrument der Klassen 0,1, 0,2 und 0,5 hergestellt werden und ist den Elektrodynamometern an Genauigkeit nicht unterlegen.

Die *Anzeigefehler* von Dreheisenmeßwerken werden von der Hysterese und Remanenz der Eisenteile verursacht; auch unterscheiden sich die Angaben bei Gleich- und Wechselstrom. Die Anzeige hängt ferner von der *Meßfrequenz* ab, da mit dieser Wirbelstrom- und Hystereseverluste im Eisen zunehmen und

auch die Impedanz der Spule wächst. Die obere Frequenzgrenze hängt von der speziellen Konstruktion ab und liegt zwischen 1 und 20 kHz. Da mit Dreheiseninstrumenten grundsätzlich der *Effektivwert* (s. § 6.11) gemessen wird, ist die Anzeige von der Kurvenform des zu messenden Stromes abhängig. Dieser *Kurvenformfehler* fällt in den meisten Fällen nicht ins Gewicht. Ein Vorteil dieser Instrumente ist ihre hohe Überlastbarkeit, die während kurzer Impulse das Hundertfache des Nennstromes betragen darf.

6.312 Elektrodynamische Instrumente

Elektrodynamische Instrumente besitzen stromdurchflossene feststehende und bewegliche Spulen, deren aufeinander ausgeübtes Drehmoment die Meßgröße darstellt. Konstruktiv lassen sich *eisenlose* und *eisengeschlossene* Meßsysteme unterscheiden. Analog zu Gl. (6/25) läßt sich das auf die bewegliche Spule ausgeübte Drehmoment aus der Beziehung

$$M_I = \frac{1}{2} I^2 \, \mathrm{d}M/\mathrm{d}\alpha \tag{6/26}$$

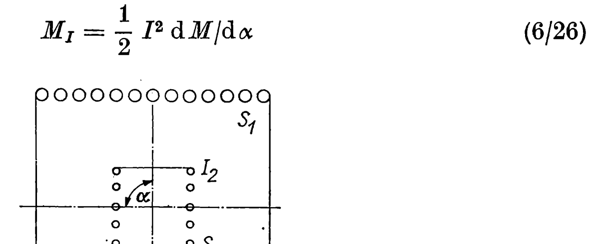


Abb. 6.17 Elektrodynamisches Meßsystem

entnehmen, wenn mit M die Gegeninduktivität zwischen fester und beweglicher Spule bezeichnet wird. Anschaulicher ist der Vergleich mit dem Drehspulinstrument (s. § 2.22), wobei das konstante magnetische Feld beim elektrodynamischen Instrument von einer vom Meßstrom durchflossenen Spule erzeugt wird. Für die in Abb. 6.17 dargestellte Anordnung des elektrodynamischen Meßwerks ergibt sich die Beziehung

$$M = \Theta_2 A_2 B \sin\alpha \cos\psi . \tag{6/27}$$

Darin sind Θ_2 und A_2 Durchflutung und mittlere Windungsfläche der beweglichen Spule S_2, B die magnetische Induktion im Innern der festen Spule S_1, α der Winkel zwischen den Achsen von S_1 und S_2 und ψ der Phasenwinkel zwischen B und Θ_2. Da die Durchflutung $\Theta_2 = I_2 N_2$ (N_2 Windungszahl der beweglichen Spule) und die magnetische Induktion $B \sim I_1 N_1$ ist, wird aus Gl. (6/27)

$$M = K I_1 I_2 \cos\psi \sin\alpha , \tag{6/28}$$

wobei innerhalb eines bestimmten Winkelbereichs $\sin\alpha = \text{const}$ gesetzt werden kann. In der Apparatekonstanten K sind die Windungszahlen beider Spulen und ihre Abmessungen enthalten.

Beim elektrodynamischen *Strommesser* fließt der Meßstrom in Serie durch beide Spulen und erzeugt nach Gl. (6/28) das Drehmoment

$$M = KI^2; \tag{6/29}$$

eine Phasenwinkelabhängigkeit ist nicht vorhanden. Für die Messung starker Ströme benutzt man die in Abb. 6.18a dargestellte Schaltung, bei der der

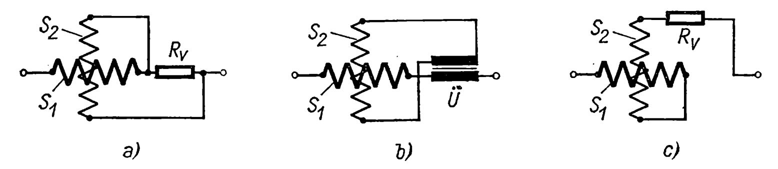


Abb. 6.18 Schaltungen mit elektrodynamischen Strom- und Spannungsmessern

Strompfad für die feste Spule einen Vorwiderstand R_v enthält und dessen Spannungsabfall an die bewegliche Spule gelegt wird. Eine zweite in Abb. 6.18b dargestellte Möglichkeit benutzt einen Stromwandler $\ddot{U}$, dessen Sekundärspannung an der beweglichen Spule liegt. Zur *Spannungsmessung* wird ein hoher Vorwiderstand R_v (Abb. 6.18c) den beiden in Reihe geschalteten Spulen vorgeschaltet; das auf S_2 ausgeübte Drehmoment ist dann U^2 proportional.

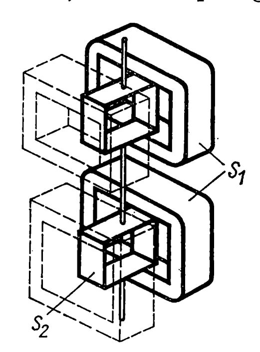


Abb. 6.19 Astatisches elektrodynamisches Meßsystem

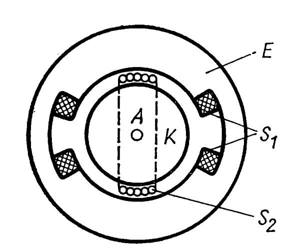


Abb. 6.20 Eisengeschlossenes elektrodynamisches Meßwerk

Bei Strom- und Spannungsmessung mit dem Elektrodynamometer werden Effektivwerte gemessen.

Über die Verwendung des elektrodynamischen Meßwerkes für die Messung der Leistung und des Leistungsfaktors siehe § 6.4.

Präzisionsmeßinstrumente der Klasse 0,2 besitzen ein *astatisches* Meßwerk, das vereinfacht in Abb. 6.19 dargestellt ist. Dieses besteht aus zwei vollständigen Meßsystemen, deren bewegliche Spulen S_2 auf *einer* Zeigerachse

sitzen. Die Festspulen S_1 sind so geschaltet, daß die von ihnen durch den Meßstrom erzeugten Felder entgegengesetzte Richtung aufweisen. Die beweglichen Spulen sind so geschaltet, daß sich die Drehmomente beider Systeme addieren. Dadurch heben sich die von einem homogenen Fremdfeld herrührenden Momente auf. Das Meßwerk ist für Gleich- und Wechselstrom von 15 bis 500 Hz geeignet; der Eigenverbrauch der Festspulen beträgt etwa 1 VA.

Der Fremdfeldeinfluß auf einfache Meßsysteme läßt sich durch eine doppelte ferromagnetische Abschirmung weitgehend eliminieren. Besonders empfindliche Meßsysteme werden mit Spannbandaufhängug der beweglichen Spulen ausgeführt und weisen einen Eigenverbrauch von nur 75 mVA bei Nennbelastung auf.

Eisengeschlossene elektrodynamische Meßwerke ähneln dem Drehspulsystem insofern, als das Magnetfeld um den zentralen Eisenkern durch ein Spulenpaar erzeugt wird, das vom Meßstrom durchflossen wird. In Abb. 6.20 ist E der Eisenmantel mit den Festspulen S_1, K der konzentrisch angebrachte Eisenkern und S_2 die bewegliche Drehspule auf der Achse A. Die Eisenteile bestehen aus dünnen Blechpaketen, bei hohen Frequenzen aus weichmagnetischem Sinterwerkstoff mit geringer elektrischer Leitfähigkeit. Infolge der relativ hohen magnetischen Induktion im Luftspalt zwischen E und K lassen sich große Drehmomente an der beweglichen Spule erzielen.

Die Anzeigefehler dieser Instrumente sind allgemein gering; lediglich bei relativ hohen Frequenzen macht sich der Blindwiderstand der Spulen bemerkbar.

6.313 Induktionsinstrumente

Das diesen Instrumenten zugrunde liegende Prinzip besteht darin, daß durch zwei Spulenpaare, die von zwei um 90° phasenverschobenen Strömen durchflossen werden und selbst um 90° gegeneinander versetzt sind, ein *magnetisches Drehfeld* erzeugt wird. Als beweglicher Teil des Meßsystems wird ein dünnwandiger Hohlzylinder aus Aluminium verwendet, der senkrecht vom Drehfeld durchsetzt und infolge der Induktionswirkung um die Achse verdreht wird. Das auf den Zylinder ausgeübte Drehmoment ist dem Quadrat des Stromes in den Spulen und der Frequenz proportional. Dieses Meßprinzip wird lediglich beim Bau von Betriebsinstrumenten angewandt.

6.314 Thermische Instrumente [*6.5*, *6.42*]

Die auch als *Hitzdrahtinstrumente* bezeichneten Strommesser benutzen als Meßgröße die geometrische Längenänderung eines Drahtes oder Metallbandes, das vom Strom durchflossen wird und sich ausdehnt. Das in Abb. 6.21 schematisch dargestellte Meßsystem besteht aus einem dünnen Draht D, der elastisch zwischen zwei Klemmen ausgespannt ist und dessen Verlängerung infolge der Erwärmung bei Stromdurchgang mit Hilfe einer kleinen Rolle R auf der Zeigerachse als Ausschlag gemessen wird. Fließt durch den Draht der Strom I und beträgt sein Widerstand R, so wird dieser eine Übertemperatur $\Delta t \sim I^2 R$ annehmen. Da die Längenänderung des Drahtes $\Delta l = l_0 \alpha \, \Delta t$ ist,

wenn α den thermischen Ausdehnungskoeffizienten des Drahtmaterials bedeutet, so wird

$$\Delta l = l_0 \alpha I^2 R \cdot K. \tag{6/30}$$

Das Instrument ist für Gleich- und Wechselstrom geeignet und mißt den Effektivwert. Ein Frequenzeinfluß auf die Anzeige ist erst dann zu erwarten, wenn infolge des Skineffektes der Widerstand des Drahtes bei hohen Frequenzen zunimmt, was erst oberhalb von 0,1 MHz beginnt. Der grundsätzliche Nachteil des Instrumentes ist der durch den Instrumentenfaktor K in Gl. (6/30) ausgedrückte Einfluß der äußeren Wärmeübergangsbedingungen auf die effektive Drahttemperatur. Ferner ist eine Nullpunktsdrift vorhanden, die von der Umgebungstemperatur abhängt. Die Überlastbarkeit dieser Geräte ist gering.

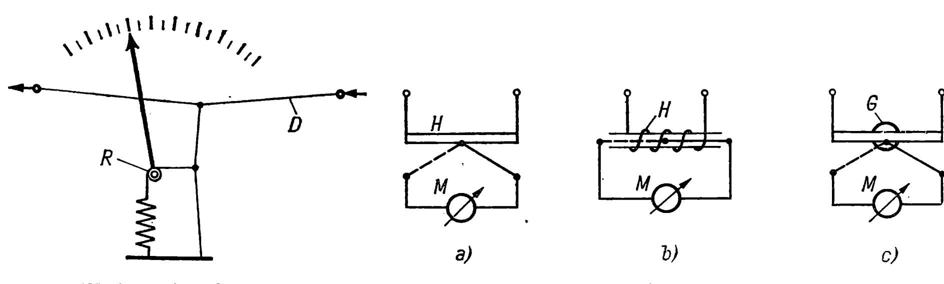


Abb. 6.21 Hitzdrahtmeßwerk *Abb. 6.22 Thermoumformer*

Von weitaus größerer Bedeutung sind die *Thermoumformer* für die Strommessung vorzugsweise bei höheren Frequenzen. Diese stellen eine Kombination eines Heizleiters, der von Meßstrom durchflossen wird, mit einem Thermoelement dar, dessen Spannung ein Maß für den Meßstrom ist. In Abb. 6.22 sind drei verschiedene Ausführungsformen des Meßprinzips dargestellt. In Abb. 6.22a ist die Lötstelle des Thermoelements direkt mit dem Heizleiter H durch Punktschweißen verbunden. Die beiden Enden des Thermoelements werden an die Klemmen eines empfindlichen Millivoltmeters M geführt, wobei die Nebenlötstellen gleiche Temperatur besitzen müssen. Diese Bauart eignet sich für Ströme zwischen 1 und 100 mA. In Abb. 6.22b ist die Lötstelle ins Innere eines dünnwandigen Röhrchens verlegt, das außen mit dem Heizdraht bewickelt ist. Bei der Ausführungsform nach Abb. 6.22c sind Heizer und Lötstelle durch eine Glasperle G in Kontakt gebracht. Dadurch wird eine elektrische Isolation zwischen dem Meßkreis und dem Anzeigeinstrument und eine sehr kleine Kapazität erzielt. Setzt man konstante differentielle Thermokraft in dem auftretenden Temperaturbereich voraus, so wird die erzeugte Thermospannung proportional zu I^2. Für Ströme unterhalb von 150 mA bringt man das Meßsystem in einen evakuierten Glaskolben, für größere Ströme befinden sich Heizer und Thermoelement an Luft. In *Tabelle 6.1* sind die technischen Daten für einige Thermoumformer zusammengestellt.

Bei den Luft-Thermoumformern, die für 0,2 bis 50 A gebaut werden, beträgt der Leistungsverbrauch 0,1 bis 10 W. Über die Benutzung dieser Instrumente bei sehr hohen Frequenzen siehe § 7.313.

Tabelle 6.1 Daten von Thermoumformern

Hersteller	Stromstärke mA	Widerstand Heizer Ω	Widerstand Element Ω	Leistung mW	EMK mV	Bauart
EAW	0,6	4000	22	1,4	4	c
EAW	1	2000	22	2	5	c
H & B	2	1800	3,5	7,2	12	b
EAW	2,5	800	22	5	8	c
EAW	4	300	15	4,8	12	c
H & B	5	400	3,3	10	12	b
S & H	5	100	35	2,5	6	a
EAW	6	150	12	5,4	12	c
H & B	10	80	3,3	8	12	b
EAW	10	60	12	6,0	12	c
EAW	10	50	25	5,0	20	c*
S & H	10	40	15	4	10	a
EAW	25	24	6	15	12	c
H & B	50	6,0	4,0	15	12	a
S & H	50	3,6	3,5	9	10	a
EAW	60	8	3	29	12	c
EAW	100	3	3	30	12	c
H & S	100	3,0	2,5	30	12	a
S & H	100	2,0	2,0	20	10	a
Leam	200	1	3	40	8	c
Philips	200	1,1	3	44	12	c
EAW	250	1,2	3	75	12	c

EAW = VEB Elektro-Apparate-Werke Berlin-Treptow

* Heizer mit zwei Thermoelementen in Serie.

6.315 Elektrostatische Instrumente

Die meisten elektrostatischen Instrumente, die ausführlich in § 2.1 behandelt werden, sind für Wechselspannungsmessungen auch bei sehr hohen Frequenzen geeignet.

6.32 Gleichrichterinstrumente [*6.72*]

6.321 Allgemeines

Die außerordentlich günstigen Eigenschaften der Drehspulmeßwerke (s. § 2.22), insbesonders ihre hohe Empfindlichkeit, lassen sich in Form der *Gleichrichtermeßgeräte* auch auf die Messung von Wechselströmen übertragen. Die Möglichkeit hierzu bietet sich durch die modernen Halbleiterelemente (s. § 4.24) an; im Niederfrequenzbereich werden hauptsächlich *Kupferoxydul*-gleichrichter, für höhere und höchste Frequenzen *Germanium*- und *Silizium*-

gleichrichterelemente benutzt, von denen die letzteren sich durch besonders hohe Sperrspannungen auszeichnen.

Wie in § 5.1 näher erläutert, läßt sich ein Gleichrichter als stromabhängiger Widerstand betrachten und durch die in Abb. 6.23 dargestellten Strom-Spannungs-Kennlinien kennzeichnen. Während bei kleiner Aussteuerung ($u < 20$ mV) die Kennlinie annähernd durch eine Parabel wiedergegeben werden kann (*a*), läßt sich bei größerer Steuerspannung ($u \approx 200$ mV) diese durch eine Exponentialfunktion (*b*), bei sehr großer Aussteuerung durch eine im Nullpunkt geknickte Gerade ersetzen (*c*).

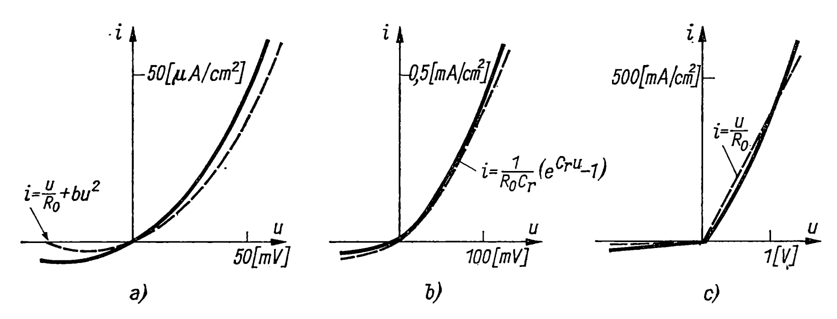


Abb. 6.23 Strom-Spannungs-Kennlinie eines Kupferoxydulgleichrichters

*Selen*gleichrichter sind als Meßgleichrichter wenig geeignet, während *Germanium*- und *Silizium*dioden bereits bei sehr kleinen Sperrspannungen einen hohen und in Durchlaßrichtung einen fast verschwindenden Widerstand aufweisen.

6.322 Aussteuerbereiche

Die *quadratische Aussteuerung* ist dadurch gekennzeichnet, daß die Gleichrichterkennlinie nur soweit ausgesteuert wird, daß die Kennlinie in guter Näherung als Parabel angesehen werden kann. Das Meßgerät zeigt unabhängig von der Kurvenform den *Effektivwert* an, da das Drehspulsystem den arithmetischen Mittelwert des Betrages I_m (s. Gl. 6/7) bildet und dieser durch Spiegelung an der parabolischen Kennlinie, wie aus Abb. 6.24 erkenntlich wird, dem Effektivwert der Wechselstromgröße entspricht. Dieser Zusammenhang gilt für beliebige Kurvenformen und stellt einen wesentlichen Vorteil der quadratischen Aussteuerung dar. Von Nachteil in diesem Kennlinienbereich ist die Abhängigkeit der Anzeige von Frequenz und Temperatur.

Ersetzt man, wie in Abb. 6.23a eingetragen, die Kennlinie für kleine Werte von u durch die quadratische Funktion

$$i = \frac{u}{R_0} + b u^2, \qquad (6/31)$$

worin R_0 der Gleichrichterwiderstand für $u = 0$ und b die reziproke Krümmung im Nullpunkt angibt, und legt die Wechselspannung $u = U \sin \omega t$ an, so

ergibt sich für den gleichgerichteten Strom die Beziehung

$$i(t) = \frac{U}{R} \sin \omega t + b\,U^2 \sin^2 \omega t = \frac{b}{2}\,U^2 + \frac{U}{R_0} \sin \omega t - \frac{b}{2}\,U^2 \cos 2\omega t. \qquad (6/32)$$

Der Meßstrom enthält hierdurch den Gleichstromanteil $bU^2/2$ und zwei Wechselstromglieder mit der Grundfrequenz und der 1. Harmonischen.

Bei der *exponentiellen Aussteuerung* (Abb. 6.23 b) größerer Steuerspannungen zeigt das Meßgerät nicht mehr den Effektivwert an, sondern ist von der Kurvenform abhängig. Der analytische Ausdruck für die Kennlinie läßt sich aus dem Verlauf der Wechselstromwiderstandskennlinie ableiten; man erhält hierfür



$$i = \frac{1}{c_r R_0}\,(e^{c_r u} - 1). \qquad (6/33)$$

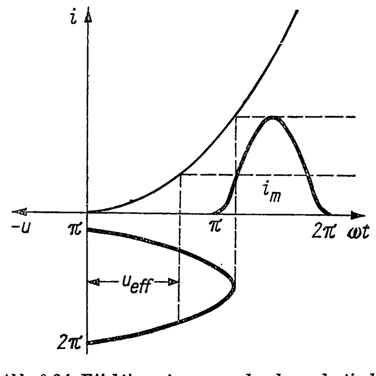


Abb. 6.24 Effektivwertmessung durch quadratische Gleichrichtung

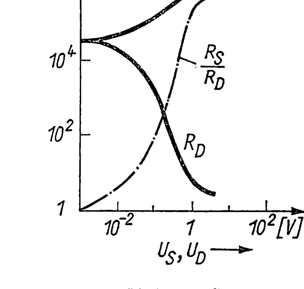


Abb. 6.25 Durchlaß- und Sperrwiderstand einer Ge-Diode

Die *lineare Aussteuerung* gilt als Näherungsfall für relativ große Steuerspannungen und läßt sich durch eine im Nullpunkt geknickte Gerade (Abb. 6.23c) approximieren, deren Gleichung

$$i_D = u_D/R_D \qquad \text{in Durchlaßrichtung}$$

bzw.

$$i_S = u_S/R_S \qquad \text{in Sperrichtung}$$

lautet. Die Widerstände R_D und R_S in Durchlaß- bzw. Sperrichtung sind konstant und für den Gleichrichter charakteristische Größen. Der Gleichrichterstrom ergibt sich aus der Beziehung

$$I = \frac{\hat{U}}{\pi}\left(\frac{1}{R_D} - \frac{1}{R_S}\right), \qquad (6/34)$$

d. h. als arithmetischer Mittelwert.

In Abb. 6.25 sind für eine Germaniumdiode (AA 118) die Widerstände R_D und R_S sowie ihr Verhältnis in Abhängigkeit von der angelegten Spannung aufgetragen.

6.323 Meßgleichrichter-Schaltungen

Die häufigsten Schaltkombinationen von Gleichrichter und Meßgerät sind in Abb. 6.26 zusammengestellt. Bei der in Abb. 6.26a dargestellten einfachen *Reihenschaltung* sind Gleich- und Wechselstromkreis *nicht* getrennt; der Gleichstrom muß über den äußeren Widerstand fließen und ist von diesem abhängig. Enthält der Kreis eine Serienkapazität, so verschwindet der Meßstrom überhaupt [*6.136*]. Schaltet man zwischen den äußeren Stromkreis und den Meßstromkreis einen Übertrager $Ü$ (Abb. 6.26b), so sind zwar Gleich- und Wechselstromkreis galvanisch entkoppelt, doch wird dadurch der Wechselstrom vom Gleichstrommeßwerk nicht ferngehalten. Das kann jedoch durch eine parallelgeschaltete Kapazität C (Abb. 6.26c) vermieden werden.

Die *Parallelschaltung* von Meßgerät und Gleichrichter (Abb. 6.26d) bewirkt, daß der Strom durch das Meßgerät nur in einer Richtung fließt, da er während

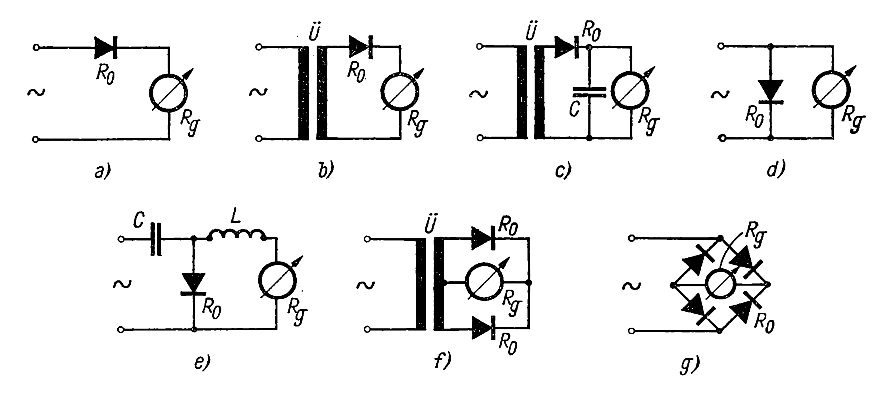


Abb. 6.26 Schaltungen mit Meßgleichrichtern

der anderen Halbwelle den äußeren Kreis kurzschließt. Die Größe des Gleichstroms hängt jedoch bei dieser Schaltung vom äußeren Stromkreis ab. Durch Einschalten einer Kapazität C in den Wechselstromkreis und einer Induktivität L in den Gleichstrompfad (Abb. 6.26e) werden beide Kreise getrennt und außerdem Störspannungen vom Meßwerk ferngehalten. Die Impedanz von C soll für den kleinsten noch erfaßten Frequenzbereich klein gegen den Gleichrichterwiderstand R_0 sein.

Bei den *Doppelwegschaltungen* werden durch den symmetrischen Aufbau Anzeigefehler bei verzerrter Kurvenform vermieden. Je nach Aussteuerung kann der Gleichrichterstrom doppelt so groß sein wie bei den Einwegschaltungen. Während bei diesen die volle Wechselspannung am Gleichrichter liegt, verteilt sie sich im Doppelweggleichrichter auf beide Gleichrichter. Die einfachste Schaltung dieser Art ist die in Abb. 6.26f gezeigte *Gegentaktschaltung*, in der Gleich- und Wechselstromkreis durch den Übertrager $Ü$ getrennt sind. Beide Halbwellen werden durch das Meßwerk geleitet; der gleichgerichtete Strom enthält nicht die Grundfrequenz. Die in Abb. 6.26g gezeigte *Brücken-*

oder *Graetz-Schaltung* (vgl. § 5.15) enthält vier Gleichrichter in einer Brücke und benötigt keinen Übertrager.

Ist die in der Schaltung der Abb. 6.26c enthaltene Kapazität C so groß, daß ihre Ladung in der Sperrphase des Gleichrichters nur langsam über das Meßwerk fließen kann, so zeigt dieses (hochohmige) Instrument die *Spitzenspannung* $\hat{U}$ an.

6.324 Einbereichsinstrumente

Die meist angewandte Schaltung mit B-Gleichrichtung in Form der Graetz-Schaltung (s. § 5.15) ist stets mit einem Vorwiderstand ausgerüstet, durch den das Instrument an die Spannungsquelle angepaßt wird. Für größere zu messende Stromstärken paßt man das Gerät durch einen Nebenschlußwiderstand an, wobei oft ein beträchtlicher Teil der aufgenommenen Leistung in den Widerständen verbraucht wird. Auch die Zwischenschaltung eines Stromwandlers (s. § 6.33) ist üblich.

Die C-Gleichrichtung mit C-Filter wird vorwiegend für Hochfrequenz benutzt; dabei tritt an den Gleichrichtern der doppelte Scheitelwert der angelegten Spannung als Sperrspannung auf.

Wird als Anzeigeinstrument ein Drehspulmeßwerk benutzt, dessen Ausschlag in guter Näherung proportional zum Meßstrom ist (vgl. § 2.22), so gilt dieser Zusammenhang nicht mehr, wenn dieses als Gleichrichterinstrument verwendet ist. Bezeichnet man als relative Meßgröße $i = I/I_e$, mit $a = \alpha/\alpha_e$ den relativen Ausschlag des Instrumentes, wobei I_e und α_e sich auf den Endausschlag beziehen, so wird der Zusammenhang zwischen Ausschlag und Meßgröße durch die *Skalenfunktion* $i = f(a)$ wiedergegeben. Man findet hierfür den allgemein gültigen Ausdruck

$$i = a \frac{R_k + R_b}{R_{ke} + R_b}. \tag{6/35}$$

In dieser Beziehung bedeutet $R_k = R_i + R_L$ (Gleichrichterwiderstand R_i, Lastwiderstand R_L), R_{ke} die gleiche auf den Endausschlag bezogene Größe und R_b eine von den Gleichrichterbedingungen abhängige Widerstandsgröße, die zwischen Null und Unendlich liegen kann.

Bei *Stromgleichrichtung* im C-Betrieb ist $i \approx a$, d. h., die Skalenteilung wird linear. Bei *Spannungsgleichrichtung* in A- oder B-Schaltung ergeben sich Skalen, die am Anfang gedrängt und für größere Ausschläge gedehnt sind.

6.325 Mehrbereichsinstrumente [*6.128*]

Durch Vorwiderstände beim Spannungsmesser und Shunts bei Strommessern lassen sich wie bei den Gleichstrominstrumenten verschiedene Meßbereiche einstellen. Da durch die Meßbereichserweiterung sowohl die Gleichrichterbedingungen als auch der Lastwiderstand verändert werden, muß man durch geeignete Schaltungen anstreben, daß sich hierbei die Skalenfunktion nach Gl. (6/35) nicht ändert. Bei Spannungsmessern läßt sich durch die von PFANNENMÜLLER [*6.90*] angegebene Schaltung völlige Skalendeckung bei allen

Meßbereichen erzielen. Ein nach diesem Prinzip konstruierter Spannungsmesser für 1,5 bis 600 V ist in Abb. 6.27 dargestellt. Er enthält eine Brückenschaltung mit den Gleichrichtern Gl_1 und Gl_2 und zwei Brückenwiderständen R_1 und R_2, deren Meßinstrument M einen maximalen Strom von 0,333 mA aufnimmt. Zur Linearisierung der Skalenfunktion sind die beiden Widerstände R_r und R_n und zur Einstellung des Meßbereichs der mit dem Meßbereichsschalter S abgreifbare Vorwiderstand R_v vorhanden. Im Frequenzbereich von 15 bis 20000 Hz beträgt der Anzeigefehler $\pm 1{,}5\%$.

Eine zweite vielfach verwendete Bauart, die sich besonders zur Messung sehr kleiner Spannungen eignet, benutzt eingangsseitig einen Stromwandler. Skalendeckung läßt sich erreichen, wenn der in Gl. (6/35) auftretende Wider-

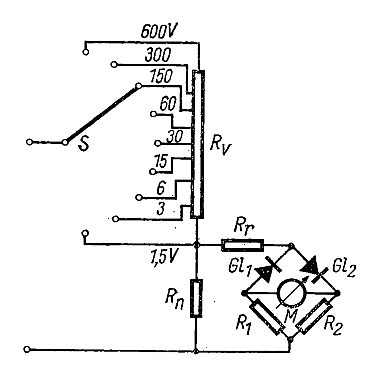


Abb. 6.27 Mehrfachspannungsmesser

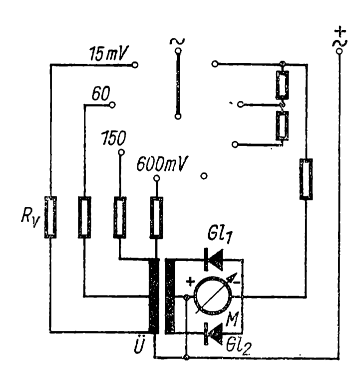


Abb. 6.28 Gleichrichter-Millivoltmeter

stand R_b von der Sekundärseite des Wandlers aus gesehen in allen Meßbereichen den gleichen Wert aufweist. Ein nach diesem Prinzip gebautes *Millivoltmeter* ist in Abb. 6.28 dargestellt. Für kleine Meßspannungen wird der Wandler $Ü$ primärseitig über Vorwiderstände R_v angeschlossen. Auf der Sekundärseite von $Ü$ liegt das Meßgerät in einer Doppelwegschaltung mit den Gleichrichtern Gl_1 und Gl_2. Mit diesem Instrument können gleichzeitig Gleichspannungen gemessen werden. Der Frequenzbereich erstreckt sich von 30 bis 300 Hz.

Mehrbereichsspannungsmesser mit C-Gleichrichtung lassen sich bei Verwendung von *Germaniumdioden* (s. § 4.242) auch bei hohen Frequenzen verwenden. Ein in Abb. 6.29 dargestelltes Ausführungsbeispiel mit einem Frequenzbereich von 50 Hz bis 450 MHz besteht aus dem eigentlichen Meßteil mit Spannungswähler und dem Meßkopf, in dem die Ge-Dioden Gl_1 und Gl_2 mit den Ladekapazitäten C_1 und C_2 in Greinacher-Schaltung untergebracht sind. Auf diese Weise wird der Zuleitungsfehler bei hohen Frequenzen klein gehalten. Der Meß- oder Tastkopf ist mit einer abgeschirmten Leitung mit dem eigentlichen Meßgerät verbunden. Die Meßbereichseinstellung geschieht durch Umschalten der Vorwiderstände R_v über den Schalter S_1. Zur Spannungsmessung bei Frequenzen unterhalb von 15 kHz werden durch den Schalter S_2 die beiden Kondensatoren C_3, C_4 von je 2 μF zugeschaltet. Mit Rücksicht auf die zulässige Sperrspannung der Dioden beträgt der höchste Spannungsmeß-

bereich 20 V. Zur Erweiterung bis auf 1000 V kann ein kapazitiver Spannungsteiler 1:50 vorgeschaltet werden.

Über einen Strom- und Spannungsmesser mit großem Frequenzbereich siehe [*6.10*].

6.326 Mechanische Gleichrichter [*6.69*]

Im Gegensatz zu den Halbleitergleichrichtern arbeiten *mechanische Gleichrichter* mit rotierenden oder schwingenden Kontakten, deren Bewegung von der gleichzurichtenden Wechselstromgröße gesteuert wird. Sie stellen Synchronschalter mit einstellbarer Phase dar. Der in Abb. 6.30 dargestellte

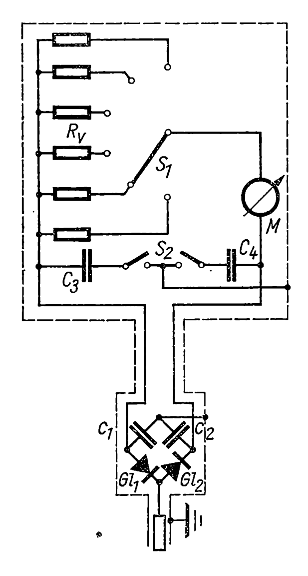




Abb. 6.29 HF-Mehrbereichvoltmeter

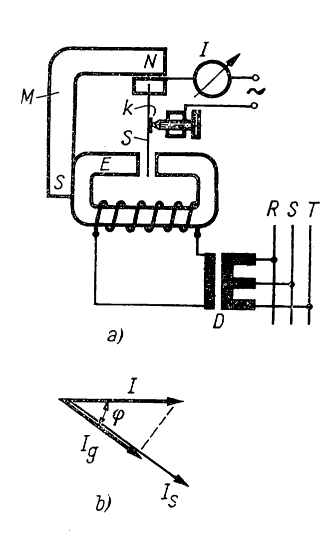


Abb. 6.30 Schwingkontaktgleichrichter

Schwingkontaktgleichrichter besteht aus einer Stahlzunge S, die durch den Permanentmagneten M längsmagnetisiert wird, im magnetischen Wechselfeld des Elektromagneten E mit der Frequenz des Erregerstromes schwingt und dabei den Kontakt K öffnet und schließt. Die Magnetwicklung von E liegt am Ausgang eines Phasenschiebers D, der aus dem Drehstromnetz gespeist wird. Die Phasenlage der mechanischen Schwingung gegenüber dem gleichzurichtenden Strom kann durch die einstellbare Phasenlage des Erregerfeldes bestimmt werden. Die Abhängigkeit des durch das Meßinstrument I fließenden Stromes I_g vom Phasenwinkel φ des Schaltstromes I_s geht aus dem Diagramm der Abb. 6.30b hervor.

Der Durchlaßwiderstand ist bei diesem Gleichrichter sehr klein und von der anliegenden Spannung unabhängig; der Sperrwiderstand ist praktisch unendlich. Die obere Grenze der Meßfrequenz liegt bei 1 kHz. Das ange-

schlossene Drehspulinstrument zeigt die mit dem Schaltstrom phasengleiche Komponente des Wechselstromes $I_g = I \cos \varphi$ an.

Anstelle des elektromagnetisch angetriebenen Schaltkontaktes läßt sich bei Frequenzen bis 100 Hz ein motorisch gesteuerter Gleichrichter verwenden, der die erheblich größere Schaltleistung von 0,1 A bei 300 V zuläßt. Bei dieser Bauart wird eine elastische Kontaktfeder durch einen Exzenter bewegt, der durch einen Synchronmotor angetrieben wird. Solche auch als *Vektormesser* bezeichneten Geräte bestehen aus dem Schaltkontaktgeber, dem Anzeigeinstrument, den Neben- und Vorwiderständen und eignen sich für viele Meßaufgaben im technischen Wechselstrombereich.

Für höhere Frequenzen ersetzt man den mechanischen Kontakt durch gesteuerte Röhren- oder Halbleiterelemente (s. § 6.6).

6.33 Meßwandler [*6.17*]

6.331 Allgemeines

Die in den vorigen Abschnitten besprochenen Wechselstrommeßgeräte werden für hohe Spannungen und starke Ströme über *Meßwandler* betrieben. Diese sind Transformatoren (s. § 15.44) für Meß- und Steuerzwecke mit geringer Leistungsübertragung und der zusätzlichen Aufgabe, den Meßkreis vom Betriebsstromkreis zu isolieren.

6.332 Stromwandler

Der Stromwandler hat die Aufgabe, den Eingangsstrom I_1 in einen proportionalen Strom I_2 ohne Phasenverschiebung zu übersetzen entsprechend der Beziehung

$$I_1 = K_n I_2. \tag{6/36}$$

Das *Übersetzungsverhältnis* K_n muß dabei unabhängig vom Strom sein. Man kann den Meßwandler als kurzgeschlossenen Transformator betrachten, dessen beide Wicklungen der Beziehung

$$I_1 N_1 = I_2 N_2 \tag{6/37}$$

gehorchen. Wegen der unvermeidbaren Kupfer- und Eisenverluste trifft Gl. (6/37) nur im Idealfall zu; gewöhnlich ist mit einem *Stromfehler* sowie einem *Phasenfehler* abhängig von der Belastung zu rechnen.

Ausgehend von der bekannten *Vierpoldarstellung* (vgl. § 3.46) des Transformators lassen sich die zu erwartenden Fehler berechnen. Für den *Meßfehler* $F_i = (I_2 - I_1)/I_1$ eines Wandlers mit $N_1 = N_2$ wird folgender Ausdruck gefunden

$$F_i = \frac{10^8 U I_1}{\sqrt{2} \pi f V_E \mu_g a_1^2}. \tag{6/38}$$

Darin bedeuten UI_1 die übertragene Leistung, V_E das Eisenvolumen, f die Frequenz, μ_g die spezifische Permeabilität des Eisenwegs und a_1 die auf den

mittleren Kraftlinienweg bezogene primäre Windungszahl. Der Übertragungsfehler wird also um so kleiner, je geringer die abgegebene Leistung und je größer das Eisenvolumen und die Primärwindungszahl N_1 je cm Eisenweg sind. Für $N_1 \neq N_2$ errechnet sich der Stromfehler nach Gl. (6/38), wobei

$$F_i = \frac{K_n I_2 - I_1}{I_1}$$

gilt. Zusätzlich zu F_i kommt noch der Einfluß des Fehlwinkels zwischen Primär- und Sekundärstrom.

Die technischen Wandler sind in Genauigkeitsklassen eingeteilt, deren Fehler 0,1, 0,2, 0,5, 1 und 3% betragen können. Für Meßzwecke kommen nur die genauesten Ausführungen in Betracht. Die an das Meßgerät abgegebene

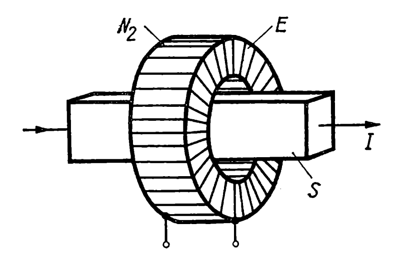


Abb. 6.31 Stromwandler

Leistung beträgt einige Voltampere. In Abb. 6.31 ist schematisch ein Stromwandler für sehr hohe Ströme dargestellt. Er besteht aus einem lamellierten Eisenkern E in Form eines Toroids, auf den die Sekundärwicklung mit der Windungszahl N_2 über den ganzen Umfang aufgebracht ist. Die Primär-„wicklung" wird durch die stromführende Schiene S aus Kupfer dargestellt, die E zentrisch durchsetzt.

6.333 Spannungswandler

Der zur Messung hoher Wechselspannungen benutzte Spannungswandler transformiert die zu messende Spannung auf die genormte Spannung von $U_2 = 100$ bzw. $100/\sqrt{3}$ V herab. Man kann diesen als Transformator im Leerlauffall betrachten, zwischen dessen Spannungen die Beziehung

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \tag{6/39}$$

besteht. Der *Spannungsfehler* des Wandlers wird durch die Beziehung

$$F_u = \frac{U_2 - U_1}{U_1} \tag{6/40}$$

definiert und ergibt sich analog zum Stromwandler zu

$$F_u = \frac{I_0 \boldsymbol{Z}_1}{U_1} = \frac{I_2(\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2)}{U_1}. \tag{6/41}$$

In dieser Gleichung bedeuten $I_0 = I_1 + I_2$, $\boldsymbol{Z}_1 = R_1 + X_1$, $\boldsymbol{Z}_2 = R_2 + X_2$, wenn $\boldsymbol{Z}_1$ und $\boldsymbol{Z}_2$ die komplexen Widerstände von Primär- und Sekundärwicklung sind.

Wie bei den Stromwandlern liegen die Fehler bei den Spannungswandlern zwischen 0,1 und 3% und hängen hauptsächlich von den Eisen- und Kupferverlusten ab. Der Aufbau des Spannungswandlers unterscheidet sich von dem eines Stromwandlers besonders in der Primärwicklung, die eine große Windungszahl aufweist und durch Gießharz gegen den Meßkreis isoliert sein muß.

6.34 *Resonanzinstrumente*

Zum direkten Nachweis sehr schwacher Wechselströme oder -spannungen dienen *Vibrationsgalvanometer*, deren beweglicher Meßteil mechanisch auf einen sehr schmalen Frequenzbereich abgestimmt ist. Sie werden vorwiegend als *Nullinstrument* in Meßbrücken und Wechselspannungskompensatoren (vgl. § 6.36) angewendet, und zwar im Frequenzbereich zwischen 15 und 4000 Hz. Diese Instrumente werden nur in Resonanz benutzt und sind mit Vorrichtungen zur Abstimmung der Eigenfrequenz des Meßsystems auf die des nachzuweisenden Stromes ausgerüstet. Ihr grundsätzlicher Aufbau entspricht dem von Nadel- und Drehspulgalvanometern mit allerdings sehr viel kleineren Schwingungsdauern.

6.341 Theorie des Vibrationsgalvanometers [*6.77*]

Die in § 2.21 abgeleiteten allgemeinen Beziehungen für die Empfindlichkeit eines Galvanometersystems ergeben im Fall des Vibrationsgalvanometers wegen der hohen Direktionskraft D kleine Gleichstrom- bzw. Gleichspannungsempfindlichkeiten S_i' bzw. S_u'. Wird Wechselstrom durch das Instrument geschickt, so zieht sich die Lichtmarke zu einem Lichtband auseinander, dessen Breite dem doppelten Scheitelwert proportional ist. Bei kleiner Dämpfung des Systems gehorcht dieses der inhomogenen Differentialgleichung (2/57) und liefert einen *dynamischen Ausschlag* A entsprechend der in § 2.215 abgeleiteten Beziehung

$$A = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\alpha^2\eta^2}}. \tag{2/59}$$

Darin bedeutet $\alpha = \omega_0 b/D$ den Dämpfungsgrad und $\eta = \omega/\omega_0$ die auf die Eigenfrequenz bezogene Frequenz des zu messenden Stromes. Im Resonanzfall folgt aus Gl. (2/59) der Ausdruck

$$A = \frac{D}{2\omega_0 b}. \tag{6/42}$$

Damit ergibt sich für die dynamische Empfindlichkeit eines Vibrationsgalvanometers die Beziehung

$$S'_{id} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} S_i'. \qquad (6/43)$$

Die dynamische Spannungsempfindlichkeit findet man analog zu

$$S'_{ud} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \cdot \frac{1}{Z} S_i', \qquad (6/43\,a)$$

wenn Z die Impedanz des gesamten Schließungskreises bedeutet.

In § 2.215 ist ferner abgeleitet worden, daß beim Einschalten des Galvanometers der Endausschlag erst nach einer bestimmten Einschwingdauer erreicht wird; es gilt

$$\varphi = \varphi_0 (1 - e^{-\alpha \tau_v}),$$

wobei die *Nacheilzeit* τ_v aus Gl. (2/60) folgt und im Resonanzfall theoretisch unendlich wird. Der Dämpfungsgrad α des Systems wird durch die innere Reibung der Systemaufhängung, Luftdämpfung, Wirbelströme und elektrodynamische Dämpfung bestimmt.

Als *Resonanzschärfe* bezeichnet man die prozentuale Abweichung von der Resonanzfrequenz, bei der die Empfindlichkeit auf die Hälfte abgesunken ist. In Näherung gilt hierfür

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx 100\sqrt{3}\alpha.$$

Die Empfindlichkeit des Instrumentes gegenüber Oberwellen ist etwa dem Dämpfungsgrad direkt und dem Quadrat der Ordnungszahl der betreffenden Oberwelle umgekehrt proportional.

Da bei einem durch Wechselspannung erregten System im Meßkreis eine Induktionsspannung erzeugt wird, die der eigentlichen Meßspannung entgegenwirkt, erhöht sich hierdurch der Wirkwiderstand des Meßwerks.

6.342 Frequenzunabhängigkeit des Ausschlags

Durch die grundlegenden Arbeiten von MEISSNER und ADELSBERGER [*6.79*] ist gezeigt worden, daß man durch Einschalten einer Serienkapazität in den Meßkreis eines hierfür geeigneten Vibrationsgalvanometers innerhalb eines begrenzten Frequenzbereichs eine konstante dynamische Empfindlichkeit erhalten kann. Die Induktivität L der Magnetwicklung des Instruments bildet zusammen mit der Kapazität C einen Serienresonanzkreis, dessen Resonanzfrequenz gegenüber der Eigenfrequenz des Meßsystems etwas verschoben ist. Durch Überlagern beider Resonanzkurven entsteht wie beim Bandfilter (vgl. § 3.47) eine resultierende Resonanzkurve, die zwischen beiden Resonanzfrequenzen einen flachen Verlauf besitzt. Die damit verbundene Verminderung der dynamischen Empfindlichkeit läßt sich beseitigen, wenn eine zusätzliche Induktivität parallel oder in Serie zur Erregerwicklung des Galvanometers geschaltet wird. Die Verfasser geben für ein gutes Instrument

folgende Erfordernisse an: hohe Remanenz der Nadelmagneten und große magnetische Feldstärke im Spalt des Systems. Durch Einschalten einer passenden Induktivität parallel zur Erregerwicklung des Instruments tritt keine Verringerung der dynamischen Empfindlichkeit auf, die bei einer Meßfrequenz von etwa 240 Hz in einem Frequenzintervall von etwa 2 Hz konstant ist.

6.343 Nadelvibrationsgalvanometer

Das von MEISSNER et al. [*6.79*] konstruierte Vibrationsgalvanometer ist vereinfacht in Abb. 6.32 dargestellt. Es besteht aus einem lamellierten Eisenkern E aus Dynamoblech mit einem Querschnitt von $2 \cdot 2\ \text{cm}^2$ mit konischen Polschuhen P mit 0,4 cm Kantenlänge in einem Abstand von etwa 0,14 cm. Die Erregerwicklungen W besitzen 143 Ω Widerstand und eine Induktivität von 6,8 H. Die Nadel N besteht aus 12 kleinen Stahlmagnetchen von 3 mm

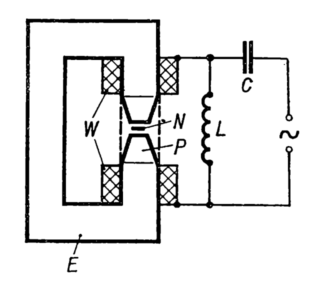


Abb. 6.32 Nadelvibrationsgalvanometer nach [*6.79*]

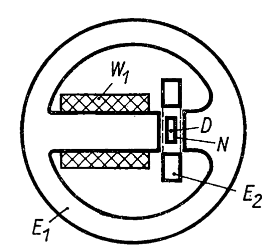


Abb. 6.33 Nadelvibrationsgalvanometer nach RUMP

Länge, 0,5 mm Breite und etwa 0,1 mm Dicke aus Mn–Cr–Co-Stahl, die symmetrisch auf beiden Seiten eines Messingdrahtes von 0,1 mm Stärke befestigt sind. Die Gleichstromempfindlichkeit beträgt beim System mit der Eigenfrequenz von 62 Hz 1,7 mm/10^{-6} Am; die dynamische Empfindlichkeit erhöht sich bei passender Wahl der Serienkapazität und Parallelinduktivität um etwa 20% und bleibt innerhalb von etwa 2 Hz konstant.

Der Nachteil der unbequemen Abstimmung auf die Meßfrequenz bei der oben beschriebenen Konstruktion wird bei dem von SCHERING und SCHMIDT [*6.105*] angegebenen Instrument umgangen. Die Nadel besteht hier aus einem dünnen Eisenplättchen, das auf einen Bronzedraht aufgekittet ist und im Feld eines Gleichstrommagneten in Längsrichtung magnetisiert wird. Dadurch entsteht ein zusätzliches Richtmoment, das von dem des Aufhängedrahtes unabhängig eingestellt werden kann. Dieses Instrument ist in Abb. 6.33 in der von RUMP [*6.101*] angegebenen Form vereinfacht dargestellt. Es besteht aus einem lamellierten geschlossenen Eisenkern E_1 mit der Erregerwicklung W_1, in dessen Luftspalt das Kobaltstahlplättchen N an einem Torsionsdraht D befestigt ist und schwingen kann. Durch einen zweiten Elektromagneten E_2 wird in der Plättchenebene ein magnetisches Feld erzeugt, das sowohl die Magnetisierung von N verstärkt als auch ein zusätzliches Drehmoment auf N ausübt und die Resonanzeinstellung erleichtert. Durch den geschlossenen

Eisenaufbau ist das Instrument gegen äußere Störfelder unempfindlich. Der Frequenzbereich dieses Gerätes liegt zwischen 20 und 2000 Hz. Nadelvibrationsgalvanometer werden oft mit Beleuchtungseinrichtung, Ableseskala und Empfindlichkeitsregler in einem Gehäuse zusammen montiert.

Von BUSCH [*6.27*] wird ein hochempfindliches Nadelvibrationsinstrument angegeben, bei dem der Ausschlag eines Primärinstrumentes durch einen Fotomultiplier um den Faktor 10^3 verstärkt und auf ein zweites Anzeigeinstrument übertragen wird. Damit wird eine Spannungsempfindlichkeit von 10^{-9} V/mm/m erreicht, die durch die Rauschspannung im Primärkreis begrenzt ist.

6.344 Drehspul-Vibrationsgalvanometer [*6.137*]

Drehspul-Vibrationsgalvanometer sind ähnlich wie das Meßsystem eines Schleifenoszillografen (s. § 6.71) aufgebaut oder enthalten eine sehr kleine Spule mit nur wenigen Windungen, die in einem homogenen Magnetfeld zu Schwingungen durch den Meßstrom angeregt wird. Es ist gegen Überlastung wesentlich empfindlicher als die in § 6.343 besprochenen Typen.

Zu dieser Kategorie ist auch das von MÖLLER [*6.82*] angegebene *Transformator-Resonanzgalvanometer* zu rechnen, dessen Spule aus einer kurzen Kupferhülse besteht, die als kurzgeschlossene Sekundärspule eines Transformators von der Meßspannung erregt wird. Die Empfindlichkeit liegt bei 10^{-6} A/mm/m.

6.345 Piezoelektrische Vibrationsgalvanometer

Von LAPORTE [*6.72*] wird ein piezoelektrisches Vibrationsgalvanometer angegeben, das aus Quarzstreifen von 0,3 mm Dicke und einigen Millimetern Breite mit aufgedampften Elektroden besteht, die das System zu Torsionsschwingungen anregen. Während das eine Ende eingespannt ist, wird das freie Ende durch eine Masse belastet, deren axiales Trägheitsmoment die Eigenfrequenz zwischen 45 und 1500 Hz bestimmt. Bei einem maximalen Torsionswinkel von 1° beträgt die erforderliche Meßspannung etwa 100 V. Mit einem geeigneten Verstärker lassen sich bei 50 Ω Eingangsimpedanz noch 5 μV nachweisen. Als Überlastungsschutz ist eine Glimmlampe parallel zum Schwinger geschaltet.

In *Tabelle 6.2* sind die Daten einiger Vibrationsgalvanometer zusammengestellt.

6.35 Röhrenvoltmeter [6.33, 6.95, 6.123, 6.130]

Die Empfindlichkeit von *Diodenvoltmetern,* die in § 6.32 behandelt sind, wird durch zwei Faktoren begrenzt: 1. die Skalenteilung wird bei Spannungen unterhalb von einigen Volt nichtlinear und hängt von der Diodenkennlinie ab; 2. der Strom bei Vollausschlag muß mindestens 50 μA betragen, damit er mit normalen Drehspulinstrumenten abgelesen werden kann. Das bedeutet, daß der Eingangswiderstand pro Volt etwa 10 kΩ beträgt. Um höhere Eingangsimpedanzen anwenden und kleinere Spannungen messen zu können,

werden *Röhrenvoltmeter* benutzt. Diese stellen Kombinationen von Meßverstärkern und einem Gleichrichterteil dar oder benutzen unmittelbar die Gleichrichtereigenschaften von Verstärkern unter besonderen Betriebsbedingungen.

Tabelle 6.2 Daten von Vibrationsgalvanometern

Bauart	Hersteller	Frequenz Hz	C_i pA/mm	C_u µV/mm
Schleifen-VG	H & B	25···3000	50···10^5	0,8···10^4
Saiten-VG	Kipp & Z.	100···1000	13···80	0,65···4
Spulen-VG	Cambridge	10···4000	2···5000	0,024···60
Nadel-VG	VEB GW	50	1,4	0,29
Nadel-VG	VEB GW	15···25	1,1	0,21
Nadel-VG	H & B	15···150	6,7···670	0,67···67
Nadel-VG	UdSSR M 501	50	100	15
Nadel-VG	UdSSR M 501	30···100	160	22

VEB GW = VEB Gerätewerk Karl-Marx-Stadt
UdSSR = Handelsunternehmen Mashpriborintorg, Moskau

6.351 Diodenvoltmeter mit Gleichspannungsverstärkung

Zur Messung höherer Spannungen läßt sich eine der in § 6.32 besprochenen Gleichrichterschaltungen benutzen, deren Gleichspannung am Ausgang von einem Gleichspannungsverstärker verstärkt und dem Meßgerät zugeführt wird. Dieser kann als direkt gekoppelter Verstärker (s. § 5.26) oder auch als modulierter Gleichspannungsverstärker (s. § 2.33) ausgebildet sein. In Abb. 6.34 ist das Prinzipschaltbild dieses Gerätes dargestellt. Die gleichgerichtete Span-

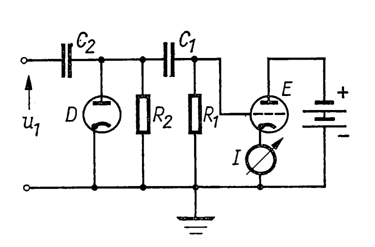


Abb. 6.34 Diodengleichrichter mit Gleichspannungsverstärker

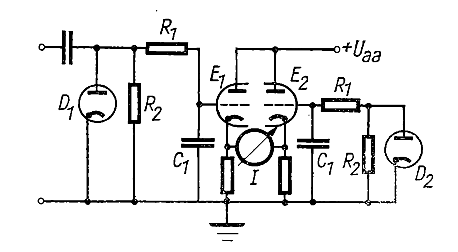


Abb. 6.35 Differentialvoltmeter

nung an R_2 wird über den Widerstand R_1 an das Gitter der Verstärkerröhre E gelegt und der Katodenstrom als Maß für die zu messende Spannung benutzt. Das R_1C_1-Filter verhindert den Eintritt der Wechselspannungskomponente in die Verstärkerstufe.

Zur Erhöhung der Stabilität dieser Meßanordnung kann man, wie in Abb. 6.35 geschehen, zur Schaltung in Abb. 6.34 eine gleiche symmetrische hinzu-

fügen und die Differenzspannung mit dem Anzeigeinstrument I zwischen den Katoden der Röhren E_1 und E_2 messen. Durch diese Maßnahme lassen sich Schwankungen der Betriebsspannungen und der Röhrenkennlinien größtenteils eliminieren.

6.352 Anodengleichrichtung

Die *Anodengleichrichtung* vereinigt in sich Verstärkung und Gleichrichtung des Eingangssignals und beruht auf der Verwendung eines B-Verstärkers (s. § 5.21). Unter den vielen Schaltungsmöglichkeiten sind in Abb. 6.36 einige häufig verwendete dargestellt. Das Eingangssignal u_x wird über den Koppelkondensator C_k an das Gitter der Röhre E gelegt; bei Spannungsquellen mit kleinem Innenwiderstand kann C_k kurzgeschlossen und der Gitterableitwiderstand R_g weggelassen werden. Die Gittervorspannung U_g wird so gewählt,

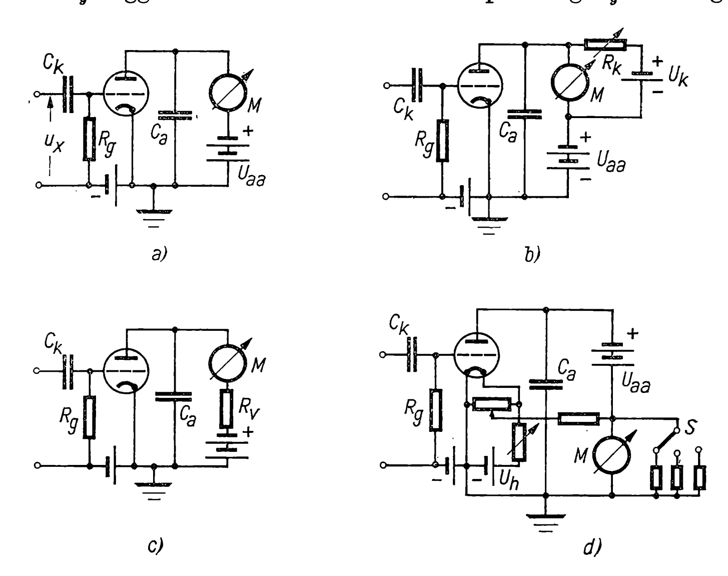


Abb. 6.36 Röhrenvoltmeter mit Anodengleichrichtung

daß der Arbeitspunkt der Röhre im unteren Knick ihrer Kennlinie liegt. Die Anode ist bei allen Schaltungen durch die Kapazität C_a für Wechselspannung geerdet. In der Schaltung *a*) zeigt das Meßinstrument M den gesamten Anodenstrom an. Um diesen für verschwindende Eingangsspannung kompensieren zu können, ist in der Schaltung *b*) ein besonderer Kompensationskreis mit Hilfsbatterie U_k vorgesehen, der durch Verstellen des Widerstandes R_k die Nullpunktseinstellung ermöglicht. In Schaltung *c*) ist dem meist niederohmigen Strommesser M ein hoher Widerstand R_v vorgeschaltet, um eine größere Linearität zwischen Eingangsspannung und Instrumentanzeige zu erzielen. Diese Schaltung hat allerdings den Nachteil, daß der Spannungsabfall an R_v vom Signal abhängt und bei großen zu messenden Spannungen

die Spannung an der Anode abfällt. In der Schaltung *d*) erfolgt die Nullspannungskompensation durch die Heizbatterie U_h und ein Potentiometer sowie Vorwiderstand. Damit im Ausgang ein sehr empfindliches Anzeigeinstrument benutzt werden kann, sind über den Schalter S verschiedene Nebenschlußwiderstände einzuschalten.

Die Anzeige dieser Röhrenvoltmeter ist so lange von der Frequenz unabhängig, bis Laufzeiteffekte in der Röhre wirksam werden. Im allgemeinen werden hierbei *Trioden* verwendet; *Pentoden* werden als Trioden geschaltet, da ihre Verwendung keine Vorteile bietet. Für große Signalspannungen werden Röhren mit kleinem Verstärkungsfaktor vorgezogen, da mit diesen eine genügend große negative Gittervorspannung angelegt werden und kein Gitterstrom auftreten kann. Die optimale Empfindlichkeit dieser Röhrenvoltmeter

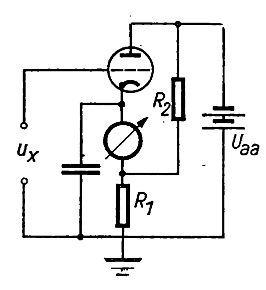


Abb. 6.37 Röhrenvoltmeter nach SCROGGIE

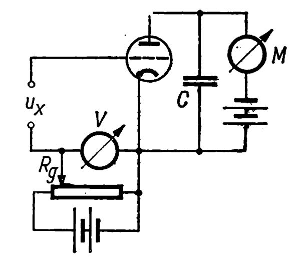


Abb. 6.38 Scheitelspannungsröhrenvoltmeter

hängt davon ab, wie genau der Anodenstrom für das Nullsignal kompensiert werden kann. Die Hauptschwierigkeit dabei liegt in der Veränderung der Kennlinie nach dem Einschalten und durch das Altern der Röhre. Zur Messung kleiner Signalspannungen müssen die Betriebsspannungen sehr gut stabilisiert sein. Die andere Möglichkeit besteht darin, Differenzschaltungen wie in Abb. 6.35 anzuwenden oder Veränderungen der Heizspannung, z. B. durch einen Abgriff der Gittervorspannung, auszugleichen [*6.134*].

Ein Beispiel für eine geringe Abhängigkeit von Anodenspannungsschwankungen gibt die in Abb. 6.37 gezeigte Schaltung nach SCROGGIE [*6.113*]. Sie gleicht der in § 4.17 gezeigten Schaltung zur Ermittlung des Durchgriffs D einer Röhre, bei der für $u_x = 0$ und $R_1/R_2 = D$ der Anodenstrom I_a verschwindet. Für dieses Widerstandsverhältnis ist I_a von Schwankungen der Anodenspannung unabhängig, und man erhält für den Anodenstrom die Beziehung

$$I_a = u_x \frac{S}{1 + S R_1}. \qquad (6/44)$$

6.353 Scheitelspannungsröhrenvoltmeter

Durch Anwendung der C-Gleichrichtung mit einer Elektronenröhre läßt sich die *Scheitelspannung* $\hat{u}_x$ des Signals messen. Die hierzu geeignete Schaltung ist in Abb. 6.38 wiedergegeben. Die Gittervorspannung kann mit Hilfe des

Potentiometers R_g verändert und am Voltmeter V abgelesen werden. Nach Anlegen der zu messenden Spannung wird die Gittervorspannung U_g so lange mittels R_g geändert, bis das sehr empfindliche Instrument M im Anodenkreis Strom anzeigt. Zur Glättung des Anodenstroms ist der Ladekondensator C vorgesehen. Die an V abgelesene Gittervorspannung entspricht dann dem Scheitelwert $\hat{u}_x$. Diese Meßmethode ist bei kleinen Signalspannungen nicht sehr genau; der Meßfehler hängt von der Kennlinienkrümmung am unteren Knick und von der zu messenden Spannung selbst ab. Voltmeter für hohe Spannung siehe [*6.13*].

6.354 Meßverstärker [*6.83*]

Zur Messung sehr kleiner Wechselspannungen werden *Röhren-* oder *Transistorverstärker* (s. § 5.26) mit direkter Kopplung der Gleichrichterstufe vorgeschaltet. Durch Anwendung negativer Rückkopplung läßt sich ein frequenzunabhängiger Verstärkungsfaktor und verschwindende Phasenverschiebung erzielen. Zur Messung in einem begrenzten Frequenzintervall werden *Schmalband-* oder auch *Resonanzverstärker* (s. § 5.233) benutzt, die als Widerstandsverstärker mit Siebgliedern oder auch als Überlagerungsverstärker ausgelegt sein können. Ein für den Frequenzbereich von 1—3 Hz geeigneter zweistufiger selektiver Röhrenverstärker mit linearer Verstärkung wird von Beattie und Conn [*6.18*] beschrieben.

Der nachgeschaltete Gleichrichter kann als Spitzengleichrichter zur Messung des Scheitelwertes verwendet werden; wird quadratische Gleichrichtung (s. § 6.322) angewandt, so erhält man Effektivspannungen am Anzeigeinstrument. Handelsübliche Röhrenvoltmeter sind mit einem geeichten Spannungsteiler am Signaleingang versehen, besitzen einen kleinsten Meßbereich von 1 mV bei Vollausschlag und Eingangsimpedanzen im Tonfrequenzbereich von einigen Megaohm. Der Frequenzbereich solcher Geräte umfaßt meist 5 Dekaden, d. h. von 10 Hz bis 1 MHz; von der zu messenden Spannung kann der Scheitelwert, der Mittelwert oder der Effektivwert am Anzeigeinstrument abgelesen werden [*6.15*].

6.355 Messung hoher Spannungen

Zur Messung hoher Wechselspannungen im Nieder- und auch im Hochfrequenzbereich mit Hilfe von Röhrenvoltmetern hoher Eingangsimpedanz werden *kapazitive Spannungsteiler* benutzt. Diese sind auch als Lastwiderstand eines Meßsenders zur Eichung von Empfängern im HF-Bereich von Nutzen. In Abb. 6.39 ist in *a*) der Aufbau eines kapazitiven Spannungsteilers, in *b*) die Ersatzschaltung des Teilers unter Berücksichtigung des Eingangskreises des angeschlossenen Röhrenvoltmeters dargestellt. Beträgt die Eingangskapazität des Spannungsmessers C_m und setzt man $C_1 = C + C_m$, so wird das *Übersetzungsverhältnis* des Spannungsteilers

$$\ddot{u} = U/U_1 = \frac{1/\omega C_1 + 1/\omega C_2}{1/\omega C_1} = 1 + C_1/C_2. \qquad (6/45)$$

Die Größe $ü$ ist demnach nur durch das Verhältnis C_1/C_2 bestimmt, solange der Eingangswiderstand R_m des Meßgerätes groß gegen $1/\omega C_1$ bleibt. Der Verlustwiderstand $R_2 = 1/(\omega C_2 \tan \delta)$ ist immer zu vernachlässigen, weil für C_2 nur verlustarme Kondensatoren verwendet werden [*6.73*].

6.356 Nullindikatoren [*6.40*]

Bei Verzicht auf Eichbarkeit und konstante Verstärkung lassen sich Röhrenvoltmeter als Nullinstrumente in Wechselstrombrücken und -kompensatoren verwenden.

Häufig wird hierzu eine *Abstimmanzeigeröhre* verwendet, die aus einem Triodensystem zur Verstärkung der Signalspannung und einem Abstimmanzeigesystem besteht, durch das die Bündelung des Elektronenstroms zu der mit einer scheibenförmigen Leuchtschicht versehenen Anode beeinflußt werden kann. Eine entsprechende Schaltung ist in Abb. 6.40 wiedergegeben. Das im

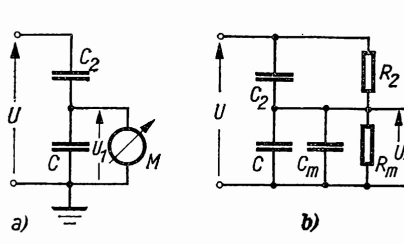


Abb. 6.39 Kapazitiver Spannungsteiler

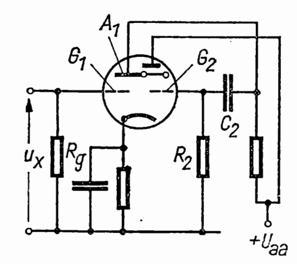


Abb. 6.40 Abstimmanzeigeröhre

Triodenteil verstärkte Eingangssignal wird über die Kapazität C_2 dem Steuergitter des Abstimmteils zugeführt. Die Größe des Leuchtwinkels auf der Leuchtschicht der Anode ist ein Maß für die Eingangsspannung. Zur Aussteuerung der Abstimmröhren EM 80 oder EM 84 werden am Gitter G_2 des Abstimmteils etwa 20 V benötigt.

Es gibt auch komplette *elektronische Nullindikatoren* mit eingebautem hochempfindlichem selektivem Verstärker, der im Ausgang eine Doppelabstimmröhre EMM 81 enthält. Der zwischen 16 und 1000 Hz arbeitende Verstärker ist durch Bandfilter in drei festbegrenzte Frequenzbänder unterteilt. In vier verschiedenen Empfindlichkeitsbereichen lassen sich Spannungen zwischen 0,1 μV und 200 V nachweisen.

Nulldetektoren für Brückenmessungen werden als selektive Röhren- oder Transistorverstärker ausgeführt, wobei die Nachweisgrenze bei 0,1 μV liegt [*6.2, 6.75, 6.96, 6.124*].

6.357 Logarithmische Röhrenvoltmeter [*6.56, 6.84*]

In einem logarithmischen Voltmeter ist die Anzeige dem Logarithmus des Eingangssignals proportional, d. h., es ist eine lineare *Dezibel*-Skala vorhanden. Man kann eine logarithmische Kennlinie mit Hilfe eines Verstärkers erzielen, der aus mehreren Stufen besteht, die mit *Regelpentoden* ausgerüstet sind

(vgl. § 4.15). Ein Ausführungsbeispiel ist schematisch in Abb. 6.41 dargestellt. Der Verstärker enthält zwei Regelröhren E_1 und E_2 in Widerstandskopplung, dessen Ausgangsspannung durch die Vakuumdiode D gleichgerichtet am Voltmeter M angezeigt wird. Die gleichgerichtete Ausgangsspannung wird als Regelspannung den Steuergittern der beiden Röhren zugeführt, wodurch annähernd eine logarithmische Charakteristik zustande kommt. Ein zweiter Lösungsweg sieht eine Diode als Eingangsstufe vor, deren Gleichspannung mit Hilfe eines Gleichspannungsregelverstärkers logarithmisch verstärkt und am Ausgang angezeigt wird.

6.358 Digitalmeßverfahren

De Sa [*6.102*] gibt ein Meßverfahren zur Bestimmung von Amplitude und Phase niederfrequenter Spannungen an, das auf der Anwendung des bipolaren Spannungs-Frequenzkonverters nach Jeffreys und MacKay [*6.60*] beruht.

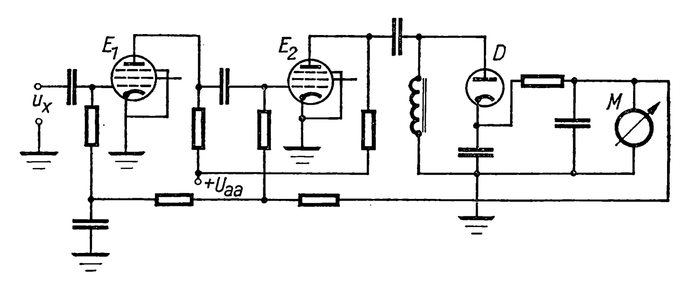


Abb. 6.41 Logarithmisches Röhrenvoltmeter

Dieser gibt positive Impulse bei positiver Eingangsspannung und umgekehrt, wobei bei konstanter Impulshöhe deren Frequenz linear mit der anliegenden Spannung variiert. In Verbindung mit einem Impulszähler läßt sich eine digitale Anzeige der Amplitude erreichen. Die minimale Eingangsamplitude liegt bei 200 mV bei Frequenzen bis zu 10 Hz.

6.36 Meßbrücken für Wechselstrom [*6.49, 6.71*]

Wechselstrommeßbrücken dienen in erster Linie zur Ermittlung komplexer Widerstände, wie Kapazitäten oder Induktivitäten; ihre spezielle Anwendung hierauf wird in den §§ 10 und 14 behandelt. In diesem Kapitel werden lediglich die Gleichgewichtsbedingungen für verschiedene Brückenschaltungen abgeleitet und die erreichbaren Empfindlichkeiten angegeben.

6.361 Abgleichbedingungen

In § 3.48 sind für die Wechselstrombrücken allgemein die Abgleichbedingungen abgeleitet, wobei die Brückenschaltung nach Abb. 6.42 zugrunde gelegt ist. Diese lautet

$$\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_4. \qquad (3/75)$$

Die Impedanzen $\boldsymbol{Z}$ sind komplexe Größen, die sich wie $\boldsymbol{Z}_k = R_k + \mathrm{j}X_k$ zusammensetzen. Damit wird für die Einstellung des Amplitudengleichgewichts gefordert, daß

$$R_1 R_3 = R_2 R_4 \quad \text{und} \quad X_1 X_3 = X_2 X_4 \tag{3/76}$$

und für das Phasengleichgewicht die Beziehungen

$$X_1/R_1 = X_4/R_4; \qquad X_2/R_2 = X_3/R_3 \tag{3/77}$$

erfüllt sind.

Die erzielbare Genauigkeit beim Abgleich von Wechselstrombrücken läßt sich aus der im Meßzweig „5" auftretenden differentiellen Spannung $\Delta \boldsymbol{u}$ ableiten, wenn das Brückengleichgewicht gestört ist und z. B. die Impedanz

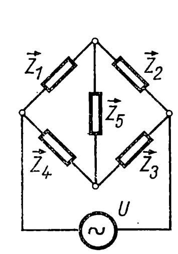


Abb. 6.42 Wechselstrombrücke

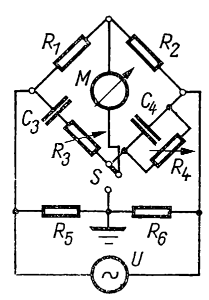


Abb. 6.43 Wien-Brücke

$\boldsymbol{Z}_4$ um $\Delta \boldsymbol{Z}_4$ zu groß eingestellt wird. Man findet hierfür die allgemein gültige Beziehung

$$\frac{\Delta \boldsymbol{Z}_4}{\boldsymbol{Z}_4} = -\frac{\Delta \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{U}} \cdot \frac{1 + (\boldsymbol{Z}_4/\boldsymbol{Z}_2)^2}{\boldsymbol{Z}_4/\boldsymbol{Z}_3}. \tag{6/46}$$

In dieser bedeuten $\Delta \boldsymbol{u}$ die kleinste noch nachweisbare Brückenspannung und $\boldsymbol{U}$ die angelegte Betriebsspannung.

6.362 Stromquellen und Indikatoren

Die Meßspannung wird mit einem der in § 6.2 behandelten Niederfrequenzgeneratoren erzeugt und der Brücke über einen ungeerdeten Eingangstransformator, erforderlichenfalls nach Verstärkung mit einem Gegentaktleistungsverstärker, zugeführt (s. § 5.246).

Als *Indikator* kann im Tonfrequenzbereich das *Telefon* verwendet werden, mit dem bei 500 Hz noch 10···1 nA nachgewiesen werden können. Oft werden die in § 6.34 besprochenen Resonanzinstrumente, häufiger die in § 6.35 behandelten *Röhrenvoltmeter* oder auch *Elektronenstrahloszillografen* (s. § 6.7) benutzt. Letztere weisen den großen Vorteil auf, daß der Nullabgleich für Amplitude und Phase unabhängig voneinander durchgeführt werden kann.

6.363 Brückenschaltungen

Die in Abb. 6.43 dargestellte *Wien-Brücke* (vgl. § 6.223) dient zur Messung von Kapazitäten; sie enthält in den Zweigen „1" und „2" nur ohmsche Widerstände. Im Zweig „3" liegt in Serie mit dem unbekannten Kondensator C_3 ein kleiner variabler Widerstand R_3, im Zweig „4" ein bekannter veränderlicher Kondensator C_4 mit einem hochohmigen Parallelwiderstand R_4. Im abgeglichenen Zustand gelten nach Gl. (3/75) die Beziehungen

$$R_1/R_2 = R_3/R_4 = C_4/C_3; \qquad C_3 C_4 = 1/(\omega^2 R_3 R_4). \tag{6/47}$$

Die gesuchte Kapazität C_3 errechnet sich damit aus den Gleichungen

$$C_3 = C_4 \frac{R_2}{R_1} \frac{(\omega C_4 R_4)^2 + 1}{(\omega C_4 R_4)^2} \approx C_4 \frac{R_2}{R_1}; \tag{6/48}$$

$$R_3 = \frac{R_1}{R_2} \frac{R_4}{(\omega C_4 R_4)^2 + 1}, \tag{6/48a}$$

wenn man $R_4 \gg 1/\omega C_4$ annimmt, was meist der Fall ist. Die Kenntnis der genauen Frequenz, die in die Abgleichbedingungen eingeht, ist also erforderlich.

Über die Verwendung der Wien-Brücke zur *Frequenzmessung* siehe § 6.54.

Der in der Abbildung eingezeichnete Wagnersche *Hilfszweig* hat den Zweck, den Nullzweig auf Erdpotential zu bringen. Hierzu werden zwei weitere Widerstände R_5 und R_6 in der angegebenen Weise angebracht und der Nullabgleich für beide Stellungen des Schalters S durchgeführt.

Die *Maxwell-Brücke* ist zur Bestimmung von *Induktivitäten* mit Hilfe einer Vergleichskapazität geeignet; ihre Schaltung ist in Abb. 6.44 dargestellt. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$L_3/C_2 = R_1 R_4; \qquad R_2 R_3 = R_1 R_4, \tag{6/49}$$

woraus folgt

$$L_3 = C_2 R_1 R_4 \tag{6/50}$$

$$R_3 = R_1 R_4/R_2. \tag{6/50a}$$

Im Gegensatz zur Wien-Brücke ist hier der Abgleich von der Frequenz unabhängig. Ein Vergleich der Schaltungen Abb. 6.43 und 6.44 läßt erkennen, daß man mit Hilfe der Vergleichskapazität C_4 in Abb. 6.43 bzw. C_2 in Abb. 6.44 durch Vertauschen der Brückenzweige „2" und „4" sowohl Kapazitäten als auch Induktivitäten messen kann. Diese Tatsache wird in einigen kommerziellen Geräten ausgenutzt.

Die *Schering-Brücke* [*6.65*] hat besondere Bedeutung zum Bestimmen der *dielektrischen Verluste* von Kondensatoren, Kabeln, Isolatoren und Wicklungen unter Hochspannung. In Abb. 6.45 ist sie für diese Anwendung dargestellt; sie wird von dem einseitig geerdeten Hochspannungstransformator $\ddot{U}$ gespeist und enthält auf der Hochspannungsseite den zu messenden Kondensator C_x, sowie den Vergleichskondensator C_n. Auf der geerdeten Seite der Brücke liegen

der veränderliche Widerstand R_2 sowie der variable Kondensator C_4 mit dem Parallelwiderstand R_4. Die Größen von R_2, R_4 und C_4 werden so gewählt, daß das Nullinstrument nur niedrige Spannung gegen Erde führt. Durch Verändern von R_2 und C_4 wird das Brückengleichgewicht eingestellt, und es gelten folgende Beziehungen

$$C_x = C_n R_4/R_2, \tag{6/51}$$

$$\tan \delta = \omega R_4 C_4. \tag{6/51 a}$$

Mit dieser Brückenmethode sind bei 50 Hz Verlustfaktoren zwischen 10^{-5} und 1 zu messen. Näheres siehe § 10.52.

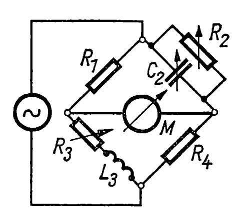


Abb. 6.44 Maxwell-Brücke

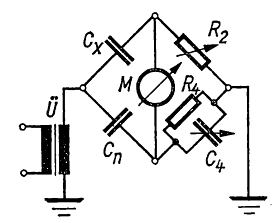


Abb. 6.45 Schering-Brücke

6.37 *Wechselstromkompensator* [6.106, 6.58]

Analog zum Gleichspannungskompensator (s. § 2.34) wird beim Wechselstromkompensator die Meßgröße durch eine bekannte Spannung kompensiert. Wie bei den Wechselstrombrücken sind dabei zwei Abgleichbedingungen zu erfüllen; die zu vergleichenden Spannungen müssen sowohl den gleichen Betrag als auch die gleiche Phasenlage besitzen. Als Nullindikatoren werden die gleichen wie in § 6.36 verwendet.

Als einfaches Beispiel ist in Abb. 6.46 die Schaltung eines Wechselstromkompensators wiedergegeben, bei dem die Kompensationsspannung aus zwei um 90° in der Phase verschobenen Einzelspannungen zusammengesetzt wird. Dies geschieht mit Hilfe eines streuarmen eisengeschlossenen Übertragers $\ddot{U}$ mit dem Übersetzungsverhältnis 1:1, dessen Sekundärspannung um 90° gegen den Primärstrom verschoben ist. Im Primärkreis von $\ddot{U}$ liegt das einstellbare Potentiometer R_n, im Sekundärkreis ein gleiches Potentiometer R_n'. Da die an R_n und R_n' liegenden Spannungen dem Betrag nach gleich und in der Phase um 90° verschoben sind, addieren sich die an den beiden Widerständen abgegriffenen Teilspannungen $a_w U_n$ und $a_b U_n'$ geometrisch und kompensieren die zu messende Spannung U_x unter folgenden Bedingungen

$$U_{xw} = a_w U_n; \qquad U_{xb} = a_b U_n', \tag{6/52}$$

wobei U_{xw} die Wirk-, U_{xb} die Blindkomponente der gesuchten Spannung, a_w und a_b die zwischen 0 und 1 einstellbaren Abgriffe der Potentiometer für die Wirk- bzw. Blindkomponente bedeuten. Da $|U_n| = |U_n'|$ ist, ergibt sich

$$U_x = U_n \sqrt{a_w^2 + a_b^2} \tag{6/53}$$

und

$$\tan \varphi = a_b/a_w. \tag{6/54}$$

Mit Hilfe des Nullindikators M (Vibrationsgalvanometer, Röhrenvoltmeter oder Elektronenstrahloszillograf) kann der Kompensationsabgleich vorgenommen werden.

Bei kommerziellen Wechselstromkompensatoren wird der „Normalstrom" I_n über einen Isolierstromwandler zugeführt, so daß auch Spannungen auf beliebigen Potentialen kompensiert werden können. Außerdem besitzt dieser Stromwandler primärseitige Anzapfungen und Vorwiderstände; auch die Sekundärwicklung ist unterteilt, damit bei verschiedenen Frequenzen dieselbe Vergleichsspannung U_n' erreicht wird. Ferner sind Umschalter vorhanden, um in allen vier Quadranten messen zu können.

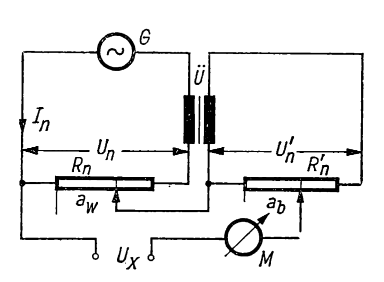


Abb. 6.46 Wechselstromkompensator

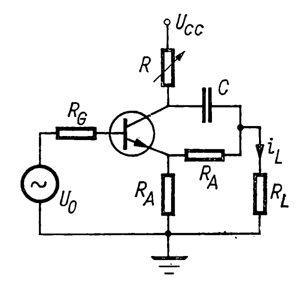


Abb. 6.47 Phasenschieber nach DAYBELL

Der Wechselstromkompensator wird zur Eichung von Wechselstrommeßgeräten sowie zur Messung von Eisenverlusten, Impedanzen, Übersetzungsverhältnissen von Transformatoren u. a. bis zu 1000 Hz benutzt, wobei die Fehlergrenze bei 50 Hz $\pm$ 1‰, bei 150 Hz $\pm$ 2‰ beträgt und bei 1 kHz bis $\pm$ 1,5% ansteigt.

Bei dem von TRAUTNER [*6.126*] angegebenen Kompensator wird als Bezugsnormal der Spannung ein Glühfaden aus reinem Platindraht benutzt. Der zwischen 1,5 Hz und 5 kHz verwendbare Kompensator nach SOMMERVILLE [*6.116*] besteht aus einer mit Elektronenröhren aufgebauten Schaltung, mit der zwei gleich große, jedoch um 90° phasenverschobene Wechselspannungen erzeugt werden, die zwei Spannungsteilen zugeführt werden. Vor Meßbeginn wird der Betrag beider Spannungen abgeglichen. Der Phasenwinkel wird nach Gl. (6/54) ermittelt. Die Genauigkeit wird mit $\pm$ 1% angegeben. Von HELKE [*6.52*] wird eine Regelbrücke als Wechselspannungsnormal zum Prüfen von Präzisionsinstrumenten angegeben.

Mit der von DAYBELL [*6.31*] beschriebenen Transistorschaltung nach Abb. 6.47 läßt sich ein Ausgangsstrom erzeugen, der gegen die Eingangsspannung eine einstellbare Phase besitzt und konstante, phasenunabhängige Amplitude aufweist. Widerstand R und Kapazität C stellen die phasenschiebenden Elemente dar, während die Widerstände R_A den Signalstrom vom Emitter in zwei gleiche Teile aufspalten, von denen einer durch den Lastwiderstand R_L

fließt. Für einen idealen Transistor und kleinen Lastwiderstand R_L ergibt sich die Beziehung

$$\dot{i}_L = \frac{U_0}{R_A} - 2\,\frac{U_0}{R_A}\cdot\frac{R}{R + 1/\mathrm{j}\,\omega C} = \frac{U_0}{R_A}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi},$$

wobei $\tan(\varphi/2) = \omega R C$. Der Signalstrom i_L besitzt einen konstanten Betrag U_0/R_A und kann durch Verändern von R in großen Grenzen phasenverschoben werden. Mit einer Doppelschaltung dieser Art läßt sich ein einfacher Wechselstromkompensator konstruieren.

Von Wilkins und Harkness [*6.133*] wird zur Eichung von Wechselstrommeßgeräten ein Oszillator für den Frequenzbereich 30 Hz bis 5 kHz konstanter Ausgangsspannung und variabler Phasenlage benutzt.

6.4 Leistungsmessung bei Wechselstrom [*6.51*]

Nach § 6.12 beträgt die *Wirkleistung* bei einphasigem Wechselstrom

$$P = U I \cos\varphi. \tag{6/8a}$$

Enthalten Strom und Spannung Oberwellen der Amplitude U_1, U_2, ... bzw. I_1, I_2, ..., so gilt für die Leistung

$$P = U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + U_3 I_3 \cos\varphi_3 + \dots, \tag{6/13}$$

wobei die Phasenwinkel φ_1, φ_2 usf. sich auf die einzelnen Harmonischen beziehen.

6.41 Elektrodynamometer

Die Wirkleistung P kann unmittelbar mit dem *Elektrodynamometer*, das in § 6.312 besprochen ist, gemessen werden, wobei die feststehende (dickdrähtige) Spule vom Hauptstrom, die bewegliche von einem zur Spannung U proportionalen Strom durchflossen wird. Um keine zusätzliche Phasenverschiebung zwischen dem Strom in der beweglichen Spule und der Spannung U zu erhalten, müssen dieser Spule induktionsfreie Widerstände (s. § 9.3) vorgeschaltet werden. Kleine Leistungen werden mit Torsionswattmetern mit Fadenaufhängung und Spiegelablesung gemessen. Handelsübliche Instrumente besitzen für den Strompfad eingebaute Shunts und für den Spannungspfad feste Vorwiderstände. Für höhere Stromstärken werden *Stromwandler* (s. § 6.332) mit 5-A-Ausgang vorgeschaltet.

Für genaue Leistungsangaben ist es von Bedeutung, ob der Anschluß der Spannungsspule, von der Last her gesehen, vor oder hinter der Stromspule gemacht wird (vgl. Abb. 6.48). Besitzt die Stromspule den Widerstand R_i, der Spannungspfad den Widerstand R_u, so findet man die Leistungsabgabe P_G des Generators G bzw. die Leistungsaufnahme P_L der Last R_L aus

Schaltung *a*)	Schaltung *b*)
$P_G = I U' \cos\varphi = I U \cos\varphi + I^2 R_i;$	$P_G = I' U \cos\varphi = I U \cos\varphi + U^2/R_u;$
$P_L = I' U \cos\varphi = I U \cos\varphi - U^2/R_u;$	$P_L = I U' \cos\varphi = I U \cos\varphi - I^2 R_i.$

Die sich hieraus ergebende Korrektur muß angebracht werden, wenn der Eigenverbrauch I^2R_i bzw. U^2/R_u mindestens die halbe Größe der Klassentoleranz des Gerätes erreicht.

Einzelheiten über Präzisionselektrodynamometer und ihre Eichung siehe [*6.24, 6.38, 6.53, 6.108, 6.132*]; über ein empfindliches Differentialwattmeter siehe [*6.28*].

Die bei der Leistungsmessung durch Elektrodynamometer bei höheren Frequenzen bis 20 kHz auftretenden Schwierigkeiten werden von ARNOLD [*6.9*] behandelt. Für genaue Messungen ist auf sorgfältige Abschirmung und auf die Vermeidung von Frequenzfehlern zu achten.

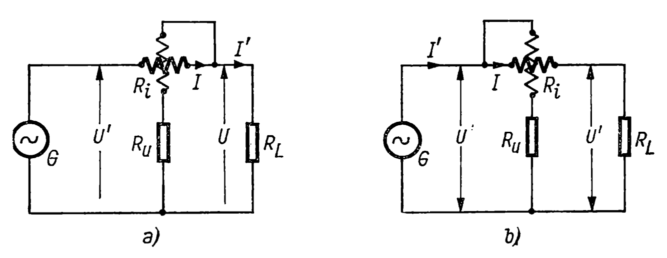


Abb. 6.48 Schaltung von Leistungsmessern

Die Wirkleistung in einem *Dreileitersystem* mit gleicher Belastung (s. § 6.14) wird mit einem gewöhnlichen elektrodynamischen Meßwerk in der Weise gemessen, daß der Strom in *einem* Leiter und die Spannung desselben Leiters gegen die beiden anderen (Phasenspannung) dem Meßwerk zugeführt wird.

Nimmt man im Spannungspfad eines Elektrodynamometers eine Phasendrehung um 90° vor, indem man eine große Serienkapazität einschaltet, so wird die *Blindleistung*

$$P_b = U \cdot I \sin \varphi \qquad (6/55)$$

angezeigt. Infolge des frequenzabhängigen Blindwiderstandes der Vorschaltkapazität sind *Blindleistungsmesser* stark von der Frequenz abhängig.

Zur Messung der *Scheinleistung* $P_s = UI$ muß der Phasenwinkel φ beseitigt werden. Dies geschieht z. B. dadurch, daß man im Spannungs- und Strompfad Gleichrichter in Graetz-Schaltung (s. § 5.15) mit Glättungskondensator anbringt, wodurch in beiden Meßspulen Gleichströme fließen.

6.42 Thermische Leistungsmesser [*6.43*]

Durch die zuerst von DUDELL (1904) angegebene Methode lassen sich auch mit den in § 6.314 behandelten thermischen Meßgeräten Leistungen bestimmen. Dieses Verfahren ist besonders bei hohen Frequenzen von Bedeutung, wo andere Verfahren versagen.

Das Prinzip dieser Methode ist aus Abb. 6.49 erkenntlich. Dem Verbraucher R_L wird der Strom $I - 2i_u$ bei der Spannung $U - IR_i$ zugeführt. Parallel zu R_i liegen die Heizleiter H_1 und H_2, die von den Strömen $i + i_u$ bzw. $i - i_u$ durchflossen werden, wenn durch den Vorwiderstand R_u der gegen I

kleine Strom $2i_u$ fließt. Beide Heizer nehmen entsprechend dem Quadrat ihrer Strombelastung verschiedene Übertemperaturen an, deren Differenz sich aus

$$\Delta t = t_1 - t_2 = K_1[(i + i_u)^2 - (i - i_u)^2] = K_1 i \cdot i_u \tag{6/56}$$

berechnet, wobei K_1 eine Apparatekonstante ist. Da $i \sim I$ und $i_u \sim U$ ist, ergibt sich aus Gl. (6/56)

$$\Delta t = K_2 U I \cos \varphi .$$

Die Temperaturdifferenz Δt zwischen den beiden Heizleitern wird mit Hilfe eines Differentialthermoelementes unmittelbar gemessen.

6.43 *Leistungsmessung mit dem Elektrometer*

Mit dem in § 2.14 behandelten *Quadrantenelektrometer* lassen sich auch bei hohen Frequenzen Leistungsmessungen durchführen. Die hierfür anzuwendende Nadelschaltung (Abb. 6.50) liefert nach Gl. (2/26) einen Ausschlag, der

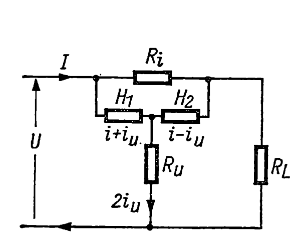


Abb. 6.49 Thermischer Leistungsmesser

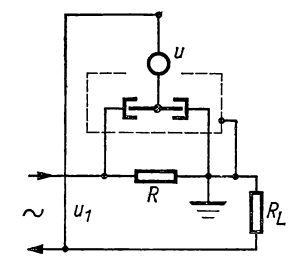


Abb. 6.50 Elektrometrische Leistungsmessung

dem Produkt aus Nadelspannung und Quadrantenspannung proportional ist. Wird das Instrument als Leistungsmesser verwendet, so tritt an die Stelle der Nadelspannung der Augenblickswert der Wechselspannung und anstelle der Vorspannung der Spannungsabfall an einem Serienwiderstand R im Strompfad. Damit wird der Elektrometerausschlag der Wirkleistung am Lastwiderstand R_L proportional. Für höhere Frequenzen ist die Eigenkapazität des Instrumentes (10···50 pF) zu berücksichtigen.

6.44 *Leistungsmessung mit Katodenstrahloszillografen [6.121]*

Die bereits 1911 von Ryan angegebene Meßmethode ist in einem großen Frequenzbereich brauchbar; die Anordnung ist in Abb. 6.51 dargestellt. In Serie mit dem Lastwiderstand Z, dessen Leistungsaufnahme ermittelt werden soll, ist eine verlustfreie Kapazität C gelegt. Die an beiden Widerständen durch den Laststrom i hervorgerufenen Spannungsabfälle werden an das senkrechte und waagerechte Ablenkplattenpaar gelegt, wodurch der Katodenstrahl auf dem Leuchtschirm eine Ellipse beschreibt. Die Fläche dieser Ellipse errechnet sich aus

$$A = \int k_1 u_z k_2 \, \mathrm{d}u_c = k_1 k_2 \frac{1}{C} \int u_z i \, \mathrm{d}t, \tag{6/57}$$

wobei k_1 und k_2 Proportionalitätsfaktoren sind, die sich aus der Ablenkempfindlichkeit des Oszillografen ergeben. Da allgemein die Leistung

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u i \,\mathrm{d}t$$

ist, folgt durch Vergleich mit Gl. (6/57) die Beziehung

$$P = \frac{A C f}{k_1 k_2}, \tag{6/58}$$

wobei $f = 1/T$ die Wechselspannungsfrequenz ist.

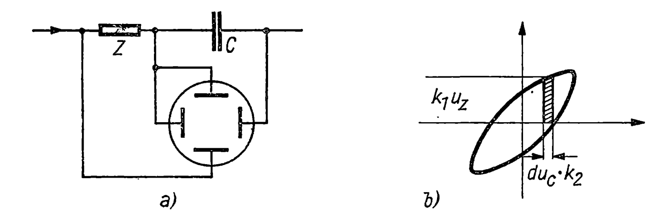


Abb. 6.51 Leistungsmessung mit dem ESO

6.45 *Röhrenwattmeter* [*6.93, 6.127, 6.131*]

Die Methode beruht auf der Produktbildung mit Hilfe von Trioden in B-Verstärkerschaltung (vgl. § 6.322) im quadratischen Bereich der Röhrenkennlinie. In der Schaltung treten Gitterspannungen als Summe bzw. Differenz von zu u bzw. i proportionalen Spannungen auf. Es gilt

$$u_{g1} = ku + iR;$$
$$u_{g2} = ku - iR.$$

Die Differenz der Anodenströme wird zu jedem Zeitpunkt dem Wert

$$u_{g_1}^2 - u_{g_2}^2 = k^2u^2 + 2kRui + R^2i^2 - k^2u^2 + 2kRui - R^2i^2 = 4kRu \cdot i$$

proportional, so daß der zeitliche Mittelwert der Wirkleistung $UI \cos\varphi$ entspricht. Eine geeignete Schaltung zeigt Abb. 6.52. Der Widerstand R ist in diesem Fall durch R_{i1} und R_{i2} bestimmt und k durch den Abgriff an R_u gegeben. Der Widerstand R_u muß sehr groß, R_i klein gegen den Lastwiderstand Z sein; dann ist die an R_u abgegriffene Spannung annähernd U proportional, während die Teilspannungen an R_{i1} bzw. R_{i2} dem Gesamtstrom entsprechen. Dem Gitter von E_1 wird die Summe, dem von E_2 die Differenz der Teilspannungen zugeführt. Durch quadratische Gleichrichtung und Differenzbildung im Anodenkreis gibt das Anzeigeinstrument M unmittelbar die Wirkleistung an. Über weitere elektronische Leistungsmesser siehe [*6.20, 6.109*].

6.46 Induktionszähler [6.91]

Zur Messung der elektrischen Arbeit bei Wechselstrom werden häufig *Wattstundenzähler* auf elektrodynamischer Grundlage benutzt; es handelt sich um ein integrierendes Meßgerät, das ausschließlich bei technischem Wechselstrom angewandt wird. Neben dem *Magnetmotorzähler*, dessen Gleichstromausführung in § 2.52 behandelt ist, werden häufig *Induktionszähler* verwendet.

In Abb. 6.53 ist vereinfacht das Meßwerk eines Wechselstrom-Induktionszählers dargestellt. Es besteht aus der Läuferscheibe S aus Aluminium mit senkrechter Achse A, deren Umdrehungszahl ein Maß für die elektrische Arbeit

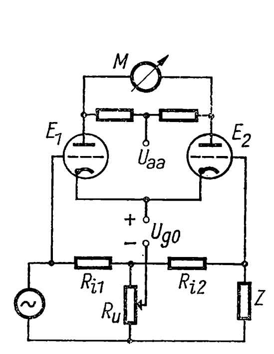


Abb. 6.52 Röhrenwattmeter

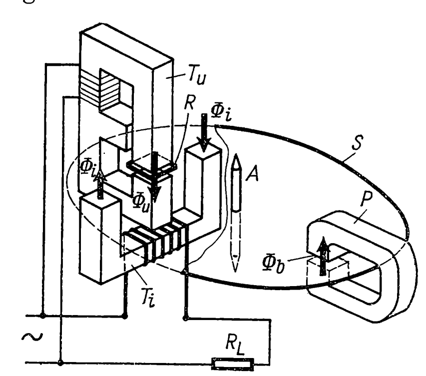


Abb. 6.53 Meßwerk eines Wechselstrominduktionszählers

VAh) ist. Das Drehmoment wird durch zwei Induktionssysteme, den Spannungstriebkern T_u und den Stromtriebkern T_i, auf S ausgeübt. Diese erzeugen an ihren Polflächen magnetische Wechselflüsse, die in der Scheibe Wirbelströme induzieren und unter der Wirkung von Lorentz-Kräften auf die Scheibe ein Drehmoment ausüben. Das Wesentliche bei der Konstruktion des Zählers besteht darin, daß die magnetischen Wechselflüsse in T_u und T_i um 90° phasenverschoben sind, wenn der Lastwiderstand ohmisch ist. Der Stromtriebkern T_i ist direkt in den Meßkreis geschaltet und erzeugt an den beiden Polflächen einen magnetischen Fluß Φ_i mit entgegengesetzter Richtung. Der Spannungstriebkern ist bis auf den Arbeitsspalt für die Läuferscheibe und einen Korrekturspalt magnetisch geschlossen und erzeugt daher einen magnetischen Fluß Φ_u, der um 90° gegen Φ_i phasenverschoben ist. Die sich in der Läuferscheibe ausbildenden Wirbelströme sind der zeitlichen Änderungsgeschwindigkeit der Flüsse Φ_i und Φ_u proportional. Wegen der Phasendifferenz zwischen Φ_i und Φ_u sowie zwischen Induktionsstrom und dem diesen erzeugenden Fluß tritt insgesamt ein auf die Achse A bezogenes Drehmoment auf, das sich aus der Beziehung

$$M = K\Phi_u\Phi_i \sin\beta \tag{6/59}$$

berechnet, wobei K eine Apparatekonstante und

$$\beta = \alpha - \varphi$$

ist. Der Winkel α gibt die Phasenverschiebung zwischen den beiden magnetischen Flüssen Φ_u und Φ_i wieder, der durch entsprechende Korrekturen auf 90° gebracht wird, so daß in Gl. (6/59) $\sin(\alpha - \varphi) = \cos\varphi$ gesetzt werden kann. Durch den von einem Permanentmagnetsystem P erzeugten magnetischen Fluß Φ_b wird in der Läuferscheibe S ein mit der Drehzahl proportionales Drehmoment M_b erzeugt, das dem Antriebsmoment M aus Gl. (6/59) das Gleichgewicht hält. Damit wird die Umdrehungszahl n ein Maß für die verbrauchte elektrische Arbeit $W = \int_0^t P_w \, dt$. Durch einen Kurzschlußring R um die Polfläche des Spannungstriebkerns wird für eine exakte Phasenlage von $\alpha = \pi/2$ gesorgt.

Um die *Blindleistung* $UI \sin\varphi$ mit dem Induktionszähler messen zu können, macht man durch geeignete Mittel den Phasenwinkel α zu Null.

Die beim Induktionszähler auftretenden Meßfehler sind vielfältig; durch Temperaturschwankungen wird der spezifische Widerstand der Läuferscheibe, die magnetische Permeabilität der Eisenkerne und der Widerstand der Wicklungen verändert. Im Mittel beträgt dieser Fehler $\pm$ 1‰/grd.

Der am häufigsten verwendete Zählertyp ist für eine Nennspannung von 220 V und einen Nennstrom von 10 oder 15 A eingerichtet. Bei hohen Spannungen und Strömen wird der Zähler über Spannungs- oder Stromwandler angeschlossen. Der Eigenverbrauch im Spannungspfad liegt bei 1 VA, der im Strompfad bei 0,3 VA. Die Nennfrequenz (meist 50 Hz) muß sehr genau eingehalten werden, da bei Abweichungen ein Fehler auftritt, der abhängig von Leistungsfaktor und Belastung ist.

6.5 Frequenzmessung bei Tonfrequenz [*6.103*]

In diesem Abschnitt werden lediglich die im Nieder- und Tonfrequenzbereich anwendbaren Verfahren zur Frequenzbestimmung behandelt; in § 7.4 sind die absoluten Verfahren der Frequenzzählung ausführlicher behandelt.

6.51 Absolute Frequenzmessung; Zählverfahren

Bei der absoluten Frequenzmessung wird die Zahl der Schwingungen innerhalb eines bekannten Zeitintervalls, das mit hoher Genauigkeit definiert ist, bestimmt. Zur Festlegung der Meßzeit dienen in erster Linie *Quarzuhren* (vgl. Bd. I, § 3.5), deren Genauigkeit 10^{-8} bis 10^{-9} beträgt.

In Abb. 6.54 ist das Meßprinzip in Form eines Blockschaltbildes dargestellt [*6.12*]. Das Signal, dessen Frequenz gemessen werden soll, wird nach Verstärkung in V einem Impulsformer I zugeleitet, der bei jedem Vorzeichenwechsel der Spannung einen scharfen Impuls erzeugt. Diese Impulse werden einem weiteren Verstärker G mit einem *Gatter* zugeführt und schließlich in einem elektronischen Zähler Z angezeigt. Die „Zeitbasis" wird von einer Quarzuhr Q erzeugt, die mit dekadischen Frequenzteilern ausgerüstet ist und einen exakten Sekundenimpuls liefert. Wird der Zählknopf K betätigt, so öffnet der Zeit-

geber den Verstärker G und schließt diesen wieder nach genau 1 s. Die an Z abzulesende Impulszahl entspricht der zu bestimmenden Frequenz.

Die Genauigkeit dieser Methode ist durch die Stabilität der Normalfrequenz und durch die Tatsache begrenzt, daß nur eine ganze Zahl von Impulsen gezählt werden kann. Um also eine Frequenz von 100 Hz mit einer Genauigkeit von 10^{-5} angeben zu können, muß das Meßintervall 10^3 s betragen. Für gleiche Genauigkeit ist unabhängig von der Frequenz die gleiche Zählrate erforderlich; bei hohen Frequenzen wird daher die Meßzeit geringer. Die obere Grenze dieses Verfahrens liegt bei 1 kHz. Näheres über elektronische Zähler siehe § 7.43.

6.52 *Frequenzvergleich*

Ein sehr einfacher Weg der Frequenzmessung beruht auf dem Vergleich der unbekannten Frequenz mit der geeichten eines stabilen Oszillators (s. § 5.4). Auf diesem Prinzip beruht der *Überlagerungsfrequenzmesser*. Er besteht aus einem abstimmbaren, geeichten Oszillator, einem Detektor und einem

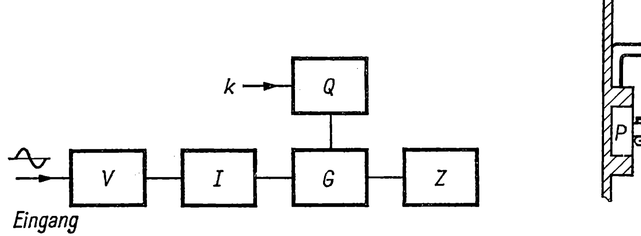


Abb. 6.54 Frequenzmessung durch Zählung

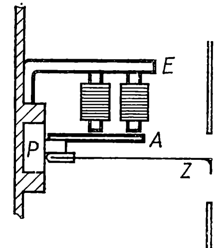


Abb. 6.55 Zungenfrequenzmesser nach FRAHM

Nachweisinstrument. Das Signal mit der gesuchten Frequenz und der Oszillatorausgang werden dem Detektor oder der Mischstufe zugeleitet. Die Ausgangsfrequenz dieser Mischstufe bildet die Differenz $\Delta f = f_n - f_x$ der beiden zugeführten Frequenzen und kann durch Abstimmen des Normalfrequenzgenerators zum Verschwinden gebracht werden. Der Mischerausgang wird an ein Telefon, einen Katodenröhrenoszillografen oder ein Röhrenvoltmeter angeschlossen.

Die Genauigkeit dieser Methode hängt von der Frequenzstabilität des Vergleichsoszillators ab und erreicht höchstens den Wert 10^{-4}. Hinzu kommt die Schwierigkeit, die Oszillatorfrequenz an der Skala auf 10^{-3} oder besser abzulesen. Zur genauen Festlegung der Normalfrequenz f_n werden bei größeren Genauigkeitsansprüchen quarzgesteuerte Oszillatoren zur Eichung bei einer oder mehreren Frequenzen zusätzlich benutzt.

Anstelle des abstimmbaren Oszillators kann auch ein Festfrequenzoszillator hoher Stabilität benutzt und die Schwebungsfrequenz Δf nach anderen Methoden ermittelt werden. Ist z. B. $f_n = 50000$ Hz, $f_x = 50100$ Hz, d. h. $\Delta f = 100$ Hz und wird Δf nur auf 1% bestimmt, so liegt die Gesamtgenauigkeit bei $2 \cdot 10^{-5}$.

6.53 *Zungenfrequenzmesser*

Dieses Meßverfahren besteht darin, daß durch den Wechselstrom der gesuchten Frequenz ein *mechanischer Resonator* kleiner Dämpfung angeregt wird, dessen Eigenfrequenz bekannt ist.

Der bekannteste Vertreter dieses Instruments ist der *Zungenfrequenzmesser*. Er enthält eine Anzahl nebeneinander befestigter federnder Stahlzungen, deren Frequenzen in kleinen Schritten abgestimmt sind und die gemeinsam durch Wechselstrom der gesuchten Frequenz zu Transversalschwingungen angeregt werden. Die Zunge mit der größten Schwingungsamplitude stimmt in ihrer Frequenz mit der gesuchten überein.

Der Aufbau des elektromagnetischen Zungenfrequenzmessers nach FRAHM ist aus Abb. 6.55 zu entnehmen. Die hintereinander angeordneten Stahlzungen Z sind gemeinsam auf einer elastischen Platte P montiert und werden durch einen aus dem Eisenanker A und dem Elektromagneten E bestehenden Antrieb mit der doppelten Meßfrequenz zu Transversalschwingungen angeregt. Die Zunge, welche eine maximale Schwingungsamplitude zeigt, entspricht der gesuchten Frequenz.

Zungenfrequenzmesser werden für Frequenzen zwischen 10 und 1500 Hz hergestellt; der Frequenzabstand zwischen benachbarten Zungen beträgt meist 1%. Durch Verwendung von *Nivarox*, einer berylliumhaltigen Eisen-Nickel-Legierung, deren Elastizitätsmodul zwischen 0 und +60 °C konstant ist, verschwindet der Temperaturfehler.

Zu den Resonanzinstrumenten ist auch der *Zeigerfrequenzmesser* von SATTELBERG [*6.104*] zu rechnen, der als mechanischen Resonator eine elektromagnetisch angetriebene Stimmgabel von 50 Hz Eigenfrequenz benutzt. Zur Frequenzmessung wird im aufsteigenden Ast der Resonanzkurve die Amplitude bestimmt; der Meßbereich liegt zwischen 49,95 und 50,05 Hz.

6.54 *Frequenzmeßbrücken*

In § 6.363 ist bereits darauf hingewiesen worden, daß die von der Meßfrequenz abhängigen Abgleichbedingungen für die Wien-Brücke auch zur Frequenzmessung herangezogen werden können. Aus den Gln. (6/48) folgt für die Resonanzfrequenz die Beziehung

$$\omega^2 = \frac{1}{R_3 R_4 C_3 C_4}\,. \tag{6/60}$$

Macht man $R_1 = 2R_2$ und $C_3 = C_4$, dann folgt daraus

$$R_3 = R_4 \quad \text{und} \quad \omega = 1/R_3 C_3. \tag{6/60a}$$

Diese als *Wien-Robinson-Brücke* bezeichnete Schaltung wird in einem Frequenzbereich von 15 Hz bis 12 kHz verwendet, wobei der Meßfehler bei 1% liegt. Die Brücke wird durch gleichzeitiges Variieren der Widerstände R_3 und R_4 abgeglichen.

Wesentlich genauere Frequenzmessungen erlaubt die in Abb. 6.56 dargestellte *Resonanzbrücke*, die aus drei ohmschen Widerständen R_2, R_3, R_4 und einem Serienresonanzkreis $R_1 L_1 C_1$ besteht (vgl. § 3.44). Bei Brückenabgleich sind folgende Bedingungen erfüllt:

$$R_1/R_2 = R_3/R_4; \qquad \omega^2 = 1/L_1 C_1. \tag{6/61}$$

Meist werden die Widerstände R_2, R_3, R_4 gleich groß und gleich dem Dämpfungswiderstand R_1 gemacht. Die erzielbare Genauigkeit liegt bei 10^{-5}.

Scott-Brücke [*6.112*]. Das in Abb. 6.57 gezeigte Doppel-T-Filter sperrt bei einer bestimmten Frequenz den Durchgang zwischen Ein- und Ausgang dieses Vierpols. Aus den allgemeinen Vierpolgleichungen des § 3.6 läßt sich berechnen, daß für die Bedingung

$$R_1/R_2 = C_2/4C_1 \tag{6/62}$$

das Signal am Filterausgang verschwindet. Hält man C_1 und C_2 konstant, so müssen zum Frequenzabgleich R_1 und R_2 gemeinsam, wie in der Abbildung

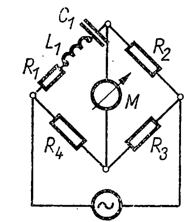


Abb. 6.56 Resonanzbrücke

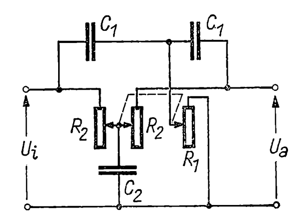


Abb. 6.57 Doppel-T-Filter

angedeutet, geändert werden, um die Bedingung (6/62) zu erfüllen. Die Resonanzstelle des Sperrfilters ergibt sich dann aus der Beziehung

$$\omega^2 = 2/R_2^2 C_1 C_2, \tag{6/63}$$

oder, mit $R_2 = 2R_1$ und daher $C_2 = 2C_1$,

$$\omega = 1/R_2 C_1. \tag{6/63a}$$

Das Doppel-T-Filter läßt sich auch als Gegenkopplung eines Verstärkers mit großer Frequenztreue benutzen. Dieser stellt dann einen eichbaren Frequenzmesser für NF dar, da er nur für die Frequenzbedingung (6/63a) maximale Spannung abgibt.

6.55 *Direkt anzeigende Frequenzmesser*

Zur unmittelbaren Frequenzanzeige für Betriebsmessungen bei 50 Hz werden elektrodynamische Meßwerke (s. § 6.312) verwendet, die eine bewegliche und zwei feste Spulen besitzen, deren Wicklungsebenen senkrecht aufeinander stehen. Durch vorgeschaltete Blindwiderstände wird in den Festspulen eine Phasenverschiebung von 90° und damit ein magnetisches Drehfeld erzeugt. Das auf die bewegliche Spule ausgeübte Drehmoment ist innerhalb eines beschränkten Ausschlages der Frequenz proportional.

Zu den direkt anzeigenden Verfahren sind auch Schaltungen zu rechnen, bei denen eine Kapazität C, die auf eine bekannte Spannung U aufgeladen ist, während jeder Wechselspannungsperiode über einen Gleichstrommesser entladen wird. Der Mittelwert des Entladungsstromes ist

$$i = f C U, \tag{6/64}$$

d. h., er ist der gesuchten Frequenz proportional. Eine geeignete Schaltung für den Tonfrequenzbereich ist vereinfacht in Abb. 6.58 wiedergegeben. Sie besteht aus den Thyratrons T_1 und T_2 (s. § 4.35), dem Ladekondensator C und dem Gleichstrommesser M. Die Gittervorspannung beider Röhren ist so eingestellt, daß sie gewöhnlich sperren. Durch die Meßspannung wird in den

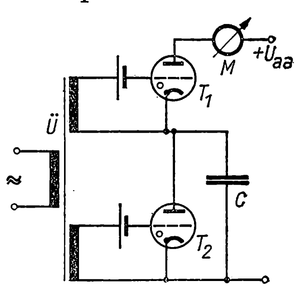


Abb. 6.58 Thyratron-Frequenzmesser

Sekundärwicklungen des Transformators $\ddot{U}$, die mit vertauschtem Wicklungssinn an die Gitter von T_1 und T_2 gelegt sind, während jeder Periode abwechselnd eine positive Zündvorspannung an den Röhren erzeugt. Ist zunächst T_1 gezündet, so wird der Kondensator C auf die Spannung U aufgeladen; in der nächsten Halbperiode ist T_1 gesperrt und T_2 gezündet, wodurch sich die Ladung UC über T_2 entlädt. Im Strommesser M wird nach Gl. (6/64) der mittlere Ladestrom gemessen, der proportional zur Frequenz ist.

Dieses Verfahren hat den großen Vorzug, daß die gemessene Frequenz praktisch unabhängig von der Signalform ist, im Gegensatz zur Brückenschaltung, deren Abgleich schwierig ist, wenn die Meßspannung Oberwellen enthält.

Die durch den Zündvorgang der Thyratrons in Abb. 6.58 begrenzte obere Meßfrequenz läßt sich stark erweitern, wenn die Thyratrons durch eine *Multivibrator*schaltung (vgl. § 5.53) ersetzt werden. Mit dieser werden identische Impulse im Rhythmus der ankommenden Wechselspannung erzeugt und wie bei der obigen Methode als Mittelwert gemessen. Die Genauigkeit beträgt etwa 1%. Näheres siehe [*6.66*].

6.6 Phasenmessung

Die *Phasendifferenz* zweier periodischer Signale ist nur dann definiert, wenn die Signale gleiche Frequenz und Kurvenform besitzen. Für beliebige Signalformen ist die Anwendung der aus der Impulstechnik übernommenen Begriffe wie Zeitverschiebung u. a. nützlicher.

6.61 *Elektrodynamischer Quotientenmesser*

Aus Gl. (6/28) für das Elektrodynamometer geht hervor, daß dessen Ausschlag dem skalaren Produkt der durch Fest- und bewegliche Spule fließenden Ströme proportional ist. Man kann daher mit diesem Instrument den Phasenwinkel zwischen beiden Strömen messen, wenn ihre Absolutwerte bekannt sind.

Wesentlich einfacher ist die Verwendung des *elektrodynamischen Quotientenmeßwerks*, das aus zwei Festspulen S, die vom gleichen Strom durchflossen werden, und zwei beweglichen Spulen S_1, S_2 besteht, die auf einer gemeinsamen Achse um den Winkel $\beta_1 + \beta_2$ gegeneinander verdreht montiert sind. Der Aufbau gleicht dem eines astatischen Elektrodynamometers (Abb. 6.19) mit dem Unterschied, daß die beweglichen Spulen in verschiedene Richtung zeigen. Für die auf die Spulen S_1 und S_2 ausgeübten Drehmomente gilt

$$M_1 = -K\Phi\Phi_1 \cos(\gamma_1 + \varphi) \sin(\beta_1 + \alpha); \tag{6/65a}$$

$$M_2 = K\Phi\Phi_2 \cos(\gamma_2 - \varphi) \sin(\beta_2 - \alpha). \tag{6/65b}$$

In diesen Beziehungen bedeuten Φ, Φ_1, Φ_2 die magnetischen Flüsse in den drei Spulen, die den entsprechenden Strömen proportional und um γ_1 bzw. γ_2 gegen diese phasenverschoben sind; α ist der Ausschlag des Instruments. Durch Gleichsetzen der Gln. (6/65) stellt sich das an sich richtmomentlose Instrument in eine Gleichgewichtsstellung mit dem Ausschlag α ein, der eine eindeutige Funktion des Phasenwinkels φ ist, wenn $i_1 = i_2$.

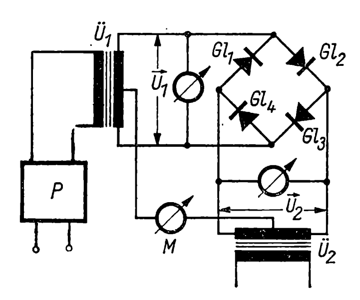


Abb. 6.59 Ringmodulator

6.62 *Mechanische Gleichrichter*

Für technische Frequenzen lassen sich genaue Phasenmessungen mit dem in § 6.326 besprochenen *mechanischen Gleichrichter* oder *Vektormesser* [*6.68, 6.69*] ausführen.

6.63 *Ringmodulator*

Die Phasenmessung mit Hilfe eines *Ringmodulators* geschieht mit der in Abb. 6.59 gezeigten Schaltung. Der Modulator besteht aus den vier Gleichrichtern Gl_1 bis Gl_4, deren Durchlaßrichtung gleichsinnig sein muß und deren

Kennlinien identisch sein sollten. Die Diagonalen des Modulators sind an die Sekundärwicklungen zweier Transformatoren $\ddot{U}_1$ und $\ddot{U}_2$ angeschlossen, deren Mittelanzapfungen über den Gleichstrommesser M verbunden sind. Die Primärseiten der Transformatoren werden von Wechselströmen beliebiger Amplitude und Phase, jedoch derselben Frequenz gespeist. Geht man von einer quadratischen Kennlinie der Gleichrichter aus (s. § 6.322), d. h., ist $i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$, und berechnet damit den durch das Instrument M fließenden Strom, so erhält man

$$I = 8\,\boldsymbol{U}_1 \boldsymbol{U}_2 = 4 a_2 U_1 U_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{6/66}$$

Darin sind U_1, U_2 die Sekundärspannungen der Transformatoren und φ_1, φ_2 die entsprechenden Phasenwinkel. Der Ausschlag I verschwindet, wenn man mit Hilfe des Phasenschiebers P die Phasendifferenz $\varphi_1 - \varphi_2 = 90°$ macht. In der Nullstellung ist der Ausschlag von M von der Amplitude der beiden Spannungen unabhängig. Beliebige Phasenwinkel können nach Nullabgleich des Modulators am geeichten Phasenschieber abgelesen werden.

6.64 Phasenmessung mit Katodenstrahloszillografen

Die einfachste und genaueste Methode zur Messung der Phasendifferenz zweier Spannungen beruht auf der Verwendung des Katodenstrahloszillografen. Die zwei Spannungen der gleichen Frequenz werden an die beiden Ablenkplattenpaare (s. § 6.7) direkt oder über die eingebauten Verstärker gelegt, wobei auf dem Leuchtschirm eine Ellipse beschrieben wird. Den Phasenwinkel zwischen den Spannungen erhält man aus der Beziehung

$$\varphi = \arcsin (y_0/y_1),$$

wenn y_0 die senkrechte Ablenkung bei $x = 0$ und y_1 die Maximalamplitude ist (s. Abb. 6.60). Für den Phasenwinkel $\varphi = 0$ muß sich eine geneigte Gerade ergeben, sofern durch die Verstärker keine zusätzliche Phasendifferenz entstanden ist. Gleiche Amplituden ergeben eine unter 45° geneigte Ellipse. Da aus dem Schirmbild nicht immer sofort der Quadrant des Phasenwinkels zu erkennen ist, fügt man einer der Spannungen eine kleine Phasenänderung hinzu und beobachtet deren Veränderung. Mit Hilfe eines geeichten *Phasenschiebers* (s. § 6.65) läßt sich die Phasenmessung äußerst bequem durchführen.

6.65 Phasenschieber [6.87]

Für Messungen des Phasenwinkels, aber auch zu anderen Zwecken werden *Phasenschieber* benutzt, mit denen der Phasenwinkel einer Wechselspannung konstanter Amplitude meßbar verändert werden kann.

Für technische Frequenzen besteht der Phasenschieber aus einem Eisenstator mit einer Mehrphasenwicklung, z. B. dem Ständer eines Drehstrommotors (vgl. § 15.17), in dem ein mit der Wechselstromfrequenz umlaufendes magnetisches Drehfeld erzeugt wird. In einer Wicklung, deren Winkelstellung gegen eine Bezugsebene meßbar verändert werden kann, wird eine Wechselspannung mit konstanter Amplitude und variablem Phasenwinkel induziert.

Für kleinere Ausgangsspannungen sind *Brückenschaltungen* geeignet, wie sie in Abb. 6.61 dargestellt sind. Beide Brücken bestehen aus ohmschen Widerständen und Kapazitäten und liefern unabhängig vom Phasenwinkel konstante Wechselspannungsamplitude. Bezeichnet man die Eingangsspannung mit U_1 und ist $R_1 = R_1'$, so gilt für die Ausgangsspannung der Schaltung *a*)

$$|U_0| = U_1/2; \quad \varphi = -\arctan \frac{2\omega RC}{1-(\omega RC)^2}. \tag{6/67}$$

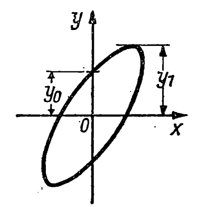
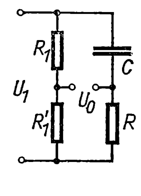
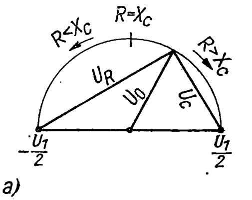


Abb. 6.60 Messung der Phasendifferenz mit dem ESO





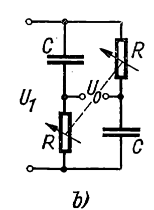


Abb. 6.61 Phasenschieber in Brückenschaltung

Der Phasenwinkel ist zwischen 0 und 180° zu verändern. In Schaltung *b*) gilt dieselbe Beziehung mit dem Unterschied, daß Ein- und Ausgangsspannung dem Betrag nach gleich sind; die Widerstände R werden als Doppelpotentiometer ausgebildet.

Auch für höhere Frequenzen läßt sich das oben bereits erwähnte Prinzip des *Drehtransformators* verwirklichen. Die in Abb. 6.62 dargestellte Schaltung zeigt einen Gegentaktverstärker, dessen Röhren E_1 und E_2 über eine Brückenschaltung durch um 90° gegeneinander phasenverschobene Spannungen ge-

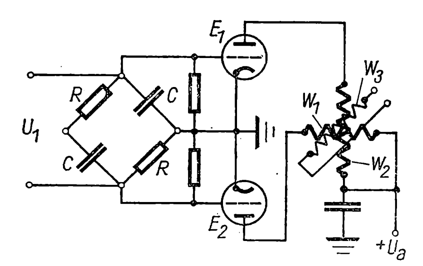




Abb. 6.62 Phasenschieber mit Drehtransformator

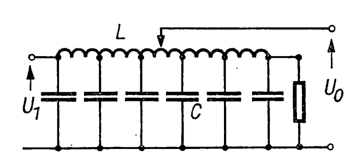


Abb. 6.63 Kettenleiter als Phasenschieber

steuert werden. Die Anodenströme durchfließen zwei um 90° gekreuzte Spulen W_1 und W_2 und erzeugen somit ein magnetisches Drehfeld mit der Frequenz der Eingangsspannung. In der dritten Spule W_3, deren Ebene beliebig gegen die Festspulen verdreht werden kann, entsteht eine Spannung mit veränderlichem Phasenwinkel.

Einen variablen Phasenschieber, insbesondere für hohe Frequenzen, erhält man durch eine *künstliche Leitung* (Abb. 6.63), die beiderseits mit ihrem Wellen-

widerstand abgeschlossen ist. Die gewünschte Phasenverschiebung entsteht durch die Laufzeit in dem durch eine langgestreckte Induktivität L und einzelne Parallelkapazitäten C gebildeten Kettenleiter. Der Phasenwinkel ist allerdings belastungsabhängig.

6.66 Elektronische Phasenmesser

Von HAMBLEY [*6.50*] wird ein Phasenmesser für Frequenzen zwischen 1 und 100 Hz beschrieben, der eine Eingangsspannung von 1⋯10 V benötigt. Dem Instrument wird die zu messende Spannung $U e^{-j(\omega t - \varphi)}$, eine Bezugsspannung $U e^{-j\omega t}$ und eine Spannung $U_1 e^{-j360\omega t}$ zugeführt. Bezugs- und Meßspannung öffnen bzw. schließen bei Nulldurchgang der Schwingung in positiver Richtung ein elektrisches Gatter. Während der Öffnungszeit gelangt die Schwingung mit der Frequenz $360f$ auf einen elektrischen Zähler, der die Phasendifferenz direkt in Grad anzeigt.

Auch mit phasenempfindlichen *Röhrenvoltmetern* [*6.39, 6.97*] und stroboskopischen Methoden [*6.47*] lassen sich Phasenwinkelmessungen durchführen.

6.7 Aufzeichnung der Kurvenform; Oszillografie

Die Registrierung des zeitlichen Verlaufs einer Stromgröße spielt für die Wechselstrommeßtechnik eine grundlegende Rolle. Sie ermöglicht die Aufzeichnung der Kurvenform, des Phasenwinkels in bezug auf eine Vergleichsspannung, bei Verwendung von Elektronenstrahloszillografen (ESO) die Darstellung dieser Größen als Funktion anderer elektrischer Einflußgrößen. In der Form des ESO besitzt die elektrische Meßtechnik für ein Frequenzgebiet von praktisch Null bis viele Hundert Megahertz ein universell verwendbares Registrier- und Meßinstrument, das die Anwendung anderer Registriergeräte zunehmend einschränkt oder auf spezielle Meßprobleme verweist.

6.71 Elektrodynamischer Oszillograf [*6.48*]

6.711 Theorie

Die Wirkung des *elektrodynamischen Oszillografen* ist mit der des gewöhnlichen Drehspulsystems vergleichbar; durch die Kraftwirkung auf einen stromdurchflossenen Leiter entsteht eine beobachtbare Bewegung, die mittels Lichtzeiger zur optischen Registrierung des Meßstroms herangezogen wird. Um große zeitliche Änderungen verzerrungsfrei feststellen zu können, benutzt man als Meßsystem eine Stromschleife, die mit einem kleinen Spiegel versehen ist und sich in einem starken, homogenen Magnetfeld in Richtung der Schleifenebene befindet. In Abb. 6.64 ist der Aufbau dieses Meßsystems schematisch dargestellt. Die beiden vom Meßstrom durchflossenen Drähte D tragen in der Mitte den Spiegel S und befinden sich in einem magnetischen Feld mit der Induktion B. Ist l die wirksame Schleifenlänge, b der gegenseitige Abstand der

Drähte D, so lautet die Bewegungsgleichung dieses Systems unter der Wirkung eines Meßstroms:

$$I_r\ddot{\varphi} + \varrho\dot{\varphi} + D\varphi = Blb\hat{\imath}\sin\omega t, \qquad (6/68)$$

wenn ϱ die Dämpfungskonstante und D das reduzierte Richtmoment der Schleife ist. Diese Differentialgleichung ist mit Gl. (2/57) identisch. Für ihre Lösung gelten auch die in § 2.215 angegebenen Beziehungen und die in den Abbn. 2.23 und 2.24 dargestellte Abhängigkeit der Amplitude und des Phasenwinkels von der Eigenfrequenz. Es geht daraus hervor, daß eine gute Abbildungstreue eine bestimmte Dämpfung ϱ erfordert und die Anwendung auf

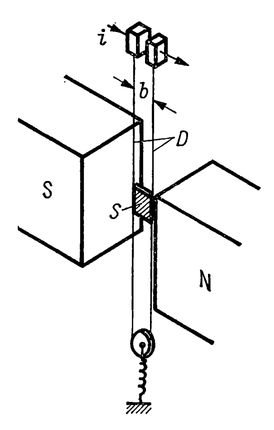


Abb. 6.64 Oszillografenschleife

Frequenzen unterhalb der Eigenfrequenz ω_0 beschränkt ist. Aus den Abmessungen der Meßschleife läßt sich ihre Eigenfrequenz annähernd berechnen; es gilt

$$\omega_0 = 2\sqrt{\frac{P}{l(m_s' + m')}}, \qquad (6/69)$$

wenn P die Spannkraft pro Draht, m' und m_s' die auf die Saite bezogene Masse von Saite und Spiegel S bedeuten. Die Dämpfungskonstante ϱ setzt sich aus der elektrodynamischen Dämpfung und dem äußeren Dämpfungsmittel zusammen.

6.712 Schleifenkonstruktion

Oszillografenschleifen bestehen aus Duraluminium- oder Wolframdrähten und befinden sich in einem Magnetfeld von etwa 1 T, das von einem Permanentmagneten erzeugt wird. Die aufgekitteten Spiegel haben eine Größe von $0{,}5 \cdot 0{,}5\ \mathrm{mm}^2$ und sind 0,02···0,1 mm stark. Zur Erzielung optimaler Dämpfung befindet sich das ganze Meßsystem zusammen mit den Polschuhen in einem unmagnetischen Rohr mit Ölfüllung. Die einzelnen Meßsysteme sind gegeneinander austauschbar.

Neben Meßschleifen werden noch *Spulenschwinger* verwendet, die ein höheres Trägheitsmoment und wegen der größeren Windungsfläche auch höhere Empfindlichkeit besitzen. In *Tabelle 6.3* sind die wichtigsten Daten von Spulen- und Schleifenschwingern zusammengestellt. Über schnell schwingende Spuleneinsätze siehe auch [*6.80*].

Tabelle 6.3 Daten von Schleifen- und Spulenschwingern

Eigenfrequenz	Widerstand	max. Belastung	Stromempfindlichkeit	Stromkonstante
Hz	Ω	mA	mm/mA · m	mA · m/mm
Schleifenschwinger				
700	1,4	100	1,8	0,55
1300	9,5	3	60	0,017
3500	2,7	20	6	0,17
5000	1,9	50	2,3	0,43
10000	0,9	180	0,32	3,1
17000	0,5	200	0,06	17
Spulenschwinger				
120	40	10	$6{,}6 \cdot 10^3$	$0{,}15 \cdot 10^{-3}$
250	40	15	$1{,}3 \cdot 10^3$	$0{,}75 \cdot 10^{-3}$
350	40	14	$0{,}7 \cdot 10^3$	$1{,}45 \cdot 10^3$
> 750	40	20	50	0,02
>2000	40	60	7,6	0,13
>5000	27	50	2,2	0,45

6.713 Flüssigkeitsoszillograf

Beim Flüssigkeitsoszillografen („*Oscillomink*“) ist an der Meßschleife anstelle des Spiegelchens eine elastische Glaskapillare mit einer Düse von 0,01 mm Austrittsdurchmesser befestigt. Durch diese Düse wird mit Hilfe einer Pumpe eine Schreibflüssigkeit gedrückt und ein haardünner Schreibstrahl von mehreren Zentimeter Länge erzeugt, der auf dem Diagrammpapier, das mit konstanter Geschwindigkeit am Strahl vorbeibewegt wird, eine Schreibspur erzeugt. Mehrere solcher Systeme (bis zu 12) können nebeneinander angeordnet werden und einen gemeinsamen Registrierstreifen beschreiben. Der Papiervorschub ist zwischen 0,5 und 20 cm/s veränderlich. Die Empfindlichkeit beträgt bei 4 cm Schreibabstand ohne Verstärker 0,8 cm/100 mA, mit vorgeschaltetem Verstärker mit 1 MΩ Eingangswiderstand 1 cm/50 mV.

6.714 Lichtpunkt-Linienschreiber [*6.117*]

Dieses Registriergerät eignet sich zur Aufzeichnung von Wechselströmen bis zu einigen 100 Hz und kann mit maximal vier Meßwerken ausgerüstet werden („*Lumiscript*“). Die Meßwerke sind Spulenschwinger mit Registrierspiegel; sie sind auswechselbar und besitzen Eigenfrequenzen zwischen 1 und

570 Hz. Die Registrierung erfolgt mit Lichtschrift auf einem UV-empfindlichen Papierstreifen, der nicht entwickelt oder fixiert zu werden braucht. Die belichteten Streifen sind gegen Kunstlicht und nicht zu helles Tageslicht gut beständig. Als Lichtquelle wird eine Quecksilberhöchstdrucklampe verwendet, deren Spektrum reich an UV-Strahlen ist und die einen sehr kleinen Brennfleck besitzt. In *Tabelle 6.4* sind die Daten der verwendeten Meßsysteme zusammengestellt.

Tabelle 6.4 Daten von Meßsystemen von Lichtpunkt-Linienschreibern

Eigenfrequenz Hz	Widerstand Ω	1 mm Ausschlag µA	entspricht mV	max. Strom mA
1	8	0,8	0,0064	0,5
1	18	0,22	0,004	0,1
5	330	2,2	0,73	1
25	970	4	3,9	1
60	970	25	24	10
150	970	150	150	10
300	2000	600	1200	20
570	2000	2100	4200	20

Die Breite des Registrierstreifens beträgt 60 mm; die maximale Vorschubgeschwindigkeit ist 200 cm/s.

6.715 Lichtstrahloszillograf

Schleifen- oder *Lichtstrahloszillografen* eignen sich zur Betrachtung und Registrierung rasch veränderlicher periodischer und nichtperiodischer Spannungen oder Ströme unter Verwendung der in § 6.712 beschriebenen Meßschleifen. In Abb. 6.65 ist der Gesamtaufbau dieses Oszillografen vereinfacht

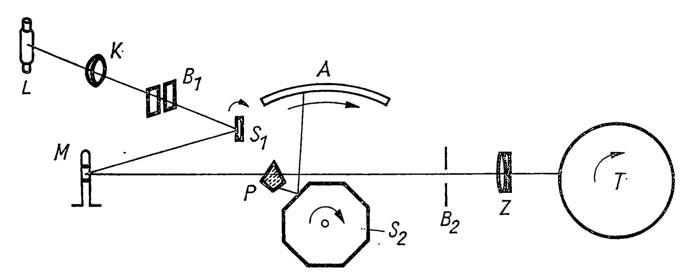


Abb. 6.65 Aufbau eines Lichtstrahl-Oszillografen

dargestellt. Die Projektionslampe L (30 W, 12 V) beleuchtet über den Kondensor K, die Schlitzblende B_1 und den verdrehbaren Einstellspiegel S_1 das Spiegelchen der Meßschleife M. Ein Teil des durch den Spalt B_1 begrenzten Lichtstrahls wird durch das Linsenprisma P abgelenkt und auf einen rotieren-

den Polygonspiegel S_2 geworfen, der mit der Aufnahmetrommel T gekuppelt ist. Bei passender Drehzahl dieses Spiegels erscheint ein periodischer Vorgang als stehendes Bild auf der gebogenen Mattscheibe A. Der andere Teil des vom Meßsystemspiegel reflektierten Lichtbündels gelangt über eine verstellbare Schlitzblende B_2 und die Zylinderlinse Z auf die Registriertrommel T, die von einem Motor angetrieben wird. Das Bild des Spaltes wird durch die Zylinderlinse Z als Lichtpunkt scharf auf dem Registrierpapier abgebildet. Die Schlitzblende B_2 dient zur Schärfekorrektur und Abblendung. Mit Hilfe eines (nicht gezeigten) elektromagnetischen Verschlusses wird die Belichtungszeit bei der fotografischen Aufnahme eingestellt. Durch Anordnung mehrerer Einstellspiegel S_1 können mehrere Meßschleifen gleichzeitig benutzt werden; ihre nebeneinander liegenden Registrierspuren ermöglichen die zeitliche Zuordnung verschiedener Vorgänge. Bisweilen werden in einem gemeinsamen Magnetblock bis zu 12 Registrierschleifen untergebracht.

Die maximale Schreibgeschwindigkeit hängt von der Flächenhelligkeit des Schreibpunktes, der Amplitude und der Eigenfrequenz des Systems ab; sie liegt bei etwa 25 km/s. Zur Erzielung höherer Beleuchtungsstärken im Lichtpunkt werden Quecksilber-Höchstdrucklampen benutzt, die Schreibgeschwindigkeiten von 100 m/s ermöglichen. Die Lichtzeigerlänge kommerzieller Oszillografen liegt zwischen 30 und 80 cm.

Für spezielle Anwendungszwecke lassen sich mit UV-Lampen und entsprechendem Registrierfilm Schreibgeschwindigkeiten von 400 m/s erzielen [*6.32*].

6.716 Spezielle Lichtstrahloszillografen [*6.23*]

Von Browder [*6.25*] wird die Registriervorrichtung für ein schnell schwingendes Saitengalvanometer (s. § 2.24) beschrieben. Für besondere Meßaufgaben benutzen Amato, Chesi und Lambert [*6.3*] einen Mehrkanal-Lichtoszillografen mit 10 Meßsystemen.

Zur Aufzeichnung sehr schneller Vorgänge durch Flüssigkeitsschreibstrahlen wird von Sweet [*6.120*] ein elektrostatisch ausgelenktes Meßsystem angewandt.

Beim statischen Hochspannungsoszillografen von Philippoff [*6.92*] wird der Registrierspiegel durch eine Feder gegen zwei Quarzlamellen mit scharfen Kanten gepreßt, denen die Meßspannung an aufgedampften Metallschichten zugeführt wird. Dieses Meßsystem besitzt eine Eigenfrequenz von 15 kHz und eine Spannungsempfindlichkeit von 200 V/mm Ausschlag.

Von Eder [*6.36*] wird ein *Kerr-Effekt-Oszillograf* mit Zweikoordinatenablenkung beschrieben.

6.72 Messung der Kurvenform durch Analysator

Zur Messung der Kurvenform periodischer, nichtsinusförmiger Ströme und Spannungen, die nach § 6.13 als Fourier-Reihe entwickelt werden können, sind auch *Filter* geeignet, die mit einer vorgegebenen Bandbreite bestimmte Frequenzen durchlassen. Mit mehreren dieser Filter lassen sich *Analysatoren*

zusammensetzen und die relativen Amplituden der einzelnen Harmonischen experimentell ermitteln. Über einen hochempfindlichen Spektralanalysator für niederfrequente, nichtperiodische Signale siehe MALACHOW [*6.76*] (s. a. [*6.41, 6.62, 6.64*]).

6.73 Elektronenstrahloszillograf (ESO) [*6.30, 6.45, 6.81, 6.88, 6.99, 6.100*]

Der ESO ist eine Hochvakuumelektronenröhre, der die Meßspannung mit hoher Eingangsimpedanz zugeführt wird und deren Ausgang als Auslenkung eines Elektronenstrahls optisch wahrgenommen wird. Durch Kreuzung der Ablenksysteme kann die Meßgröße als Funktion einer zweiten Spannung oder der Zeit als stehendes oder einmaliges Bild aufgezeichnet werden. Durch Vereinigung mehrerer Schreibstrahlen in einem Anzeigesystem läßt sich die zeitliche Korrelation verschiedener Vorgänge erfassen. Der obere Frequenzbereich liegt im Gebiet der Zentimeterwellen. Die Registrierung läßt sich auch für längere Zeit speichern. Durch vorgeschaltete Meßverstärker lassen sich Ablenkempfindlichkeiten von der Größenordnung mV/cm über einen großen Frequenzbereich erzielen.

6.731 Grundlagen

Die *Elektronenstrahlröhre* ist ein elektronenoptisches Abbildungssystem, bei dem die aus einer Katode austretenden Elektronen mit Hilfe einer oder mehrerer elektrostatischer oder magnetischer Linsen auf dem Leuchtschirm in einem scharfen Fleck abgebildet werden. Ein fluoreszierender Leuchtschirm gibt an der Auftreffstelle des Elektronenstrahles einen scharfen Leuchtfleck. Durch elektrische oder magnetische Felder, die der zu messenden Spannung proportional sind, läßt sich der Leuchtfleck meßbar ablenken.

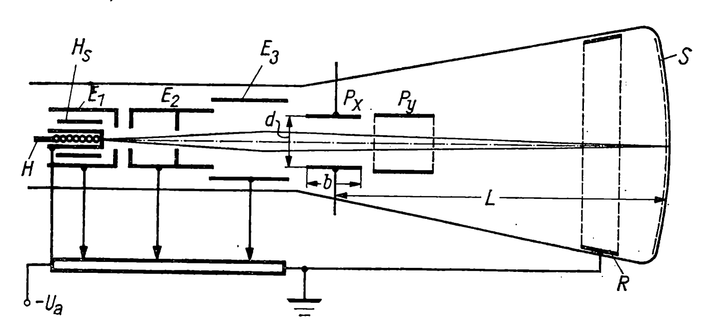


Abb. 6.66 Elektronenstrahlröhre

In Abb. 6.66 ist der Aufbau einer Elektronenstrahlröhre schematisch dargestellt. Im Glaskolben sind im zylindrischen Teil die Elektronenquelle, das Fokussierungssystem sowie das Ablenksystem untergebracht; der Boden des sich konisch erweiternden Kolbens ist auf der Innenseite mit dem Leuchtschirm S bedeckt. Die Elektronenquelle besteht aus dem Heizer H im Innern der Rohrkatode K, deren Boden mit Oxidpaste bedeckt ist, dem Strahlungs-

schutz H_s und der Steuerelektrode E_1. Dieser mit einer Austrittsöffnung versehenen Elektrode steht die Beschleunigungselektrode E_2 gegenüber, die sich z. B. auf dem Potential +200 V befindet. Durch eine dritte Elektrode E_3 (+800 V) wird der Elektronenstrahl weiter beschleunigt und gleichzeitig als scharfer Strahl auf dem Leuchtschirm S abgebildet. Die drei Elektroden bilden ein elektronenoptisches Abbildungssystem; die Blende innerhalb von E_2 dient als Aperturblende für divergierende Elektronen, die die Schärfe des Leuchtflecks beeinträchtigen würden. Die Steuer(Wehnelt)-Elektrode E_1 dient zur Intensitätssteuerung des Strahls, wozu ihr Potential zwischen −10 und +10 V durch ein Potentiometer variiert werden kann. Die Hauptfokussierung erfolgt im elektrostatischen Feld zwischen den Elektroden E_2 und E_3. Die Innenseite des Kolbens in der Nähe des Leuchtschirms ist häufig mit „Aquadag", einer elektrisch leitenden Kohleschicht R, bedeckt und auf Anodenpotential gelegt. In einer abgeänderten Elektrodenanordnung wird zwischen E_1 und E_2 eine Lochblende angeordnet, die auf vollem Anodenpotential liegt, so daß der durchfliegende Elektronenstrahl zunächst beschleunigt, dann verzögert und wieder beschleunigt wird. Bei dieser Abbildung läßt sich das Ablenksystem im Bereich kleinerer Elektronengeschwindigkeiten anbringen, wodurch die Ablenkempfindlichkeit wächst.

In Abb. 6.66 sind zwei elektrostatische Ablenksysteme gezeichnet, die aus zwei parallelen Plattenpaaren P_x und P_y bestehen und symmetrisch vom Elektronenstrahl durchsetzt werden. Wird zwischen die Platten die Meßspannung u_x angelegt, so wird der Elektronenstrahl auf die positive Elektrode zugelenkt. Dieser beschreibt unter dem Einfluß einer konstanten Lateralbeschleunigung eine Parabelbahn und erzeugt auf dem Schirm einen Ausschlag A. Bezeichnet man mit d und b Abstand und Länge der Platten und mit L die Entfernung des Ablenksystems vom Schirm, so gilt für die Ablenkung

$$A_e = \frac{L b u_x}{2 d U_a}, \tag{6/70}$$

wenn U_a die Beschleunigungsspannung der Elektronen ist. Für die Ablenkung in der Y-Richtung durch das zweite Plattenpaar P_y gilt dieselbe Beziehung. Für große Ablenkwinkel werden die Platten oft gegen den Strahl geneigt, so daß ihr Abstand d auf der Seite des Schirms größer als auf der anderen ist.

Für Ablenkspannungen mit sehr hohen Frequenzen entsteht infolge der Laufzeit der Elektronen innerhalb der Ablenkplatten ein *Frequenzfehler*. Es wird dann die Ablenkung A_ω für eine Spannung der Frequenz ω

$$A_\omega = A_0 \frac{\sin \alpha/2}{\alpha/2}; \qquad \alpha = 1{,}67 \cdot 10^{-8}\, \omega \frac{b}{\sqrt{U_a}}. \tag{6/71}$$

Darin bedeutet α den *Laufzeitwinkel*, der nach Gl. (6/71) linear mit der Frequenz und der Länge der Ablenkplatten zusammenhängt. Aus dem gleichen Grund erhält man auch eine Phasenverschiebung

$$\varphi = 1{,}67 \cdot 10^{-8}\, \omega \frac{a}{\sqrt{U_a}} \tag{6/72}$$

zwischen der Einwirkung der zwei Plattensysteme, wobei a der Mittenabstand zwischen beiden ist. Der Phasenfehler läßt sich beseitigen, wenn das eine System symmetrisch zu beiden Seiten des anderen angeordnet wird. Beide Fehler werden mit zunehmender Anodenspannung U_a kleiner; für die Oszillografie bei sehr hohen Frequenzen werden daher Hochspannungsgeräte mit $U_a = 50$ kV benutzt und deren Ablenkungen optisch vergrößert.

Seltener wird eine magnetische Ablenkung des Elektronenstrahls angewandt. Hierzu wird senkrecht zum Strahl ein homogenes Magnetfeld angelegt, in dem dieser auf einem Kreissegment abgelenkt wird. Hierfür gilt die Beziehung

$$A_m = \frac{e}{m} \frac{b' B}{v} L, \tag{6/73}$$

Abb. 6.67 *Energieausbeute eines ZnS—CdS-Leuchtschirms bei Elektronen*

wenn B die magnetische Induktion, die von den Ablenkspulen erzeugt wird, und $v = \sqrt{2 e U_a / m}$ die Elektronengeschwindigkeit ist. Damit ergibt sich aus Gl. (6/73) die Beziehung

$$A_m = \frac{b' B}{3{,}37 \sqrt{U_a}} \cdot 10^4 \, L, \tag{6/73a}$$

wenn B in Tesla gemessen wird und b' die axiale Länge des Magnetfeldes ist.

In beiden Ablenksystemen nimmt die Ablenkung mit zunehmender Anodenspannung ab, während die Helligkeit des Leuchtflecks anwächst [*6.110*].

6.732 Leuchtschirm

Durch den Leuchtschirm wird die kinetische Energie des Elektronenstrahls in sichtbares Licht umgewandelt. Die Leuchtdichte des Fluoreszenzschirms läßt sich formal durch die Beziehung

$$L_v = b \, U_a j_2 \tag{6/74}$$

beschreiben, wenn b die *Ausbeute* des Fluoreszenzstoffes, U_a die Beschleunigungsspannung und j_2 die Stromdichte des Leuchtflecks ist [*6.6*]. In Abb. 6.67 ist nach v. BORRIES [*6.21*] die Ausbeute b eines ZnS—CdS-Vielkristall-

leuchtschirms (gelb-grün) als Funktion von U_a und der Massenbelegung g aufgetragen, wobei die Leuchtdichte L_v mit 0,5···1 asb angenommen ist. Es ist daraus ersichtlich, daß mit zunehmender Energie der Elektronen der Wirkungsgrad für die Energieumwandlung abnimmt.

Die meisten anorganischen Fluoreszenzstoffe werden synthetisch hergestellt und mit einem bestimmten Prozentsatz von Fremdatomen, den Aktivatoren, versehen. Die einzelnen Materialien unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Farbe und *Nachleuchtdauer*, d. h. der Zeit, in der die Leuchtdichte auf den e-ten Teil abgeklungen ist. In *Tabelle 6.5* sind für einige in ESO-Schirmen benutzte Fluoreszenzstoffe die wichtigsten Eigenschaften zusammengestellt.

Tabelle 6.5 Eigenschaften von Fluoreszenzstoffen für Leuchtschirme

Zusammensetzung und Aktivator	Leuchtfarbe	spektrales Maximum nm	Nachleuchtdauer s	Wirkungsgrad %
Zn_2SiO_4:Mn(0,25)	grün	525	0,05	8,5
ZnS—CdS:Cu(0,01)	blau-grün	436	0,001	25
ZnS:Ag(0,01) + 8ZnO·BeO·5SiO_2:Mn(1,0)	weiß	444	0,005	—
$CaWO_4$:W	hellviolett	430	10^{-5}	3,5
ZnS:Ag(0,01)	hellblau	458	0,05	—
$ZnMgF_2$:Mn(1,0)	orange	590	0,5	—
$MgSiO_3$:Mn(0,15)	hellrot	674	0,1	—
ZnS:Ag(0,015) + ZnS—CdS:Cu(0,004)	rein weiß	440	1	23
ZnO:Zn	hellblau	505	10^{-6}	7,5
ZnO	grün	510	10^{-5}	—

Bei einem typischen Fluoreszenzschirm aus Zn_2SiO_4:Mn findet man eine Lumineszenzausbeute von etwa 30 lm/W bei einer Beschleunigungsspannung von 10 kV. Wie aus *Tabelle 6.5* hervorgeht, lassen sich beliebige Farben des Leuchtflecks erzeugen. Die Nachleuchtdauer schwankt zwischen 10^{-5} und einigen Sekunden. Für Spezialzwecke werden aluminisierte Zweikomponentenschirme entwickelt, die bis zu 30 s Nachleuchtdauer besitzen.

Da die Fluoreszenzstoffe gewöhnlich elektrische Isolatoren sind, ist auf konstantes Potential der Schirme zu achten. Wie in Abb. 6.66 gezeigt, wird die Innenseite des Röhrenkolbens durch einen leitenden Graphitüberzug in Schirmnähe auf das maximale Beschleunigungspotential gelegt. Besitzt der Leuchtstoff bei U_a einen Sekundäremissionskoeffizienten > 1, so hält sich der Schirm selbsttätig auf dem Beschleunigungspotential. Andernfalls wird der Elektronenstrahl vor dem Schirm abgebremst und liefert geringere Lichtausbeute.

6.733 Nachbeschleunigung

Um hohe Leuchtdichte des Schreibflecks bei großer Ablenkempfindlichkeit zu erhalten, beschleunigt man den Elektronenstrahl hinter dem Ablenksystem noch weiter, indem man an den graphitierten Ring R (in Abb. 6.66) eine viel

höhere Spannung anlegt. Diese Methode der *Nachbeschleunigung* ist äußerst wirksam; es geht zwar mit ihr die Ablenkempfindlichkeit zurück, jedoch viel weniger, als das der Fall wäre, wenn man in Gl. (6/70) die Nachbeschleunigungsspannung für U_a einsetzen würde. Diese beträgt in vielen ESO 5000 V, die durch eine separate Spannungsquelle erzeugt wird. Die damit erzielte Leuchtdichte ist so groß, daß die optische Projektion des Schirmbildes möglich wird.

6.734 Abschirmung des ESO

Durch den Zusammenbau von Oszillografenröhren, Netzgerät und Verstärker besteht die Gefahr magnetischer Beeinflussung des Elektronenstrahls durch die magnetischen Streufelder des Transformators. Um das zu verhindern, wird die Röhre mit einem Blechmantel aus Mu-Metall (s. § 12.52) umgeben, der keine remanente Magnetisierung enthalten darf.

6.735 Spezielle Bauformen der Elektronenstrahlröhre

Zur gleichzeitigen Beobachtung zweier voneinander unabhängiger Vorgänge werden *Zweistrahlröhren* verwendet, die zwei unabhängige Elektronenquellen, Fokussierungs- und Ablenksysteme enthalten. Die Zeitablenkung ist für beide Systeme dieselbe, so daß unmittelbar die Zeitkorrelation von zwei Ereignissen, z. B. ein Phasenunterschied, beobachtet werden kann. Für besondere Anwendungen gibt es Röhren mit 10 getrennten Elektronenstrahlen [*6.19*].

Von Aiken [*6.1*] wird besonders für Fernsehzwecke eine Rechteckausführung beschrieben, die bei einem Leuchtschirmformat von $30 \cdot 30\ \text{cm}^2$ nur 7 cm tief ist. Der parallel zum Schirm verlaufende Elektronenstrahl wird zunächst durch zehn hintereinander liegende Ablenkplatten nach oben abgelenkt, wobei sich der Strahl parallel zu sich selbst verschiebt. Für die zweite Ablenkkoordinate wird diese Methode wiederholt. Mit dieser Bauform läßt sich eine Zeilenzahl von 2000 erreichen.

Der von v. Ardenne [*6.7*] konstruierte Präzisions-ESO besitzt einen Schreibfleckdurchmesser von nur 2 μm. Zur Fokussierung des Elektronenstrahls werden zwei hintereinander liegende magnetische Linsen in sorgfältiger Zentrierung benutzt. Dieser Ganzmetall-Oszillograf arbeitet mit 30 kV Beschleunigungsspannung, besitzt in der Y-Richtung mit elektrostatischer Ablenkung eine Empfindlichkeit von 0,04 mm/V, in der X-Richtung mit magnetischer Ablenkung eine solche von 4,4 mm/mA. Bei einer möglichen Zeilenzahl von 30000 beträgt die Aufzeichenlänge pro Durchgang 5000 m.

6.74 Aufbau des ESO

Der Gesamtaufbau eines ESO ist in Abb. 6.68 als Blockdiagramm dargestellt. Die Oszillografenröhre R wird vom Netzgerät N mit den Betriebsspannungen versorgt; dieses enthält einen Hochspannungsgleichrichter (s. § 5.1) mit ausreichenden Siebmitteln und Potentiometer zur Einstellung von Helligkeit und Schärfe des Elektronenstrahls. Für die Ablenkung in der X-

Richtung (horizontal) dient ein Kippgenerator K, der eine lineare Sägezahnspannung nach bereits beschriebenen Verfahren (s. § 5.6) erzeugt, die im Verstärker V_x soweit verstärkt sind, daß dessen Ausgang unmittelbar an die waagerechten Ablenkplatten gelegt werden kann. Die Kippfrequenz kann in Grob- und Feinunterteilung eingestellt werden, wobei der Rücklauf über das Steuergitter der Elektronenstrahlröhre verdunkelt wird [*6.35*]. An den Bedienungsknöpfen wird meist die Ablenkgeschwindigkeit angegeben. Durch eine Triggereinrichtung kann die Zeitablenkung mit der Meßspannung in der Y-Richtung synchronisiert werden. Die Meßspannung wird über einen geeichten Spannungsteiler T einem Katodenverstärker V_k (s. § 5.26) zugeführt,

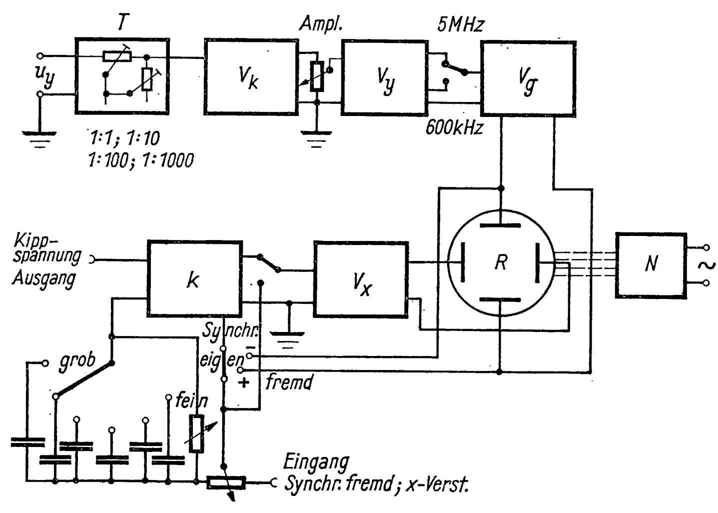


Abb. 6.68 Blockschaltbild eines ESO

dessen Verstärkungsfaktor über den gewünschten Frequenzbereich konstant sein muß. Schließlich wird die Ausgangsspannung von V_k durch den Meßverstärker V_y mit angeschlossener Gegentaktendstufe V_g so weit verstärkt, daß man deren Ausgangsspannung direkt an die Y-Platten der Röhre legen kann. Bei einmaligen oder in unregelmäßiger Folge wiederkehrenden Meßvorgängen wird der Einsatz der Ablenkspannung von der Anstiegsflanke der Meßspannung oder von einem zusätzlichen Impuls ausgelöst [*6.14*, *6.26*, *6.57*]. Um einzelne Teile des Oszillogramms deutlicher erkennbar zu machen, sind oft *Dehnungseinrichtungen* vorgesehen. Die gesamte Ablenkspannung oder nur ein Ausschnitt davon wird erhöht und das Oszillogramm dadurch um ein Vielfaches des Schirmdurchmessers gedehnt. Durch zusätzliche Potentiometer kann der interessierende Teil des Oszillogramms in die Schirmbildmitte gerückt werden.

Als *Ablenkkoeffizient* einer Elektronenstrahlröhre wird eine Strecke definiert, um die der Leuchtpunkt auf dem Schirm durch eine an ein Plattenpaar angelegte Spannung von 1 V verschoben wird. Analog wird der Ablenkkoeffi-

zient des Oszillografen einschließlich der eingebauten Verstärker angegeben. Zur Aufzeichnung großer Spannungen wird ein frequenzunabhängiger Eingangsspannungsteiler T in Abb. 6.68 dem Meßverstärker vorgeschaltet.

Größere Geräte besitzen einen *Rechteckgenerator*, dessen einstellbare Spannung an den Oszillografeneingang gelegt wird, um die Empfindlichkeit mit Hilfe eines vor dem Schirm angebrachten, meist beleuchteten *Linienrasters* eichen zu können.

Der Begriff der maximalen *Schreibgeschwindigkeit* wird auf eine fotografische Registrierung bezogen. Die Auflösbarkeit hängt natürlich von der Lichtstärke des Aufnahmeobjektives, der Filmempfindlichkeit und dem Entwicklungsverfahren ab. Im Mittel lassen sich oszillografische Schriftzüge bis zu etwa 7000 km/s noch registrieren [*6.46*].

6.75 *Mehrfachaufzeichnung mit dem Einstrahloszillografen* [*6.34*]

Für viele Anwendungen, in denen der zeitliche Ablauf von zwei Meßspannungen gleichzeitig verfolgt werden soll, ist ein Zweistrahloszillograf entbehrlich. Statt dessen wird dem Meßspannungsverstärker ein *elektronischer*

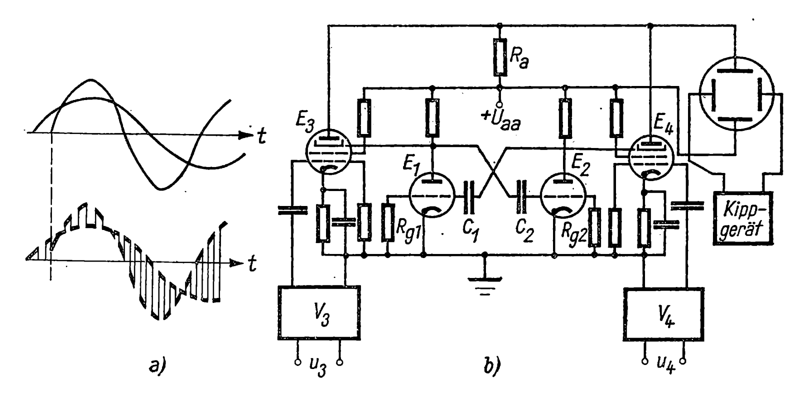


Abb. 6.69 Elektronische Umschaltung: Zeitverlauf (a), Schaltung (b)

Schalter vorgeschaltet, der ihm abwechsend einen kleinen Abschnitt der Meßspannung u_1 und einen gleich langen der Meßspannung u_2 zuführt. Wie aus Abb. 6.69a erkenntlich, setzt sich das gemeinsame Schirmbild aus den vom Verlauf beider Spannungen herrührenden Teilstücken zusammen, wobei die senkrechten Abschnitte wegen der hohen Schreibgeschwindigkeit abgeblendet werden können. Die Umtastfrequenz soll mindestens um eine Größenordnung höher als die Meßfrequenz sein. Zur Herstellung der Umtastfrequenz wird ein *Multivibrator* (s. § 5.53) benutzt, der in der Schaltung (Abb. 6.69b) zur Steuerung der Endstufen benutzt wird. Die beiden Elektronenröhren E_1 und E_2 arbeiten als Multivibrator, wobei abwechselnd die beiden Pentoden E_3 und E_4 über ihre Bremsgitter gesperrt werden. Die Umschaltfrequenz hängt nach Gl. (5/164) sowohl von R_g und C als auch von den Betriebsspannungen ab. Die beiden Pentoden arbeiten über einen gemeinsamen

Anodenwiderstand R_a auf die Y-Platten der Oszillografenröhre und werden über die Vorverstärker V_3 und V_4 mit den beiden Meßspannungen u_3 bzw. u_4 beschickt. Die Umschaltfrequenz liegt zwischen 0,2 und 100 kHz.

6.76 *Magnetbandoszillograf* [*6.107*]

Von LÖFFLER [*6.74*] wird ein Verfahren vorgeschlagen, die Registrierung eines Vorgangs von einem Magnetband (s. § 6.88) auf den ESO zu übertragen. Hierzu wird der Tastkopf periodisch über das besprochene Band bewegt, die Information nach Verstärkung auf die Y-Platten übertragen und synchron hierzu eine der Bewegung des Lesekopfes entsprechende Spannung an der Zeitachse des ESO erzeugt. Weiteres siehe [*6.97*].

6.77 *Speicherröhre* [*6.115*]

Zur Sichtbarmachung einmaliger, sehr schnell verlaufender Vorgänge oder statistischer Größen während einer längeren Beobachtungszeit kann eine besondere Ausführungsform der Elektronenröhren angewandt werden. Für die Speicherung von Informationen zu Rechenzwecken ist der Leuchtschirm auf

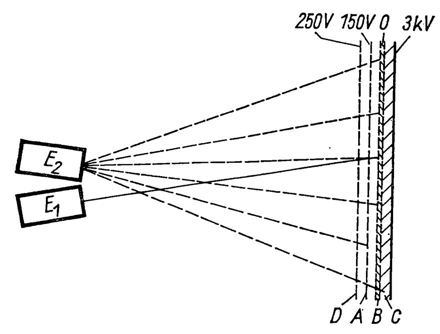


Abb. 6.70 Speicherröhre

einer oxydierten Aluminiumplatte aufgebracht, die als Dielektrikum wirkt und zusammen mit den Leuchtstoffpartikeln sehr viele kleine Kapazitäten bildet. Trifft der Schreibstrahl auf den Schirm, so werden Sekundärelektronen emittiert und von einem Kollektorring auf der Schirminnenseite abgeleitet. Die vom Schreibstrahl getroffenen Bezirke erzeugen eine *positive* Ladung, die auch beim nochmaligen Überschreiben nicht verändert wird und beliebig lange konserviert werden kann. Soll die Information sichtbar gemacht werden, so wird der ganze Schirm von einem Lesestrahl mit niedrigerer Elektronenenergie überstrichen. Trifft dieser Strahl auf die positive Ladung einer vorher geschriebenen Spur, wird diese neutralisiert und gleichzeitig an den Kollektor ein kurzer Impuls abgegeben, der zur Rechenanlage weitergegeben wird.

Zur Speicherung eines Schirmbildes wird ein Leuchtschirm nach Abb. 6.70 benutzt, der aus vier dicht hintereinander liegenden Schichten besteht: ein dünnmaschiges Netz A als Kollektor für die erzeugten Sekundärelektronen, ein zweites Netz B, das auf der Innenseite der Röhre eine dielektrische Schicht

trägt, dahinter ein gewöhnlicher Leuchtschirm C und vorgeschaltet ein Netz D als Ionenfänger. Mit Hilfe eines normalen Elektronensystems E_1 wird zunächst der Meßvorgang registriert, wobei wegen des hohen Sekundäremissionskoeffizienten bei höherer Beschleunigungsspannung auf dem dielektrischen Gitter B die Schreibspur durch zurückbleibende positive Ladungen markiert wird, die beliebig lange bestehenbleiben, auch wenn sie nochmals überschrieben werden. Zum Sichtbarmachen des gespeicherten Bildes wird mit Hilfe einer zweiten Elektronenquelle E_2 das Schirmbild mit wesentlich langsameren Elektronen in einem breiten Strahlbündel überschrieben. Dabei werden die positiven Ladungen teilweise neutralisiert, die schnellsten Elektronen erhalten durch das hohe Potentialgefälle zwischen B und C eine Beschleunigung und prallen auf die Leuchtschicht. Es entsteht eine sichtbare Spur mit einer gleichmäßigen Leuchtdichte, die nicht von der Schreibgeschwindigkeit abhängt.

6.78 *Übersicht über die Anwendungsmöglichkeiten des ESO*

Die gebräuchlichen ESO sind mit den oben beschriebenen Zusatzeinrichtungen, wie Nachbeschleunigung, Meßverstärker, Zeitbasis, Triggereinrichtung, meist versehen. Bei größeren Geräten können die Verstärkereinheiten in Form von beliebig wählbaren Einschüben in das Grundgestell eingesteckt werden, wodurch sich die Anwendungsbereiche wesentlich erweitern lassen.

Typische Daten für einen Breitbandoszillografen sind folgende: Gesamtbeschleunigungsspannung 10 kV, Leuchtschirmdurchmesser 13 cm, Rasterteilung 1 cm, Frequenzbereich des Y-Verstärkers 0···14 MHz, Ablenkkoeffizient in der Y-Richtung 50 mV pro Teil, Eingangsspannungsteiler (Y) stufenlos und 7 geeichte Stufen mit Verzögerungsleitung, X-Verstärker für Gleichspannung, Frequenzbereich 0···1,8 MHz, X-Eingangsspannungsteiler stufenlos 1···5 V pro Teil, Zeitablenkung selbstschwingend, synchronisierbar, triggerbar, Zeitmaßstab 0,2 μs···1 s pro Teil, 21 geeichte Stufen mit 5facher Dehnung.

Der ESO ist heute ein unentbehrliches Meßinstrument für fast alle in der Wechselstrom- und HF-Technik auftretenden Aufgaben. Die wichtigsten Anwendungen sind folgende:

1. Darstellung von Wechselstromkurven,
2. Hysteresis- und Magnetisierungsmessungen,
3. Phasenmessungen allgemeiner Art,
4. Impedanzmessungen,
5. Verzerrungsmessungen,
6. Untersuchung der Modulation,
7. Aufnahme von Frequenz- und Resonanzkurven,
8. Aufnahme von Kennlinien aktiver Gleichrichter- und Verstärkerelemente,
9. Frequenzmessung mit Normalfrequenzgenerator,
10. Impulsmessungen,
11. Indikator für Wechselstromkompensatoren und -meßbrücken.

Im einzelnen wird in den verschiedenen Abschnitten auf die Verwendung des ESO eingegangen.

6.8 Digitale Meßtechnik [*6.4*, *6.22*, *6.59*]

6.81 Grundlagen

Die meisten Meßgeräte, wie z. B. die anzeigenden, geben ihre Information unmittelbar an den Betrachter weiter, der Skalen abliest oder Ziffern betrachtet. *Digitale* Meßgeräte sind in erster Linie für eine weitere Datenverarbeitung bestimmt. Ihr Meßergebnis wird an digitale Rechenautomaten weitergegeben und kann auf Leitungen oder auch über Funkverbindung an diese übertragen werden. Die Umsetzung in Digitalform bringt keine zusätzlichen Fehler mit sich; die Stellenzahl kann der Meßgenauigkeit sinnvoll angepaßt werden. Das Meßergebnis kann auch ohne Zeitverlust ausgedruckt werden.

Der Analogiemeßwert eines anzeigenden Instrumentes muß zu diesem Zweck in das digitale Zahlensystem *umgesetzt* — kodiert — werden, wobei das geläufige *Dezimalsystem* verlassen und der *Dualkode* benutzt wird, der sich aus Potenzen der Zahl *Zwei* aufbaut. In *Tabelle 6.6* ist die Umsetzung einer analogen Größe in das Dezimal-, Dual- und Tetradensystem dargestellt, wobei in den binären Systemen zur Unterscheidung vom Dezimalsystem „L" statt „1" geschrieben wird.

Tabelle 6.6 Umsetzung einer analogen Größe in das Dezimal-, Dual- und Tetradensystem

Analog	dezimal	dual				tetradisch				
— = 1	10^1 10^0	2^3	2^2	2^1	2^0	10	8	4	2	1
—	1				L					L
— —	2			L	O				L	O
— — —	3			L	L				L	L
— — — —	4		L	O	O			L	O	O
— — — — —	5		L	O	L			L	O	L
— — — — — —	6		L	L	O			L	L	O
— — — — — — —	7		L	L	L			L	L	L
— — — — — — — —	8	L	O	O	O		L	O	O	O
— — — — — — — — —	9	L	O	O	L		L	O	O	L
— — — — — — — — — —	10	L	O	L	O	L	O	O	O	O
— — — — — — — — — — —	11	L	O	L	L	L	O	O	O	L
— — — — — — — — — — — —	12	L	L	O	O	L	O	O	L	O
— — — — — — — — — — — — —	13	L	L	O	L	L	O	O	L	L
— — — — — — — — — — — — — —	14	L	L	L	O	L	O	L	O	O
— — — — — — — — — — — — — — —	15	L	L	L	L	L	O	L	O	L

Mit den Binärstellen $2^3 2^2 2^1 2^0$ können die Zahlen 1 bis 15, insgesamt also 16 Symbole dargestellt werden.

6.82 Analog-Digital-Umsetzer

Zur Umsetzung kontinuierlicher physikalischer Größen sind *Analog-Digital-Umsetzer* erforderlich, welche das „Quantisieren" und die Stellenbildung besorgen. Bei der *Festmengenumsetzung* (Abb. 6.71a) wird ein Zählsystem um

eine Einheit weitergeschaltet, wenn sich die Meßgröße um *ein* „Quant" geändert hat. Dieses Verfahren setzt eine konstante Änderungsrichtung der Meßgröße voraus, wie sie z. B. in Integrationskreisen auftritt. Bei der *Momentanwertumsetzung* (Abb. 6.71 b) wird die Amplitude des Meßwertes im Zeitpunkt der Messung erfaßt.

Festmengenumsetzer sind praktisch Impulszähler mit nachgeschaltetem Zählgerät, das sich aus einer Kette gleichartiger Zählelemente zusammensetzt. Hierin zeigt sich der Kombinationscharakter der digitalen Meßtechnik besonders deutlich. Als Zählelemente werden elektromagnetische Zählwerke, Kaltkatoden- und Elektronenstrahlzählröhren, Magnetkerne und bistabile Kippstufen (s. § 5.54) angewendet. Bei der Festmengenumsetzung werden die Zeitdifferenzen zwischen den einzelnen Zuwachsimpulsen gemessen. Bei der in § 6.51 besprochenen Frequenzmessung dagegen wird die Zählzeit vorgegeben und die Meßgröße als Impulszahl dargestellt.

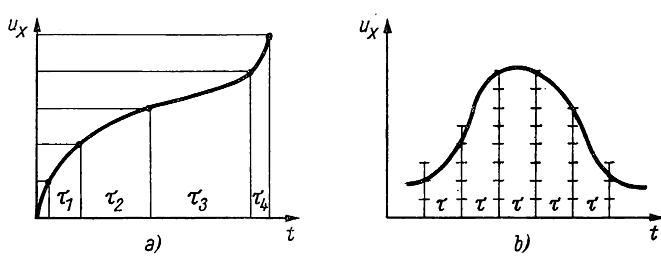


Abb. 6.71 Festmengenumsetzung (a), Momentanwertumsetzung (b)

6.83 *Spannung-Zeit-Umsetzer*

Dieser Umsetzer führt eine Spannungsmessung auf die einer Zeit zurück und bedient sich einer Prinzipschaltung nach Abb. 6.72. Eine zeitlich lineare Spannung $u(t) = Kt$, die mit bekannten Methoden sehr genau realisiert werden kann (s. § 5.62), läuft von negativen zu positiven Werten. Bei Durchschneiden des Nullwertes gibt der Nullindikator N_1 das Startsignal für die Zeitmessung. Bei weiterem Ansteigen der Sägezahnspannung erreicht diese die Meßspannung u_x, wobei der Nullindikator N_2 die Zeitmessung stoppt. Die Zahl der im Impulsgenerator I erzeugten und während des Zeitabschnittes τ in der Zählkette gemessenen Impulse ist ein Maß für die Spannung u_x. Zwischen den Impulsgenerator I und die Zählkette Z ist ein Gatter oder Tor T geschaltet, das durch N_1 geöffnet, durch N_2 geschlossen wird. Die Genauigkeit dieser Umsetzung hängt von der Ansprechempfindlichkeit der Nullindikatoren sowie von der Konstanz und Linearität der Sägezahnspannung ab.

Dieses Meßprinzip wird sehr häufig, z. B. bei der Konstruktion von Digitalvoltmetern (s. § 2.35), angewandt; die Meßzeiten τ liegen zwischen einigen Millisekunden und 1 s. Die erreichte Meßgenauigkeit beträgt bei Meßbereichen zwischen 1 und 1000 V 0,1—0,2%, wobei kleine Spannungen zunächst durch Meßverstärker vorverstärkt und im Falle von Wechselspannungen gleichgerichtet werden. Gleichzeitig wird dadurch die Eingangsimpedanz des Instrumentes erhöht.

6.84 *Spannung-Frequenz-Umsetzer*

Dieser Umsetzer, dessen Prinzip in Abb. 6.73 dargestellt ist, führt die Spannungsmessung auf eine Frequenzmessung zurück und wird in Verbindung mit einem digitalen Frequenzmesser zu einem Analog-Digital-Umsetzer. Die Meßspannung u_x liegt am Eingang eines Integrationsverstärkers V und erzeugt an dessen Ausgang eine mit der Zeit linear ansteigende Spannung. Der Gradient dieses Anstiegs ist der zu messenden Spannung proportional. Sobald die Ausgangsspannung einen bestimmten Wert erreicht hat, wird der Integrationsverstärker auf Null gesetzt, gibt dabei einen Impuls ab und beginnt von neuem mit der Integration. Mit der Meßspannung erhöht sich also die Zahl der Span-

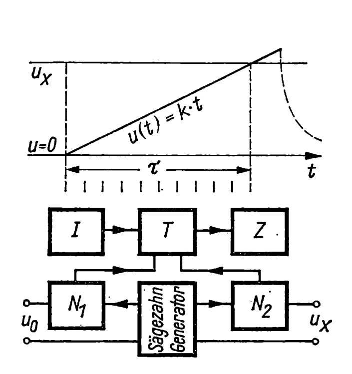


Abb. 6.72 Spannung-Zeit-Umsetzer

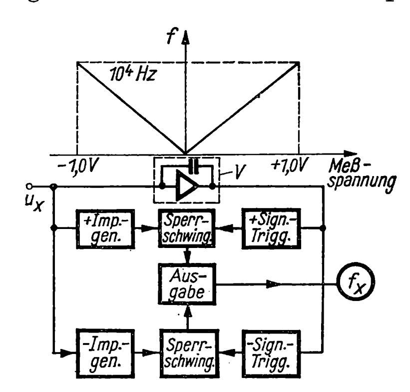


Abb. 6.73 Spannung-Frequenz-Umsetzer

nungsanstiege und der abgegebenen Impulse pro Zeiteinheit. Die Impulsfrequenz wird nach bekannten Verfahren gemessen. Dieser Umsetzer gibt das Integral der Meßspannung über eine vorgegebene Meßzeit an.

6.85 *Skalenstrecken-Umsetzer*

Eine sehr häufig auftretende Meßaufgabe in Verbindung mit der Umsetzung in Digitalwerte tritt auf, wenn Ausschläge von Meßgeräten auf einer Skala automatisch registriert werden sollen. Zu diesem Zweck belegt man z. B. die Skala eines Spiegelgalvanometers mit reflektierenden schmalen Spiegelchen und mißt die Zahl der bei einem Ausschlag auftretenden Lichtimpulse mit bekannten Methoden. Dieser Meßwert kann bis zur nächsten Anfrage gespeichert werden. Die Nullstellung des Zählers ist in diesem Beispiel optisch mit dem Nulldurchgang des Instrumentes gekoppelt.

6.86 *Stufenumsetzer*

Höchste Meßgenauigkeit läßt sich mit dem Stufenumsetzer erzielen, bei dem wie beim gewöhnlichen Gleichspannungskompensator die Meßspannung u_x mit einer Normalspannung verglichen wird. Der Abgleich erfolgt automatisch in kleinen Schritten nach einem festgelegten Programm, wobei nach jedem

Schritt entschieden wird, ob z. B. die Zuschaltung eines zusätzlichen Kompensationswiderstandes richtig oder falsch war. Nach diesem Prinzip werden automatisch arbeitende Gleichspannungskompensatoren, Ohmmeter u. a. Geräte gebaut, deren Meßbereiche 0,1 bis 1000 V bzw. 10 mΩ bis 999 MΩ betragen.

6.87 *Meßanzeige*

Die Anzeige der digitalen Messung erfolgt durch *Ziffern* entweder in Zählwerken oder meist mit *Glimmlampen-Ziffernröhren* im Dezimalsystem, deren Elektroden dicht hintereinander angeordnet sind. Anstelle des in der Analogmeßtechnik üblichen Schreibers wird hier das Meßergebnis durch Banddrucker oder mit der Schreibmaschine ausgedruckt.

Es gibt eine Reihe registrierender Meßgeräte, deren Meßgröße durch ein zusätzlich eingebautes Potentiometer in einen Analog-Digital-Umsetzer eingeführt werden kann, um diese ausdrucken oder in Rechenanlagen weiter verarbeiten zu können.

6.88 *Speicherung*

Die Digitalanzeige von Meßwerten besitzt den zusätzlichen Vorteil, daß das Meßergebnis augenblicklich gespeichert und schnell wieder abgerufen werden kann, wenn es z. B. in Rechenautomaten weiter verarbeitet werden soll.

Die an einen Informationsspeicher zu stellenden Forderungen sind:

1. Das Speichermedium muß eine einmal aufgenommene Information beliebig lange aufbewahren können. Es soll möglich sein, nicht mehr benötigte Informationen zu löschen oder durch neue zu überschreiben.
2. Es muß möglich sein, die in elektrischer Form vom Rechenwerk abgegebene Information schnell auf das Speichermedium zu übertragen und sie auch wieder in das Rechen- oder Steuerwerk zurückzugeben.
3. Die Speicherung muß von einer Speichersteuerung vorgenommen werden, damit die gespeicherte Information schnell wiedergefunden werden kann.

Es gibt eine Reihe von Möglichkeiten, diese Forderungen zu verwirklichen; die wichtigsten Speicher sind folgende:

a) *Statische Flip-Flop-Speicher* in Form von Relaisschaltungen mit der Möglichkeit, die Information „L“ oder „0“ abzufragen, ohne diese zu zerstören;

b) *Elektronenstrahlröhrenspeicher* in Form eines speziellen Leuchtschirms, der beim Auftreffen des Schreibstrahls Sekundärelektronen erzeugt. Der getroffene Bereich erhält dadurch eine positive Ladung, die durch Überschreiben nicht verändert wird. Das Abfragen geschieht durch einen zweiten Elektronenstrahl geringerer Energie und wird als Impuls an einer für den ganzen Schirm gemeinsamen Kollektorplatte registriert (s. a. § 6.77).

c) *Ferritkernspeicher* bestehen aus ringförmigen Ferriteinkristallen mit rechteckiger Magnetisierungskurve (s. § 12.8), in denen die Remanenzinduktion nur zwei konstante Werte mit verschiedenem Vorzeichen annehmen

kann. Einspeisung und Abfragen geschieht durch durchgefädelte Stromdrähte.

d) *Magnetband* [*6.78*] mit Schreib- und Lesekopf, das wie bei *c*) nur zwei Magnetisierungszustände besitzt bzw. registrieren kann. Diese Speicher werden meist nur in Verbindung mit den unter *a*) bis *c*) genannten benutzt.

e) *Supraleitende Speicher* bestehen aus einem kontinuierlichen supraleitenden Film, z. B. aus Blei, mit aufgedampften und von der Unterlage isolierten ebenfalls supraleitenden Streifen in Form eines Gitters. Durch einen gleichzeitigen überkritischen Impuls werden „normalleitende" Löcher im Film erzeugt, in denen ein bestimmter magnetischer Fluß als Information eingefädelt ist (s. a. § 4.55).

6.9 Fernmessung [*6.61, 6.119*]

Als *Fernmessung* bezeichnet man die Übertragung von Meßwerten über Kabel, Hochspannungsleitungen oder Funkverbindung, wobei die Meßgröße derart umgeformt wird, daß Übertragungsfehler möglichst vermieden werden. Für wissenschaftliche Zwecke ist die Frage nach einer Vielfachausnutzung der Übertragungsstrecke meist unwesentlich.

Für die Zwecke der Fernmessung werden folgende Methoden unterschieden:

1. Analoge Verfahren

a) *Gleichrichtergeberverfahren* für Wechselstromgrößen mit einer maximalen Übertragungsstrecke von 10 km, wobei die Übertragungseigenschaften der Strecke berücksichtigt werden müssen und eine Genauigkeit von 1···2% erreicht werden kann;

b) *Drehmomentkompensationsverfahren.* Das Drehmoment eines Ausschlaginstrumentes, das von der Meßgröße durchflossen wird, verstellt eine optische oder elektrische Blende. Diese wird zur Erzeugung eines gleich großen Gegendrehmomentes in Verbindung mit einem Verstärker benutzt. Der hierzu erforderliche Strom dient gleichzeitig zur Betätigung des Fernmeßgerätes.

c) *Impulsverfahren* [*6.11*] benutzen anstelle des Gleichstroms, der der Meßgröße proportional sein soll, eine ihr verhältnisgleiche Impulsfrequenz. Dies ermöglicht die galvanische Entkopplung der Übertragungsleitung und die Verwendung von Transformatoren. Das Verfahren eignet sich für Hochspannungsleitungen und Funkverbindungen. Zur Umformung der Meßgröße in Impulsfrequenzen werden an sich bekannte Methoden, z. B. die in § 6.84 besprochenen, benutzt. Auf der Empfangsseite muß die Impulsfrequenz wieder in einen ihr proportionalen Gleichstrom, z. B. mit den in § 6.55 behandelten Frequenzmeßmethoden, verwandelt werden.

d) *Frequenzvariationsverfahren* benutzen die Frequenzmodulation einer Trägerfrequenz im HF-Bereich und die Demodulation des Empfangssignals.

2. Digitale Verfahren

Eine Fernmeßstrecke nach diesem Verfahren besteht auf der Senderseite aus dem Meßumformer, einem Analog-Digital-Umsetzer (vgl. § 6.82) und einem Sender, auf der Empfangsseite aus dem Empfänger, mehreren Digital-Analog-Umsetzern und Speichern. Die Synchronisation von Sender und Empfänger geschieht gesondert analog zur Fernsehübertragung.

§ 7 HOCHFREQUENZMESSVERFAHREN [*7.10, 7.35, 7.55, 7.66, 7.78, 7.79, 7.81, 7.117, 7.123, 7.131*]

Die Einteilung dieses Paragraphen ist der des vorhergehenden angepaßt. Ausgehend von der Beschreibung von HF-Oszillatoren und -Verstärkern werden die Methoden der Strom-, Spannungs-, Frequenz- und Leistungsmessung behandelt. Ferner werden die in diesem Frequenzbereich angewandten Untersuchungsverfahren für HF-Kreise, Filter und Leitungen sowie für die Ausbreitungsgrößen elektromagnetischer Wellen besprochen. Viele Resultate aus den §§ 3···6 können ohne weiteres auf den hier zu besprechenden Frequenzbereich erweitert werden. Die besonderen Meßverfahren, die im Zentimeterwellengebiet eine eigene Experimentiertechnik erfordern, sind Inhalt des folgenden § 8.

7.1 Hochfrequenzoszillatoren

7.11 LC-Oszillator (vgl. § 5.44)

Für die Erzeugung hochfrequenter Schwingungen mit hoher Frequenzkonstanz werden Oszillatoren mit einem Schwingungskreis im Anoden- oder Gitterkreis benutzt. Die erzielbare Frequenzstabilität hängt ab: a) von der Änderung der Röhrendaten, b) von Änderungen der Betriebsspannungen, c) von mechanischen Veränderungen und d) von Temperaturschwankungen.

Bei der Konstruktion von Oszillatoren mit hoher Konstanz von Frequenz und Amplitude sind folgende Punkte von Bedeutung:

1. In gewöhnlichen Colpitts- oder Hartley-Oszillatoren sollte ein LC-Kreis hoher *Güte* angewandt werden.

2. Durch Benutzung eines Serienschwingkreises werden Ein- und Ausgang der Oszillatorröhre über eine sehr kleine Reaktanz rückgekoppelt, wodurch sich eine ausgezeichnete Frequenzstabilität erreichen läßt.

3. Es empfiehlt sich die Benutzung von Röhren mit einer solchen Steilheit S, daß der Quotient $\Delta C/S$ möglichst klein ist. Dabei bedeutet ΔC die Änderung der Gitter-Katoden-Kapazität, die im allgemeinen mit wachsender Steilheit größer wird.

4. Hohe Frequenzstabilität wird erreicht, wenn der Arbeitspunkt so gewählt wird, daß die Röhre im linearen Teil der Kennlinie schwingt. Wie GROSZKOWSKI [*7.48*] gezeigt hat, verursachen die durch eine gekrümmte Kennlinie entstehenden Harmonischen eine unerwünschte Phasenverschiebung, die amplitudenabhängig ist.

5. Die Röhre soll nur soweit ausgesteuert werden, daß kein Gitterstrom auftritt, wobei die Begründung wie unter 4. gilt.

Stabilitätsbetrachtung. Zur Beurteilung der Frequenzstabilität betrachtet VACKAR [*7.121*] den Oszillator als Vierpol und gelangt zu einem Ausdruck über die optimale Kreisgüte des Schwingungskreises für eine hohe Frequenzkonstanz. Die von CLAPP [*7.26*] angestellte Analyse über die Frequenzstabilität

geht von der Prinzipschaltung der Abb. 7.1a und ihrer Ersatzschaltung 7.1b aus. Gitter G und Anode A sind über die Blindwiderstände X_1 und X_2 mit der Katode K verbunden. Im Ersatzbild erscheint im Anodenkreis der Ersatzgenerator $-SX_1X_2$ (vgl. § 5.42) und ein aus R_s, L und C_v bestehender Serienschwingungskreis. Nach der Grundgleichung (5/148) für das Zustandekommen

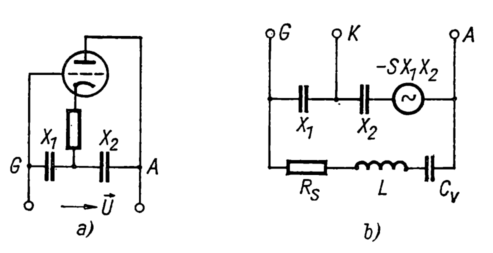


Abb. 7.1 Oszillatorschaltung (a), Ersatzschaltung (b)

selbständiger Schwingungen tritt für $SX_1X_2 \geqq R_s$ Selbsterregung auf. Es läßt sich zeigen, daß für die Frequenzänderung die Beziehung gilt:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{2R_0C_0}\,\frac{\Delta C_1}{S}\,\frac{2}{\sqrt{k}} = \frac{2\pi f_0}{2Q}\,\frac{\Delta C_1}{S}\,\frac{2}{\sqrt{k}}, \tag{7/1}$$

wenn $k = \Delta C_1/\Delta C_2$ das Verhältnis der Änderungen von Ein- und Ausgangskapazität der Röhre, R_0 und C_0 die Parallelimpedanz des abgestimmten Schwingungskreises LC_0 bedeuten. Ist ΔC_1 von S unabhängig, so wird die

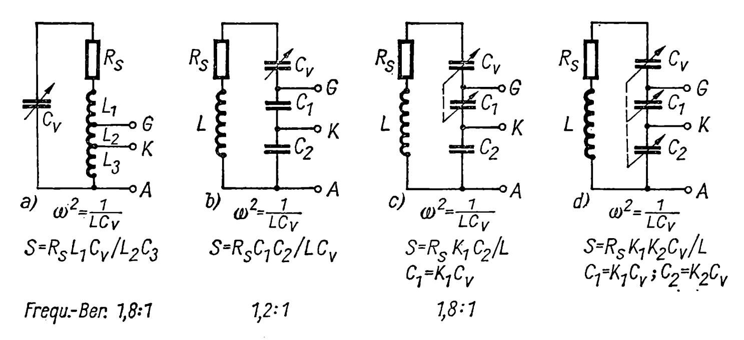


Abb. 7.2 Frequenzstabile LC-Oszillatoren

Röhre mit der größten Steilheit S die beste Frequenzstabilisierung aufweisen. Gleichung (7/1) zeigt ferner, daß die Frequenzstabilität nicht vom Verhältnis L/C_0 des Schwingungskreises, sondern nur von der Kreisgüte Q abhängt.

In Abb. 7.2 sind einige frequenzstabile LC-Oszillatoren schematisch dargestellt, wobei die Formeln für die Schwingungsfrequenz und für den kritischen Schwingeinsatz angegeben sind. Wenn S sich wie C_v ändert, nimmt die Schwingungsamplitude mit wachsender Frequenz zu (*a, d*). Die Schaltung *b*) wirkt im umgekehrten Sinn, d. h., für ein zu kleines C_v hört die Schwingung auf.

Die Schaltung *c*) liefert eine frequenzunabhängige Amplitude mit großem Abstimmungsbereich. In den Schaltungen *c*) und *d*) sind Mehrfachkondensatoren mit einem konstanten C-Verhältnis benutzt.

Amplitudenkonstanz. Zur Stabilisierung der Oszillatoramplitude wird von GOURIET [*7.45*] für den Oszillator nach Abb. 7.2a eine einfache Schaltung angegeben, die in Abb. 7.3 dargestellt ist. In den Anodenkreis der Oszillatorröhre wird ein ohmscher Widerstand R_a geschaltet, dessen Spannungsabfall einem Diodengleichrichter D zugeführt wird. Die gleichgerichtete Spannung wird geglättet und an den Gittervorwiderstand R_g gelegt.

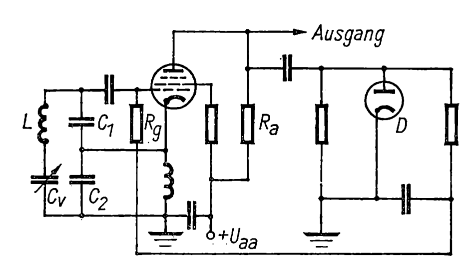


Abb. 7.3 LC-Oszillator mit konstanter Frequenz und Amplitude

Die Eigenschaften solcher HF-Oszillatoren sind folgende:

Anodenspannungsänderung von $\pm$ 20% ergibt $\Delta f_0/f_0 = \pm 2{,}5 \cdot 10^{-6}$,

Heizspannungsänderung von $\pm$ 5% ergibt $\Delta f_0/f_0 = \pm 2{,}5 \cdot 10^{-6}$,

Zeitliche Stabilität:

in 1 h	$\Delta f_0/f_0 = \pm 1 \cdot 10^{-6}$,
in 1 d	$\pm 1 \cdot 10^{-5}$,
in 1 Monat	$\pm 3 \cdot 10^{-5}$.

Verschiedene Ausführungsformen siehe [*7.58, 7.64, 7.67, 7.122*].

Die Anwendung verschiedener Oszillatorschaltungen hängt vom verfolgten Zweck ab. Der Oszillator mit abgestimmtem *Gitterschwingungskreis* wird meist in Überlagerungsempfängern benutzt. Er ist in einem großen Frequenzbereich verwendbar und benötigt nur *einen* Abstimmkondensator. Oszillatoren mit *Anodenschwingungskreis* werden für Meßsender mit großem Abstimmbereich und kleinen Ausgangsleistungen gebraucht. Der Hartley-Oszillator (Abb. 6.3) eignet sich für relativ niedrige Frequenzen bis zu 50 MHz und zeichnet sich durch stabile Rückkopplungsbedingungen aus. Colpitts-Oszillatoren (Abb. 7.4) werden häufig wegen ihrer ausgezeichneten Stabilität und des niedrigen Klirrfaktors benutzt; oberhalb von 100 MHz sind fast ausschließlich diese in Gebrauch.

7.12 Oszillatoren für sehr hohe Frequenzen

Im Frequenzbereich oberhalb von 100 MHz werden die Eigenschaften konventioneller Oszillatoren durch folgende Effekte beeinflußt:

a) die Laufzeit der Elektronen innerhalb der Röhre wird mit der reziproken Frequenz vergleichbar,

b) Induktivität und Kapazität der Zuleitungen und der Elektroden werden mit den äußeren Schaltelementen vergleichbar,

c) die Verluste der Schwingungskreise wachsen mit zunehmender Frequenz.

Die Elektronengeschwindigkeit berechnet sich bekanntlich aus

$$v = (2eU/m)^{1/2} = 5{,}93 \cdot 10^7 \sqrt{U}\ [\mathrm{cm/s}], \qquad (7/2)$$

wenn U die Beschleunigungsspannung ist. Die Laufzeit der Elektronen zwischen der Katode, aus der sie etwa mit $v = 0$ austreten, und dem Gitter ist relativ groß. Zwischen Gitter und Anode ist sie trotz der längeren Strecke viel kleiner, da eine wesentlich höhere Spannung wirkt. Die Folge hiervon ist, daß Röhrenleitwert und Phase des Anodenstroms eine Funktion der Frequenz werden. Während bei niedrigen Frequenzen der durch den Elektronenstrom im Gitterkreis induzierte Strom der Gitterspannung um 90° nacheilt,

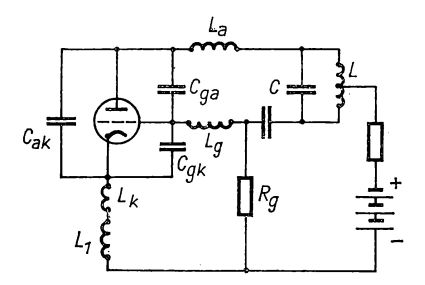


Abb. 7.4 HF-Oszillator mit Eigenkapazität und -induktivitäten

verringert sich dieser Winkel mit wachsender Frequenz und erzeugt im Eingangskreis eine Wirkstromkomponente, d. h. einen Gitterstrom. Der Parallelersatzwiderstand des Gitterkreises nimmt mit f^2 ab und begrenzt die erreichbare maximale Frequenz des Oszillators.

In ähnlicher Weise wirkt sich die Induktivität der Katodenzuleitung aus. Die Kombination der inneren Induktivität und der Elektrodenkapazität beschränkt die Maximalfrequenz, die mit äußeren Schaltmitteln erreicht werden kann. In Abb. 7.4 ist ein HF-Triodenoszillator dargestellt, wobei die äußeren Schaltmittel — LC-Kreis, Drossel L_1 in der Katodenzuleitung — den Eigenimpedanzen der Röhre gegenübergestellt sind. Diese sind die Elektrodenkapazitäten C_{ak}, C_{ga}, C_{gk} sowie die Zuleitungsinduktivitäten L_a, L_g und L_k. Die Größen L_a, L_g und C_{ga} stellen einen Parallelresonanzkreis zum LC-Kreis dar; man kann diesen fortlassen und zur Schwingungserzeugung lediglich eine kleine Kapazität zwischen Anode und Gitter anbringen.

Mit gewöhnlichen *Empfängerröhren* lassen sich für kleine Leistungen Oszillatoren bis 500 MHz betreiben. Endröhren mit größeren Eigenkapazitäten sind nur bis zu etwa 100 MHz geeignet. In den meisten Schaltungen für sehr hohe Frequenzen wird die Colpitts-Schaltung (Abb. 7.4) angewandt, bei der die Rückkopplung über die Kapazitäten zwischen den Elektroden erfolgt. Durch

Versilbern der Elektrodenzuleitung läßt sich die durch den Skineffekt verursachte zusätzliche Dämpfung des Schwingungskreises verringern. Über die Erzeugung höherer Frequenzen siehe § 8.1.

7.13 RC-Oszillator

Die in § 6.223 behandelten RC-Oszillatoren enthalten zur Rückkopplung ein RC-Netzwerk anstelle des LC-Schwingungskreises beim LC-Generator. Von Vorteil ist bei diesem Oszillatortyp der große Frequenzbereich, der durch Verändern von C oder R überstrichen werden kann, da $\omega_0 \sim 1/R$ bzw. $1/C$. Der bekannteste RC-Oszillator, der in Abb. 6.7 dargestellte Wien-Brücken-Oszillator, läßt sich in einem großen Frequenzbereich verwenden; seine Ausgangsspannung ist fast oberwellenfrei, sofern die Röhre im A-Bereich arbeitet.

7.14 Quarzgesteuerter Oszillator [*7.5*]

Höchste Frequenzstabilität erzielt man mit quarzgesteuerten Oszillatoren, deren Grundschaltungen in § 5.46 besprochen sind.

7.141 Piezoelektrische Kristalle [*7.54*]

Für die Steuerquarze werden Stäbe, Platten und Ringe verwendet, deren Abmessungen Eigenschwingungen im gewünschten Frequenzbereich ermöglichen und deren Temperaturkoeffizient in einem bestimmten Temperaturbereich annähernd verschwindet. Schwingungsformen und Temperaturkoeffi-

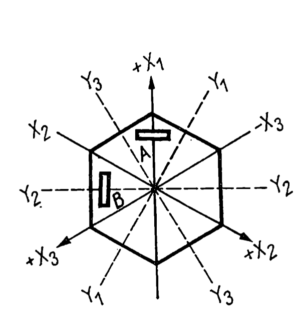


Abb. 7.5 Schnittrichtungen für Quarzschwinger

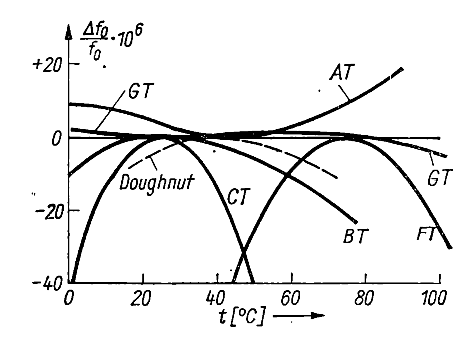


Abb. 7.6 Temperaturabhängigkeit der Eigenfrequenz verschiedener Schwingkristalle

zient hängen von den Richtungen ab, in denen der Schwingquarz aus dem Kristall geschnitten wird. In Abb. 7.5 ist ein Quarzkristall senkrecht zur optischen Z-Achse dargestellt und in diesem Schnitt die Lage der X- und Y-Richtungen angegeben. Eine Platte A, deren Ebene senkrecht zur X_1-Richtung steht, bezeichnet man als X-Schnitt-Platte. In dieser Schnittrichtung beträgt der Temperaturkoeffizient -5 bis $-25 \cdot 10^{-6}$/grd, während die Platte B in Abb. 7.5, die in einer Y-Richtung aus dem Kristall herausgeschnitten ist,

einen solchen von +25 bis $+100 \cdot 10^{-6}$/grd zeigt. Der Anregungsmodus der Eigenschwingungen für diese beiden Schnittrichtungen ist nicht der gleiche, so daß es nicht sinnvoll ist, durch Schnittrichtungen zwischen X und Y einen verschwindenden Temperaturkoeffizienten erreichen zu wollen. Für beide Schnittrichtungen sind in *Tabelle 7.1* der Elastizitätsmodul und die Größe $H = f_0 \cdot l$ für die longitudinale Grundschwingung einer l cm dicken Platte oder eines langen Stabes angegeben.

Tabelle 7.1 Frequenz und Elastizitätsmodul von Quarzstäben

Schnitt	E kp/mm²	H cm · Hz	Schwingungsform
Y	8054	$2{,}7303 \cdot 10^5$	Dickenscherschwingung
X	7979	$2{,}7175 \cdot 10^5$	Dickendehnungsschwingung

Der von MASON [7.76] angegebene GT-Schnitt besitzt in einem weiten Temperaturbereich von 0···100°C einen verschwindenden Temperaturkoeffizienten, während alle anderen Schnitte einen parabolischen Verlauf dieser Größe zeigen, wie aus Abb. 7.6 zu entnehmen ist. Zur Festlegung der Orientierungswinkel verschieden geschnittener Kristallplatten wird auf die Kugel in Abb. 7.7, welche die drei Kristallachsen X, Y, Z enthält, die rechtwinklige Platte so gelegt, daß die Richtung der *kleinsten* Kante zum Kugelmittelpunkt zielt; sie wird mit Z' bezeichnet. Die Festlegung der drei Winkel φ, ϑ, ψ ergibt sich aus der Abbildung. Für verschiedene Schnittrichtungen sind in *Tabelle 7.2* die Orientierungswinkel, die Größe H und der anwendbare Frequenzbereich angegeben. Die Abhängigkeit der Eigenfrequenz verschieden orientierter Platten ist aus Abb. 7.6 zu entnehmen.

Tabelle 7.2 Schnittrichtung, Eigenfrequenz und Frequenzbereich von Quarzschwingern

Schnitt	φ	ϑ	ψ	H cm · Hz	Frequenzbereich kHz
X	0	90°	90°	$2{,}7303 \cdot 10^5$	30···30000
Y	90°	90°	90°	$2{,}7175 \cdot 10^5$	30···30000
AT	−90°	54°45′	90°	$1{,}662 \cdot 10^5$	1000··· 5000
BT	−90°	−41°	90°	$2{,}549 \cdot 10^5$	2000···13000
CT	−90°	52°	90°	$3{,}080 \cdot 10^5$	100··· 1000
GT	−90°	38°52′	±45°	$3{,}292 \cdot 10^5$	100··· 1000
MT	6°40′	50°28′	79°36′	—	50··· 500
NT	9°25′	40°40′	77°40′	—	4··· 50

AT- und BT-Platten führen reine Scherungsschwingungen aus, die leicht anzuregen sind. Der GT-Schnitt führt Scherungsschwingungen als Resultierende von zwei gekoppelten Dehnungsschwingungen aus und besitzt einen

vernachlässigbaren Temperaturkoeffizienten zwischen -25 und $+75\,°C$, wenn das Kantenverhältnis der rechteckigen Platte zu 0,859 gewählt wird.

Weiteres über Schwingquarze siehe [*7.3*, *7.7*]. Über *synthetische* piezoelektrische Kristalle für sehr hohe Frequenzen siehe [*7.47*, 7.*116*].

7.142 Schaltungen mit Quarzschwingern

Die wichtigsten Schaltungen von quarzgesteuerten Oszillatoren sind bereits in § 5.46 behandelt. Für besonders hohe Stabilitätsanforderungen ist der Meacham-Oszillator geeignet, dessen Schaltung vereinfacht in Abb. 7.8 dargestellt ist. Er besteht aus einem abgestimmten Pentodenverstärker E_1, dessen Ausgang an das Gitter der Oszillatorröhre E_2 gelegt wird. Diese enthält zwischen Anode und Katode eine Widerstandsbrücke, die aus zwei Widerständen R_1, R_2, dem Schwingquarz Q und einem Heißleiter L (Lämpchen)

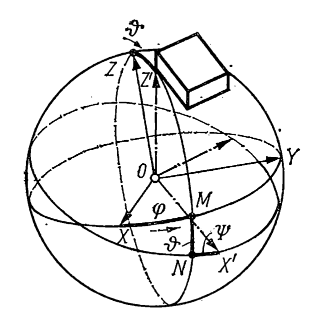


Abb. 7.7 Orientierungsbestimmung eines Schwingquarzes

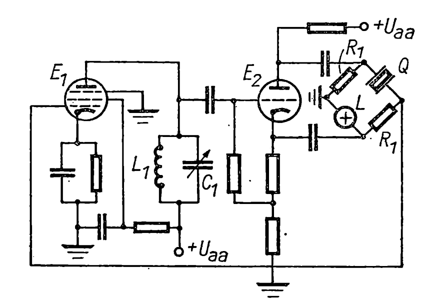


Abb. 7.8 Meacham-Oszillator

besteht. Der Brückenausgang wird auf das Steuergitter von E_1 übertragen. Beim Einsetzen der Schwingungen ist L zunächst kalt, die Brücke ist verstimmt und liefert an den Verstärker eine positive Rückkopplungsspannung. Dadurch schaukeln sich die Schwingungen schnell auf, wobei das Lämpchen aufleuchtet und die Brücke fast abgeglichen ist. Es wird eine Gleichgewichtseinstellung erreicht, die als Amplitudenstabilisierung wirkt und sich so einregelt, daß die Brückenverluste dem Verstärkungsfaktor der Anordnung entsprechen.

7.143 Quarzuhren

Durch sorgfältige Stabilisierung der Betriebsspannungen, der Temperatur des Schwingquarzes auf 0,01 bis 0,001 °C lassen sich mit der *Quarzuhr* (s. Bd. I, § 3.52) Frequenzgenauigkeiten von 10^{-10}—10^{-8} erzielen. Näheres siehe [*7.14*, *7.102*].

7.15 Erzeugung von Rechteckspannungen und Impulsen [*7.18*, *7.108*, *7.114*]

Zur Erzeugung von *Rechteckspannungen* werden die in § 5.53 behandelten symmetrischen *Multivibratoren* mit zwei Röhren oder Transistoren benutzt, die als *RC*-Verstärker geschaltet sind, deren Ausgangsspannung abwechselnd auf

den Eingang der anderen Röhre rückgekoppelt wird. Für die volle Periodendauer, d. h. für die Erzeugung einer symmetrischen Rechteckschwingung, wird die in Gl. (5/164) angegebene Zeit benötigt.

Vielfach werden kurze Impulse bei einer relativ kleinen Impulsfrequenz benötigt. Dies läßt sich nicht mit der üblichen Schaltung erreichen, da die Aufladezeit für die Kapazität, welche den langdauernden Impulsteil erzeugen soll, durch die kurze Impulsdauer gegeben ist und auch bei kleinen Ladewiderständen nicht mehr ausreichend ist. Das bedeutet, daß mit abnehmendem Verhältnis von Impulsdauer zu Gesamtperiode die Impulshöhe abnimmt.

In Abb. 7.9 ist die Schaltung eines stark asymmetrischen Multivibrators dargestellt, der Impulse von 0,5 μs Dauer bei einer Impulsfrequenz von 200 Hz erzeugt. Sie enthält als wesentlichen Bestandteil eine Verzögerungsstrecke zur Steuerung der Impulsdauer. Diese besteht aus der Induktivität L, die

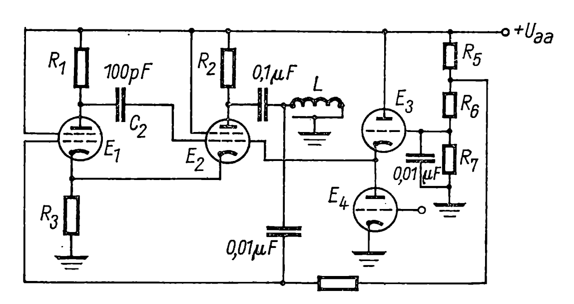


Abb. 7.9 Asymmetrischer Multivibrator

einpolig geerdet ist. Bei der plötzlichen Sperrung der Röhre E_2 für eine Impulsdauer erhöht sich ihre Anodenspannung um einen bestimmten Betrag ΔU, der durch die Parallelimpedanz R_2 und die charakteristische Impedanz von L gegeben ist. Zu einem um 0,5 μs späteren Zeitpunkt ist dieser Spannungsimpuls von L reflektiert worden, wobei sich das Vorzeichen umkehrt, und gelangt an das Gitter der Röhre E_1. Während der zwischen den Impulsen verstreichenden Zeit befindet sich das Gitter von E_1 auf dem durch die Widerstände R_5, R_6 vorgegebenen Potential. Führt E_1 Strom, so erscheint ΔU ebenfalls am Gitter von E_1 und erhöht die Katodenspannung um denselben Betrag. Die Anodenspannung von E_1 erniedrigt sich dabei und entlädt C_2 durch die kleine Impedanz der Katodenfolgerstufe E_3 innerhalb von etwa 0,3 μs. Am Ende der Impulsdauer von 0,5 μs bewirkt das in L reflektierte Signal, daß Gitter und Katode von E_1 ein Potential annehmen, um den Strom in E_2 wieder einzuleiten, wodurch die Kapazität C_2 durch einen in der Röhre E_4 einstellbaren Strom entladen wird. Diese dient zur Einstellung der Impulsfrequenz. Weitere Schaltungen siehe [*7.1*, *7.39*, *7.98*, *7.119*, *7.130*]. Allgemeines über Impulsgeneratoren siehe [*7.23*, *7.29*, *7.44*, *7.88*, *7.111*, *7.115*].

Von KRUEGLE [*7.69*] wird ein Oszillator beschrieben, der eine Spannung in Treppenstufenform liefert. Über einen Hochspannungsimpulsgenerator für sehr kurze Impulse im ns-Bereich siehe [*7.77*]. OKOROKOW [*7.86*] beschreibt einen impulsmodulierten Quarzoszillator.

Zur Anpassung von Impulsgeneratoren und Verbrauchern werden spezielle *Transformatoren* benutzt, die bei hohem Wirkungsgrad geringe Verzerrungen der Impulsform liefern müssen. Zur Verminderung der Streuverluste werden HF-Massekerne (s. § 12.8) verwendet [*7.20*].

7.16 Frequenzwandler

Frequenzteiler dienen dazu, eine Impulsfolge oder auch eine periodische Wechselspannung in eine solche geringerer Frequenz zu verwandeln, wobei das Teilerverhältnis konstant sein muß. Das Prinzip eines Frequenzteilers mit hohem Teilerverhältnis nach PHILIPP [*7.89*] läßt sich anhand der Abb. 7.10 erläutern. Der Teiler besteht aus der Pentode E_1 und einer Röhre E_2 mit Sekundärelektronenverstärkung. Im Ruhezustand ist E_1 durch die negative

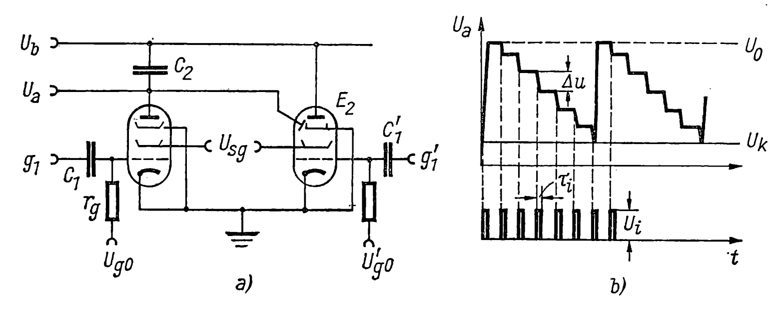


Abb. 7.10 Frequenzteiler

Gittervorspannung U_{g0} gesperrt. Wird über den Kondensator C_1 die zu unterteilende Impulsfrequenz dem Gitter von E_1 zugeführt, so wird die Pentode für die Impulsdauer kurzzeitig geöffnet und der Kondensator C_2 um einen Spannungsbetrag Δu aufgeladen, der sich zu

$$\Delta u = \frac{i_a \tau_i}{C_2}$$

ergibt, wenn i_a den Anodenstrom von E_1 und τ_i die Impulsdauer bedeutet. Während dieser Zeit sinkt die Spannung U_a um denselben Betrag ab, während der Impulslücke bleibt sie konstant. Der Anodenstrom ist im Bereich $U_a > U_{sg}$ von U_a fast unabhängig, d. h., Δu besitzt einen konstanten Wert. Es entsteht demnach ein Spannungsverlauf in Form einer abfallenden Treppenkurve (Abb. 7.10b). Der Ausgangszustand der Kondensatorspannung von C_2 wird wiederhergestellt, wenn U_a einen kritischen Wert U_k unterschreitet, bei dem von der Parallelelektrode der Röhre E_2 ein sekundärer Elektronenstrom zur Batteriespannung U_b ausgelöst wird. Die Konstanz des Teilerverhältnisses verlangt, daß die Unsicherheit für die kritische Spannung $\Delta U_k < \Delta u/2$ ist. Mit solchen Schaltungen können Teilerverhältnisse von 100 bis 200 bei Impulsfolgefrequenzen von einigen Megahertz realisiert werden. Weitere Einzelheiten siehe [*7.103*]. Von SCHRADER [*7.106*] wird ein Leistungsfrequenzwandler auf thermischer Grundlage beschrieben.

Mehrstufige Frequenzteiler lassen sich auch mit Oszillatoren herstellen, die auf die gewünschten Frequenzen abgestimmt und lose an die HF-Spannung mit der höheren Frequenz angekoppelt sind. Dieses Verfahren wird bei Quarzuhren benutzt.

Frequenzvervielfachung erhält man durch Synchronisierung eines Oszillators 2, der auf die Frequenz nf_1 abgestimmt ist und dessen Gitter die Spannung der Frequenz f_1 aufgedrückt wird.

Frequenzverdopplung tritt in der Zweiweggleichrichtung (vgl. § 5.13) mit Röhren- oder Halbleiterdioden auf, wenn die Glättungsmittel fortgelassen werden. An ihre Stelle tritt am besten ein auf die Ausgangsfrequenz abgestimmter Schwingungskreis.

7.2 Hochfrequenzverstärker

Die grundsätzlichen Eigenschaften von Röhren und Transistoren in verschiedenen Verstärkeranordnungen sind bereits in § 5.2 besprochen. In diesem Abschnitt sollen zusätzlich die Probleme behandelt werden, die bei der Verstärkung *sehr hoher Frequenzen*, bei *Selektivverstärkern* und in *Breitbandverstärkern* auftreten.

7.21 Hochfrequenzeffekte in Elektronenröhren

Wie bereits in § 7.12 erwähnt, spielen die Elektrodenkapazitäten bis zu 100 kHz keine Rolle. Sie machen sich zwischen 0,1 und 10 MHz bemerkbar,

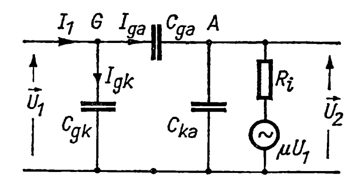


Abb. 7.11 Ersatzkreis einer Röhre mit Röhrenkapazitäten

bei noch höheren Frequenzen beeinflussen die Laufzeiterscheinungen den Eingangswiderstand der Röhre.

In Abb. 7.11 ist der Ersatzkreis einer Röhre in Katodenschaltung (vgl. § 5.221) dargestellt, wobei im Gegensatz zu Abb. 5.19 die Röhrenkapazitäten eingetragen sind. Der Eingangsstrom I_1 teilt sich bei G in die beiden Komponenten I_{gk} und I_{ga} entsprechend

$$\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{U}_1 \boldsymbol{Y}_{gk} + (\boldsymbol{U}_1 - \boldsymbol{U}_2)\boldsymbol{Y}_{ga}, \tag{7/3}$$

wobei $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$ Eingangs- bzw. Ausgangsspannung, $\boldsymbol{Y}_{gk}$ und $\boldsymbol{Y}_{ga}$ die Leitwerte der Gitter-Katoden- bzw. Gitter-Anoden-Kapazität sind. Als Eingangsadmittanz wird das Verhältnis $\boldsymbol{I}_1/\boldsymbol{U}_1$ bezeichnet, für das

$$\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{Y}_{gk} + \boldsymbol{Y}_{ga}(1 - \boldsymbol{A}_\varphi) \tag{7/4}$$

gilt, wenn $A_\varphi = +U_2/U_1$ der komplexe Verstärkungsfaktor der Röhre ist. In der Mitte des Frequenzbandes beträgt $\varphi = 180°$; im allgemeinen wird die Phasenabweichung $-90° < \varphi < +90°$ betragen. Die Eingangsadmittanz Y_1 läßt sich einfach durch die Ersatzkapazität

$$C_1 = C_{gk} + C_{ga}(1 + A \cos \varphi) \tag{7/5}$$

ausdrücken, die parallel zum Leitwert

$$G_1 = -\omega C_{ga} A \sin \varphi \tag{7/6}$$

geschaltet ist. Aus Gl. (7/5) geht hervor, daß die Eingangskapazität der Röhre um den zweiten Term vergrößert erscheint; der Zuwachs liegt zwischen C_{ga} und $C_{ga}(1 + A)$. Gleichung (7/6) zeigt einen Eingangsleitwert, der positiv oder negativ sein kann und vom Phasenwinkel φ abhängt. Für einen induktiven Lastwiderstand wird $\varphi > 0$ und der Eingangsleitwert negativ. Für große Werte kann der Verstärker durch diesen Miller-Effekt zu Schwingungen angeregt werden. Aus diesem Grunde müssen Breitbandverstärker *neutralisiert*, d. h. mit einer zusätzlichen Rückkopplung versehen werden, um Selbsterregung zu verhindern.

In ähnlicher Weise berücksichtigt man den Einfluß der Röhrenkapazitäten bei den anderen Grundschaltungen der Triode.

Bei Frequenzen oberhalb von 10 MHz treten zwei weitere Effekte auf:

1. in der Eingangsadmittanz tritt wegen der Rückkopplung infolge der Induktivität der *Katodenzuleitung* eine Wirkkomponente im Leitwert auf;

2. durch die endliche Laufzeit der Elektronen zwischen Katode und Gitter tritt ebenfalls eine Wirkkomponente hinzu, die quadratisch mit der Frequenz wächst.

7.22 Hochfrequenzeffekte in Transistoren [*7.50*]; s. a. § 4.275

Bei *Transistoren* tritt eine Abnahme des Verstärkungsgrades bei wesentlich niedrigeren Frequenzen als bei Röhren auf. Die dabei mitspielenden Effekte sind folgende:

1. Vergrößerung der Raumladungsschicht am Kollektorübergang und Veränderung von α mit dem Emissionsstrom;
2. Laufzeiteffekte und Rekombinationserscheinungen;
3. Kollektorübergangskapazität;
4. äußerer Widerstand an der Basis;
5. Oberflächeneffekte; vagabundierende Ströme.

7.23 Breitbandverstärker [*7.83*]

In § 5.23 ist allgemein das Frequenzverhalten eines Verstärkers behandelt. Für viele Anwendungen, z. B. bei Fernsehverstärkern, muß dieser zwischen 60 Hz und 4 MHz einen konstanten Verstärkungsfaktor und geringe Phasenverzerrung aufweisen. Von besonderer Bedeutung ist hierfür die Verwendung von *Katodenfolgerstufen* (vgl. § 5.223), welche den Vorteil besitzen, daß 1. der

Lastwiderstand an Erde gelegt werden kann; 2. wegen der negativen Rückkopplung bei hohen Frequenzen ein konstanter Verstärkungsfaktor und Phasenreinheit zu erreichen ist; 3. aus demselben Grund eine hohe Eingangsimpedanz auftritt; 4. der Klirrfaktor daher klein wird.

7.24 Selektivverstärker

Zur selektiven Verstärkung einer Spannung bei konstanter Frequenz werden im einfachsten Fall *einkreisige Siebschaltungen* benutzt. Bei diesen liegt im Anodenkreis ein Parallelschwingkreis; unter der Voraussetzung, daß der Blindwiderstand des Schwingkreises $\boldsymbol{R} \ll R_i$ (Innenwiderstand der Röhre) ist, ergibt sich die Verstärkung

$$\boldsymbol{A} = S \cdot \boldsymbol{R} = S/\boldsymbol{G} = \frac{S}{G}\,\frac{1}{1+\mathrm{j}\eta}. \tag{7/7}$$

Dabei ist η die normierte Frequenz

$$\eta = \frac{\omega_0 C}{G}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right). \tag{7/8}$$

Der Leitwert $\boldsymbol{G}$ schließt den Gitterwiderstand der nachfolgenden Röhre, die Wickelkapazität C der Spule sowie die Schalt- und Röhrenkapazitäten ein. Im Resonanzfall wird $\boldsymbol{R} = R$, und es ergibt sich die maximale Verstärkung

$$A_{\max} = \frac{S}{G} = S \cdot R. \tag{7/9}$$

Ist $\boldsymbol{R}$ mit R_i vergleichbar, dann muß neben dem Leitwert G des Kreises der Leitwert G_i der Röhre berücksichtigt werden. Für $\boldsymbol{R} = R_i$ verdoppelt sich die Dämpfung des Kreises.

Um einen größeren Durchlaßbereich des Verstärkers zu erhalten, kann man zwei einkreisige Siebketten verwenden, die durch die Röhre entkoppelt sind. Im Gitter- und Anodenkreis liegen je ein Schwingungskreis, die etwas gegeneinander verstimmt sind.

Bei den *zweikreisigen Siebschaltungen* liegt im Anodenkreis der Röhre ein induktiv gekoppeltes Bandfilter (vgl. § 3.47), das ebenfalls innerhalb eines schmalen Frequenzbandes konstante Verstärkung ergibt. Weiteres über Hochfrequenzverstärker siehe [*7.27*, *7.31*, *7.68*, *7.84*, *7.104*, *7.110*, *7.127*].

7.3 Messung von Strom, Spannung und Leistung

7.31 Strommessung bei Hochfrequenz

In der Hochfrequenz*technik* werden zur Messung des Antennenstromes in Sendern Strommesser benutzt, die als Betriebsinstrumente eine geringe Meßgenauigkeit haben können, jedoch stark überlastbar sein müssen. Für physikalische Messungen kommen *Thermostrommesser*, *Bolometer* und *optische Instrumente* in Betracht.

7.311 Betriebsstrommesser

Zur Messung kleiner Ströme von 1···100 mA werden Kupferoxydul-, Germanium- und Siliziumgleichrichter verwendet, die in Serie mit einem Milliamperemeter geschaltet sind (vgl. § 6.32). Für hohe Meßfrequenzen enthält der Ersatzkreis dieser Meßanordnung (Abb. 7.12) neben einem spannungsabhängigen Widerstand R_g des Gleichrichters einen konstanten Bahnwiderstand R_v sowie zwei Kapazitäten C_g und C_m, von denen C_g wegen der mit der Spannung veränderlichen Dicke der Übergangsschicht eine Funktion der angelegten Spannung ist. Die Richtwirkung des Gleichrichterelementes hört auf, wenn der kapazitive Blindwiderstand vergleichbar mit R_v wird. Die Ersatzwiderstände sind ferner temperaturabhängig. Meist werden mehrere

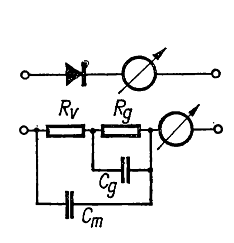


Abb. 7.12 Ersatzbild eines Gleichrichters

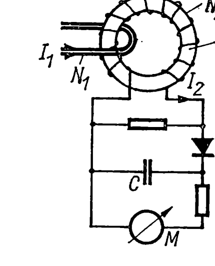


Abb. 7.13 Strommessung mit Stromwandler

Gleichrichter in Graetz- oder Greinacher-Schaltung verwendet. Eine Vergrößerung des Meßbereichs ist durch Parallelschalten mehrerer Gleichrichter oder durch Nebenwiderstände möglich.

Stärkere Ströme werden mit Hilfe von *Stromwandlern* gemessen. Diese besitzen Toroidform und bestehen für Frequenzen bis zu einigen MHz aus dünnem legiertem Eisenblech, bei höheren Frequenzen aus Ferriten. Der Meßstrom ist durch wenige Windungen mit dem magnetischen Fluß im Magnetkern verkettet oder bei der Messung sehr großer Ströme, wie beim technischen Stromwandler für 50 Hz (s. Abb. 6.31), zentrisch durch den Ring geführt. Aus der Abb. 7.13 ist der weitere Aufbau der Meßschaltung ersichtlich. Der Wandlerkern K ist mit einer Sekundärwicklung mit N_2 Windungen versehen, deren Enden über Gleichrichter Gl und einen Vorwiderstand R_v an das Gleichstrominstrument M gelegt sind. Da bei dieser Konstruktion die Streuinduktivitäten klein gegen die der beiden Wicklungen N_1 und N_2 sind, wird das Übersetzungsverhältnis $\ddot{u} = I_1/I_2 \approx N_2/N_1$. Für die Messung bei sehr hohen Frequenzen wird der Wandler von einem geerdeten Gehäuse umgeben, in dem Gleichrichter und Instrument untergebracht sind.

7.312 Strommessung mit Bolometer

Als *Bolometer* wird ein temperaturabhängiger Widerstand bezeichnet, der durch den Meßstrom erwärmt wird, wobei die in einer Brückenschaltung festgestellte Widerstandsänderung als Meßgröße dient.

Für die Messung *schwacher Ströme* (< 5 mA) werden entweder sehr dünne *Platindrähte* von 1···3 μm Dicke oder *Thermistoren* benutzt, deren Widerstand bei Temperaturerhöhung abnimmt. Die Ankopplung des Bolometers B geschieht nach Abb. 7.14a von der HF-Seite her über einen Kondensator C; die Widerstandsmessung erfolgt über eine HF-Drossel L mit kleinem Widerstand. Für sehr hohe Frequenzen wird das Bolometer in eine Meßleitung eingebaut (s. § 8.622). Die Anpassung an den Wellenwiderstand der HF-Zuleitung wird günstiger bei Verwendung eines *Doppelbolometers* (Abb. 7.14b). Die Empfindlichkeit des Bolometers hängt vom Wärmeübergang an die Umgebung ab; kleine Ströme werden daher mit *evakuierten* Instrumenten gemessen. In Abb. 7.15 ist eine *Bolometerbrücke* dargestellt, die durch Verändern des Widerstandes R_4 abgeglichen wird. Der Heizstrom I_0 im Bolometer läßt sich durch den Vorwiderstand R_v regeln. Die Widerstände der Brücke sind

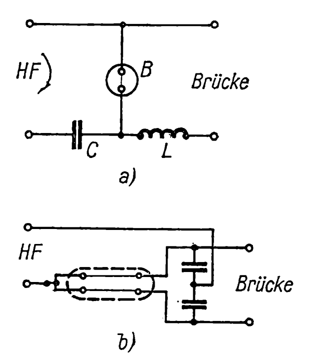


Abb. 7.14 Bolometer: Ankopplung (a), Doppelbolometer (b)

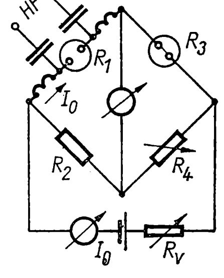


Abb. 7.15 Bolometerbrücke

etwa einander gleich. Die Widerstandsänderung eines nicht evakuierten Bolometers beträgt etwa 5 Ω/mW; für das evakuierte Instrument ist diese etwa um den Faktor 100 größer.

Thermistoren für Meßzwecke bestehen aus einer Perle aus Nickel- und Manganoxid und feinverteiltem Kupfer in Harz, die mit Glas überzogen ist und dünne Zuleitungsdrähte trägt. Dieses Bolometer ist viel stärker als dünner Platindraht überlastbar und besitzt einen 10fachen Temperaturkoeffizienten. Es lassen sich Brückenschaltungen anwenden, die Vollausschlag bei 0,1 mW ergeben, was einem Meßstrom von 0,3 mA entspricht.

Birk und Fuschillo [*7.13*] behandeln theoretisch ein Tieftemperaturbolometer, das zur Verringerung der Rauschleistung und des Wärmeverlustes zwischen 1 und 5 K arbeitet und dabei Energien von 1 fW nachzuweisen gestattet. Mit Vorteil lassen sich hierzu supraleitende Filme in der Nähe der Sprungtemperatur benutzen.

7.313 Vakuum-Thermoumformer

Wie in § 6.314 besprochen, eignen sich zur Messung von HF-Strömen zwischen 1 und 100 mA die dort angegebenen Thermoumformer. Diese bestehen aus einem Heizer und einem angekoppelten Thermoelement aus Kupfer-

Konstantandraht. Ein Frequenzfehler infolge Skin-Effekt tritt erst bei Frequenzen oberhalb von 1000 MHz auf. Bei der Messung von Strömen über 0,5 A kann auf die Evakuierung verzichtet werden, da die Wärmeabfuhr durch Leitung größer als die durch Konvektion wird. Stärkere Ströme werden über einen HF-Meßwandler an den Thermoumformer angeschlossen.

7.314 Normalstrommesser

Als *Normalstrommesser* werden mit Gleichstrom eichbare Instrumente bezeichnet, bei denen als Meßgröße die optisch abgestrahlte Leistung festgestellt wird.

Zur Messung sehr kleiner Ströme von 10···50 mA wird die Erwärmung des Meßdrahtes mit Hilfe eines *Schlierenverfahrens* gemessen, das einen Meßfehler von etwa 5% aufweist. Stärkere Ströme können über eine Fotozelle bestimmt werden, wobei als Heizer Wolframdraht von 0,04 mm Durchmesser benutzt wird, der in einen Glaskolben eingeschmolzen ist.

Auch dynamometrische Methoden sind bis zu sehr hohen Frequenzen anwendbar.

Die meisten auf thermischer Grundlage beruhenden Strommesser sind mit Gleichstrom eichbar.

7.32 Spannungsmessung bei Hochfrequenz

Zur Spannungsmessung in diesem Frequenzbereich lassen sich meist die in § 6.32 behandelten Gleichrichter-Instrumente benutzen, ferner *Röhrenvoltmeter* mit Dioden und Trioden, denen für kleine Spannungen Meßverstärker vorgeschaltet werden.

7.321 Röhrenvoltmeter

Die Grundschaltungen der Röhrenvoltmeter sind bereits in § 6.35 besprochen. Sehr kleine Spannungen von einigen Mikrovolt bis zu 100 mV werden mit vorgeschaltetem *Meßverstärker* gemessen. Dieser besteht aus einem Widerstands- oder Breitbandverstärker mit stark gedämpftem Bandfilter, bei dem konstanter Verstärkungsfaktor durch Gegenkopplung erreicht wird. Zur Veränderung des Meßbereichs dient ein geeichter Spannungsteiler.

Spannungen im Bereich zwischen 50 mV und 2 V werden mit dem *Audion-Voltmeter* gemessen, wobei wegen des quadratischen Kennlinienteils im Anlaufgebiet Effektivwerte angezeigt werden.

Höhere Spannungen mißt man mit dem *Diodenvoltmeter* ohne Verstärkung und mit Ladekondensator, so daß Scheitelwerte der Spannung angezeigt werden.

Zur Messung von Spannungen bis zu 500 V wird vielfach das *Richtverstärkervoltmeter* verwendet, dessen Schaltung in Abb. 7.16 dargestellt ist. Das Gitter der Pentode E ist so stark negativ vorgespannt, daß praktisch kein Ruhestrom fließt. Die Eingangswechselspannung steuert den Anodenstrom, dessen zeitlicher Mittelwert am Katodenwiderstand R_k, der für verschiedene Meß-

bereiche mit dem Schalter S_2 umgeschaltet wird, eine Richtspannung u_k erzeugt. Diese addiert sich zur festen Gittervorspannung, welche von den einzelnen Widerständen abhängt. Durch diese Gegenkopplung erhält man eine gute Linearität zwischen Meßspannung und Stromanzeige im Anodenkreis und einen großen Aussteuerbereich, der bei 70% der Anodenspannung liegt. Der für größere Meßspannung vorgesehene Spannungsteiler 10:1, der aus den Widerständen R_{g1} und R_{g2} besteht, benötigt für hohe Frequenzen zum Phasenabgleich den Kondensator C_g.

Umschaltbare Voltmeter unter Verwendung von Germaniumdioden, die zur Vermeidung von Störspannungen in einem separaten *Tastkopf* eingebaut sind (vgl. Abb. 6.29), sind für Frequenzen bis zu 500 MHz geeignet. Zur Erweiterung des Meßbereichs wird ein kapazitiver Spannungsteiler vorgeschaltet.

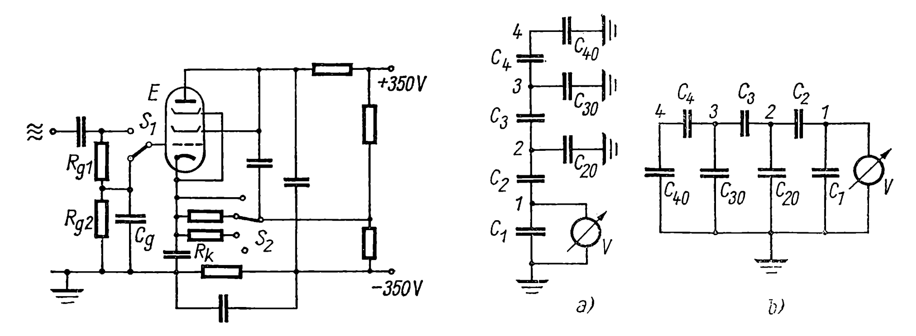


Abb. 7.16 Richtverstärker-Voltmeter

Abb. 7.17 Kapazitiver Spannungsteiler

7.322 Spannungsteiler

Höhere Spannungen von 1···50 kV werden unter Benutzung der beschriebenen Röhrenvoltmeter mit einem zusätzlichen Spannungsteiler gemessen. Für dessen Bemessung gilt das in § 6.355 Gesagte. Für hohe Übersetzungsverhältnisse müssen die Teilerkapazitäten durch Schirmkapazitäten ergänzt werden, wie dies in Abb. 7.17a für einen vierstufigen Teiler gezeigt ist. Sind die Schirmkapazitäten C_{20}, C_{30}, C_{40} klein gegen C_2, C_3, C_4, wird das Übersetzungsverhältnis nur wenig beeinflußt. Aus der Ersatzschaltung (Abb. 7.17b) für diese Schaltung geht hervor, daß sie eine Serienschaltung von einfachen, zweistufigen Teilern darstellt. Eine genaue Spannungsteilung mit großem Übersetzungsverhältnis läßt sich erreichen, wenn die Querkapazitäten C_{40}, C_{30}, C_{20}, C_1 wesentlich größer als die Längskapazitäten sind. Für die einzelnen Spannungen gilt

$$\frac{U_3}{U_1} = \frac{U_2}{U_1}\left(1 + \frac{C_{20}}{C_3}\right) + \frac{C_1}{C_3} = \ddot{u}_2\ddot{u}_3 + \frac{C_1}{C_3};$$

$$\frac{U_4}{U_1} = \frac{U_3}{U_1}\left(1 + \frac{C_{30}}{C_4}\right) + \frac{U_2}{U_1}\frac{C_{20}}{C_4} + \frac{C_1}{C_4} = \left(\ddot{u}_2\ddot{u}_3 + \frac{C_1}{C_3}\right)\ddot{u}_4 + \ddot{u}_2\frac{C_{20}}{C_4} + \frac{C_1}{C_4}.$$

Damit wird das Gesamtübersetzungsverhältnis $ü = U_4/U_1$

$$ü = ü_2 ü_3 ü_4 + ü_4 \frac{C_1}{C_3} + ü_2 \frac{C_{20}}{C_4} + \frac{C_1}{C_4} \approx ü_2 ü_3 ü_4 . \qquad (7/10)$$

Bei hohen Spannungen ist der Eigenverbrauch des Teilers infolge dielektrischer Verluste (s. § 10.24) mit zunehmender Frequenz beträchtlich: mit $C_4 = 2$ pF, einer Meßspannung von 50 kV, wird bei einem Verlustwinkel des Dielektrikums $\tan \delta = 10^{-4}$ bei 50 MHz eine Wirkleistung von etwa 30 W umgesetzt.

Ohmsche Spannungsteiler in Form einer Teilerkette mit 100-Ω-Längswiderständen und 10-Ω-Querwiderständen sind bis 10 MHz frequenzunabhängig, wenn die einzelnen Dekaden statisch und magnetisch abgeschirmt sind.

7.323 Spannungsmessung mit dem ESO

Die Spannungsmessung mit Hilfe des ESO ist äußerst bequem, da Meßverstärker eingebaut sind und der Schirmraster unmittelbar die Scheitelspannung abzulesen gestattet. Bei sehr hohen Frequenzen wird zweckmäßig die Meßspannung mit einem Tastkopf abgenommen, der wie beim Röhrenvoltmeter der Abb. 6.29 Meßdioden in Greinacher-Schaltung enthält. Außerdem ist der Einfluß der Meßfrequenz auf die Ablenkempfindlichkeit des ESO zu berücksichtigen, der in § 6.731 behandelt ist.

Die mit ESO erzielbare Genauigkeit beträgt etwa ± 3%. Von Robinson und v. Allen [*7.95*] werden Eichverfahren angegeben, bei denen eine rechteckförmige Eichspannung auf dem Schirm erzeugt wird und dadurch die Fehlergrenze unter 1% gedrückt werden kann. Zur Messung des Scheitelwertes einer HF-Spannung wird nach Fairley [*7.33*] diese mit einer genauen Gleichspannung verglichen, wobei der ESO als Nullinstrument dient. Über Hochgeschwindigkeits-ESO siehe [*7.41*, *7.125*]. Über einen einfachen elektronischen Umschalter (s. § 6.75) zur Aufzeichnung von mehreren HF-Spannungen siehe [*7.93*].

7.324 Elektrostatische Spannungsmessung

Wie bereits hervorgehoben, sind elektrostatische Instrumente (§ 2.1) zur Messung von HF-Spannungen gut geeignet, sofern diese 10 V nicht unterschreiten. Mit den Ein- und Zweifadenelektrometern (§ 2.12) können Frequenzen bis zu 1000 MHz erfaßt werden, da ihre Kapazität von der Größe einiger Pikofarad ist. Die Eichung kann mit Gleichspannung durchgeführt werden. Für sehr hohe Spannungen sind Hochspannungsvoltmeter nach § 2.16 brauchbar.

Beim Gebrauch elektrostatischer Instrumente ist ein in Abb. 7.18 dargestelltes Widerstandsersatzschema zugrunde zu legen, das die Induktivität L_k von Zuleitungen, die Kapazität C_k zwischen den festen Bauteilen und dessen Verlustwiderstand R_k sowie Induktivität L_s und Widerstand R_s der Zuleitung zum beweglichen System berücksichtigt. Mit C_s ist die veränderliche

Kapazität des Meßsystems bezeichnet. Aus dieser Schaltung läßt sich der Frequenzeinfluß auf die Spannungsanzeige berechnen. Der Eingangswiderstand dieser Instrumente mit Trolitul- oder HF-Keramik-Isolation, der bei Gleichspannung 100···1000 MΩ beträgt, sinkt bei 1 MHz bereits auf 1···3 MΩ infolge der dielektrischen Verluste. Das Ersatzschema zeigt auch, daß die Spannung am Meßsystem C_s bei Annäherung an die Resonanzfrequenz ω_{s0} höher als die Eingangsspannung werden kann, wobei $\omega_{s0}^2 = 1/L_s C_s$.

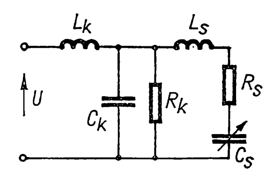


Abb. 7.18 Ersatzkreis eines Elektrometers

7.325 Selektive Röhrenvoltmeter [*7.74*]

Zur Messung des Dämpfungsverlaufs von Filtern, Eichung von Spannungsteilern und Feldstärkenmessungen (s. § 7.8) lassen sich mit Vorteil selektive Röhrenvoltmeter verwenden. Diese bestehen aus Überlagerungsempfängern mit veränderlicher Bandbreite und hohem Verstärkungsfaktor. Näheres siehe § 7.644.

7.33 Leistungsmessung bei Hochfrequenz

Leistungsmessungen bei Hochfrequenz dienen zur Bestimmung der Leistungs*abgabe* von HF-Oszillatoren, der Leistungs*aufnahme* von Leitungen, Blindwiderständen und Antennen. Im ersten Fall spielt der Eigenverbrauch des Leistungsmessers eine untergeordnete Rolle; bei Verbrauchsmessungen mit Hilfe des *Durchgangsleistungsmessers* soll dieser einen möglichst geringen Eigenverbrauch zeigen.

7.331 Leistungsnormale

Zur Definition der bei HF verbrauchten Leistung ist grundsätzlich jedes auf thermischer Grundlage beruhende Instrument geeignet. Es kommen hierfür die in § 7.314 besprochenen optischen Strommesser, ferner Thermoumformer und Bolometer in Betracht. Man braucht zur Leistungsmessung mit diesen Instrumenten ihren Scheinwiderstand nicht zu kennen, da es nur auf die erzeugte Joulesche Wärme ankommt. Bei sehr hohen Frequenzen im Zentimeterwellenbereich werden sogar Strom- und Spannungsmessung auf eine Leistungsmessung an einem definierten Wirkwiderstand zurückgeführt.

7.332 Leistungsmessung mit Hilfe des ESO

Dieses bereits in § 6.44 besprochene Verfahren ist auch bei Hochfrequenzmessungen anwendbar. Hierzu werden an X- und Y-Verstärker des ESO die Spannungen am Lastwiderstand und an einem mit diesem in Serie durch-

flossenen Kondensator gelegt. Man erhält die *Wirkleistung* im Verbraucher als Flächeninhalt der vom Schreibstrahl erzeugten Ellipse multipliziert mit der Frequenz. Da das Ausmessen der Fläche unbequem ist, kann man nach der Schaltung von Abb. 7.19 den Verbraucher $\mathbf{Z}$ durch eine Parallelschaltung R, C_v ersetzen, indem man den Schalter S umlegt. Durch Verändern der Ersatzwiderstände werden die entsprechenden Ellipsen zur Deckung gebracht. Dann sind beide Impedanzen nach Größe und Phase gleich und die gesuchte Wirkleistung aus $P = U^2/R$ zu berechnen. Die Spannung U kann mit dem Oszillografen gemessen werden. Ist $\mathbf{Z}$ ein induktiver Widerstand, werden die Ersatzwiderstände so lange verstellt, bis die beiden Oszillogramme zur Y-Achse spiegelbildlich werden, d. h. die Abschnitte auf der Y-Achse sich decken. Korrekturen, die bei hohen Frequenzen erforderlich sind, lassen sich nach Popovič und Popovič [*7.90*] angeben; die Genauigkeit hiermit wird mit $\pm$ 3% angegeben.

7.333 Elektronische Wattmeter

Die in § 6.45 behandelten *Röhrenwattmeter*, welche auf der Produktbildung von zwei Spannungen mit Trioden in B-Schaltung beruhen, lassen sich bis zu hohen Frequenzen benutzen. Grundsätzlich sind alle elektronischen Produkt-

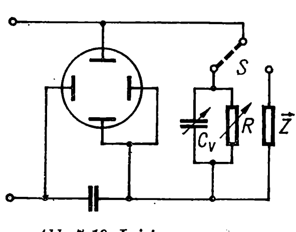


Abb. 7.19 Leistungsmessung

Abb. 7.20 Thermisches Wattmeter

verstärker hierzu geeignet, wenn in den Vorverstärkern keine Phasendifferenz gegenüber der ursprünglich an den Verstärkereingängen vorhandenen auftritt.

Das von Schultz [*7.107*] angegebene elektronische Wattmeter gehört eigentlich zu den Elektrodynamometern (s. § 6.312); es werden geeignete Vorverstärker für Strom- und Spannungsspule angegeben, deren Frequenzgang zwischen 20 Hz und 20 kHz nur $\pm$ 0,17 dB beträgt, während beim Anzeigeinstrument selbst mit direktem Anschluß innerhalb des oben angegebenen Frequenzbereichs ein solcher von 20 dB auftreten würde. Beide Verstärker sind mit einer negativen Rückkopplung ausgeführt, die der Spannung bzw. dem Strom am Instrument proportional ist.

7.334 Thermische Wattmeter

Da die Anzeige thermischer Strom- und Spannungsmesser bis zu sehr hohen Frequenzen frequenzunabhängig ist, lassen sich die in § 6.42 behandelten thermischen Leistungsmesser auch für Hochfrequenz benutzen. Neben der in Abb. 6.49 wiedergegebenen Meßschaltung mit dem Differentialthermo-

element ist die von FISCHER [*7.37*] angegebene und in Abb. 7.20 dargestellte Schaltung gebräuchlich. Sie entspricht der Methode mit drei Strommessern, die in T-Form vor den Verbraucher geschaltet sind. Das Heizelement des Thermoumformers T_2 liegt in Serie mit dem Lastwiderstand $\boldsymbol{R}$ und wird vom Verbraucherstrom i_2 durchflossen. Im Umformer T_3 fließt der Strom i_3, der zu i_2 proportional ist, und außerdem ein Leerlaufstrom i_L entsprechend der Verbraucherspannung u. Im Umformer T_1 überlagern sich diese drei Ströme. Bei Leerlauf, d. h. $\boldsymbol{R} = \infty$, wird $i_L = i_1 = i_2$ und die im Millivoltmeter M angezeigte Thermospannung Null, da die entsprechenden Thermoelemente gegeneinander geschaltet sind. Bei Kurzschluß ($\boldsymbol{R} = 0$) ist der Leistungsmesser nur dann stromlos, wenn die Thermospannung in T_2 relativ höher als die in T_1 und T_3 wird, d. h.

$$(i_2 + i_3)^2 - i_2^3 - \alpha i_2^2 = 0 .$$

Daraus folgt für den Faktor α, der angibt, um wieviel T_2 empfindlicher als T_1 und T_3 ist,

$$\alpha = 1 + 2\,\frac{i_3}{i_2} = 1 + \frac{R_2}{R_3},$$

wobei R_3 den Widerstand von Heizer und Abgleichwiderstand im Zweig 3 angibt. Dieser Abgleich läßt sich durch geeignetes Dimensionieren der Heizer ausführen und ermöglicht eine fehlerfreie Leistungsmessung mit Hilfe *eines* Anzeigeinstrumentes M.

Die besonderen Meßprobleme im Zentimeterwellenbereich werden in § 8.623 behandelt.

7.4 Frequenz- und Phasenmessung bei Hochfrequenz [*7.19, 7.24*]

Die Bestimmung von Frequenzen und die Messung von Frequenzunterschieden ist für eine Anzahl grundlegender physikalischer Probleme von Bedeutung, vor allem dann, wenn es sich um eine Eigenkonstruktion des Oszillators handelt. Kommerzielle Meßsender sind bereits mit großer Genauigkeit geeicht, müssen aber gelegentlich nachgeeicht werden.

Wenn die Frequenzabhängigkeit der Betriebseigenschaften von Schaltelementen bestimmt werden soll, genügt meist die Anwendung eines *Resonanzfrequenzmessers* mit einer Genauigkeit von 1%. Wesentlich größere Genauigkeit wird gefordert, wenn die Frequenz von Meßsendern ermittelt werden soll. Dies läßt sich durch *Schwebungsverfahren* im Anschluß an ein Frequenznormal erreichen. Im Prinzip ähnlich ist das dritte, häufig angewandte Verfahren der *Frequenzzählung* mit elektronischen Zählgeräten und Festlegung der Meßzeit durch einen Normalfrequenzgenerator.

7.41 Resonanzfrequenzmesser

Bei dieser Methode wird ein Schwingungskreis an den zu untersuchenden HF-Kreis lose angekoppelt. Die Übereinstimmung beider Frequenzen erkennt man am Maximalausschlag eines mit dem Meßkreis gekoppelten Indikators oder beim Absorptionsverfahren an der maximalen Rückwirkung auf den Oszillator.

7.411 Leuchtquarz als Frequenznormal

Das von GIEBE und SCHEIBE [*7.42*] angegebene Verfahren benutzt die hohe Resonanzgüte von Quarzschwingern, die als Frequenznormal bei Oszillatoren (vgl. § 7.14) benutzt werden. Koppelt man diese Quarzschwinger lose an den zu untersuchenden Oszillator an, so treten bei Resonanz hohe elektrische Feldstärken an bestimmten Kristallflächen auf, die das Helium—Neon-Gemisch von einigen Torr Druck, in dem sich die Resonatoren befinden, zu hellem Leuchten bringen. Als Resonatoren werden prismatische Quarzstäbchen im *GT*-Schnitt (vgl. § 7.14) benutzt, die in den Schwingungsknoten an Bügeln befestigt sind. Die Elektroden sind einige Millimeter vom Quarz entfernt und sollen etwa 20 V Spannung zugeführt bekommen. Bei zu starker Kopplung tritt an ihnen Glimmlicht auf, das vom Resonatorleuchten unabhängig und durch schwächere Ankopplung vermeidbar ist. Die Frequenzgenauigkeit dieser Methode beträgt etwa 10^{-6} bis 10^{-5} und ist zwischen 10 kHz und 10 MHz anwendbar.

7.412 Resonanzmethode

Die mit einem geeichten Schwingungskreis erzielbare Genauigkeit der Frequenzmessung hängt von der Alterung der Induktivität und von der mechanischen Stabilität des Meßkondensators ab. Übliche Schwingungskreise besitzen eine Kreisgüte von etwa 100, d. h., die Halbwertsbreite der Resonanzkurve beträgt etwa 1% der Meßfrequenz. Durch Ablesen zu beiden Seiten der Resonanzstelle läßt sich eine Ablesegenauigkeit von etwa 0,3% erreichen. Beobachtet man mit dem ESO den Phasensprung im Blindwiderstand des Resonanzkreises, so läßt sich die Genauigkeit auf 0,1% erhöhen.

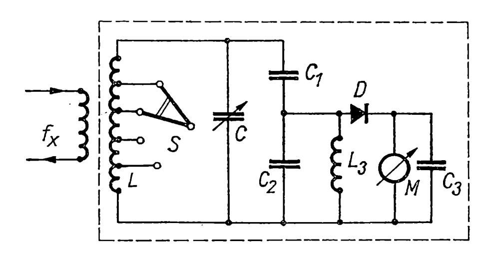


Abb. 7.21 Resonanzfrequenzmesser

Die Ankopplung an die HF-Spannung muß lose sein, um eine Rückwirkung auf den Oszillator zu vermeiden und eine vollkommen symmetrische Resonanzkurve zu erhalten.

Die Schaltung eines solchen Frequenzmessers, der für verschiedene Frequenzbereiche benutzt werden kann, ist in Abb. 7.21 dargestellt. Der Resonanzkreis besteht aus der Induktivität L mit 5 Anzapfungen, die durch den Umschalter S abgegriffen werden, und dem Präzisionsdrehkondensator C mit geeichter Skala. Der aus einer Diode D, der Kapazität C_3, einer Drossel L_3

und dem Milliamperemeter M bestehende Indikatorkreis ist über den Spannungsteiler $C_1 C_2$ lose an den LC-Kreis angekoppelt. Die Meßgenauigkeit beträgt 1% bei einer Empfindlichkeit von 10 mW.

Für höhere Frequenzen im 100-MHz-Bereich werden die Schwingkreiselemente sehr klein, so daß die gesuchte Frequenz oft mit einer variablen Induktivität und einem Festkondensator eingestellt wird.

Frequenzmessungen mit Hohlraumresonatoren im Zentimeterwellengebiet siehe § 8.634.

7.413 Absorptionsfrequenzmessung

Falls der zu untersuchende Oszillator eine sehr geringe Leistung abgibt, läßt sich die Resonanzeinstellung ohne Indikator im angekoppelten Abstimmkreis aus der Rückwirkung auf den Sender erkennen. Diese zeigt sich in einer markanten Änderung des Senderschwingstroms, des Anodengleichstroms oder des Gitterstroms. Bei unbekannter Frequenz besteht allerdings eine Fehlerquelle darin, daß auf Oberwellen abgestimmt wird.

7.42 Frequenzmessung durch Vergleich [7.4]

Wesentlich höhere Genauigkeit liefert das *Schwebungsverfahren*, bei dem die zu untersuchende Frequenz mit der eines Normalfrequenzoszillators verglichen wird.

7.421 Erzeugung von Normalfrequenzen

Normalfrequenzen werden ausschließlich durch *Quarzuhren* erzeugt, wie sie ausführlich in Bd. I, § 3.5 und hier in § 7.14 behandelt sind. Die erreichbare Frequenzkonstanz beträgt bei diesen Oszillatoren 10^{-8}; von Warner [*7.126*] werden Verbesserungen vorgeschlagen, die eine solche von 10^{-10} erwarten lassen. Diese bestehen darin, einen GT-Quarz mit einer Kreisgüte von $5 \cdot 10^7$ bei Heliumtemperaturen zu betreiben; s. a. [*7.128*]. Im allgemeinen genügt bereits eine Frequenzgenauigkeit von 10^{-7}, für die es einfachere Uhrenkonstruktionen gibt.

Die von Rohde und Leonhardt [*7.96*] konstruierte Quarzuhr, die vereinfacht in Abb. 7.22 wiedergegeben ist, besteht aus einem quarzgesteuerten Oszillator Q_0 mit der Frequenz $f_0 = 100$ kHz, dessen Temperatureinfluß durch Konstanthalten der Quarztemperatur auf $\pm 10^{-2}$ grd auf 10^{-9} reduziert wird. Ein zweiter, von einer Stimmgabel S mit $f_1 = 1\,000$ Hz gesteuerter Oszillator, aus dem mit Hilfe des Filterquarzes Q_1 die 100. Oberwelle ausgesiebt wird, kann laufend über eine Phasenmeßeinrichtung mit der Frequenz f_0 verglichen werden. Auf diese Weise wird der Stimmgabel die Frequenzgenauigkeit des Quarzes aufgezwungen.

7.422 Mischung von Normalfrequenzen [*7.57*, *7.85*]

Die von Quarzuhren erzeugten Frequenzen lassen sich durch Teilung und Vervielfachung in großen Stufen auf einen großen Frequenzbereich ausdehnen. Durch Mischung bekannter Frequenzen und ihrer Oberwellen kann ein enges

Frequenzspektrum hergestellt werden, aus dem durch Interpolation die gesuchte Frequenz gefunden wird.

Dies wird heute wesentlich erleichtert durch *dekadische Generatoren*, die eine Frequenzsynthese aus Grund- und Oberwellen frequenzkonstanter Oszillatoren durchführen. Solche *dekadischen Meßsender* sind auf mindestens sechs Stellen fein unterteilt und besitzen einen kleinsten Frequenzabstand von 1 Hz bei einer Genauigkeit von einigen 10^{-9}.

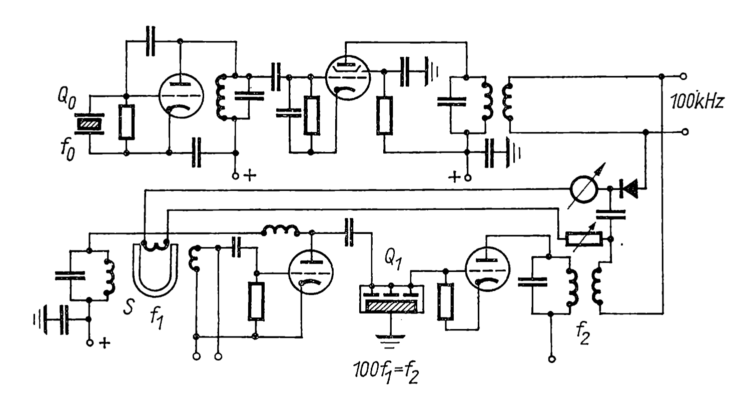


Abb. 7.22 Einfache Quarzuhr nach [7.96]

7.423 Schwebungsfrequenzmesser [*7.6, 7.118*]

Durch Überlagerung der unbekannten Frequenz mit der Normalfrequenz in einer Mischstufe entsteht eine Differenzfrequenz, die entweder ausgezählt oder mit den bei Niederfrequenz üblichen Methoden (s. § 6.5) bestimmt wird. Ist der Normalfrequenzgenerator kontinuierlich durchstimmbar, kann auch auf „Schwebungsnull“ eingestellt werden.

Solche *Schwebungsfrequenzmesser* bestehen aus einem Normalfrequenzoszillator, der mit Hilfe eines feineinstellbaren Kondensators exakt auf die Frequenz eines Leuchtquarzes eingestellt werden kann. Die erzeugte Grundfrequenz synchronisiert über eine Verstärkerstufe einen Multivibrator, der sein Oberwellenspektrum über eine Schirmgitterröhre einem Schwingaudion zuführt. Die unbekannte Frequenz wird durch eine zweite Schirmgitterröhre ebenfalls dem Audion zugeleitet. Dieses wird nunmehr auf die Schwebungsfrequenz Null bezüglich der Meßfrequenz abgestimmt. Dann koppelt man die gesuchte Frequenz aus, bestimmt die beiden Kondensatoreinstellungen für zwei benachbarte Normalfrequenzen und interpoliert daraus die gesuchte Frequenz. Durch eine Grobfrequenzmessung muß außerdem noch die Ordnungszahl der Oberwelle bestimmt werden.

Die Genauigkeit dieser Schwebungsmethode läßt sich dadurch ermitteln, daß die einzelnen Meßfehler in Hz berechnet werden. Nimmt man z. B. an, daß die Normalfrequenz $f_1 = 1$ MHz auf 10^{-7} genau ist, so bedeutet das eine Schwebung in 10 s. Beträgt die unbekannte Frequenz f_2 etwa 1,05 MHz, so wird die Meßunsicherheit der Differenzfrequenz ebenfalls 1 Schwebung in 10 s

betragen. Nimmt man ferner an, daß durch Frequenzteilung der 1-MHz-Frequenz ein 50-kHz-Signal zur Verfügung steht, dessen relative Genauigkeit auch 10^{-7} sein wird, so würden das 0,05 Schwebungen in 10 s sein. Mit dem Überlagerungsempfänger, dessen Ablesegenauigkeit nur 10^{-4} betragen soll, wird eine Differenzfrequenz $(f_2 - f_1) - 50\text{ kHz} = 570\text{ Hz}$ festgestellt. Das entspricht insgesamt einer Meßunsicherheit von 2,05 Schwebungen in 10 s oder 0,205 Hz, mit der die gesuchte Frequenz $f_1 = 1050570\text{ Hz}$ nach diesem Verfahren angegeben werden kann.

Zur Erzeugung von Harmonischen sind Multivibratoren (s. § 5.53) mit Grundfrequenzen bis zu 1 MHz gut geeignet; bei höheren Frequenzen werden besser Germanium- oder Siliziumdioden hierzu benutzt. Obwohl ein 1-kHz-Multivibrator Oberwellen von einigen Megahertz erzeugen kann, bereitet deren Identifizierung wegen ihrer sehr kleinen Amplituden Schwierigkeiten. Vorteilhafter für die Erzeugung von Frequenzmarken im 1-kHz-Abstand bei einer Hauptfrequenz im MHz-Bereich ist die Modulation von z. B. 1 MHz mit einem 1-kHz-Multivibratorsignal. Auf diese Weise erhalten die Seitenbänder der modulierten Trägerfrequenz einen Frequenzabstand von genau 1 kHz.

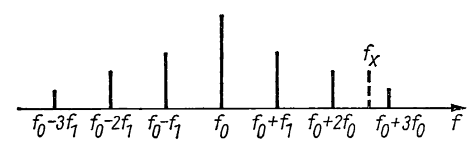


Abb. 7.23 Frequenzmessung

Mit diesem modulierten Oszillator läßt sich die gesuchte Frequenz nach Abb. 7.23 folgendermaßen ermitteln: Es wird angenommen, daß die Trägerfrequenz f_0, die Modulationsfrequenz des Multivibrators f_1 und die gesuchte Frequenz f_x sei. Ein Überlagerungsempfänger (mit Kontrolle der Schwebungsfrequenz) wird zuerst auf f_x abgestimmt. Der nächste Frequenzvergleich wird mit f_0 bei abgeschalteter Modulation ausgeführt. Nun schaltet man diese wieder an und dreht den Empfänger langsam auf die gesuchte Frequenz f_x zurück, wobei die überstrichenen Seitenbänder gezählt werden, so daß f_x innerhalb von $f_0 + (n - 1)f_1$ und $f_0 + nf_1$ bekannt ist. Die verbleibende Frequenzdifferenz ist leicht mit bekannten Methoden festzustellen.

7.424 Frequenzvergleich mit dem ESO

Mit dem ESO lassen sich bequem zwei verschiedene Frequenzen vergleichen, wenn ihr Verhältnis nicht zu groß ist. Legt man ein Signal an die Y-Platten, das andere an die X-Platten, so entsteht die bekannte Lissajou-Figur, deren Aussehen auch von der Phasendifferenz beider Signale abhängt. In Abb. 7.24 sind für Frequenzverhältnisse 1:1, 1:2 und 1:3 abhängig von der Phasendifferenz solche stehenden Schirmbilder dargestellt. Bei großem Frequenzverhältnis oder einem Quotienten aus großen Zahlen ist es unmöglich, stehende Schirmbilder zu erhalten und die Knoten bzw. Berührungspunkte mit dem umschriebenen Rechteck auszuzählen [*7.73*].

7.43 *Frequenzmessung durch Zählung*

Das in § 6.51 besprochene Verfahren zur Frequenzmessung ist bis zu 10 MHz anwendbar. Es besteht darin, die Einzelimpulse mit Hilfe eines ein- und ausschaltbaren Zählverstärkers innerhalb einer bekannten Zeitdifferenz zu zählen. Theoretisch würde bei einer Meßunsicherheit von *einem* Zählimpuls die Frequenz von 1 MHz bei einer Zählzeit von 10 s auf 10^{-7} genau angegeben werden können. Als Zeitnormal dient eine stabilisierte Quarzuhr, deren Genauigkeit 10^{-7} und besser sein kann.

Über die Konstruktion verschiedener Zählgeräte siehe [*7.2, 7.15, 7.59, 7.62, 7.75, 7.91, 7.105*]. Zur Anzeige der gemessenen Frequenz dienen *Dekatron-Glimmröhren* [*7.22, 7.46, 7.49*]; diese bestehen aus einer gasgefüllten Glimmröhre mit 9 Katoden, die in Kreisform angeordnet sind. Moderner sind Glimmröhren, deren Katoden in Ziffernform hintereinander angeordnet sind und schneller abgelesen werden können.

Über die Schaltung von Zählern mit mehreren Dekaden siehe [*7.36, 7.40*].

7.44 *Anzeigende Frequenzmesser*

Die in § 6.55 behandelte Methode zur Frequenzmessung ist für nicht zu hohe Frequenzen ebenfalls anwendbar, wenngleich diese nur für Grobmessungen bei 1% Meßgenauigkeit eingesetzt werden kann. Das Meßprinzip besteht darin, daß das zu untersuchende Signal zunächst verstärkt und einem Multivibrator zugeleitet wird, der identische Impulse mit der Folgefrequenz des Eingangssignals erzeugt. Diese Impulse werden gleichgerichtet und von einem Gleichstrominstrument gemessen, dessen Anzeige nach Gl. (6/64) der gesuchten Frequenz proportional ist.

7.45 *Messung der Phase*

7.451 Phasenmessung mit dem ESO [*7.94*]

Die Messung von Phasendifferenzen bei HF-Signalen läßt sich in gleicher Weise wie bei niederfrequenten Schwingungen (s. §. 6.6) mit dem ESO durchführen. Dies geschieht entweder durch Erzeugung von Lissajou-Figuren (vgl. Abb. 7.24) oder durch Benutzung eines Zweistrahloszillografen. Da beide Elektronenstrahlen dieselbe Ablenkgeschwindigkeit für die Zeitachse besitzen, kann die Zeitdifferenz direkt abgelesen und daraus durch Vergleich mit der vollen Schwingungsperiode der Phasenwinkel errechnet werden.

7.452 Phasenempfindlicher Detektor

Das Meßprinzip des phasenempfindlichen Detektors besteht darin, eine Ausgangsspannung zu liefern, die proportional der Spannungskomponente ist, die in Phase mit einer Bezugsspannung schwingt. Zwei solcher Detektoren, deren Bezugssignale eine Phasendifferenz von 90° besitzen, erzeugen Ausgangssignale, deren Vektorsumme konstant und unabhängig vom Phasenwinkel ist.

Ein Ausführungsbeispiel dieses Meßprinzips stellt der in Abb. 6.59 wiedergegebene *Ringmodulator* dar, der bei Verwendung von Halbleiterdioden auch für hohe Frequenzen angewandt werden kann.

7.453 Direkte Phasenmessung

Bei der direkten Phasenmessung wird als Meßgröße die relative Zeitverschiebung zwischen den zu vergleichenden Signalen benutzt. Das Schema dieser Methode ist in Abb. 7.25 dargestellt. Die beiden Sinusschwingungen U_r

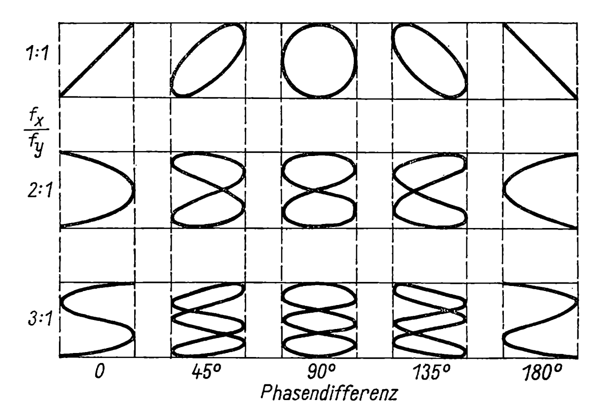


Abb. 7.24 Lissajou-Figuren

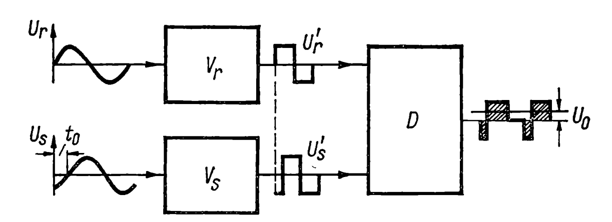


Abb. 7.25 Phasenmessung mit phasenempfindlichem Detektor

und U_s, deren Phasendifferenz bestimmt werden soll, werden in den Verstärkern V_r und V_s durch Amplitudenbegrenzung (vgl. § 5.51) in Rechteckimpulse mit gleicher Impulsamplitude verwandelt. Durch verschiedene Methoden läßt sich eine Ausgangsspannung gewinnen, die der gesuchten Phasendifferenz proportional ist:

1. Werden die beiden Rechteckspannungen U_r' und U_s', wie in Abb. 7.25 angedeutet, dem phasenempfindlichen Detektor D (s. § 6.63) zugeführt, so wird der Mittelwert der Ausgangsspannung U_0 proportional zur Amplitude von U_s' und dem Phasenwinkel zwischen U_r und U_s. Ein an den Detektor D angeschlossenes Gleichspannungsvoltmeter mit Nullpunkt in Skalenmitte kann direkt in Phasenwinkel linear geeicht werden.

2. Besitzen die beiden zu vergleichenden Rechteckspannungen gleiche Impulsamplitude, können sie algebraisch nach bekannten Methoden (z. B. in Rechenverstärkern, s. § 5.32) addiert oder subtrahiert werden. Das Resultat stellt rechteckige Impulse beider Vorzeichen dar, deren Dauer der gesuchten Phasendifferenz proportional ist. Durch Gleichrichtung und Anzeige in einem Gleichstrominstrument findet man unmittelbar den Phasenwinkel.

3. Die Rechteckspannungen können auch in Koinzidenzschaltungen hinsichtlich Phasenlage miteinander verglichen werden.

4. Durch Differenzierverstärker mit nachgeschalteter Diode lassen sich aus den Rechteckspannungen kurze Impulse *eines* Vorzeichens erzeugen. Leitet man diese den Eingängen eines bistabilen Flip-Flop-Kreises zu, so wird der mittlere Anodenstrom jeder der beiden Röhren eine lineare Funktion der Phasendifferenz. Diese Methode besitzt eine Genauigkeit von etwa 2° (mit Ausnahme in der Nähe von 0 oder 360°).

Von diesen Verfahren gibt lediglich das unter 4. genannte zwischen 0 und 360° eine stetige und eindeutige Phasenanzeige. Über ausgeführte Phasenmesser nach dieser Methode siehe [*7.51*, *7.52*, *7.100*].

7.454 Verschiedene Methoden der Phasenmessung

Von Mostafa und Shaltout [*7.82*] wird ein Verfahren angegeben, die Phasendifferenz unabhängig von den Amplituden mit Hilfe zweier Oszillatoren zu bestimmen. Dabei wird der Einfluß der Phase eines mitgezogenen Oszillators auf die des Synchronisiersignals benutzt. Das Verfahren eignet sich für Frequenzen zwischen 500 Hz und 30 MHz. Essmann [*7.32*] gibt für den speziellen Fall eines HF-Impulses eine neuartige Methode der Phasenmessung an, bei der durch einen RC-Kreis eine Spirale auf dem Schirm eines ESO dargestellt und in diese die Ausgangsspannung des Meßobjektes eingetastet wird.

Dieses Verfahren läßt sich verallgemeinern, wenn man die Referenzspannung auf dem Leuchtschirm als Kreis abbildet und mit der Spannung, deren Phasenwinkel gemessen werden soll, die Strahlintensität moduliert. Eine andere Methode besteht darin, im Nulldurchgang des Meßsignals einen scharfen Impuls zu erzeugen und diesen der Kreisspur des Elektronenstrahls zu überlagern (siehe [*7.92*]; auch Bd. I, § 21.24).

7.5 Hochfrequenzmessungen an Kreisen und Netzwerken

Zur Messung von Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten werden bei hohen Frequenzen spezielle Methoden angewandt, welche die Störeinflüsse durch Nebenschlußkapazitäten oder Streuinduktivitäten zu eliminieren gestatten. In diesem Abschnitt werden außerdem Meßverfahren zur Bestimmung der Kreisgüte von Schwingungskreisen und gekoppelten Kreisen besprochen.

7.51 Substitutionsmethode

Die meisten Messungen von Schwingkreisgrößen bei Hochfrequenz werden mit Hilfe der Substitutionsmethode ausgeführt. Am einfachsten wird der zu bestimmende Blindwiderstand $\boldsymbol{Z}_x$, wie in Abb. 7.26 dargestellt ist, entweder in

Parallelschaltung (*a*) oder in Serienschaltung (*b*) in einen Schwingkreis LC_sR_s eingesetzt, je nachdem seine Impedanz einen großen oder kleinen Absolutwert besitzt. Der Resonanzkreis wird dann schwach an einen geeigneten Oszillator gekoppelt, durch Verändern von C_s auf Resonanz abgestimmt und diese mit einem Strommesser beobachtet. Die Reaktanzkomponente von $\boldsymbol{Z}_x$ wird dadurch bestimmt, daß der Abstimmkondensator C_s mit eingeschaltetem Meßobjekt wieder bis zur Resonanzeinstellung verdreht wird. Es gilt dann $C_s - C_s' = X_x/\omega$, wenn C_s' die Kondensatoreinstellung *mit* Vergleichswiderstand $\boldsymbol{Z}_x = R_x + \mathrm{j}\,X_x$ bedeutet. Die Wirkkomponente R_x wird entweder aus der Änderung des Serien- oder Parallelwiderstandes R_s bestimmt, die zur gleichen Resonanzspannung am Schwingungskreis führt.

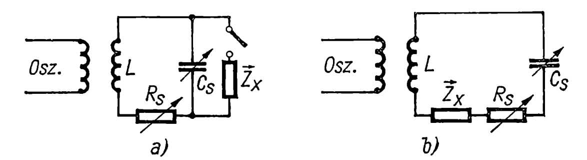


Abb. 7.26 Substitutionsmethode

Die Genauigkeit dieser Methode ist begrenzt, wenn der Dämpfungswiderstand des Schwingkreises nicht klein gegen den unbekannten Blindwiderstand ist.

7.52 *Messung mit dem Doppelspannungsteiler*

Eine sehr genaue Methode zur Messung von Blindwiderständen mit Hilfe des *Doppelspannungsteilers* ist in Abb. 7.27 dargestellt. Der Oszillator G mit dem Innenwiderstand R_i wird an eine Meßbrücke gelegt, die aus den Fest-

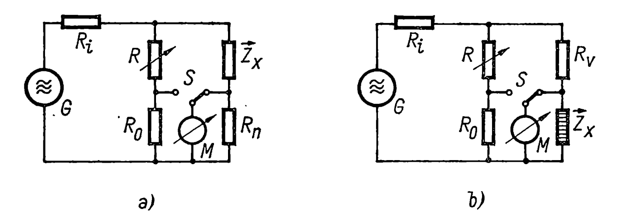


Abb. 7.27 Doppelspannungsteiler

widerständen R_0, R_n sowie einem variablen Widerstand R besteht. Das Röhrenvoltmeter M wird mit dem Schalter S auf einen der beiden Zweige umgelegt und R so lange verändert, bis in beiden Schalterstellungen dieselbe Spannung gemessen wird. Für diesen Fall gilt in der Schaltung der Abb. 7.27a

$$\frac{R_0}{R + R_0} = \frac{R_n}{|\boldsymbol{Z}_x + R_n|}. \tag{7/11}$$

Ist die Blindkomponente von $\boldsymbol{Z}_x$ gegenüber R_x sehr klein, so vereinfacht sich Gl. (7/11) zu

$$R_x = \frac{R \cdot R_n}{R_0}. \tag{7.11/a}$$

Ist $\boldsymbol{Z}_x$ fast rein induktiv und $R_n \ll \boldsymbol{Z}_x$, so gilt für das Brückengleichgewicht

$$|\boldsymbol{Z}_x| = \omega L_x = \frac{R + R_0}{R_n} R_0 \tag{7/11b}$$

und analog für vorwiegend kapazitive Last

$$|\boldsymbol{Z}_x| = \frac{1}{\omega C_x} = \frac{R + R_0}{R_n} R_0. \tag{7/11c}$$

Da $R_n \ll |\boldsymbol{Z}_x|$ sein soll, führt die untere Klemme von $\boldsymbol{Z}_x$ praktisch Erdpotential, oder man benutzt, wenn dies zweckdienlich ist, die Schaltung nach Abb. 7.27b, die besonders für niederohmige Meßobjekte geeignet ist. Die Abgleichbedingungen lassen sich ähnlich wie für die Schaltung (*a*) ableiten.

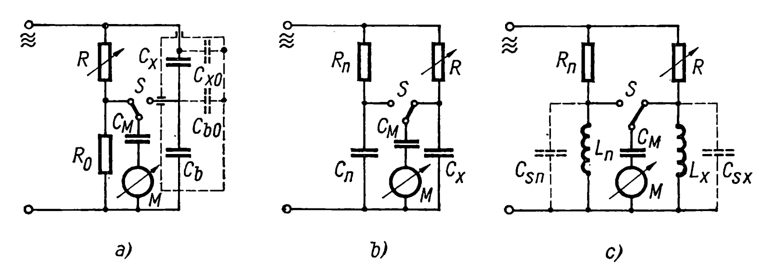


Abb. 7.28 Anwendung des Doppelspannungsteilers

Die Messung von Kapazitäten und Induktivitäten durch Vergleich mit entsprechenden Normalimpedanzen geht aus Abb. 7.28 hervor. Bei der Messung der Teilkapazität C_x nach Abb. 7.28a mit Hilfe einer bekannten Kapazität und zwei Widerständen ist darauf zu achten, daß bei kleinen Werten von C_x das Meßergebnis durch die Erdkapazitäten der Abschirmung beeinflußt werden kann. Dasselbe gilt für die Eingangskapazität des Röhrenvoltmeters, dem eine Serienkapazität C_M vorzuschalten ist. Die gesuchte Kapazität ergibt sich dann aus der Beziehung

$$C_x = (C_b + C_{b0} + C_M) \frac{R_0}{R}. \tag{7/12}$$

Große Kapazitäten werden zweckmäßig in der Schaltung der Abb. 7.28b gemessen, für die nach Abgleich gilt:

$$C_x + C_M = (C_n + C_M) \frac{R_n}{R}. \tag{7/13}$$

In ähnlicher Weise werden Induktivitäten gemessen (Abb. 7.28c), wobei die Streukapazitäten C_{sn} und C_{sx} zu berücksichtigen sind; für das Brückengleichgewicht gilt dann

$$\frac{L_x}{1-\omega^2 L_x(C_{sx}+C_M)} = \frac{L_n}{1-\omega^2 L_n(C_{sn}+C_M)} \cdot \frac{R}{R_n}. \tag{7/14}$$

Die Nenner in Gl. (7/14) stellen Korrekturfaktoren infolge der Streukapazitäten dar. Für die Messung von Gegeninduktivitäten u. a. lassen sich analoge Beziehungen angeben.

7.53 Widerstand und Kreisgüte von Schwingungskreisen [*7.61*]

Die Bestimmung von Wirkwiderstand und Güte eines Resonanzkreises ist eine der wichtigsten Messungen im HF-Bereich. Der Widerstand setzt sich oft unübersichtlich aus echten ohmschen Widerständen in Spulen und Verbindungsleitungen, aus Verlustwiderständen im Dielektrikum von Kapazitäten und magnetischen Kernen von Induktivitäten zusammen.

7.531 Widerstandsvariation

Diese Methode macht davon Gebrauch, daß im Resonanzfall der Widerstand eines Schwingungskreises sich aus dem Verhältnis von angelegter Spannung und fließendem Strom berechnet (s. Gl. 3/50). Wird die angelegte Spannung konstant gehalten, so läßt sich der Resonanzwiderstand aus der Stromänderung bei Einfügung eines bekannten Widerstandes entnehmen. Bezeichnet man den Strom im Resonanzkreis mit I_0 bzw. I_1, wenn der Resonanzwiderstand R_0 bzw. $R_0 + R_1$ ist, so berechnet sich der gesuchte *Resonanzserienwiderstand* aus der Beziehung

$$R_0 = \frac{I_1}{I_0 - I_1} R_1, \tag{7/15}$$

wobei von R_0 der Widerstand des Strommessers abzuziehen ist. Anstelle der Strommessung kann auch der Spannungsabfall am Kondensator mit Hilfe eines Röhrenvoltmeters gemessen werden.

Um mit dieser Methode korrekte Werte zu erhalten, muß der Strom in der Ankopplungsspule konstant und die induktive Kopplung schwach sein. Man wiederholt am besten die Messung mit verschiedenen Werten von R_1, die frei von Skineffekt sein müssen. Bei einem modifizierten Verfahren werden die entsprechenden Spannungen U_0 und U_1 am Schwingkreis gemessen, wenn zusätzlich ein Nebenschlußwiderstand R_1' an diesen gelegt wird. Daraus findet man den *Resonanzparallelwiderstand*

$$R_0' = \frac{U_0 - U_1}{U_1} R_1'. \tag{7/16}$$

Die beiden Größen R_0 als Serienwiderstand und R_0' als Parallelwiderstand können ineinander umgerechnet werden.

7.532 Reaktanzvariation

Auch bei diesem Verfahren wird der Resonanzkreis lose an den Oszillatorkreis gekoppelt, auf Resonanz abgestimmt und der Resonanzstrom I_0 gemessen. Dann wird der Abstimmkondensator auf die Kapazität C_1 eingestellt und ein kleinerer Strom I_1 im Schwingkreis abgelesen. Aus Gl. (3/62) läßt sich damit der *Resonanzserienwiderstand* R_0 ableiten, für den gilt:

$$R_0 = \left|\frac{C_1 - C_0}{\omega C_1 C_0}\right| \sqrt{\frac{I_1^2}{I_0^2 - I_1^2}}, \tag{7/17}$$

wenn ω die Resonanzfrequenz ist.

Wird statt der Strommessung mit einem Röhrenvoltmeter der Spannungsabfall $U_c = I/\omega C$ am Kondensator C bestimmt, so tritt anstelle von Gl. (7/17) die Beziehung

$$R_0 = \frac{C_1 - C_0}{\omega C_1 C_0} \sqrt{\frac{U_1^2}{(C_0/C_1)^2 U_0^2 - U_1^2}}, \tag{7/18}$$

wenn U_0 und U_1 die Spannungen für die entsprechenden Schwingkreiskapazitäten C_0 bzw. C_1 sind.

7.533 Frequenzvariation

Bei dieser Methode wird die Resonanzspannung als Funktion der Oszillatorfrequenz gemessen, wobei der Strom in der Koppelschleife konstantgehalten werden muß. Man findet für den Serienwiderstand

$$R_0 = \left|2\pi \frac{(f_0 + f_1)(f_0 - f_1) L}{f_1}\right| \sqrt{\frac{U_1^2}{U_0^2 - U_1^2}}, \tag{7/19}$$

wenn f_0 bzw. f_1 die Frequenz des abgestimmten bzw. etwas verstimmten Kreises und U_0 bzw. U_1 die gemessenen Spannungen an diesem sind, ferner L die Kreisinduktivität bedeutet. Daraus findet man die *Güte* des Schwingkreises zu

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R_0} = \left|\frac{f_0}{f_0 - f_1} \cdot \frac{f_1}{f_0 + f_1}\right| \sqrt{\frac{U_0^2 - U_1^2}{U_1^2}}. \tag{7/20}$$

Wird anstelle der Spannung der Resonanzstrom gemessen, so findet man analog

$$R_0 = |2\pi (f_0 + f_1)(f_0 - f_1) L| \sqrt{\frac{I_1^2}{(f_1/f_0)^2 I_0^2 - I_1^2}}. \tag{7/21}$$

Die Genauigkeit des Frequenzvariationsverfahrens hängt weitgehend vom Fehler bei der Bestimmung der Differenzfrequenz $f_0 - f_1$ ab; sie läßt sich genau mit dem Schwebungsfrequenzmesser ermitteln (vgl. § 7.423).

7.534 Widerstandsneutralisation [*7.38*]

Bei dieser Methode wird ein negativer Widerstand, der von einem *Dynatron* (vgl. § 4.15) oder einer *Tunneldiode* (s. § 4.244) erzeugt wird, parallel zum Resonanzkreis geschaltet, wie in Abb. 7.29 angedeutet ist. Die Größe des negativen Widerstandes in der Dynatronschaltung mit der Tetrode E wird am Potentiometer R_p eingestellt und dieses so lange verändert, bis der angeschlossene Schwingungskreis LC gerade zu schwingen anfängt. Der hierzu erforderliche Wert R_n entspricht dann der Parallelresonanzimpedanz des abgestimmten Kreises, d. h., es ist

$$R_0 = \frac{(\omega L)^2}{R_n}; \quad Q = \frac{\omega L}{R_0} = \frac{R_n}{\omega L}, \tag{7/22}$$

wenn R_0 der Serienresonanzwiderstand des Kreises ist.

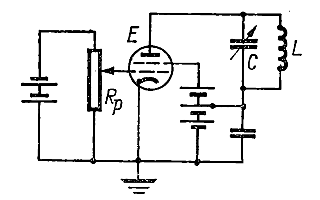


Abb. 7.29 Widerstandsneutralisierung bei einem Resonanzkreis

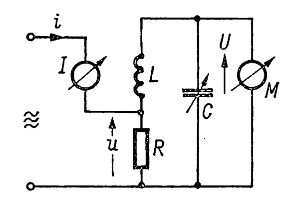


Abb. 7.30 Messung der Kreisgüte

Die Größe R_n kann aus den statischen Kennlinien der Röhre oder der Tunneldiode bestimmt werden.

7.535 Messung der Kreisgüte

Bei der Messung der Kreisgüte Q eines Resonanzkreises wird eine kleine Spannung u als Spannungsabfall an einem kleinen Widerstand R eingeprägt, wie in Abb. 7.30 dargestellt ist. Nach Abstimmen auf Resonanz und Messen der Resonanzspannung U mit dem Röhrenvoltmeter M wird die *Kreisgüte* aus $Q = U/u$ definiert, wobei im Strommesser I der Oszillatorstrom bestimmt werden muß. Dieses Verfahren liefert wegen des zusätzlichen Widerstandes R und des Eingangswiderstandes von M Meßfehler, die für genaue Q-Bestimmungen berücksichtigt werden müssen.

In kommerziellen Geräten nach diesem Meßprinzip ist ein geeichter Abstimmkondensator vorhanden, so daß die wirksame Induktivität aus der Kapazitätseinstellung und der bekannten Frequenz ermittelt werden kann. Die eingespeiste Spannung u wird konstant gehalten, so daß die Resonanzspannung U unmittelbar ein Maß für die Güte Q wird. Diese Geräte lassen sich auch zur Messung von Induktivitäten, Kapazitäten und Widerständen verwenden, wenn die Substitutionsmethode angewandt wird. Zuerst wird eine Messung mit einem passenden Schwingungskreis ausgeführt und die Größe Q bestimmt. Dann wird der unbekannte Blindwiderstand in Serien- oder Parallel-

schaltung eingesetzt und die Messung wiederholt. Aus der Veränderung von C läßt sich die Reaktanz des Widerstandes, aus dem nunmehr festgestellten Wert von Q die Wirkkomponente ermitteln, wozu die Frequenz bekannt sein muß.

7.536 Messung der Ersatzgrößen bzw. der Kreisgüte eines Schwingquarzes [*7.53, 7.99*]

Quarzresonatoren (s. § 7.141) zeichnen sich durch sehr hohe Kreisgüten aus, was sehr kleine Bandbreiten entsprechend der Beziehung

$$\Delta f = \frac{\omega_0}{2\pi Q} \tag{7/23}$$

ergibt. Ein Quarz mit $Q = 10^4$ würde bei $f_0 = 500$ kHz eine Bandbreite von $\Delta f = 50$ Hz besitzen. Entsprechend hoch sind daher die Resonanzwiderstände bei Parallelresonanz, die bei 10 MΩ liegen und deren Messung Schwierigkeit bereitet. Von Brunner und Lösche [*7.21*] wird ein Verfahren angegeben, bei dem der zu untersuchende Quarzschwinger durch eine zeitlich linear wachsende Frequenz angeregt wird. Dabei werden charakteristische Abweichungen vom stationären Schwingungszustand beobachtet, die um so ausgeprägter sind, je größer $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ und Q sind.

Als Beispiel für die Ersatzgrößen $\bar{L}$, $\bar{C}$ und $\bar{R}$ sollen folgende Aufgaben dienen:

AT-Schnitt: $f_0 = 1000$ kHz; $\bar{L} = 1{,}95$ H; $\bar{C} = 0{,}013$ pF; $\bar{R} = 40\ \Omega$; $Q = 3 \cdot 10^5$,

GT-Schnitt: $f_0 = 1000$ kHz; $\bar{L} = 22{,}4$ H; $\bar{C} = 0{,}113$ pF; $\bar{R} = 24\ \Omega$; $Q = 5{,}85 \cdot 10^5$.

Weitere Meßmethoden benutzen die Beobachtung des Abklingens der Schwingung [*7.8, 7.43, 7.101*]. Über Durchlaßbreiten von Filtern aus Quarz oder Ferroelektrika siehe [*7.109, 7.12*].

7.537 Darstellung von Resonanzkurven mit dem ESO

Eine sehr bequeme Methode zur direkten Aufzeichnung von Resonanzkurven besteht darin, in der Y-Richtung eines ESO bei konstanter Anregung die Resonanzspannung und in der X-Richtung eine zur Meßfrequenz proportionale Spannung anzulegen, wobei letztere periodisch und symmetrisch zur Resonanzspannung geändert wird.

Eine viel benutzte Schaltanordnung zur Aufnahme von Resonanzkurven ist in Abb. 7.31 dargestellt. Das Meßobjekt M — Resonanzkreis, Bandfilter u. a. — wird vom Wobbelgenerator G erregt und gibt seine Ausgangsspannung direkt an die Y-Platten des ESO ab. Der *Wobbelgenerator* ist ein HF-Oszillator, dessen Frequenz innerhalb eines bestimmten Bereiches — des *Frequenzhubes* — periodisch verändert wird. Die Steuerung von G erfolgt mit 50 Hz über die an der Sekundärwicklung *1* abgegriffene Spannung des Transfor-

mators $\ddot{U}$, die durch den Widerstand R_1 geändert werden kann. An einer zweiten Sekundärwicklung *2* wird über den Phasenschieber $R_2 C_2$ eine weitere, gegenüber der ersten um 90° verschobene Spannung abgegriffen, durch die Diode D gleichgerichtet und dem Gitter der HF-Röhre des Wobbelgenerators als hohe negative Sperrspannung zugeführt. Die Resonanzspannung wird während der ersten Halbwelle am ESO in der X-Richtung aufgezeichnet, während die Frequenz von G durchgestimmt wird. Während der zweiten Halbwelle ist der Generator gesperrt, und auf dem Leuchtschirm erscheint in der X-Richtung die Nullinie.

Als Beispiel eines *Wobbelgenerators* ist in Abb. 7.32 die Schaltung eines *Transitrons* mit einer C-Röhre dargestellt. Hierunter wird ein Oszillator verstanden, dessen Resonanzkreiskapazität durch die veränderliche Röhrenkapazität variiert werden kann. Das Transitron wird von einer Pentode E_1 mit großer Steilheit gebildet und arbeitet mit einer Stromverteilungssteuerung.

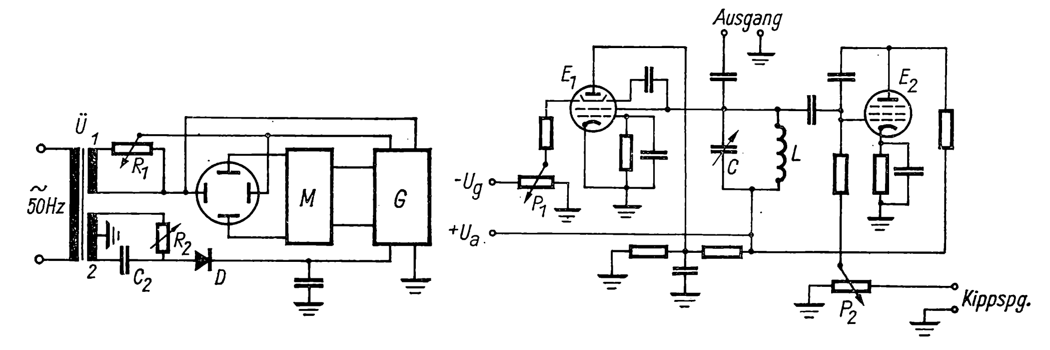


Abb. 7.31 Aufzeichnung der Resonanzkurve mit dem ESO

Abb. 7.32 Schaltung eines Wobbel-Oszillators

Eine Vergrößerung der Bremsgitterspannung bewirkt zunehmenden Schirmgitterstrom und sinkenden Anodenstrom. Die am Schirmgitter mit dem Resonanzkreis LC entstehende Wechselspannung wird über den Kondensator C_b direkt an das Bremsgitter gelegt. Diese Schaltung ist als Wobbelgenerator besonders gut geeignet, weil die Oszillatorspannung über einen größeren Frequenzbereich konstant bleibt und keine besondere Rückkopplungsspule erforderlich ist. Die zweite Röhre E_2 in der Abbildung wirkt als variable Kapazität, die parallel zur Resonanzkreiskapazität C liegt und deren Wirkung auf der Abhängigkeit der effektiven Eingangskapazität vom Verstärkungsfaktor einer Röhre beruht. Wie in § 7.21 abgeleitet ist, nimmt nach Gl. (7/5) die effektive Eingangskapazität mit dem Verstärkungsfaktor A zu. Unter Berücksichtigung von Gl. (4/21) ergibt sich bei Widerstandsanpassung ($R_i = R_a$) die Eingangskapazität zu

$$C_1 = C_{gk} + C_{ga}(1 + SR_a \cos \varphi). \qquad (7/24)$$

Da die Steilheit S bei Pentoden und vor allem bei Regelröhren im Verhältnis 1:100 und mehr durch die Gitterspannung geändert werden kann, läßt sich

damit eine variable Kapazität darstellen. In Abb. 7.32 wird die linear ansteigende Kippspannung aus dem ESO über das Potentiometer P_2 an das Gitter von E_2 gelegt, wodurch ein zeitlich linearer Kapazitätsabfall an der Röhre und damit eine stetig wachsende Frequenz des Oszillators erzielt wird. Mit der Pentode AF 3 läßt sich z. B. der Wert von C_1 von 27 pF bei $U_{g1} = -4$ V auf 8 pF bei -55 V verringern, wenn $R_a = 3\,\mathrm{k\Omega}$ gewählt wird. Damit wird bei einer mittleren Oszillatorfrequenz $f_0 = 360$ kHz mit passenden Schaltmitteln ein Frequenzhub $\Delta f = 23$ kHz möglich, was für die meisten Untersuchungen ausreichend ist.

Eine zweite Möglichkeit der Frequenzsteuerung beruht darauf, eine Röhre als Impedanzröhre zu betreiben. Für den Frequenzbereich $\omega CR > 1$, wenn C Kapazität und R Ableitwiderstand eines RC-Spannungsteilers am Steuergitter einer Pentode sind, ergibt sich die Röhreninduktivität zu

$$\omega L_R = \frac{\omega C R}{S}. \tag{7/25}$$

Analog zur kapazitiven Frequenzsteuerung wird durch Gitterspannungsänderung die Steilheit S und damit die effektive Impedanz der Röhre geändert. Der Frequenzhub nach diesem Verfahren ist wesentlich größer als bei der vorigen Schaltung.

7.54 *Hochfrequenzbrückenschaltungen*

Mit einer geeigneten Abschirmung können *Brückenschaltungen* zu Impedanzmessungen auch im HF-Bereich herangezogen werden. In Abb. 7.33a ist der Aufbau einer Hochfrequenzmeßbrücke [*7.113*] schematisch dargestellt.

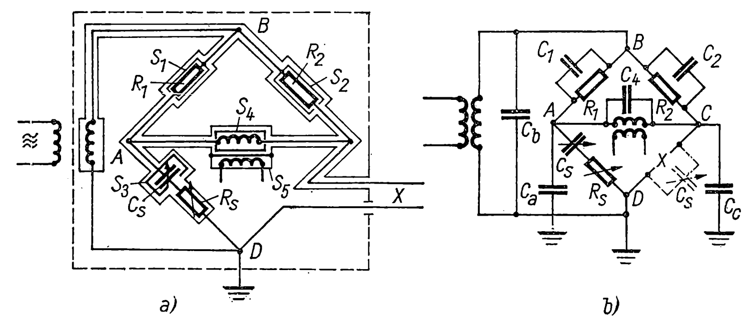


Abb. 7.33 Hochfrequenzbrücke (a), Ersatzschaltbild (b)

Die Wirkung der Abschirmungen S_1 bis S_5 beruht darauf, die Streukapazitäten zu lokalisieren, so daß sich diese im Ersatzschaltbild (Abb. 7.33b) eintragen und bei der Berechnung der genauen Gleichgewichtsbedingungen berücksichtigen lassen. Die Abschirmungen S_1 und S_2 z. B., welche die Festwiderstände R_1 und R_2 umgeben, können als Parallelkapazitäten C_1 und C_2 dargestellt werden. Die Kapazitäten zwischen S_1 und S_2 sowie gegen Erde lassen sich

durch die Ersatzkapazität C_b ausdrücken, die als Nebenschlußblindwiderstand am Brückeneingang erscheint und die Brückenfunktion nicht beeinträchtigt. Die Kapazität von S_4 gegen „Erde" erscheint als Nebenschlußkapazität C_c zum Meßobjekt X; S_3 wird in der Ersatzkapazität C_a abgebildet.

Die abgeschirmte Meßbrücke kann entweder zur Impedanzmessung entsprechend den Abgleichbedingungen (s. § 6.36) oder nach der Substitutionsmethode benutzt werden. Bei der letzteren werden die unbekannte Impedanz parallel zum Zweig $C_s R_s$ geschaltet, in den Zweig X passende Kapazität und Widerstand eingesetzt und die Brücke abgeglichen. Dann wird die unbekannte Impedanz entfernt und ihre Blind- und Wirkkomponente aus den zur neuen Gleichgewichtseinstellung erforderlichen Änderungen von C_s bzw. R_s ermittelt.

Bei der Vergleichsmessung wird zuerst ohne den gesuchten Widerstand und mit $R_s = 0$ eine Nullmessung durchgeführt und mit C_s allein das Gleichgewicht eingestellt. Nun wird X in den Meßzweig geschaltet und die Brücke durch Verstellen von C_s und R_s abgeglichen. Bei induktivem Widerstand X wird diesem eine bekannte Kapazität C_s' parallelgeschaltet, damit der Phasenabgleich möglich ist.

Bei der Anwendung der HF-Brücke ist ganz besondere Sorgfalt hinsichtlich der Kapazität und Induktivität der Zuleitungen, der Kopplung zwischen Oszillator und Brückeninstrument usf. aufzuwenden, um genaue Meßergebnisse zu erhalten. Als Oszillator wird zweckmäßig ein amplitudenmodulierter HF-Generator, als Nullinstrument ein HF-Empfänger verwendet, dessen Ausgang akustisch oder mit einem ESO registriert wird. Über weitere Details siehe [*7.11*, *7.34*, *7.56*, *7.63*].

7.55 T-Netzwerke [*7.120*]

T-Netzwerke (s. § 3.6) sind Filterschaltungen, die bei bestimmten Frequenzen hohen Durchgangswiderstand aufweisen und sich für spezielle Meß-

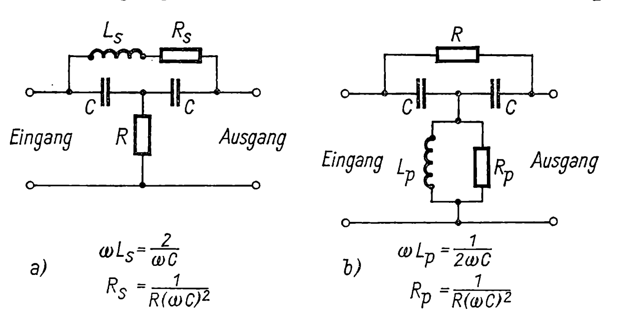


Abb. 7.34 T-*Brücken zur Impedanzmessung*

probleme als Meßschaltung eignen. In Abb. 7.34 sind als Beispiel zwei dieser T-Brücken mit den entsprechenden Abgleichsbedingungen wiedergegeben. Gegenüber Brückenschaltungen haben diese den Vorteil, daß Ein- und Aus-

gang gemeinsame „Erde" besitzen und die zu messende Impedanz einseitig geerdet werden kann.

Die Schaltung der Abb. 7.34a ist für die Messung der Induktivität und Güte von Spulen geeignet. Die Größe L_s wird durch den Wert von C ermittelt; die Parallelresonanzimpedanz des Kreises $L_s R_s C C$ ergibt sich zu $4R$. Auf eine ausreichende Abschirmung des Detektors gegen den Oszillatorausgang ist dabei zu achten. Die Schaltung der Abb. 7.34b eignet sich zum Vergleich von Spulen und auch für Substitutionsmessungen. Nachteilig wirken sich hierbei die Streukapazitäten des T-Anschlusses gegen „Erde" auf die Abgleichsbedingungen aus.

7.6 Modulation und Demodulation

Unter *Modulation* versteht man die zeitliche Beeinflussung einer hochfrequenten Trägerwelle durch Veränderung ihrer Amplitude, der Frequenz oder Phase, um eine Information übertragen zu können. Die Auflösung der modulierten Welle in Trägerfrequenz und Modulation nennt man *Demodulation.*

7.61 Amplitudenmodulation

Bei der *Amplitudenmodulation* wird die Amplitude der hochfrequenten Trägerschwingung entsprechend der zu übertragenden Information verändert. In Abb. 7.35a ist das Modulationssignal, in b) die modulierte HF-Schwingung dargestellt, deren Hüllkurve die Signalgröße $A(t)$ wiedergibt. Mit den in die Abb. 7.35b eingetragenen Bezeichnungen definiert man den *Modulationsgrad* zu

$$m = \frac{U_{\max} - U_0}{U_0} \tag{7/26a}$$

bzw.

$$m' = \frac{U_0 - U_{\min}}{U_0}, \tag{7/26b}$$

wobei bei sinusförmiger Modulation $m = m'$ ist. Für $m = 1$ spricht man von vollkommener Modulation.

Für *sinusförmige Modulation* lautet die Gleichung für die modulierte Schwingung

$$u = U_0(1 + m \sin 2\pi f_s t) \sin 2\pi f t, \tag{7/27}$$

wenn f_s die Modulations- oder Signalfrequenz und f die Trägerfrequenz bedeutet. Aus Gl. (7/27) erhält man den Ausdruck

$$u = U_0 \sin 2\pi f t + \frac{m U_0}{2} \cos 2\pi(f - f_s)t - \frac{m U_0}{2} \cos 2\pi(f + f_s)t. \tag{7/28}$$

Der erste Term ist die Trägerwelle, die von Modulationsgrad und Modulationsfrequenz unabhängig ist; die beiden folgenden Ausdrücke nennt man *obere* und *untere Seitenbandfrequenzen* als Kennzeichen der aufgeprägten Information.

7.611 Absorptionsmodulator

Die einfachste Methode zur Amplitudenmodulation (AM) besteht darin, den Trägerfrequenzoszillator in Reihe oder Nebenschluß mit einem Lastwiderstand zu belasten, dessen Größe eine stetige Funktion des Modulationssignals ist. Ein einfaches Beispiel ist in Abb. 7.36a dargestellt, wobei der HF-Generator mit der Spannung u_1 und dem Vorwiderstand R durch einen Widerstand $R_v = R_0(1 + m)$ belastet wird. Die Ausgangsspannung u_2 ergibt sich daraus zu

$$u_2 = \frac{R_v}{R + R_v}\, u_1, \tag{7/29}$$

wobei R_v eine Funktion des jeweiligen Modulationsgrades ist. Trägt man das Verhältnis u_2/u_1 als Funktion von R_v/R auf, so findet man einen annähernd linearen Zusammenhang zwischen Ausgangsspannung und Modulationsgrad m

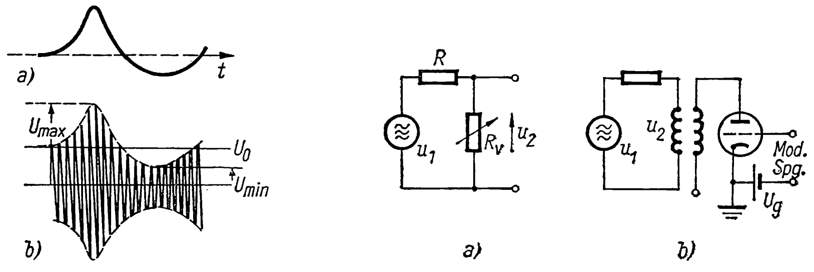


Abb. 7.35 Amplitudenmodulation

Abb. 7.36 Absorptionsmodulation

nur für relativ kleine Werte von R_v/R. In Abb. 7.36b wird R_v von einer angekoppelten Triode gebildet, deren Gitter die Modulationsspannung zugeführt wird. Da der Röhrenwiderstand R_i, der als variabler Widerstand fungiert, keine lineare Funktion der Gitterspannung U_g ist, wird besser im nichtlinearen Teil der Kennlinie gearbeitet.

7.612 Gittermodulation

Bei der Gittermodulation werden Trägerfrequenz und Signalspannung an gleiche oder verschiedene Gitter einer Pentode gelegt, wie in Abb. 7.37 vereinfacht gezeigt ist. In § 6.322 wurde bereits erläutert, daß der Anodenstrom quadratisch von der Gitterspannung abhängt, wenn die negative Vorspannung nicht zu groß ist. In Abb. 7.37a ist dargestellt, wie die Modulationsspannung im Gitterkreis der Pentode der Trägerfrequenz additiv überlagert wird und im Anodenschwingungskreis die niederfrequenten Komponenten ausgefiltert werden. In Abb. 7.37b sind diese drei Spannungen durch die Buchstaben a, b und c bezeichnet. Die Summenspannung im Gitterkreis ergibt

$$u = U \cos \omega t + S_1 \cos \omega_1 t + S_2 \cos \omega_2 t + \ldots,$$

wo S_i die Amplituden und ω_i die Kreisfrequenzen der Fourier-Komponenten der Signalspannung, U und ω die entsprechenden Größen der Trägerwelle sind. Analog zu Gl. (6/32) ergibt sich bei quadratischer Kennlinie für den Anodenstrom der Ausdruck

$$i = U(A_1 + 2A_2S_1 \cos \omega_1 t + 2A_2S_2 \cos \omega_2 t + \ldots) \cos \omega t, \qquad (7/30)$$

den man allgemein in der Form

$$i = U(A_1 + 2A_2M) \cos \omega t \qquad (7/30a)$$

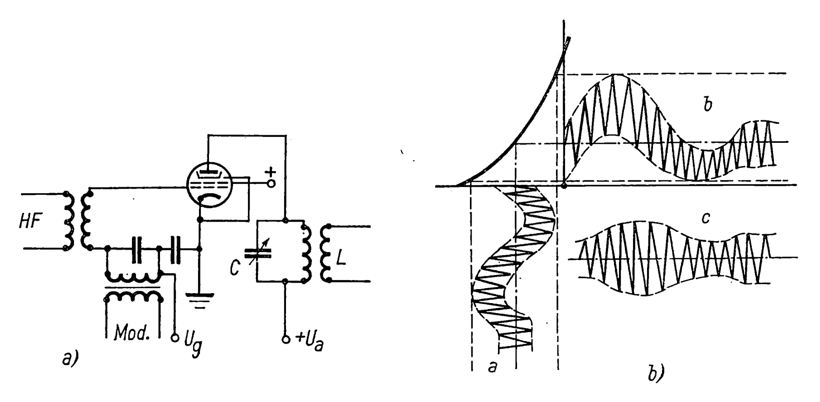


Abb. 7.37 Gittermodulation

schreiben kann. Die Größe M stellt den Augenblickswert des Modulationssignals dar; das Produkt $M \cos \omega t$ enthält alle Seitenbandfrequenzen, die zur Übertragung des Signals erforderlich sind. Mit dieser Methode ist nur ein beschränkter Modulationsgrad erreichbar.

Wesentlich wirkungsvoller ist das Modulationsverfahren, wenn der Gittermodulator in C-Schaltung arbeitet und die Röhrenkennlinie möglichst linear ist. Die Gittervorspannung soll dabei etwa doppelt so groß wie die des unteren Knicks der Kennlinie sein und die Trägerspannung zwischen Knick und Gitterstromeinsatz liegen. Wie im vorigen Fall erhält man die modulierte Schwingung nach Ausfiltern der niederfrequenten Komponenten.

7.613 Anodenmodulation

Der am häufigsten benutzte Typ eines modulierten Oszillators ist der in Abb. 7.38 dargestellte *Anodenmodulator,* bei dem ähnlich wie beim C-Verstärker der Anodenstrom moduliert wird. Die Oszillatorröhre E_1 erhält ihre Gittervorspannung über die Gitter-RC-Kombination, die so dimensioniert ist, daß die Scheitelspannung der Oszillatorschwingung nur etwas kleiner als die Anodenspannung wird. Wird die Spannung an der Anode durch die Modulationsspannung geändert, so folgt auch die Oszillatorspannung dieser Änderung. Zu diesem Zweck ist ein von der Röhre E_2 gebildeter Modulationsverstärker vorgesehen, dessen Ausgang von der Drosselspule L gebildet wird.

Der gesamte Anodenstrom bleibt aus diesem Grunde konstant. Durch das Modulationssignal wird die an der Anode von E_1 liegende Spannung entsprechend $U_a = U_{a0}(1 + M)$ geändert. Die HF-Drosselspule L_1 verhindert den Übertritt der HF-Schwingung in den Modulationskreis, und der Kondensator C blockt die Anodenspannung von E_2 ab. Zur Vermeidung von Verzerrungen darf der Anodenstrom in der Modulationsröhre E_2 nicht auf Null absinken, d. h., diese muß mit einer höheren Anodenspannung als E_1 betrieben werden.

Die Linearität dieser Modulationsart ist besser als bei der Gittermodulation. Die Reaktanz des Gitterkondensators soll mindestens zweimal so groß wie der Gitterableitwiderstand bei der höchsten Modulationsfrequenz und die Güte des Oszillatorkreises nicht so hoch sein, daß eine Amplitudendiskriminierung bei den höchsten Seitenfrequenzbändern auftritt.

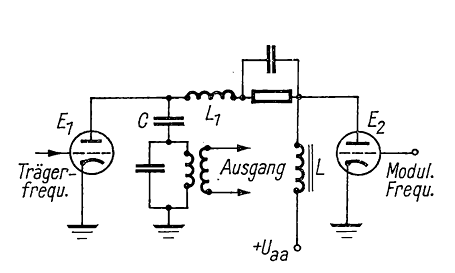


Abb. 7.38 Anodenmodulierter Oszillator

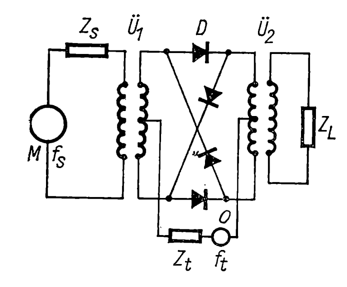


Abb. 7.39 Ringmodulator

7.614 Brücken- und Ringmodulator [*7.80*]

Der in § 6.63 beschriebene *Ringmodulator* (s. Abb. 7.39) besteht aus vier Halbleitergleichrichtern D und läßt sich auch bei hohen Frequenzen zur Amplitudenmodulation verwenden. Die Kennlinie der Dioden läßt sich, wie in § 6.321 gezeigt ist, für mittlere Spannungen als Parabel oder Exponentialkurve beschreiben. Die Signalfrequenz f_s der Modulationsquelle M wird durch den Transformator $Ü_1$ auf den Modulator übertragen, während die Trägerfrequenz f_t des Oszillators O über die Mittelanzapfungen den beiden Transformatoren $Ü_1$ und $Ü_2$ zugeleitet wird. In der Durchlaßrichtung jeder Diode erscheinen Stromkomponenten mit der Summen- oder Differenzfrequenz aus Träger- und Modulationsspannung und addieren oder subtrahieren sich im Ausgangsübertrager $Ü_2$. Die Ausgangsimpedanz $\boldsymbol{Z}_L$ stellt ein Filter für Spannungen mit unerwünschten Vielfachen der Trägerfrequenz f_t dar, so daß nur das Frequenzband $f_t \pm f_s$ auftritt.

7.62 Frequenz- und Phasenmodulation

Bei der *Frequenzmodulation* (FM) wird die zu übertragende Information als Änderung der augenblicklichen Frequenz einer Trägerschwingung eingeführt; für diese ergibt sich damit der allgemeine Ausdruck

$$u = U_0 \sin(\omega_t t + m_f \sin \omega_s t). \qquad (7/31)$$

Dabei sind ω_t und ω_s die Frequenzen der Träger- bzw. Modulationsschwingung und m_f der Frequenzmodulationsgrad. Entwickelt man den Ausdruck in Gl. (7/31), so erhält man den Reihenansatz

$$\begin{aligned} u = U_0\{J_0(m_f) \sin \omega_t t &+ J_1(m_f) [\sin (\omega_t + \omega_s)t - \sin (\omega_t - \omega_s)t] \\ &+ J_2(m_f) [\sin (\omega_t + 2\omega_s) t + \sin (\omega_t - 2\omega_s)t] \\ &+ J_3(m_f) [\sin (\omega_t + 3\omega_s)t - \sin (\omega_t - 3\omega_s)t] \\ &+ \ldots\} \end{aligned} \tag{7/32}$$

Darin sind $J_n(m_f)$ die Bessel-Funktionen 1. Art und n-ter Ordnung mit dem Argument m_f; es treten die Frequenzen ω_t, $\omega_t \pm \omega_s$; $\omega_t \pm 2\omega_s$ usw. auf. Der erste Term entspricht der Trägerfrequenz einer amplitudenmodulierten Schwingung (vgl. Gl. 7/28), jedoch mit dem Unterschied, daß bei der FM die Amplitude vom Modulationsgrad abhängt. Der Term mit J_1 entspricht den Seitenbändern bei der AM, unterscheidet sich jedoch darin, daß eine Phasenverschiebung von 90° auftritt.

Die Amplituden der verschiedenen Frequenzkomponenten hängen vom Modulationsgrad m_f ab; für $m_f \leqq 0{,}4$ sind die relativen Amplituden der Seitenbänder 2. und 3. Ordnung $\leqq 2$ bzw. 0,014%.

Für mehrere Modulationsfrequenzen ω_{s1}, ω_{s2} ... wird das Frequenzspektrum äußerst kompliziert.

7.621 Frequenzmodulator

Ein Beispiel eines *Frequenzmodulators* ist bereits in § 7.537 bei der Anwendung auf den Wobbelgenerator besprochen worden.

Grundsätzlich beruht die Erzeugung von frequenzmodulierten Schwingungen auf der Kopplung einer *Reaktanzröhre* mit dem Oszillator. Dadurch wird eine fiktive Reaktanz eingeführt, die vom Modulationsgrad abhängt. Man kann entweder einen Integrations- oder Differentiationskreis benutzen, um das Oszillatorsignal dem Gitter der Reaktanzröhre aufzuprägen. Der um 90° phasenverschobene Strom der Reaktanzröhre wird dann wieder in den Schwingungskreis des Oszillators zurückgeliefert und verändert dessen Kapazität oder Induktivität. Die Amplitude des phasenverschobenen Stromes wird durch das Modulationssignal gesteuert.

7.622 Phasenmodulation

Bei der *Phasenmodulation* (PM) wird die zu übertragende Information durch Veränderung der Phase der Trägerschwingung vermittelt. Für die phasenmodulierte Spannung gilt dann

$$u = U_0 \sin (\omega_t t + \varphi_0 + m_p \sin \omega_s t), \tag{7/33}$$

wobei φ_0 die Bezugsphase und $m_p \sin \omega_s t$ die sinusförmige Phasenschwankung mit der Modulationsfrequenz ω_s und dem *Phasenmodulationsgrad* m_p bedeutet. Der wesentliche Unterschied zwischen PM und FM besteht darin, daß bei

PM der Modulationsgrad unabhängig von der Modulationsfrequenz ist, während bei der FM dieser umgekehrt proportional zu ω_s ist. Über Phasenmodulatoren siehe [*7.28*].

7.63 Impulsmodulation [*7.60*]

Bei der *Impulsmodulation* wird Amplitude, Frequenz oder Phase der Trägerschwingung unstetig um einen bestimmten, der Impulshöhe entsprechenden Betrag geändert. Zur Übermittlung einer Information werden die Impulse innerhalb eines bestimmten Zeitabschnitts gespeichert und als Signalgröße die Höhe, Länge oder Lage der Einzelimpulse benutzt.

7.64 Nachweis amplitudenmodulierter Schwingungen

7.641 Modulationsmessung mit dem ESO

Läßt man auf dem Leuchtschirm des ESO die amplitudenmodulierte HF-Schwingung bei zeitlinearer Ablenkung erscheinen, so kann daraus annähernd der Modulationsgrad und die Modulationsfrequenz abgelesen werden. Eine

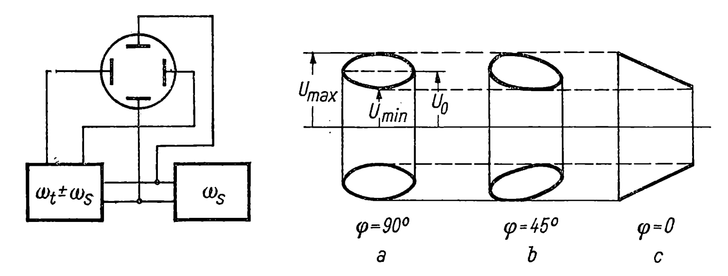


Abb. 7.40 Darstellung amplitudenmodulierter Schwingungen mit dem ESO

genauere Messung beider Größen liefert die Schaltung der Abb. 7.40, bei der an die Y-Platten die modulierte HF-Spannung, an die X-Platten die Modulationsfrequenz (bei sinusförmiger Modulation) gelegt werden. Je nach Phasendifferenz zwischen Modulationsschwingung und modulierter HF-Spannung erscheinen auf dem Leuchtschirm die mit a, b und c bezeichneten stehenden Bilder. Bei verschwindender Phasendifferenz ergibt sich bei c das *Modulationstrapez*, aus dem durch Vergleich mit Abb. 7.35 sofort der Modulationsgrad zu

$$m = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}$$

abgelesen werden kann.

7.642 Diodendetektor

Die gebräuchlichste Nachweismethode der AM, die man auch *Demodulation* nennt, beruht auf der Benutzung von Diodengleichrichtern, wie sie in § 6.32 behandelt sind. Am Ausgang dieser Instrumente entsteht allerdings keine

konstante Meßspannung, sondern das Modulationssignal. In Abb. 7.41 sind das Schaltschema des Gleichrichterkreises sowie die Spannungen und Ströme an den verschiedenen Schaltelementen dargestellt. Die zu demodulierende Spannung wird an den auf die Trägerfrequenz abgestimmten Resonanzkreis LC schwach angekoppelt. Die Diode D ist direkt über die Parallelkombination $R_d C_d$ an den Schwingungskreis gelegt, wobei C_d so dimensioniert ist, daß sein Blindwiderstand für die Trägerfrequenz klein, für die Modulationsfrequenz jedoch groß ist. Die Diodenkapazität C_i wirkt sich auf den Rückstrom der Diode besonders bei hohen Trägerfrequenzen aus. In Abb. 7.41 sind die Eingangsspannung U_i am Gleichrichterkreis, die am Widerstand R_d liegende Spannung U_{Rd}, die zwischen Anode und Katode der Diode liegende Spannung

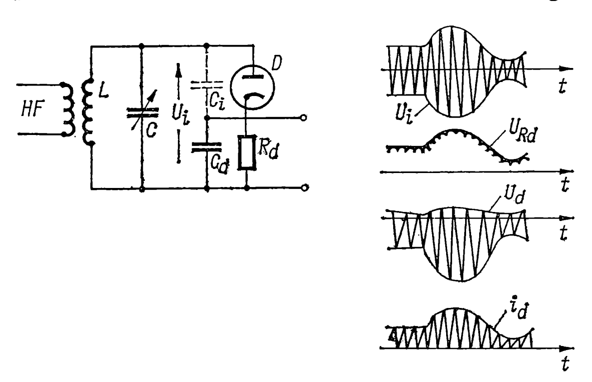


Abb. 7.41 Diodengleichrichtung bei Amplitudenmodulation

U_d sowie der durch den Gleichrichter fließende Strom i_d dargestellt. Ein idealer Diodengleichrichter wird eine Ausgangsspannung liefern, die ein getreues Abbild der Hüllkurve der modulierten HF-Schwingung darstellt. Für kleine Signale treten infolge der gekrümmten Diodenkennlinie Verzerrungen auf.

Anstelle des einfachen Diodendetektors kann die Gleichrichtung auch mit Röhren und Anwendung von Gitter- oder Anodengleichrichtung durchgeführt werden.

7.643 Überlagerungsprinzip

Durch Überlagerung mit einer zweiten unabhängigen Schwingung kann die amplitudenmodulierte Trägerwelle in eine solche mit niedrigerer Frequenz verwandelt werden, die die Merkmale der ursprünglichen AM enthält. Durch Gleichrichtung dieser *Zwischenfrequenz* (ZF) erhält man das Modulationssignal wie bei der normalen Gleichrichtung.

Die Hüllkurve einer durch Überlagerung von zwei Sinusschwingungen entstandenen Schwingung besitzt die Form

$$U = \sqrt{U_s^2 + U_0^2 + 2\,U_s U_0 \cos \omega t}, \qquad (7/34)$$

wenn U_s und U_0 die Scheitelspannungen der beiden Schwingungen und ω ihre Differenzfrequenz sind. Die Hüllkurve besitzt einen mittleren konstanten Wert, dem eine mit der Differenzfrequenz periodische Schwingung überlagert ist. Die Amplitude dieser Differenzschwingung ergibt sich zu:

$$u = a_0 U_0 (1 + m_1 \cos \omega t - m_2 \cos 2\omega t + m_3 \cos 3\omega t - \ldots), \qquad (7/35)$$

wenn U_0 die Amplitude der ursprünglichen Schwingung und a_0, m_1, m_2 usf. Koeffizienten sind, die vom Verhältnis U_s/U_0 abhängen. Ist $U_0 \gg U_s$, so lassen sich die Glieder mit m_2, m_3 usf. vernachlässigen, und es bleibt eine annähernd sinusförmige Hüllkurve der Amplitude $u = a_0 m_1 U_0 \cos \omega t$ übrig.

Wird ein Überlagerungssignal (Heterodynsignal) durch eine Diode mit quadratischer Kennlinie gleichgerichtet, so enthält der Diodenausgang immer eine reine Sinusspannung mit der Differenzfrequenz, deren Größe nicht von den relativen Amplituden der Signal- und Überlagerungsschwingung abhängt.

7.644 Überlagerungsempfänger

Zur Überlagerung des amplitudenmodulierten Signals wird eine *Mischröhre* (s. § 4.16) benutzt, die vier (Hexode) oder fünf (Heptode) Steuergitter besitzt. Die in Abb. 7.42 dargestellte Schaltung entspricht der eines Resonanzver-

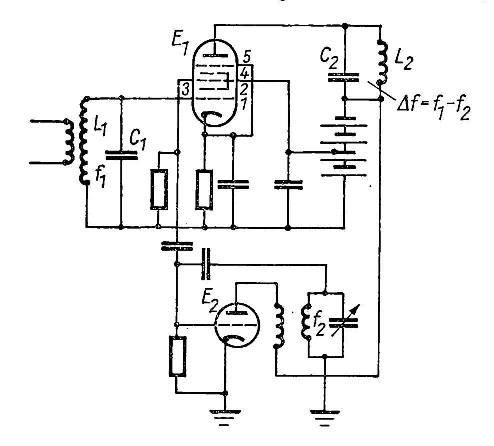



Abb. 7.42 Überlagerungsverstärker

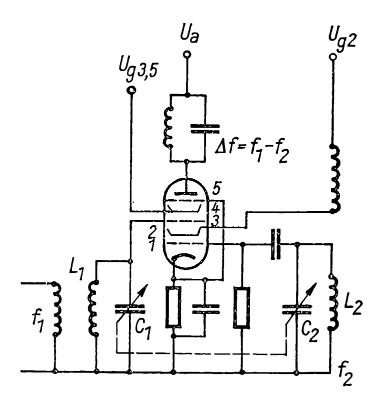


Abb. 7.43 Multiplikative Mischung mit Oktode

stärkers mit einem Gitterschwingungskreis $L_1 C_1$ und einem entsprechenden Resonanzkreis $L_2 C_2$ auf der Anodenseite. Das Gitter G_1 wirkt als normales Steuergitter für die ankommende Signalspannung; Gitter G_2 und G_4 sind miteinander verbunden und wirken als Schirmgitter. Das Gitter G_3 ist negativ vorgespannt und erhält eine vom Oszillatorkreis der Röhre E_2 erzeugte Wechselspannung. Gitter G_5 wirkt als gewöhnliches Bremsgitter und gibt der Röhre die Charakteristik einer Pentode. Durch das Gitter G_1 wird der Raumladungsstrom vor der Katode mit der Signalspannung gesteuert, während das

Gitter G_3 mit der Oszillatorfrequenz als Schaltelement wirkt und nur bei positiver Oszillatorspannung die Elektronen an die Anode gelangen läßt. Daraus resultiert eine Modulation der Oszillatorspannung durch die Signalspannung, wobei ein neues Signal mit der Differenzfrequenz im Anodenkreis entsteht. Der Vorteil dieser Schaltung liegt darin, daß zwischen Oszillator und Signalfrequenzkreis nur eine sehr geringe Wechselwirkung auftritt. Nachteilig ist die erforderliche zusätzliche Oszillatorröhre.

Dieser Nachteil kann umgangen werden durch Verwendung einer *Oktode* mit sechs Steuer- und Schirmgittern, wie sie in Abb. 7.43 dargestellt ist. Die Signalfrequenz f_1 wird dem Gitter G_4 zugeführt, während die Überlagerungsfrequenz f_2 unter Verwendung des Gitters G_2 als Hilfsanode und G_1 als Steuergitter im Resonanzkreis L_2C_2 erzeugt wird. Der Anodenkreis der Röhre ist auf die Zwischenfrequenz $f_1 - f_2 = \Delta f$ abgestimmt, die in der Röhre multiplikativ erzeugt wird. Durch besondere Mittel läßt sich der Gleichlauf der

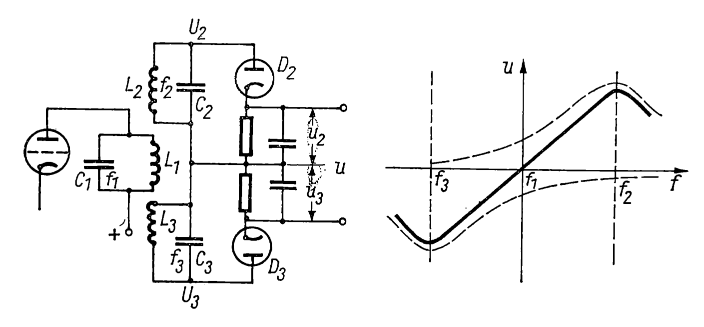


Abb. 7.44 Diskriminator für frequenzmodulierte Signale

Schwingungskreise für die Frequenzen f_1 und f_2, d. h. eine konstante Zwischenfrequenz Δf, erzielen. Dies geschieht durch mechanische Kopplung der Abstimmkondensatoren C_1 und C_2, deren Plattenschnitt besonders ausgebildet ist. Die Zwischenfrequenz $f_1 - f_2$ ist über einen großen Frequenzbereich konstant und wird vor der Gleichrichtung in einem Selektivverstärker nochmals verstärkt.

7.65 *Nachweis frequenzmodulierter Signale* [7.70]

Zum Nachweis von frequenzmodulierten HF-Spannungen werden *Diskriminatoren* benutzt; ein einfaches Beispiel ist in Abb. 7.44 wiedergegeben. Das frequenzmodulierte Signal wird von einem auf die Trägerfrequenz f_1 abgestimmten Resonanzkreis L_1C_1 auf zwei sekundäre Schwingungskreise mit den Eigenfrequenzen f_2 und f_3 induktiv übertragen, wobei f_1 etwa symmetrisch zwischen f_2 und f_3 liegt. Die Spannungen U_2 und U_3 an den Resonanzkreisen 2 und 3 werden nach dem Schema der Abb. 7.41 mit Dioden D_2 und D_3 gleichgerichtet. Das Ausgangssignal $u_2 - u_3 = u$ stellt die Differenzspannung an beiden Gleichrichterstrecken dar und hängt von der Frequenz f_1 nach der

in der Abbildung dargestellten Funktion ab, die bei kleinen Modulationsgraden durch eine Gerade ersetzt werden kann.

Die Meßanordnung ist für ein amplitudenmoduliertes Signal nicht empfänglich, da die AM im Ausgang kompensiert wird; s. a. [7.25].

7.66 Phasenempfindlicher Detektor

Phasenempfindliche Detektoren können zur Demodulation frequenzmodulierter Signalspannungen benutzt werden, wenn die im Detektor erzeugte Phasenverschiebung kleiner als 180° ist. In letzter Zeit haben diese Meßanordnungen große Bedeutung für den Nachweis geringer Modulationsgrade innerhalb sehr kleiner Bandbreiten gewonnen.

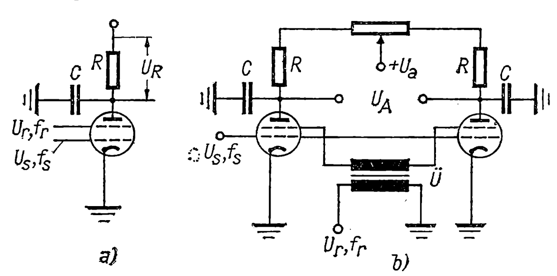


Abb. 7.45 Phasenempfindlicher Gleichrichter: Prinzip (a), Brückenschaltung (b)

Diese auch als *Lock-in-* oder *Kohärenzgleichrichter* bekannten Instrumente wurden erstmals von DICKE [7.30] in die HF-Spektroskopie eingeführt. Zusammenfassende Darstellungen siehe [7.65, 7.71]. Man betrachtet in Abb. 7.45a eine Mischröhre, in der eine Signalspannung (U_s, f_s) mit einer Vergleichswechselspannung (U_r, f_r) multiplikativ gemischt wird, wobei $|U_r| \gg |U_s|$ ist. Dann ist der Anodenstrom und die am Arbeitswiderstand R abfallende Spannung angenähert

$$U_R = U_0 + K U_s \cos [2\pi(f_s - f_r)t + \varphi], \tag{7/36}$$

wobei U_0 und K durch den Arbeitspunkt der Röhre gegeben sind. Die Glieder mit der Summenfrequenz und noch höhere Frequenzen sind in Gl. (7/36) fortgelassen, da diese bei genügend großen Zeitkonstanten des RC-Gliedes unwirksam werden. Mit $f_s - f_r = 0$ wird

$$U_R = U_0 + K U_s \cos \varphi. \tag{7/37}$$

Um den Anteil U_0 kompensieren zu können und Schwankungen in den Betriebsspannungen auszuschalten, wird in der Praxis die schematisch in Abb. 7.45b wiedergegebene Brückenschaltung benutzt, in der die Hilfsspannung U_r einer Vergleichsröhre mit 180° Phasenverschiebung im Vergleich zur anderen zugeführt wird. Die Spannung am Brückenausgang ergibt sich mit Gl. (7/37) zu

$$\begin{aligned} U_A &= (U_0 - K U_s \cos \varphi) - [(U_0 - K U_s \cos (\varphi + \pi)] \\ &= 2 K U_s \cos \varphi. \end{aligned} \tag{7/38}$$

Die Vergleichsspannung wird meist durch einen getrennten Oszillator erzeugt und die Brückenspannung durch den Übertrager $\ddot{U}$ zugeführt. Anstelle der multiplikativen Mischung kann ebenso wirksam eine additive benutzt werden. Die obere noch wahrnehmbare Grenzfrequenz ω_0, durch welche die Bandbreite der Anordnung bestimmt wird, entspricht in erster Näherung der reziproken Zeitkonstanten RC der Brückenzweige.

Weitere Einzelheiten und Anwendungsbeispiele siehe [*7.9*, *7.16*, *7.72*, *7.87*, *7.129*]. Über Aufbau und Dimensionierung von Transistor-Phasengleichrichtern siehe [*7.124*]. Einen phasenempfindlichen Detektor mit einer sehr langen Integrationszeit beschreibt Rollin [*7.97*].

7.7 Messungen an HF-Leitungen

7.71 Leitungsgleichungen

Wirkt am Anfang einer Leitung, die z. B. aus zwei Paralleldrähten besteht, eine Wechselspannung, so fließen an jeder Stelle der Leitung Wechselströme und herrschen zwischen benachbarten Leitungsabschnitten Wechsel-

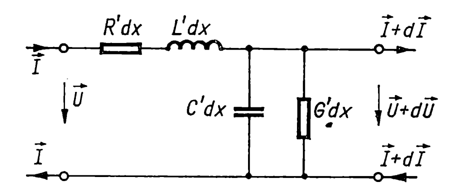


Abb. 7.46 Ersatzbild eines kurzen Leitungsabschnitts

spannungen der gleichen Frequenz. Schneidet man ein kurzes Stück Doppelleitung aus der ganzen heraus (s. Abb. 7.46), so läßt sich dieser Abschnitt von der Länge $\mathrm{d}x$ kennzeichnen durch:

Widerstandsbelag R',

Induktionsbelag L',

Ableitungsbelag G',

Kapazitätsbelag C'.

Diese Größen werden *Leitungskonstanten* genannt, die für homogene Leitungen ortsunabhängig sind, jedoch von der Frequenz abhängen können (Skineffekteinfluß auf R', dielektrische Verluste bei G'). Aus den Gleichgewichtsbedingungen für Strom und Spannung im Leiterabschnitt $\mathrm{d}x$,

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}(R' + \mathrm{j}\omega L')\,\mathrm{d}x + \boldsymbol{U} + \mathrm{d}\boldsymbol{U};$$

$$\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{U} + \mathrm{d}\boldsymbol{U})\,(G' + \mathrm{j}\omega C')\,\mathrm{d}x + \boldsymbol{I} + \mathrm{d}\boldsymbol{I}$$

ergeben sich die beiden Differentialgleichungen

$$\mathrm{d}\boldsymbol{U}/\mathrm{d}x = -(R' + \mathrm{j}\omega L')\boldsymbol{I}; \tag{7/39}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{I}/\mathrm{d}x = -(G' + \mathrm{j}\omega C')\boldsymbol{U}. \tag{7/40}$$

Differenziert man Gl. (7/39) nach x und setzt darin Gl. (7/40) ein, so ergibt sich die Leitungsgleichung

$$\mathrm{d}^2\boldsymbol{U}/\mathrm{d}x^2 = (R + \mathrm{j}\omega L')\,(G' + \mathrm{j}\omega C')\boldsymbol{U}. \tag{7/41}$$

Diese lineare Differentialgleichung kann durch den Ansatz

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\gamma x} = \boldsymbol{A}_1\mathrm{e}^{-\gamma x} + \boldsymbol{A}_2\mathrm{e}^{\gamma x} \tag{7/42}$$

integriert werden. Durch Einsetzen in Gl. (7/41) findet man schließlich

$$\gamma = \sqrt{(R' + \mathrm{j}\omega L')\,(G'\,\mathrm{j}\omega C')} = \alpha + \mathrm{j}\beta. \tag{7/43}$$

Die komplexe Größe γ wird Übertragungsmaß genannt, das sich aus dem *Dämpfungsmaß* α und dem *Phasenmaß* β vektoriell zusammensetzt.

Die allgemeinen Lösungen der Leitungen lauten:

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{B}_1\mathrm{e}^{\gamma x} + \boldsymbol{B}_2\mathrm{e}^{-\gamma x}; \tag{7/44a}$$

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}_1\mathrm{e}^{\gamma x} + \boldsymbol{A}_2\mathrm{e}^{-\gamma x}. \tag{7/44b}$$

Die vier Konstanten $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ werden durch die Grenzbedingungen bei $x = 0$ bestimmt, wo das Leitungsende durch einen Lastwiderstand geschlossen ist und $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_2$, $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_2$ sein sollen. Setzt man in die Gln. (7/44) $x = 0$ ein, so findet man

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 &= \boldsymbol{U}_2; \\ \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 &= \boldsymbol{I}_2. \end{aligned} \tag{7/45}$$

Differenziert man die Gln. (7/44) partiell nach x und setzt die Grenzbedingungen ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \gamma\boldsymbol{B}_1 - \gamma\boldsymbol{B}_2 &= (G' + \mathrm{j}\omega C')\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{U}_2; \\ \gamma\boldsymbol{A}_1 - \gamma\boldsymbol{A}_2 &= (R' + \mathrm{j}\omega L')\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{I}_2. \end{aligned} \tag{7/46}$$

Durch Auflösen der Gln. (7/45) und (7/46) findet man

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{U}_2 + \boldsymbol{Z}_0\boldsymbol{I}_2)$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{U}_2 - \boldsymbol{Z}_0\boldsymbol{I}_2)$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{U}_2/\boldsymbol{Z}_0)$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{U}_2/\boldsymbol{Z}_0),$$

wenn man die Größe

$$\sqrt{\frac{\boldsymbol{Z}}{\boldsymbol{Y}}} = \sqrt{\frac{R' + \mathrm{j}\omega L'}{G' + \mathrm{j}\omega C'}} = \boldsymbol{Z}_0 \tag{7/47}$$

als *Wellenwiderstand der Leitung* einführt.

Die Ortsabhängigkeit von Strom und Spannung läßt sich berechnen, wenn man in die Gln. (7/44) die Größen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ einsetzt:

$$\boldsymbol{I}(x) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{I}_2 + \frac{\boldsymbol{U}_2}{\boldsymbol{Z}_0}\right) \mathrm{e}^{\gamma x} + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{I}_2 - \frac{\boldsymbol{U}_2}{\boldsymbol{Z}_0}\right) \mathrm{e}^{-\gamma x}; \tag{7/48a}$$

$$\boldsymbol{U}(x) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}_2 + \boldsymbol{I}_2\boldsymbol{Z}_0)\,\mathrm{e}^{\gamma x} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{Z}_0 - \boldsymbol{U}_2)\,\mathrm{e}^{-\gamma x}. \tag{7/48b}$$

Dieses Ergebnis kann übersichtlich interpretiert werden, wenn man die Zeitabhängigkeit von Strom und Spannung in Betracht zieht, die in den Klammerausdrücken der Gln. (7/48) enthalten ist. Führt man die Bezeichnungen

$$\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{Z}_0 + \boldsymbol{U}_2 = U_h \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

und

$$\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{Z}_0 - \boldsymbol{U}_2 = -U_r \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)}$$

ein, so sieht man, daß U_h und U_r reelle Größen sind und die Amplituden der hin- und rücklaufenden elektrischen Wellen darstellen. Setzt man diese in die Gln. (7/48) ein und ersetzt $\gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta$, so ergibt sich die Spannungs- und Stromverteilung längs der Leitung zu

$$\boldsymbol{I} = \frac{1}{2}\frac{U_h}{\boldsymbol{Z}_0}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \beta x)} - \frac{1}{2}\frac{U_r}{\boldsymbol{Z}_0}\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi - \beta x)}; \tag{7/49a}$$

$$\boldsymbol{U} = \frac{1}{2}\,U_h \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \beta x)} + \frac{1}{2}\,U_r \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi - \beta x)}. \tag{7/49b}$$

Strom und Spannung sind das Ergebnis einer Überlagerung von zwei Wellen mit entgegengesetzten Ausbreitungsrichtungen, wobei der Index „h“ für die hinlaufende Welle ($-X$-Richtung) und der Index „r“ für die reflektierte Welle in der $+X$-Richtung gilt. Der Phasenfaktor $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \beta x)}$ bleibt konstant, wenn $\omega t = \beta x$; damit findet man die *Phasengeschwindigkeit* zu

$$v = \frac{\omega}{\beta}. \tag{7/50}$$

Beide Wellen sind exponentiell gedämpft; die Dämpfung ist durch den Realteil von γ, das Dämpfungsmaß α, gegeben. An jedem Punkt ist das Verhältnis von Spannung zu Strom konstant und entspricht dem Wellenwiderstand $\boldsymbol{Z}_0$.

Das Verhältnis von hingehender und reflektierter Welle hängt von der Impedanz des Abschlußwiderstandes der Leitung ab. Man bezeichnet dieses

als *Reflexionskoeffizienten* $\boldsymbol{\Gamma}$ und definiert diesen aus der Beziehung

$$\boldsymbol{\Gamma} = \Gamma e^{j\varphi} = \frac{U_r}{U_h} e^{j\varphi} = \frac{\boldsymbol{U}_2 - \boldsymbol{I}_2\boldsymbol{Z}_0}{\boldsymbol{U}_2 + \boldsymbol{I}_2\boldsymbol{Z}_0}. \quad (7/51)$$

Setzt man in Gl. (7/51) für $x = 0$ den Lastwiderstand $\boldsymbol{Z}_L = \boldsymbol{U}_2/\boldsymbol{I}_2$ ein, so erhält man

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{\boldsymbol{Z}_L - \boldsymbol{Z}_0}{\boldsymbol{Z}_L + \boldsymbol{Z}_0}. \quad (7/52)$$

Im allgemeinen ist der Reflexionskoeffizient eine komplexe Größe, d. h. die reflektierte Welle ist nach Amplitude und Phase von der ankommenden verschieden.

Im *Kurzschlußfall* mit $\boldsymbol{Z}_L = 0$ wird $\boldsymbol{\Gamma} = -1$, d. h. die Reflexion erfolgt mit ungeänderter Amplitude, jedoch mit 180° Phasenverschiebung.

Im Leerlauffall mit $\boldsymbol{Z}_L = \infty$ wird $\boldsymbol{\Gamma} = +1$, und beide Größen bleiben bei der Reflexion unverändert; es bilden sich stehende Wellen in der Leitung aus. Wird der Belastungswiderstand $\boldsymbol{Z}_L = \boldsymbol{Z}_0$, so verschwindet die Größe $\boldsymbol{\Gamma}$, und es entsteht keine reflektierte Welle; die hinlaufende Welle wird am Leitungsabschluß vollkommen absorbiert. Man spricht in diesem voll von *Leitungsanpassung*.

Aus den Gln. (7/49) lassen sich schließlich noch Ausdrücke für die Eingangsgrößen $\boldsymbol{U}_1$ und $\boldsymbol{I}_1$ als Funktion der Leitungslänge und der entsprechenden Werte am Leitungsabschluß angeben; diese lauten:

$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2 \cosh \gamma l + \boldsymbol{I}_2\boldsymbol{Z}_0 \sinh \gamma l; \quad (7/53\,\mathrm{a})$$

$$\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{I}_2 \cosh \gamma l + \boldsymbol{U}_2/\boldsymbol{Z}_0 \sinh \gamma l, \quad (7/53\,\mathrm{b})$$

wobei l die Länge der Leitung ist. Die Gln. (7/53) beschreiben eine Leitung als Vierpol, dessen Determinante gleich 1 ist.

7.72 Stehende Wellen

Ist eine Leitung durch einen beliebigen Blindwiderstand abgeschlossen, so entsteht durch Überlagerung der hinlaufenden und der reflektierten Wellen eine *stehende Welle*. Für den Fall, daß R' gegen $\omega L'$ und G' gegen $\omega C'$ vernachlässigt werden kann, wird nach Gl. (7/43) das Übertragungsmaß $\gamma = j\omega\sqrt{L'C'}$, d. h.,

$$\beta = \sqrt{L'C'} \cdot \omega \quad (7/54)$$

und der Wellenwiderstand

$$\boldsymbol{Z}_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}. \quad (7/55)$$

Bei hohen Frequenzen nähert sich der Wellenwiderstand einem konstanten reellen Wert, der bei offenen Leitungen zwischen 500 und 800 Ω, bei konzentrischen Leitungen zwischen 60 und 200 Ω liegt.

Ist die verlustlose Leitung durch einen Blindwiderstand abgeschlossen, der eine ohmsche Komponente besitzt, so wird $\Gamma < 1$, und es bildet sich eine *stehende Welle* längs der Leitung mit Minima und Maxima der örtlichen Spannungen und Ströme aus. Das Verhältnis von maximaler zu minimaler Spannungsamplitude

$$r = U_{\max}/U_{\min} \tag{7/56}$$

läßt sich zur Messung des Reflexionskoeffizienten heranziehen. Der Phasenwinkel von Γ wird aus der Entfernung des ersten Minimums vom Leiterende in bezug auf die Wellenlänge gefunden. Für die verlustlose Leitung ist nach Gl. (7/54) $\alpha = 0$, $\gamma = \mathrm{j}\beta$, und man findet aus der Beziehung (7/49b)

$$U = \frac{1}{2} U_h \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \beta x)} [1 + \Gamma \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi - 2\beta x)}]. \tag{7/57}$$

Da bei veränderlichem x die Phase $\exp[\mathrm{j}(\varphi - 2\beta x)]$ zwischen -1 und $+1$ schwankt, ergibt sich für die Größe r

$$r = U_{\max}/U_{\min} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}. \tag{7/58a}$$

und daraus für den Reflexionskoeffizienten

$$\Gamma = \frac{r - 1}{r + 1}. \tag{7/58b}$$

Aus Gl. (7/57) geht hervor, daß zur Bestimmung des Phasenwinkels von Γ das 1. Spannungsmaximum zu beobachten ist, das sich aus

$$\varphi - 2\beta x_m = \pi$$

berechnet und im Abstand x_m vom Leiterende auftritt. Da nach Gl. (7/50) $\beta = \omega/v = 2\pi/\lambda$, ergibt sich für φ der allgemeine Ausdruck

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{x_m}{\lambda/2}\right), \tag{7/59}$$

wobei der gegenseitige Abstand der Spannungsminima

$$\Delta x_m = x_{m2} - x_{m1} = \pi/\beta = \lambda/2. \tag{7/60}$$

Damit läßt sich Gl. (7/59) auch durch die Beziehung

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{x_m}{\Delta x_m}\right) \tag{7/59a}$$

ausdrücken, die als Meßvorschrift für φ gelten kann.

7.73 *Spannungsmessung bei stehenden Wellen*

Zur experimentellen Aufnahme des Spannungsverlaufs an Leitungen, der besonders im Zentimeterwellenbereich (s. § 8.1) große Bedeutung besitzt, werden Meßschlitten mit einem Diodenvoltmeter zwischen den Gleitkontakten

benutzt. Besitzt die Kristalldiode eine quadratische Kennlinie, so ist der gemessene Ausschlag dem zeitlichen Mittelwert von $|U|^2$ proportional. Dies entspricht der in der Diode verbrauchten Leistung

$$P_d = \text{const}\, \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U}^*$$

und mit Gl. (7/57) dem Ausdruck

$$P_d = \text{const}\,[1 + \Gamma^2 + 2\Gamma \cos(\varphi - 2\beta x)]. \tag{7/61}$$

Daraus folgt für das Verhältnis $U_{\max}/U_{\min}$

$$r = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = \sqrt{\frac{P_{s\max}}{P_{s\min}}}, \tag{7/62}$$

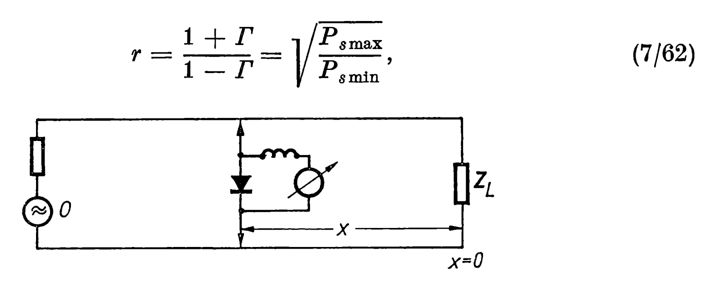


Abb. 7.47 Spannungsmessung an einer Leitung

d. h., der Ausschlag des Diodenvoltmeters liefert die Spannungsüberhöhung für die stehende Welle und damit den Reflexionsfaktor nach Größe und Phase.

In Abb. 7.47 ist schematisch die Leitung mit dem Diodenvoltmeter dargestellt. Dieses stellt für die Leitung einen Nebenschluß dar, der durch den Leitwert $\boldsymbol{Y}_d = G_d + \mathrm{j}B_d$ ausgedrückt werden kann und das Meßergebnis gegenüber dem einer verlustlosen Messung modifiziert. Aus den oben abgeleiteten Beziehungen lassen sich für die Meßmethode folgende Anleitungen geben:

1. Ist der HF-Generator O dem Wellenwiderstand der Leitung angepaßt und diese durch eine reine Blindlast abgeschlossen, so erscheinen infolge des endlichen Leitwerts $\boldsymbol{Y}_d$ der Meßvorrichtung die Spannungsmaxima, jedoch nicht die Minima verschoben;

2. ist $\boldsymbol{Z}_L$ ganz oder teilweise ohmisch, werden Maxima und Minima verschoben; die Verschiebung der Minima verschwindet für $B_d = 0$;

3. das Spannungsverhältnis r hängt von $\boldsymbol{Y}_d$ ab; für $B_d = 0$ ergeben sich jedoch einfache Relationen.

Aus diesen Gründen wendet man höchste Detektorempfindlichkeit an, um G_d möglichst klein zu halten, und benutzt zwischen Leitung und Detektorkreis eine sehr schwache Ankopplung, z. B. durch kleine Dipolantennen anstelle der Gleitkontakte.

7.74 *Impedanzmessung*

Aus den bisher gefundenen Beziehungen läßt sich die Eingangsimpedanz einer Leitung von der Länge x, die mit einer beliebigen Impedanz $\boldsymbol{Z}_L$ abgeschlossen ist, in allgemeiner Form angeben; es ergibt sich

$$\boldsymbol{Z}(x) = \frac{\boldsymbol{U}(x)}{\boldsymbol{I}(x)} = Z_0 \frac{\boldsymbol{Z}_L + \mathrm{j}\, Z_0 \tan \beta x}{Z_0 + \mathrm{j}\, \boldsymbol{Z}_L \tan \beta x}. \tag{7/63}$$

Die Größe $\boldsymbol{Z}(x)$ ist im allgemeinen komplex und eine periodische Funktion der Leitungslänge. Im Spezialfall $\boldsymbol{Z}_L = Z_0$ wird auch $\boldsymbol{Z}(x) = Z_0$ und von x unabhängig. Man kann nun den Reflexionskoeffizienten $\boldsymbol{\Gamma}(x)$ nach Gl. (7/51) für jeden Punkt x der Leitung angeben und erhält

$$\boldsymbol{\Gamma}(x) = \frac{U_r}{U_h}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\, \mathrm{e}^{-2(\alpha+\mathrm{j}\beta)x} = \Gamma_0\, \mathrm{e}^{-2\alpha x}\, e^{\mathrm{j}(\varphi-2\beta x)}. \tag{7/64}$$

Die Größe $\boldsymbol{\Gamma}(x)$ stellt einen Vektor in der komplexen Ebene dar, dessen Größe und Phasenwinkel Funktionen von x sind. Im Fall der verlustlosen Leitung ($\alpha = 0$) ist $|\boldsymbol{\Gamma}(x)|$ konstant und nur der Phasenwinkel von x abhängig. Es gilt

$$\boldsymbol{\Gamma}(x) = \Gamma_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi-2\beta x)} = \boldsymbol{\Gamma}_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta x} = \Gamma_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Theta}, \tag{7/65}$$

wenn $\Theta = \varphi - 2\beta x$ und Γ_0 den Modul des Reflexionskoeffizienten für den Leitungsabschluß bedeutet.

Die Eingangsimpedanz der Leitung von der Länge x ergibt sich aus den Gln. (7/49) und (7/65):

$$\boldsymbol{Z}(x) = \frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{Z}_0 \frac{1 + \boldsymbol{\Gamma}(x)}{1 - \boldsymbol{\Gamma}(x)}. \tag{7/66}$$

Dividiert man Gl. (7/66) durch $\boldsymbol{Z}_0$, so erhält man die gesuchte Impedanz $\boldsymbol{Z}$ als *reduzierte Impedanz*, d. h.,

$$\boldsymbol{Z}'' = \frac{\boldsymbol{Z}}{\boldsymbol{Z}_0} = \frac{R}{\boldsymbol{Z}_0} + \mathrm{j}\, \frac{X}{\boldsymbol{Z}_0} = R'' + \mathrm{j}X''. \tag{7/67}$$

Die Größe $\boldsymbol{Z}''$ kann durch einen Punkt in der komplexen R'', $\mathrm{j}X''$-Ebene dargestellt werden. Die Transformationsformel (7/66) liefert einen eindeutigen Zusammenhang zwischen den Punkten der Γ, Θ- und der R'', $\mathrm{j}X''$-Ebene.

Zur Messung der Impedanz werden Instrumente kommerziell hergestellt ($Z - g$-Diagraphen), die in einem großen Frequenzbereich Impedanzen, Übertragungskennwerte und Phasendifferenzen zu messen gestatten.

7.75 *Messungen an langen Leitungen* [7.17]

In langen Leitungen ist eine große Anzahl von Wellenlängen enthalten, so daß Eingangs- und Ausgangsspannung sich praktisch nicht voneinander unterscheiden.

Das Phasenmaß β ergibt sich aus der Messung der Ein- und Ausgangsspannung bei Abschluß der Leitung durch den Wellenwiderstand $\boldsymbol{Z}_0$ zu

$$\beta x = \ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right). \tag{7/68}$$

Eine andere Meßmethode besteht darin, die maximalen und minimalen Spannungen $U_{\max}$ und $U_{\min}$ mit der bereits beschriebenen Anordnung zu messen. Man erhält dabei durch Anwendung der Gln. (7/53)

$$\tanh \beta x = \frac{U_{\max}}{U_{\min}}. \tag{7/69}$$

Die Anwendung dieser Beziehung setzt voraus, daß der Wellenwiderstand der Leitung mit dem der Meßleitung genau übereinstimmt.

7.76 Impedanzdiagramme für HF-Leitungen

Die Lösung von Übertragungsproblemen in verlustarmen HF-Leitungen ist meist zeitraubend; sie wird durch die Benutzung von *Impedanzdiagrammen* wesentlich erleichtert, bei denen Leitungsverluste vernachlässigt sind.

Aus Gl. (7/63) läßt sich die auf den Wellenwiderstand $\boldsymbol{Z}_0$ bezogene Eingangsimpedanz einer Leitung durch die Beziehung

$$\frac{\boldsymbol{Z}(x)}{Z_0} = \frac{\dfrac{Z_L}{Z_0} + \mathrm{j} \tan \beta x}{1 + \mathrm{j}\dfrac{Z_L}{Z_0} \tan \beta x} \tag{7/63a}$$

und analog die normierte Eingangsadmittanz durch die Formel

$$\frac{\boldsymbol{Y}(x)}{Y_0} = \frac{\dfrac{Y_L}{Y_0} + \mathrm{j} \tan \beta x}{1 + \mathrm{j}\dfrac{Y_L}{Y_0} \tan \beta x} \tag{7/70}$$

ausdrücken. Wegen der Ähnlichkeit der beiden Gleichungen kann dasselbe Diagramm für Impedanz- und Admittanzberechnungen benutzt werden.

Das in Abb. 7.48 dargestellte *Impedanzdiagramm in Rechteckkoordinaten* enthält auf der Abszisse die auf den Wellenwiderstand Z_0 bezogenen Realteile R/Z_0, auf der Ordinate die entsprechenden Imaginärteile X/Z_0 des Lastwiderstandes $\boldsymbol{Z}_L = R + \mathrm{j}X$. Der Punkt (1,0) stellt die Impedanz der HF-Leitung dar. Aus der Abbildung geht hervor, daß die Linien mit konstanten αx und βx zwei Familien von Kreisen bilden. Die erste besitzt ihre Mittelpunkte auf der R/Z_0-Achse und umgibt den Punkt (1,0); die zweite mit konstantem βx hat ihre Mittelpunkte auf der X/Z_0-Achse und enthält jeweils den Punkt (1,0). Es läßt sich leicht nachweisen, daß die Radien r_α bzw. r_β dieser Kreise die Bedingungen $\alpha x = \mathrm{const}$ bzw. $\beta x = \mathrm{const}$ erfüllen.

Sucht man z. B. die Eingangsimpedanz für den Lastwiderstand $\boldsymbol{Z}_L/Z_0 = 1{,}3 - \mathrm{j} \cdot 0{,}75$, so findet man aus dem Diagramm, daß diese auf dem Kreis mit $\alpha x = 2{,}0$ liegt. Der Wert von $\boldsymbol{Z}(x)/Z_0$ hängt von der Leitungslänge zwischen der Last und der Stelle ab, an der die Eingangsimpedanz gemessen wird. Die beiden Schnittpunkte des Kreises $\alpha x = 2$ mit der R/Z_0-Achse stellen die Minimal- und Maximalwerte der Impedanz dar, wie sie am Leitungseingang gemessen werden können. Der Maximalwert entspricht dem Verhältnis r nach Gl. (7/62) für die Maximal- und Minimalspannung in einer stehenden Welle mit dem Abschluß $\boldsymbol{Z}_L$.

Mit Hilfe der Kreise $\beta x = \text{const}$ lassen sich die Phasenbeziehungen für verschiedene Leitungslängen unmittelbar aus dem Diagramm entnehmen. Wird z. B. nach der Eingangsimpedanz gefragt, die im Abstand $\lambda/12$ vom

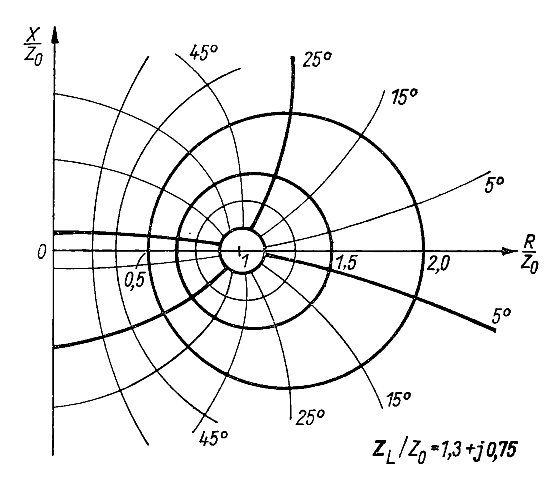


Abb. 7.48 Impedanzdiagramm in Rechteckkoordinaten

ursprünglichen Ort von $\boldsymbol{Z}_L$ auftritt, so hat man lediglich den Kreis $\alpha x = 2$ im Uhrzeigersinn (wenn man die HF-Leitung in Richtung des Generators verfolgt) zu umlaufen und den Phasenunterschied von 30° abzulesen. Man erhält in diesem Fall den Lastwiderstand $\boldsymbol{Z}_L/Z_0 = 1{,}95 - \mathrm{j} \cdot 0{,}25$, wie aus Abb. 7.48 zu entnehmen ist. Weiterhin ist daraus ersichtlich, daß für Phasendifferenzen von 180° oder $\lambda/2$ die ursprüngliche Impedanz erhalten wird.

Mit Hilfe des Diagramms kann auch eine unbekannte Lastimpedanz ermittelt werden, wenn das Spannungsverhältnis r der stehenden Welle und die Lage der Minima in der HF-Leitung bekannt sind.

Das heute meistbenutzte *Smith-Diagramm* stellt eine konforme Abbildung der Impedanzebene nach Abb. 7.48 in ein System zweier orthogonaler Familien von Kreisen dar. Wie aus Abb. 7.49 zu ersehen ist, werden die Geraden $X/Z_0 = \text{const}$ in ein Kreisbüschel transformiert, das den Punkt 0 gemeinsam hat. Durch den gleichen Punkt verlaufen auch die Kurven $R/Z_0 = \text{const}$, die ebenfalls in Kreise abgebildet werden, wobei für $X/Z_0 = 0$ der ent-

sprechende Kreis in die Gerade OP ausartet. Jeder Punkt, dem im ursprünglichen Diagramm ein bestimmter Impedanzwert entspricht, wird im Smith-Diagramm durch einen entsprechenden Punkt dargestellt. Der Punkt (1,0) für die Impedanz der verlustlosen Leitung liegt nunmehr im Mittelpunkt des Diagramms. Die exzentrischen Kreise in Abb. 7.48 um den Punkt (1,0), die konstanten Lastimpedanzen entsprechen, werden durch konzentrische Kreise

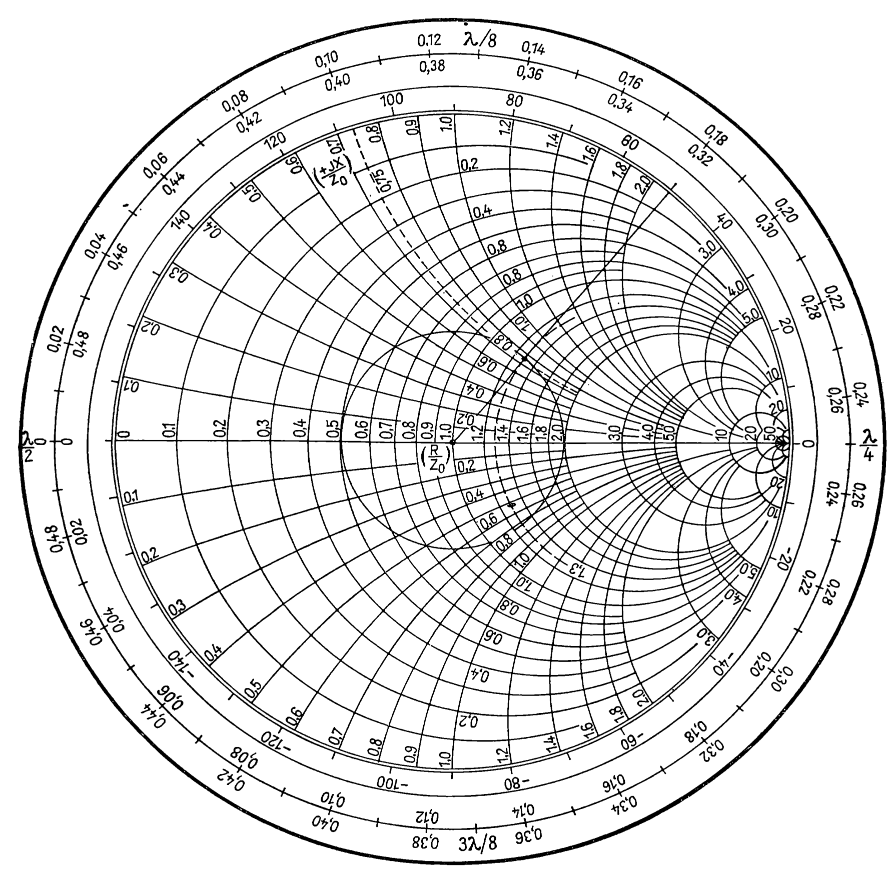


Abb. 7.49 Smith-Diagramm

um den Punkt (1,0) in Abb. 7.49 abgebildet, d. h., wenn für das oben gewählte Beispiel $Z_L/Z_0 = 1{,}3 + \mathrm{j} \cdot 0{,}75$ der Kreis $\alpha x = 2{,}0$ gefunden ist, liegen alle Werte für die gleiche Eingangsimpedanz auf diesem. Das Spannungsverhältnis r der stehenden Welle läßt sich aus den Schnittpunkten dieses Impedanzkreises mit der Geraden $X/Z_0 = 0$ ablesen.

Das zweite Kreisbüschel in Abb. 7.48 durch den Punkt (1,0), das den Phasenwinkel βx und damit den Ort auf der Übertragungsleitung angibt, wird im

Smith-Diagramm durch die Gerade $\beta x =$ const abgebildet. Der gesuchte Phasenwinkel kann an der in $\pm$ 180° geteilten Azimutskala unmittelbar abgelesen werden. Die entsprechende Wellenlängenskala mit ebenfalls äquidistanter Teilung umfaßt den Wert $\lambda/2$ für einen vollen Umlauf. In ähnlicher, jedoch bequemerer Weise wie beim Beispiel in Abb. 7.48 läßt sich für eine gegebene Lastimpedanz Z_L/Z_0 für beliebige Orte in der Leitung die Eingangsimpedanz aus dem Diagramm entnehmen. Ebenso kann eine unbekannte Lastimpedanz aus dem Wert r und der Lage des Spannungsminimums bestimmt werden.

Die wesentlichen Vorteile des Smith-Diagramms gegenüber dem Impedanzdiagramm mit rechtwinkeligen Koordinaten sind folgende:

a) Während das Impedanzdiagramm nur lineare Teilungen für R/Z_0 und X/Z_0 besitzt, liegen im Smith-Diagramm alle Impedanzen innerhalb des Kreises $r = \infty$.

b) Wird die Impedanz durch einen Parameter geändert, so behält die daraus resultierende Ortskurve im Smith-Diagramm ihre Größe unabhängig vom Bezugspunkt auf der Leitung. Im Impedanzdiagramm hängt die entsprechende Größe von der Lage im Diagramm ab.

c) Im Smith-Diagramm läßt sich die (bisher vernachlässigte) Leitungsdämpfung durch eine Verkleinerung im Radius berücksichtigen, was im Impedanzdiagramm wesentlich schwieriger durchzuführen ist.

§ 8 HÖCHSTFREQUENZPHYSIK

Die im vorigen Abschnitt behandelten Methoden der Erzeugung, des Nachweises, der Fortleitung und Anwendung von hochfrequenten Spannungen und Strömen sind nur bis zu einer bestimmten oberen Frequenzgrenze brauchbar. Diese Grenze ist einmal durch die Erzeugungsverfahren gegeben, die bei Elektronenröhren auf der Wirkung von quasistationären Feldern und Strömen beruhen; diese versagen, wenn die Laufzeit der Elektronen zwischen den Elektroden mit der reziproken erzeugten Frequenz vergleichbar wird. Der zweite Grund ist darin zu suchen, daß bei der Ausbreitung von elektrischen Schwingungen mit sehr hohen Frequenzen der Wellencharakter ausgeprägt hervortritt und dieser wie in der Wellenoptik zu berücksichtigen ist. Die noch vor einem Jahrzehnt erkennbare natürliche Grenze zwischen Langwellenoptik und Millimeterwellen-Hochfrequenzphysik ist heute durch die Entwicklung der Molekularverstärker und -oszillatoren weitgehend verwischt.

In diesem Abschnitt sollen in erster Linie die Methoden zur Erzeugung und zum Nachweis höchster Frequenzen, ihre Ausbreitung in Hohlrohrleitungen und die Anwendung für Meßaufgaben behandelt werden. Dieses Gebiet hat in den letzten Jahren einen ungeheuren Aufschwung erhalten, der sich in zahlreichen zusammenfassenden Darstellungen niedergeschlagen hat [*8.22, 8.26, 8.51, 8.60, 8.67, 8.98, 8.99, 8.104, 8.105, 8.119, 8.142, 8.145, 8.165, 8.170*].

8.1 **Hohlrohrleitungen** [*8.20, 8.65, 8.93, 8.157*]

Bei Verwendung von koaxialen Kabeln für die Fortleitung hochfrequenter Schwingungen zeigt sich, daß ihr Widerstand dem Leiterdurchmesser umgekehrt proportional und kleiner als der einer Parallelleitung ist. Der Widerstandsanteil des metallischen Außenleiters ist dabei viel geringer als der des Zentralleiters. Es läßt sich zeigen, daß auch in einem *hohlen* Leiter elektrische Wellen von sehr hoher Frequenz mit geringer Dämpfung fortgeleitet werden können.

8.11 Ausbreitungsgleichungen im Hohlrohr

Zur Ableitung der Ausbreitungsgleichungen in einem Hohlrohr geht man von den Maxwell-Beziehungen für ein nichtleitendes, homogenes Medium aus, das frei von Raumladungen ist; sie lauten:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0; \tag{8/1}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0. \tag{8/2}$$

Man betrachtet nun ein Metallrohr mit konstantem, jedoch willkürlichem Querschnitt und legt die X-Achse in Richtung der Rohrachse. Es sind Lösungen der Gln. (8/1) und (8/2) für $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ zu finden, bei denen an der inneren

Oberfläche des Rohres die Tangentialfeldstärke von $\boldsymbol{E}$ wegen $\sigma \to \infty$ verschwindet.

Mit dem Ansatz

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}(y, z) \cos(\omega t - \beta x), \tag{8/3}$$

worin $\boldsymbol{F}(y, z)$ eine willkürliche Funktion von y, z, jedoch nicht von x oder der Zeit t ist, findet man

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2} = -\beta^2 \boldsymbol{E} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \boldsymbol{E}. \tag{8/4}$$

Dabei ist $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz und $\beta = 2\pi/\lambda_r$ die Wellenzahl, wenn λ_r die Wellenlänge in der X-Richtung ist, mit der sich die Störung im Rohr ausbreitet. Durch Einsetzen von Gl. (8/4) in (8/1) ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial z^2} = -k^2 \boldsymbol{E}, \tag{8/5}$$

worin $k^2 = \omega^2/c^2 - \beta^2$ und $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$.

Die Komponenten des magnetischen Feldes lassen sich aus der elektrischen Feldstärke durch die Maxwell-Beziehung

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{8/6}$$

berechnen. Die Grenzbedingung, daß an der Leiteroberfläche die Tangentialkomponente von $\boldsymbol{E}$ verschwinden muß, wird berücksichtigt durch die Relationen

$$E_x = 0 \tag{8/7}$$

und

$$E_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + E_z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{8/8}$$

wenn $\mathrm{d}s$ ein Wegelement in der YZ-Ebene an der Leiterinnenfläche bedeutet.

8.12 Hohlleiter von rechteckigem Querschnitt

Als einfachste Lösung ergibt sich die für einen rechteckigen Hohlleiter mit den Kantenlängen a und b in Y- und Z-Richtung. Zur Lösung von Gl. (8/5) für die Komponente E_x gebraucht man den Lösungsansatz

$$E_x = A \sin \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{n\pi z}{b} \cos(\omega t - \beta x), \tag{8/9}$$

wobei m und n ganzzahlig sein müssen, um E_x bei $y = a$, $z = b$ verschwinden zu lassen. Durch Einsetzen von Gl. (8/9) in Gl. (8/5) erhält man die zusätzliche Bedingung

$$k^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right). \tag{8/10}$$

Für $m = n = 0$ wird $E_x = 0$ im ganzen Rohr; für $m = n = 1$ ergibt sich die $TM_{1,1}$-Welle (transversal magnetisch, auch als E_{11}-Welle bezeichnet), deren Feldbild in Abb. 8.1 dargestellt ist. Man erkennt, daß an der Leiteroberfläche die elektrische Tangentialkomponente verschwindet und das Magnetfeld zirkular die Rohrachse umfaßt. Die Seitenansicht entspricht einem augenblicklichen Feldbild, das sich mit der Phasengeschwindigkeit $v_{1,1}$ nach rechts bewegt.

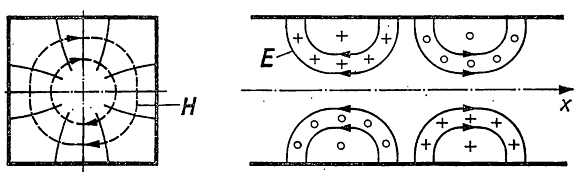


Abb. 8.1 $TM_{1,1}$- oder E_{11}-Welle im quadratischen Rohr

Setzt man den Ausdruck (8/10) in die Beziehung $k^2 = \omega^2/c^2 - \beta^2$ ein, so findet man für $m = n = 1$

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2} - \frac{\pi^2}{b^2} \tag{8/11}$$

und für den niedrigsten möglichen Wert mit $\beta = 0$

$$\omega^2 = c^2 \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right). \tag{8/12}$$

Für diese spezielle Frequenz wird die Phasenkonstante $\beta = 0$, d. h. die Phasengeschwindigkeit $v_{1,1} = \infty$. Die allgemeine Beziehung für β für beliebige Wert von m und n ergibt sich zu

$$\beta_{mn} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\pi^2 c^2}{\omega^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}. \tag{8/13}$$

Die Lösungen für E_y und E_z aus Gl. (8/5) sind vom selben Typ, müssen aber den Grenzbedingungen angepaßt werden, d. h. $E_y = 0$ für $z = 0$, $z = b$; $E_z = 0$ für $y = 0$, $y = a$. Ferner muß die Divergenzbeziehung (8/1) für die drei Komponenten erfüllt sein. Daraus ergeben sich für das elektrische Feld die Beziehungen:

$$E_x = A \sin \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{n\pi z}{b} \cos (\omega t - \beta x); \tag{8/14a}$$

$$E_y = A \frac{\beta}{k^2} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{n\pi z}{b} \sin (\omega t - \beta x); \tag{8/14b}$$

$$E_z = A \frac{\beta}{k^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi y}{a} \cos \frac{n\pi z}{b} \sin (\omega t - \beta x). \tag{8/14c}$$

Aus den Komponenten von $\boldsymbol{E}$ lassen sich durch Anwendung der Maxwell-Gleichungen (8/6) die Komponenten von $\boldsymbol{H}$ berechnen; man erhält hierfür die

Beziehungen

$$H_x = 0; \tag{8/15a}$$

$$H_y = -A\,\frac{\varepsilon\omega}{k^2}\,\frac{n\pi}{b}\,\sin\frac{m\pi y}{a}\,\cos\frac{n\pi z}{b}\,\sin(\omega t - \beta x); \tag{8/15b}$$

$$H_z = A\,\frac{\varepsilon\omega}{k^2}\,\frac{m\pi}{a}\,\cos\frac{m\pi y}{a}\,\sin\frac{n\pi z}{b}\,\sin(\omega t - \beta x). \tag{8/15c}$$

Schreibt man die Gln. (8/15) in der Form

$$H_x = 0; \tag{8/16a}$$

$$H_y = -\varepsilon\,\frac{\omega}{\beta}\,E_z; \tag{8/16b}$$

$$H_z = \varepsilon\,\frac{\omega}{\beta}\,E_y, \tag{8/16c}$$

so sieht man, daß der wesentliche Unterschied zwischen den Feldern darin besteht, daß $\boldsymbol{E}$ eine longitudinale Komponente E_x, d. h. eine Feldstärke in Ausbreitungsrichtung, besitzt.

Die *Phasengeschwindigkeit* $v_{m,n}$ einer luftgefüllten Hohlleitung beträgt für $TM_{m,n}$-(E_{mn})-Wellen

$$v_{m,n} = \frac{\omega}{\beta_{m,n}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_{m,n}/\omega)^2}}, \tag{8/17}$$

wenn man die Phasenkonstante aus Gl. (8/13) benutzt und eine *Grenzfrequenz* $\omega_{m,n}$ definiert, die sich aus der Beziehung

$$\omega_{m,n} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \tag{8/18}$$

berechnen läßt. Unterhalb von $\omega_{m,n}$ wird die Phasenkonstante β entsprechend Gl. (8/13) imaginär, d. h., es findet keine Wellenausbreitung im Rohr statt. Die *Gruppengeschwindigkeit* $V_{m,n} = \delta\omega/\delta\beta_{m,n}$ ergibt sich, wie leicht zu berechnen ist, als Lichtgeschwindigkeit c.

Die *Wellenlänge* im Rohr $\lambda_r = 2\pi\beta$ ist, wie aus Gl. (8/13) ersichtlich, immer größer als die Wellenlänge im freien Raum.

8.13 Transversale elektrische Anregung im Rechteckrohr

Für die $TM(E)$-Anregung eines Rechteckrohrs erhält man eine Wellenausbreitung dann, wenn die eingespeiste Frequenz höher als die Grenzfrequenz und eine spezielle Feldverteilung vorhanden ist. Es ist jedoch noch eine völlig andere Feldverteilung möglich, bei der in der X-Richtung zwar eine Komponente von $\boldsymbol{H}$, aber keine von $\boldsymbol{E}$ auftritt. Um diesen Lösungstyp der Differentialgleichung (8/5) zu finden, setzt man im ganzen Rohrvolumen

$$E_x = 0 \tag{8/19}$$

und schreibt für Gl. (8/5) folgende Beziehungen:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -k^2 E_y; \tag{8/20a}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = -k^2 E_z. \tag{8/20b}$$

Wegen Gl. (8/19) entfällt die entsprechende Gleichung für E_x. Da die Tangentialkomponente von E an der Rohroberfläche wieder Null sein muß, gilt auch in diesem Fall Gl. (8/8).

Schließlich findet man in ähnlicher Weise wie bei der *TM*-Welle für die elektrischen Komponenten die Beziehungen:

$$E_x = 0; \tag{8/21a}$$

$$E_y = -B\frac{\omega\mu}{k^2}\frac{n\pi}{b}\cos\frac{m\pi y}{a}\sin\frac{n\pi z}{b}\sin(\omega t - \beta x); \tag{8/21b}$$

$$E_z = B\frac{\omega\mu}{k^2}\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi y}{a}\cos\frac{n\pi z}{b}\sin(\omega t - \beta x). \tag{8/21c}$$

Analog werden die Ausdrücke für die H-Komponenten aus den Gln. (8/21) abgeleitet, wobei sich ergibt:

$$H_x = -B\cos\frac{m\pi z}{a}\cos\frac{n\pi z}{b}\cos(\omega t - \beta x); \tag{8/22a}$$

$$H_y = B\frac{\beta}{k^2}\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi y}{a}\cos\frac{n\pi z}{b}\sin(\omega t - \beta x); \tag{8/22b}$$

$$H_z = B\frac{\beta}{k^2}\frac{n\pi}{b}\cos\frac{m\pi y}{a}\sin\frac{n\pi z}{b}\sin(\omega t - \beta x). \tag{8/22c}$$

Durch Vergleich der Gln. (8/21) und (8/22) findet man die Ausdrücke:

$$E_x = 0; \tag{8/23a}$$

$$E_y = -\mu\frac{\omega}{\beta}H_z; \tag{8/23b}$$

$$E_z = \mu\frac{\omega}{\beta}H_y. \tag{8/23c}$$

Für $m = n = 0$ müssen alle Komponenten verschwinden; ist m *oder* $n \neq 0$, während die andere Ordnungszahl verschwindet, so gibt es realisierbare Lösungen. So hat die $TE_{0,1}(H_{10})$-Welle (d. h. $m = 0$; $n = 1$) die niedrigste Grenzfrequenz von allen möglichen Moden, für die sich nach den Gln. (8/21)

und (8/22) folgende Ausdrücke für die $\boldsymbol{H}$- und $\boldsymbol{E}$-Komponenten ergeben:

$$E_x = E_z = H_y = 0; \tag{8/24a}$$

$$E_y = B\,\frac{\mu\omega\pi}{k^2 b}\sin\frac{\pi z}{b}\sin(\omega t - \beta x); \tag{8/24b}$$

$$H_x = -B\cos\frac{\pi z}{b}\cos(\omega t - \beta x); \tag{8/24c}$$

$$H_z = B\,\frac{\beta\pi}{k^2 b}\sin\frac{\pi z}{b}\sin(\omega t - \beta x). \tag{8/24d}$$

In Abb. 8.2 sind $\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{H}$-Feld für die $TE_{0,1}(H_{10})$-Welle, in Abb. 8.3 die der $TE_{1,1}(H_{11})$-Welle in einem quadratischen Rohr dargestellt.

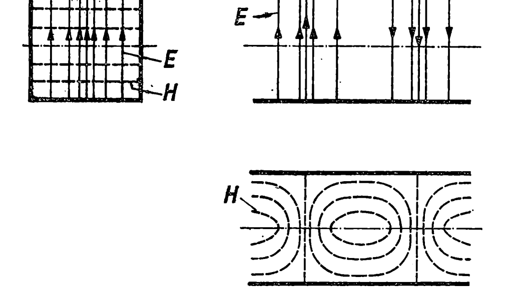


Abb. 8.2 $TE_{0,1}(H_{10})$-Welle im quadratischen Hohlleiter

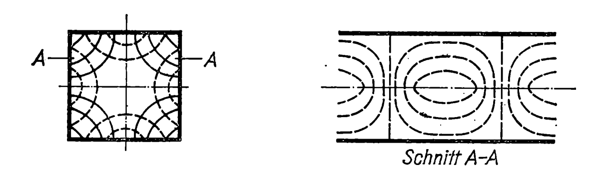


Abb. 8.3 $TE_{1,1}(H_{11})$-Welle im quadratischen Hohlleiter

8.14 Hohlleiter mit kreisförmigem Querschnitt

Zur Behandlung der kreisförmigen Hohlrohrleitung werden Zylinderkoordinaten benutzt; die X-Richtung wird in die Rohrachse verlegt, und ϱ sowie θ stellen Radiusvektor und Azimut eines Punktes innerhalb des Rohres dar.

Durch Umschreiben der Gl. (8/1) in Zylinderkoordinaten und den Ansatz (8/3) sowie durch Berücksichtigung von Gl. (8/4) reduzieren sich die Differen-

tialgleichungen für die E-Komponenten wie folgt:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial E_x}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial \theta^2} = -k^2 E_x; \tag{8/25a}$$

$$\frac{\partial^2 E_\varrho}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial E_\varrho}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 E_\varrho}{\partial \theta^2} = -k E_\varrho; \tag{8/25b}$$

$$\frac{\partial^2 E_\theta}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial E_\theta}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 E_\theta}{\partial \theta^2} = -k^2 E_\theta. \tag{8/25c}$$

Als Grenzbedingung ist $E_x = 0$ für $\varrho = a$ einzusetzen, wenn a den Innenradius des Hohlleiters bedeutet. Wählt man den Lösungsansatz

$$E_x = P_0 + P_1 \cos\theta + P_2 \cos 2\theta + \cdots, \tag{8/26}$$

wobei P_0, P_1, P_2, usf. nicht von θ, sondern nur von ϱ abhängen, und setzt den allgemeinen Term $P_n \cos n\theta$ in Gl. (8/25a) ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P_n}{\partial \varrho} + \left(k^2 - \frac{n^2}{\varrho^2}\right) P_n = 0. \tag{8/27}$$

Dies stellt die Besselsche Differentialgleichung dar, für deren Lösung in diesem Fall nur die Reihenentwicklung der Bessel-Funktion 1. Art und n-ter Ordnung in Betracht kommt, d. h.,

$$J_n(k\varrho) = \frac{(k\varrho)^2}{2^n n!}\left[1 - \frac{(k\varrho)^2}{2^2 1!(n+1)} + \frac{(k\varrho)^4}{2^4 2!(n+1)(n+2)} - \cdots\right]. \tag{8/28}$$

Durch Einsetzen von Gl. (8/28) in die Gln. (8/25) erhält man schließlich für die $TM(E)$-Welle des n-ten Typs, die sich in der X-Richtung ausbreitet,

$$E_x = A J_n(k\varrho)\cos(n\theta)\cos(\omega t - \beta x); \tag{8/29a}$$

$$E_\varrho = A\frac{\beta}{k} J_n'(k\varrho)\cos(n\theta)\sin(\omega t - \beta x); \tag{8/29b}$$

$$E_\theta = -A\frac{\beta}{k^2}\frac{n}{\varrho} J_n(k\varrho)\sin(n\theta)\sin(\omega t - \beta x); \tag{8/29c}$$

$$H_x = 0; \tag{8/30a}$$

$$H_\varrho = A\varepsilon\frac{n\omega}{k^2\varrho} J_n(k\varrho)\sin(n\theta)\sin(\omega t - \beta x); \tag{8/30b}$$

$$H_\theta = A\varepsilon\frac{\omega}{k} J_n'(k\varrho)\cos(n\theta)\sin(\omega t - \beta x), \tag{8/30c}$$

wobei J_n' die Ableitung von J_n nach dem Argument bedeutet.

Wie in den vorigen Beispielen hängen einige der Komponenten in einfacher

Weise zusammen; hier gelten die Relationen:

$$H_x = 0; \tag{8/31 a}$$

$$H_\varrho = -\varepsilon \frac{\omega}{\beta} E_\theta; \tag{8/31 b}$$

$$H_\vartheta = \varepsilon \frac{\omega}{\beta} E_\varrho. \tag{8/31 c}$$

Da für $\varrho = a$ die Komponenten $E_x = E_\theta = 0$ werden müssen, sind nur Werte von k zulässig, für welche $J_n(ka) = 0$. In *Tabelle 8.1* sind die Wurzeln der Bessel-Funktionen nullter bis zweiter Ordnung angegeben.

Tabelle 8.1

Wurzeln der Bessel-Funktionen $J_0(x)$, $J_1(x)$ und $J_2(x)$

$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$
2,405	3,832	5,135
5,520	7,016	8,417
8,654	10,173	11,620

Die einfachste Form einer $TM(E)$-Welle mit der niedrigsten Grenzfrequenz ist die $TM_{0,1}(E_{01})$-Welle mit $ka = 2{,}405$; ihre Komponenten berechnen sich aus den Gln. (8/29) und (8/30) zu

$$E_x = A J_0 \cos(\omega t - \beta x); \tag{8/32a}$$

$$E_\varrho = -A \frac{\beta}{u} J_1 \sin(\omega t - \beta x); \tag{8/32b}$$

$$E_\theta = H_x = H_\varrho = 0; \tag{8/32c}$$

$$H_\theta = -A \frac{\omega}{u} J_1 \sin(\omega t - \beta x), \tag{8/32d}$$

worin $u = 2{,}405/a$ ist und jedes J das Argument $u\varrho$ hat.

In Abb. 8.4a und b sind die Felder dieser $TM_{0,1}(E_{01})$-Welle und der $TM_{1,1}(E_{11})$-Welle dargestellt als Beispiele des allgemeinen Wellentyps $TM_{n,m}(E_{n,m})$, wo n die Ordnung der Bessel-Funktion im Ausdruck (8/32a) für die X-Komponente von E und m die Nummer der benutzten Wurzel bedeuten.

Zur Darstellung der *elektrischen Transversalwellen* ($TE(H)$-Welle) ist wie beim Rechteckleiter $E_x = 0$, aber $H_x \neq 0$ gesetzt, und man erhält nach

demselben Verfahren folgende Komponenten von $\boldsymbol{E}$ bzw. $\boldsymbol{H}$:

$$E_x = 0; \tag{8/33a}$$

$$E_\varrho = B \frac{\omega n}{k^2 \varrho} J_n(k\varrho) \sin n\theta \sin(\omega t - \beta x); \tag{8/33b}$$

$$E_\theta = B \frac{\omega}{k} J_n'(k\varrho) \cos n\theta \sin(\omega t - \beta x); \tag{8/33c}$$

$$H_x = B J_n(k\varrho) \cos n\theta \cos(\omega t - \beta x); \tag{8/34a}$$

$$H_\varrho = B \frac{\beta}{k} J_n'(k\varrho) \cos n\theta \sin(\omega t - \beta x); \tag{8/34b}$$

$$H_\theta = -B \frac{\beta n}{k^2 \varrho} J_n(k\varrho) \sin n\theta \sin(\omega t - \beta x). \tag{8/34c}$$

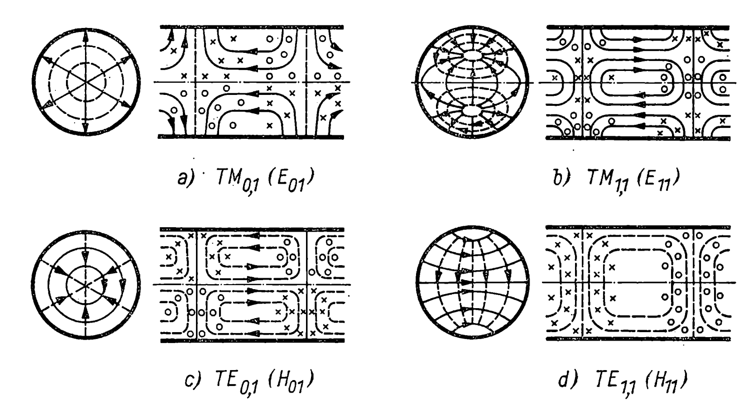


Abb. 8.4 TM- und TE-Wellen in kreisförmigen Hohlleitern

Diese Beziehungen zwischen den $\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{H}$-Komponenten entsprechen denen der Gln. (8/23), wenn die Indizes y und z durch ϱ bzw. θ ersetzt werden. Die möglichen Werte von k sind so zu wählen, daß $E_\theta = 0$ für $\varrho = a$ wird, d. h., es muß $J_n'(ka) = 0$ werden. Die erste Nullstelle von J_0' liegt nach *Tabelle 8.1* bei $ka = 3{,}832$, die von J_1' bei $ka = 1{,}841$. Für die $TE_{0,1}(H_{01})$-Welle ergeben sich damit die Komponenten

$$H_x = -B J_0 \cos(\omega t - \beta x); \tag{8/35a}$$

$$H_\varrho = B \frac{\beta}{u} J_1 \sin(\omega t - \beta x); \tag{8/35b}$$

$$H_\theta = E_x = E_\varrho = 0; \tag{8/35c}$$

$$E_\theta = \mu \frac{\omega}{\beta} H_\varrho, \tag{8/35d}$$

wenn $u = 3{,}832/a$ und jedes J das Argument $u\varrho$ hat. — In Abb. 8.4c, d sind die Felder für die $TE_{0,1}(E_{01})$- und $TE_{1,1}(E_{11})$-Wellen dargestellt, wobei die Ausbreitungsrichtung von links nach rechts ist.

Für einen *dielektrischen Wellenleiter*, der aus einem festen Dielektrikum besteht, gelten ähnliche Gleichungen wie für den Hohlleiter.

In *Tabelle 8.2* ist eine Zusammenstellung mit den wichtigsten Daten verschiedener Hohlleiter gegeben.

Tabelle 8.2 Eigenschaften von Hohlleitern

Leitertyp	Wellentyp		Grenzwellenlänge λ_c	Dämpfung in dB/m* $\eta = \lambda/\lambda_c = \omega_c/\omega$
Rechteckleiter $a \times b$, $b > a$	$TE_{0,1}$	H_{01}	$2b$	$7930 \sqrt{\frac{\varrho}{\lambda}} \frac{b + 2a\eta^2}{ab\sqrt{1-\eta^2}}$
	$TE_{1,1}$	H_{11}	$\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$	—
	$TM_{1,1}$	E_{11}	$\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$	—
Kreisrohr Radius a	$TE_{0,1}$	H_{01}	$1{,}640a$	$11450 \sqrt{\frac{\varrho}{\lambda}} \frac{\eta^2}{a\sqrt{1-\eta^2}}$
	$TE_{1,1}$	H_{11}	$3{,}412a$	$79\,30 \sqrt{\frac{\varrho}{\lambda}} \frac{0{,}418 + \eta^2}{a\sqrt{1-\eta^2}}$
	$TM_{1,1}$	E_{11}	$2{,}613a$	$11450 \sqrt{\frac{\varrho}{\lambda}} \frac{1}{a\sqrt{1-\eta^2}}$

Phasengeschwindigkeit $v = 3 \cdot 10^8/\sqrt{1-\eta^2}$ [m/s]
Gruppengeschwindigkeit $V = 9 \cdot 10^{16}/v$ [m/s]

* Dämpfung für Kupfer mit $\varrho = 1{,}724 \cdot 10^{-8}\,\Omega$ m berechnet.

8.15 Leistungsfluß

Der *Leistungsfluß* durch den Hohlleiter ist durch den Poynting-Vektor

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{8/36}$$

gegeben, der in X-Richtung die axiale Komponente

$$S_x = E_y H_z - E_z H_y \text{ in rechtwinkeligen Koordinaten bzw.} \tag{8/37a}$$

$$S_x = E_\theta H_\varrho - E_\varrho H_\theta \text{ in Zylinderkoordinaten} \tag{8/37b}$$

besitzt. Das Integral über den gesamten Rohrquerschnitt liefert die transportierte Leistung; diese beträgt für einen *rechteckigen* Hohlleiter bei $TE(H)$-

Anregung:

$$S_x = B^2 \mu \frac{\beta \omega n^2 \pi^2}{8 k^4 b^2} ab, \tag{8/38}$$

wenn B die maximale Induktion des axialen *Magnetfeldes* ist.

Für eine $TM(E)$-Welle ergibt sich für den Rechteckleiter analog:

$$S_x = A^2 \frac{\varepsilon \beta \omega a b}{8}, \tag{8/39}$$

wenn A die maximale *elektrische* Feldstärke in der Leiterachse ist.

8.16 Anregung eines bestimmten Wellentyps

Die Anregung eines bestimmten Wellentyps in einem Hohlleiter läßt sich mit Hilfe einer kleinen Antenne erreichen, deren Orientierung die Abstrahlung des gewünschten Wellentyps begünstigt. Eine mit der Rohrachse zusammenfallende Antenne wird demnach $TM(E)$-Wellen erregen, und eine kleine Leiterschleife senkrecht zu dieser ist mehr für $TE(H)$-Wellen geeignet. In Abb. 8.5 sind einige Beispiele für die Anregung von rechteckigen und kreisförmigen Hohlleitern angegeben.

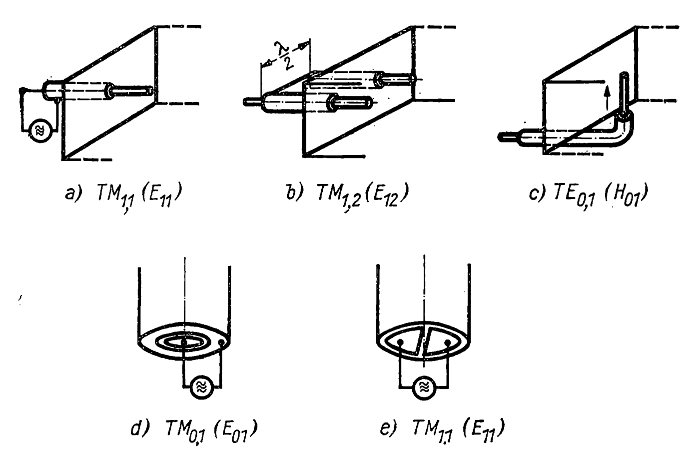


Abb. 8.5 Anregung verschiedener Wellentypen in Hohlleitern

Durch Einbau eines Dielektrikums mit schräger Begrenzungsfläche kann nach [*8.70*] in einem Rechteckhohlleiter der Wellentyp umgewandelt werden. Über die Umwandlung einer linear polarisierten Welle in eine zirkulare durch Einbau von $\lambda/4$-Platten in Analogie zur Lichtoptik siehe § 8.8.

8.17 Anwendung von Hohlrohrleitern

Die Fortleitung elektrischer Wellen in Hohlleitern ist durch drei Eigenschaften ausgezeichnet:

1. Geringere Dämpfung im Vergleich zu Koaxial- oder Doppelleiterkabeln,

2. Abstimmöglichkeit auf Resonanz durch einen verschiebbaren Metallkolben,
3. Möglichkeit der Abstrahlung elektromagnetischer Energie durch das offene Leiterende und Anpassung der Impedanz an das freie Medium (s. a. § 8.8).

Spielt die geringe Dämpfung von Hohlleiterwellen eine große Rolle, so wird man *Kupfer* als Rohrmaterial verwenden. Für kurze Meßleitungen wird wegen der leichteren Bearbeitbarkeit *Messing* vorgezogen, das man auf der Innenseite versilbern kann. Für Frequenzen von 3 GHz ($\lambda = 10$ cm) werden Röhren mit etwa 7,5 cm Außendurchmesser und 1,5 mm Wandstärke oder Rechteckleiter mit $3{,}5 \times 6$ cm^2 Querschnitt und 2 mm Wandstärke benutzt.

Zur Messung der elektrischen Feldverteilung im Innern eines durch einen Kolben abgeschlossenen Hohlleiters, dem Energie durch eine Irisblende zugestrahlt wird, bringt man eine nur wenige Millimeter lange „Antenne" ein, die über einem Siliziumgleichrichter an ein empfindliches Strommeßgerät gelegt ist. Durch einen schmalen Schlitz an der Zylinderwand kann dieses Feldstärkenmeßgerät axial verschoben und die Wellenlänge aus den Maxima und Minima des beobachteten Signals entnommen werden.

Über Absorber- und Reflexionsmessungen an Hohlleitern siehe [*8.44, 8.149, 8.150*].

8.2 Resonanzkreise

Gewöhnliche Resonanzkreise, die aus Induktivität und Kapazität bestehen, sind für sehr hohe Frequenzen nicht zu realisieren, da ihre Dimensionen zu klein und die Strahlungsverluste zu groß werden. Aus diesem Grunde werden Abschnitte von Hohlleitern benutzt, deren Länge ein bestimmtes Verhältnis zur Wellenlänge in diesen besitzen. Man nennt solche Resonanzkreise *Hohlraumresonatoren*; wegen ihrer geringen Abstrahlung sind sie bei Wellenlängen unterhalb von 1 m gewöhnlichen Schwingungskreisen weit überlegen.

8.21 Resonanzfrequenz

Um die *Resonanzfrequenz* eines Hohlraumresonators zu berechnen, müssen wie bei den Hohlleitern die Maxwell-Gleichungen für bestimmte Randbedingungen gelöst werden, wobei wegen $\sigma \to \infty$ für die Wände die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke verschwinden muß. Für einfache geometrische Abmessungen ist eine genaue Vorausberechnung der Resonanzfrequenzen möglich.

Bei einer geometrisch ähnlichen Verkleinerung aller Abmessungen kann das Ähnlichkeitsgesetz angewandt werden; dieses besagt, daß die Resonanzwellenlänge dem Maßstabfaktor proportional ist.

8.22 Gütefaktor [8.88, 8.114]

Der *Gütefaktor* eines Resonators läßt sich per Definition (vgl. § 3.44) aus dem Verhältnis

$$Q = 2\pi \frac{\text{gespeicherte Energie}}{\text{Verlustenergie pro Periode}} \tag{8/40}$$

ermitteln. Lassen sich dielektrische Verluste im Hohlraum ausschließen, so bleiben für den Nenner in Gl. (8/40) nur Joulesche Verluste infolge des Skineffekts übrig. Diese berechnen sich zu

$$W_v = \frac{\delta}{8} \int\limits_O B^2 \, |\mathrm{d}\sigma| \,, \tag{8/41}$$

wenn δ die Skintiefe, B das Magnetfeld an der Leiterwand und $\mathrm{d}\sigma$ ein Flächenelement bedeuten. Das Integral ist über die gesamte innere Oberfläche zu erstrecken. Andrerseits ist die gespeicherte Energie

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int B^2 \, \mathrm{d}\tau \,, \tag{8/42}$$

wenn $\mathrm{d}\tau$ ein Volumenelement ist und die Integration das gesamte Volumen umfaßt. Der Gütefaktor ergibt sich dann zu

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} \, \frac{2}{\lambda} \, \frac{\int B^2 \, \mathrm{d}\tau}{\int B^2 \, |\mathrm{d}\sigma|} \,. \tag{8/43}$$

Die Größe

$$Q \, \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2}{\lambda} \, \frac{\int B^2 \, \mathrm{d}\tau}{\int B^2 \, |\mathrm{d}\sigma|} \tag{8/43a}$$

wird für einen Resonator gegebener Form und konstanter elektrischer Leitfähigkeit frequenzunabhängig; man nennt sie auch *Formfaktor*. Da die Skintiefe proportional zu $\sqrt{\lambda}$, die Resonatorgröße umgekehrt proportional zur Frequenz ist, wird sich der Gütefaktor mit $1/\sqrt{f}$ verändern.

8.23 Rechteckiger Resonator

Der Rechteckresonator mit den Kantenlängen $2a$, $2b$ und $2z_0$ ist für die Wellenlängen

$$\lambda = \frac{4}{\sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{z_0}\right)^2}} \tag{8/44}$$

in Resonanz, wobei $l, m, n = 0, 1, 2, 3$ usw. die Zahl der halben Wellenlängen längs der Achsen Y, X, Z ist. Ist $a = b = z_0$, der Resonator also ein Würfel, so gibt es eine 12fache Entartung, d. h., 12 verschiedene Schwingungsmoden haben identische Resonanzfrequenz.

8.24 Zylindrischer Resonator [8.15, 8.190]

Für zylindrische Resonatoren mit dem Durchmesser $2a$ und der Höhe $2z_0$ kann man wie bei den Hohlleitern die möglichen Schwingungsformen in $TE\,(H)$- und $TM\,(E)$-Moden unterteilen.

$TE\,(H)$-Moden. Bei dieser Schwingungsform steht das elektrische Feld auf der Zylinderachse senkrecht, während das Magnetfeld eine axiale Komponente

besitzt. Die Resonanzwellenlängen ergeben sich aus der Beziehung:

$$\lambda = \frac{4}{\sqrt{\left(\frac{l}{z_0}\right)^2 + \left(\frac{2\,u'_{m,n}}{\pi a}\right)^2}}. \tag{8/45}$$

Der Parameter l gibt die Anzahl von $\lambda/2$ längs der Achse an, $u'_{m,n}$ ist die n-te Wurzel der Bessel-Funktion $J_m'(u')$ für die Anregung der $TE_{m,n}$ (H_{mn})-Schwingung.

$TM(E)$-Moden. Bei dieser Schwingungsform steht das Magnetfeld überall senkrecht zur Achse und besitzt das elektrische Feld eine axiale Komponente. Die Resonanzwellenlänge entspricht der nach Gl. (8/45) mit dem Unterschied, daß $u'_{m,n}$ durch $u_{m,n}$ ersetzt und die Bessel-Funktion $J_m(u)$ benutzt wird.

8.25 Kugelresonatoren

In einem kugelförmigen Resonator mit dem Radius a beträgt die größtmögliche Wellenlänge

$$\lambda = 2{,}28a,$$

wobei das elektrische Feld ähnlich dem der $TE_{1,1}$ (H_{11})-Welle in Abb. 8.4d ist.

Weitere Formen von Hohlraumresonatoren sind in Abb. 8.6 dargestellt. Es

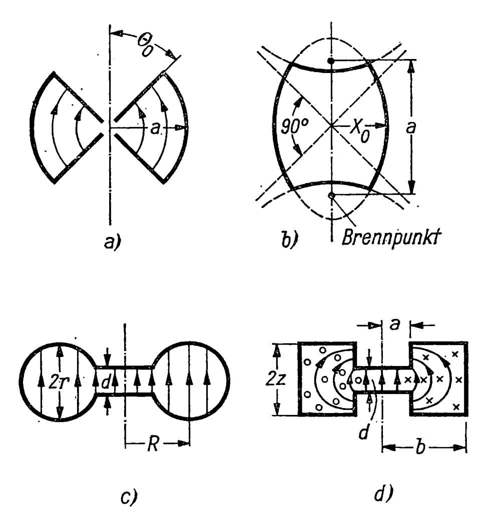


Abb. 8.6 Spezielle Formen von Hohlraumresonatoren

handelt sich um Resonatoren, die in der Symmetrieachse mit Bohrungen versehen sind, um Elektronen- oder Ionenstrahlen in dem hochfrequenten Wechselfeld beschleunigen zu können.

In *Tabelle 8.3* sind für verschiedene Resonatorformen die wichtigsten Eigenschaften zusammengestellt.

Tabelle 8.3 Eigenschaften von Hohlraumresonatoren

Form	max. Wellenlänge cm	Gütefaktor Q	Nebenschluß-widerstand Ω
Kugel	$2{,}28a$	$1{,}024a/\delta$	$81{,}6a/\delta$
Zylinder	$2{,}61a$	$1{,}414\,\frac{a}{\delta}\,\frac{1}{1+a/2z_0}$	$204\,\frac{z_0}{\delta}\,\frac{1}{1+a/2z_0}$
Quadratprisma	$2{,}83a$	$1{,}414\,\frac{a}{\delta}\,\frac{1}{1+a/2z_0}$	$182{,}1\,\frac{z_0}{\delta}\,\frac{1}{1+a/2z_0}$
Kugelresonator mit Eintritts-kegeln	$4a$	—	—
Ellipsoid-Hyperboloid	$1{,}3a$	$0{,}286\,\frac{a}{\delta}$	$99{,}32a$
Toroid-Resonator Abb. 8.6c	$2\pi\sqrt{\frac{\pi^2 r^2 R}{d}\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}\right)}$	—	—
Toroid-Resonator Abb. 8.6d	$2\pi\sqrt{\frac{z_0 a^2}{d}\ln\frac{b}{a}}$	$\frac{2{,}83\,\frac{z_0}{\lambda}\ln\frac{b}{a}}{\frac{z_0}{a}\left(1+\frac{a}{b}\right)+\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\cdot\frac{\lambda}{\delta}$	$2130\left(\frac{z_0}{\lambda}\right)^2\frac{\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2}{\frac{z_0}{a}\left(1+\frac{a}{b}\right)+\ln\frac{b}{a}}\cdot\frac{\lambda}{\delta}$

8.26 *Resonator mit dielektrischer Füllung* [*8.169*]

Die geometrischen Abmessungen eines für eine bestimmte Grundfrequenz konstruierten Resonators lassen sich im Verhältnis $1:\sqrt{\varepsilon_r}$ verkleinern, wenn dieser mit einem Dielektrikum der relativen Dielektrizitätskonstanten ε_r gefüllt wird. Wegen der dielektrischen Verluste, die $\sim\omega\tan\delta$ sind, wird der Gütefaktor Q gegenüber der Vakuumausführung verringert.

Durch Einführen dünner dielektrischer Stäbe aus verlustarmem Material kann in kleinen Grenzen eine Feinabstimmung auf eine vorgegebene Frequenz erzielt werden.

Interessante Möglichkeiten ergeben sich bei Verwendung von Materialien mit sehr hoher Dielektrizitätskonstante, an deren Oberfläche die *Normalkomponente* von $\boldsymbol{E}$ annähernd verschwinden muß. Hierdurch werden zusätzliche und neue Resonanzen gefunden, deren Frequenz, wie z. B. beim E_{000}-Typ, fast nicht mehr von der Höhe des Zylinderresonators abhängt.

8.27 Supraleitende Resonatoren

Wie aus Gl. (8/43) hervorgeht, ist der Gütefaktor Q eines Hohlraumresonators der Skintiefe umgekehrt proportional und diese mit der Wurzel aus dem spezifischen Widerstand anwachsend. Bringt man daher den Resonator auf sehr tiefe Temperaturen, die meist aus anderen Gründen (siehe § 8.4) angebracht sind, so ist bei sehr reinen Metallen ein Abfall des spezifischen Widerstandes um 3 bis 4 Größenordnungen und dementsprechend eine Zunahme von Q zu erwarten.

Besteht die innere Oberfläche des Resonators aus einem *supraleitenden* Material, z. B. Blei oder Zinn, so müßte nach dieser Vorstellung unterhalb des Sprungpunktes dieser Metalle der Gütefaktor Unendlich werden. Dies ist nicht der Fall, wohl aber eine außerordentliche Steigerung von Q unterhalb von T_c. GREBENKAMPER und HAGEN [*8.66*] stellten bei $f = 9{,}2$ GHz einen Gütefaktor $Q = 8{,}3 \cdot 10^6$ fest. Neuerdings sind solche von 10^8 und mehr gemessen worden.

Da der HF-Widerstand eines Typ-I-Supraleiters wegen der mit der Temperatur abnehmenden Konzentration der normalleitenden Elektronen sich auch weit unterhalb von T_c verringert, werden neuerdings größere Hohlraumresonatoren auf 1,8⋯2 K abgekühlt. Solche mit Pb- oder Nb-Schichten ausgekleideten Resonatoren, die z. B. für den großen Stanford-Linearbeschleuniger benutzt werden, erreichen bei 1,9° K eine Güte von einigen 10^9.

8.28 Ankopplung von Hohlraumresonatoren

Zur Ankopplung eines Resonators für Meßzwecke oder Übertragungseinrichtungen an einen Hohlleiter werden ähnlich wie bei der Anregung verschiedener Schwingungsmoden in Hohlleitern (siehe § 8.16) kleine Antennen mit einer elektrischen Kopplung oder Stromschleifen für eine magnetische Anregung benutzt.

Die Kopplungskonstante hängt von der Länge der Antenne bzw. von der Fläche der Stromschleife sowie von der elektrischen bzw. magnetischen Feldstärke am Ort der Anregung ab.

Eine viel benutzte Kopplungsart besteht darin, den Hohlleiter tangential an den Resonator heranzuführen und beide durch eine Öffnung zu verbinden. In diesem Fall hängt der Kopplungskoeffizient von der Normalkomponente der elektrischen Feldstärke an der Öffnung ab und ist der 3. Potenz des Lochdurchmessers proportional.

Bei einer grundsätzlich anderen Kopplungsmethode, die bei der Konstruktion von UHF-Elektronengeräten und bei Beschleunigeranlagen angewandt wird, läßt man einen dichtemodulierten Elektronen- oder Ionenstrahl den durchbohrten Resonator durchsetzen. Hierzu sind die in Abb. 8.6 dargestellten Typen *a*, *c* und *d* geeignet, bei denen das Maximum der elektrischen Feldstärke in der Achse des Resonators liegt.

8.3 Erzeugung von Höchstfrequenzen durch Röhren [*8.30, 8.43, 8.122, 8.125, 8.126, 8.137*]

Die Erzeugung sehr kurzer Wellen, die von den Entdeckungen H. HERTZ' (1897) ihren Ausgang nahmen, geschieht heute bis herab zu Wellenlängen im Millimeterbereich mit Hilfe von Elektronengeräten. Das Prinzip der Rück-

kopplung, das im klassischen Röhrengenerator ausschließlich zur Selbsterregung angewandt wird, muß dabei modifiziert und dem Aufbau der speziellen Oszillatorröhren angepaßt werden. In diesem Abschnitt werden die Grundlagen der Scheibentrioden und der auf Laufzeiterregung beruhenden Geräte behandelt. Die Prinzipien der Herstellung höchster Frequenzen durch Molekularoszillatoren, der *Maser*, werden in § 8.4 behandelt.

8.31 Gittergesteuerte Höchstfrequenztriode

Wie bereits in § 7.12 erwähnt, wird die Wirkung gewöhnlicher Elektronenröhren als Oszillatoren für sehr hohe Frequenzen durch Laufzeiteffekte, die Impedanzen von Elektroden und deren Zuleitungen sowie durch Strahlungsverluste beeinträchtigt. Die obere Frequenzgrenze läßt sich durch Verringerung der Elektrodenabstände und Anwendung axialer Zuleitungen bis auf etwa 4 GHz erweitern.

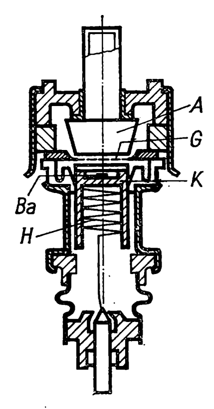


Abb. 8.7 Scheibentriode

Der grundsätzliche Aufbau einer *Scheibentriode* ist in Abb. 8.7 wiedergegeben. Die Katode K besteht aus einem Molybdänzylinder, der in einer Ausdrehung die Bariumoxidpille *Ba* enthält und in seiner Zentralbohrung die Heizwendel H aufnimmt. Oben ist die Katode durch eine aufgeschweißte Wolframplatte abgeschlossen, durch deren Poren das Bariumoxid diffundiert und auf der Oberfläche die Emissionsschicht bildet. Die Katodenoberfläche ist sehr glatt und erlaubt, kleine Gitterabstände anzuwenden. Darüber befindet sich in einem Abstand von etwa 10 µm das Gitter G und in einem weiteren Abstand von etwa 100 µm die Hohlanode A. Durch Anwendung von Keramikisolierringen und eng tolerierten Distanzringen, die durch verlötete Metallkappen zusammengehalten werden, ist das Einhalten der sehr kleinen Abstände möglich.

Röhren dieser Art sind für Oszillatoren und Verstärker benutzbar; ihr Verstärkungsfaktor ist nicht sehr groß, doch ist ihre Anodenverlustleistung bei mäßig hoher Anodenspannung im Dauerbetrieb von der Größenordnung 10 W.

Die Außenabmessungen dieser Röhren sind so klein, daß sie in Hohlleitungen eingesetzt werden können. Über Kennwerte siehe *Tabelle 8.4.*

8.32 Klystron [*8.58, 8.59, 8.112*]

Das *Klystron* gehört zu den Laufzeitröhren, bei denen durch magnetische oder elektrische Felder, die auf einen Elektronenstrahl einwirken, eine Modulation der Elektronendichte erzeugt wird. Mit Hilfe des dichtemodulierten Elektronenstrahls wird ein geeigneter Hohlraumresonator (siehe § 8.28) zu Schwingungen angeregt.

Die einfachste Form des Klystrons, das *Zweikammerklystron* (siehe Abb. 8.8) enthält zwei Toroidresonatoren R_1 und R_2, deren Achse durchbohrt und durch Gitter abgedeckt ist, sowie die Anode A und die Katode K. Eingangskreis R_1 und Ausgangskreis R_2 besitzen Kopplungsschleifen für Steuerspannungen und Ausgang. Die beiden Resonatoren müssen exakt auf gleiche Frequenz abgestimmt sein; sie befinden sich im Abstand l.

Der von der Katode emittierte stetige Elektronenstrom tritt in die Öffnung des 1. Resonators ein, der zunächst von außen in Resonanz erregt wird. Durch das axiale elektrische Wechselfeld werden die Elektronen beschleunigt oder verzögert, je nachdem, ob der Zeitpunkt ihres Eintritts einer positiven oder negativen Feldrichtung entspricht. Nach dem Austreten aus R_1 durchlaufen die Elektronen einen feldfreien Raum. Dabei können nachfolgende Elektronen, die bei Durchtritt in R_1 ein beschleunigendes Feld vorgefunden haben, frühere Elektronen einholen. Insgesamt tritt in einem bestimmten Abstand von R_1 eine „Phasenfokussierung" auf, d. h., die während einer ganzen Schwingungsperiode durch R_1 gelaufenen Elektronen treffen sich zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort und liefern eine Dichtemodulation. Wird in diesen „Fokus" ein zweiter Resonator R_2 gestellt, so influenzieren die dichtemodulierten Elektronen darin eine Wechselspannung, deren Frequenz mit der

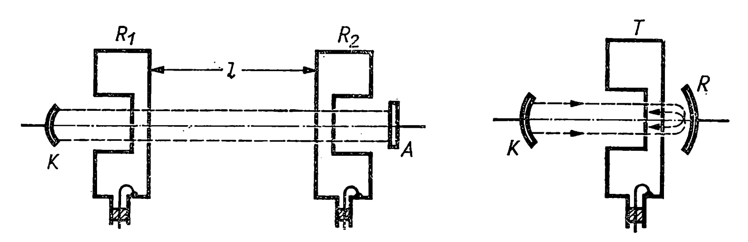


Abb. 8.8 Zweikammerklystron *Abb. 8.9 Reflexklystron*

von R_1 übereinstimmt. Auf diese Weise kann eine Spannungs- und Leistungsverstärkung zustande kommen. Durch Rückkopplung der in R_2 erzeugten Spannung auf den Eintrittresonator unter Beachtung der richtigen Phase ist Selbsterregung möglich.

Nimmt man an, daß die mittlere Elektronengeschwindigkeit

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}, \tag{8/46}$$

die von der Anodenspannung U_0 herrührt, durch die im Spalt des Resonators R_1 herrschende Spannung $U_1 \sin \omega t$ moduliert wird, so wird der Elektronenstrahl aus R_1 mit der Geschwindigkeit

$$v = v_0 \left(1 + \frac{U_1}{U_0} M_1 \sin \omega t\right) \tag{8/47}$$

austreten, wobei $M_1 = \sin \frac{\theta_1}{2} \Big/ \frac{\theta_1}{2}$ der *Strahlkopplungskoeffizient* ist, der durch die endliche Laufzeit zwischen den Gittern des Steuerresonators R_1 bestimmt wird. Beim Durchlaufen des zweiten Resonators wird in diesem ein Wechselstrom induziert, für den man die folgende Fourier-Reihe ansetzen kann:

$$i = I_0 + 2I_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(nx) \cos n\omega t, \tag{8/48}$$

wobei

$$x = M_1 \frac{U_1}{2U_0} \theta; \quad \theta = \frac{\theta_1}{2} + \frac{\pi}{2} \tag{8/49}$$

und $J_n(nx)$ die Bessel-Funktion n-ter Ordnung ist. Infolge der endlichen Laufzeit durch das Auskopplungssystem ist auch hierfür der Strahlungskopplungskoeffizient

$$M_2 = \sin \frac{\theta_2}{2} \Big/ \frac{\theta_2}{2}$$

einzuführen, mit dem die Amplituden zu multiplizieren sind. Daraus ergibt sich für die Grundwelle im Ausgangskreis

$$i_1 = 2I_0 M_2 J_1(x) \exp\left[\mathrm{j}\left\{\omega t - \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right\}\right]. \tag{8/50}$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich die auf die Wechselspannung im Steuerkreis bezogene Steilheit dieser Verstärkeranordnung berechnen.

Für Oszillatoren verwendet man vorzugsweise das *Reflexklystron*, dessen Schema in Abb. 8.9 dargestellt ist. Bei dieser Bauart liegt die Anodenspannung zwischen der Katode K und dem Resonator T, durch dessen Öffnung der Elektronenstrahl auf den Reflektor R fällt. Bei passender negativer Spannung werden die Elektronen an R reflektiert und treten ein zweites Mal von rechts in den Resonator mit einer bestimmten Phasenverschiebung ein. Die Wirkung der Phasenfokussierung ist allerdings von der beim Zweikammerklystron verschieden: Die energiereicheren Elektronen dringen weiter in den Reflektorraum ein als die langsameren, d. h., diese müssen zuerst von der Katode kommend den Resonator durchqueren.

Analog zu Gl. (8/50) ergibt sich für den Wechselstrom im Resonator:

$$i_1 = 2I_0 M J_1(x) \exp\left[\mathrm{j}\left\{\omega t - \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right\}\right]. \tag{8/50a}$$

Der Vorteil des Reflexklystrons besteht darin, daß nur *ein* Resonator vorhanden ist und daher die Schwierigkeit entfällt, zwei Resonatoren mit großem Gütefaktor aufeinander abstimmen zu müssen.

Die in Gl. (8/50a) enthaltene Phasenbedingung ergibt optimale Schwingungsverhältnisse, wenn die Elektronen im Verzögerungsfeld $(n + 3/4)$ Zyklen lang bleiben, wobei n eine ganze Zahl ist. Da die Phasenbedingung von U_0 abhängt und diese die Auskopplungsbedingungen, d. h. auch die Frequenz, beeinflußt, kann über die Reflektorenspannung die Frequenz leistungslos innerhalb von 0,5···1% der Nennfrequenz moduliert werden.

Klystrons werden für Frequenzen zwischen 1 und 60 GHz hergestellt; ihr Wirkungsgrad mit 1···2% ist relativ klein. In *Tabelle 8.4* sind nähere Angaben über diese Röhren gemacht.

Über die Steuerung von Klystrons siehe [*8.13, 8.101, 8.120, 8.96, 8.143, 8.195*]. Hochleistungsklystrons werden in [*8.103, 8.108, 8.11, 8.109*] beschrieben.

8.33 Wanderfeldröhre [*8.130, 8.136*]

Als *Wanderfeldröhre* (engl. *travelling-wave tube*) bezeichnet man eine Anordnung, in der elektromagnetische Wellen einen Leiterkreis mit einer Geschwindigkeit durchlaufen, die wesentlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist. Damit ergibt sich die Möglichkeit einer Wechselwirkung mit einem Elektronenstrahl ähnlich wie beim Klystron, d. h. in Form der Phasenfokussierung. Die Anordnung hierfür geht aus Abb. 8.10 hervor. In einem Metallrohr befindet sich die Drahtwendel W, die als Verzögerungsleitung wirkt; vom Katodensystem K mit elektrostatischer Fokussierung wird ein scharf gebündelter Elektronenstrahl E durch die Wendel auf die Anode A geschickt. Für lange Systeme ist eine Magnetwicklung M zur Strahlkonzentration vorgesehen.

Die elektromagnetische Leiterwelle breitet sich auf dem Draht mit Lichtgeschwindigkeit aus, besitzt aber eine sehr viel kleinere axiale Geschwindigkeit, die von der Steigung der Drahtwendel abhängt. Da diese Welle in der Wendelachse ein elektrisches Feld erzeugt, wird ein achsennaher Elektronen-

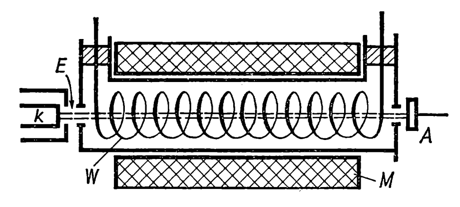


Abb. 8.10 Wanderfeldröhre

strahl von etwa gleicher Geschwindigkeit je nach Feldrichtung verzögert oder beschleunigt werden. Es findet wie beim Klystron eine Phasenfokussierung statt, deren Erregerfelder jedoch nicht ortsfest sind, sondern mit der Drahtwelle fortlaufen.

Besitzen die Elektronen eine mittlere Geschwindigkeit, die etwas größer als die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist, so werden die „Elektronen-

pakete" gegen das Wellenfeld anlaufen und Energie an den Leiterkreis abgeben. Die Amplitude der Welle nimmt während ihres Durchgangs exponentiell zu, d. h., die Anordnung wirkt als *Verstärker*. Solche Röhren werden für Frequenzen zwischen 0,5 und 50 GHz mit Leistungen zwischen einigen Milliwatt und vielen Kilowatt gebaut. Über Verstärkereigenschaften siehe § 8.54.

Laufen elektromagnetische Welle und Elektronenstrahl einander entgegen, so gelangt man zur Wirkungsweise des *Wanderfeldoszillators* (*backward-wave oscillator*) [*8.74*]. Der Elektronenstrahl tritt dabei in ähnlicher Weise wie beim Verstärkungsvorgang in Wechselwirkung mit dem Wanderfeld und wird in Raumladungspakete aufgeteilt. In diesem Fall wird aber die vom Strahl übertragene Energie in Richtung auf die Katode zu an die Drahtwelle abgegeben. Die Amplitude dieser Welle nimmt nicht zu; die aufgenommene Energie wird vielmehr an den Elektronenstrahl rückgekoppelt und ermöglicht Schwingungsanfachung.

Das besondere Merkmal dieses Oszillators ist das Fehlen von Resonatoren oder anderer Abstimmittel. Allein durch Änderungen der Strahlspannung läßt sich ein Frequenzbereich von 1:2 überstreichen, wobei sich die Spannung wie 1:4 ändern muß. Die Leistung solcher Röhren liegt maximal bei 25 W. Bei verringertem Strahlstrom wird die Rückkopplungsbedingung nicht erfüllt und die Röhre als Verstärker arbeiten. Über Röhren für 0,3···0,5 cm Wellenlänge siehe [*8.94*].

8.34 Barkhausen-Kurz-Oszillator

HF-Schwingungen lassen sich auch durch Laufzeiteffekte der Elektronen anfachen, wenn das Gitter einer Triode *positive* Spannung erhält und die Anode auf Erdpotential liegt oder schwach negativ ist. Wie bei gewöhnlichen Oszillatoren für hohe Frequenzen wirken hierbei die Elektrodenzuführungen als Lecher-Leitung, doch hängen in diesem Fall die erzeugten Frequenzen von der Laufzeit der Elektronen zwischen Anode und Katode ab. Diese 1920 von Barkhausen und Kurz entdeckte Schwingungsform beruht ebenfalls auf der Wirkung einer Phasenfokussierung, welche einen Teil der Elektronen veranlaßt, als Ladungswolke um das positive Gitter zu pendeln und durch Influenz Leistung an den Außenkreis zu übertragen. Eine praktische Bedeutung besitzt diese Methode heute nicht mehr.

8.35 *Magnetron* [*8.21, 8.32*]

Die Magnetronröhre ist heute einer der wichtigsten Vertreter der Höchstfrequenzgeneratoren, mit denen sich zwischen 0,5 und 100 GHz Leistungen von einigen Milliwatt bis zu 10 kW im Dauerbetrieb und 5 MW im Impulsbetrieb erzeugen lassen. Zur Impulserzeugung wird die Anodenspannung mit Impulsen von 0,5···10 μs Dauer getastet. Wirkungsgrade von 70% sind erreichbar.

Der prinzipielle Aufbau eines Magnetrons geht aus Abb. 8.11 hervor. Es besteht aus einer zylindrischen Katode K und der koaxialen Anode A aus Kupfer, die durch Bohrungen und Schlitze in eine Anzahl von Resonatoren R

unterteilt ist. In Achsenrichtung ist ein homogenes Magnetfeld angelegt, unter dessen Einfluß sich die von der Katode emittierten Elektronen in Zykloidbahnen um K bewegen. Im stationären Zustand besteht zwischen den Schwingungen der einzelnen Resonatoren R eine Phasendifferenz von 180°. Durch die positive Anodenspannung und das Magnetfeld senkrecht zum elektrischen Feld werden die Elektronen um die Katode mit einer mittleren Geschwindigkeit rotieren, die proportional dem Verhältnis $\boldsymbol{E}/\boldsymbol{B}$ ist. Andererseits lassen sich die kreisförmig angeordneten Resonatoren mit ihrer gegenseitigen Phasenverschiebung von je 180° als zwei elektromagnetische Wellen darstellen, die in entgegengesetzten Richtungen mit einer Geschwindigkeit umlaufen, die sich aus Frequenz, Abstand und Anzahl der Resonatoren berechnet. Wenn die Umlaufgeschwindigkeit der Elektronen etwas größer als die Phasengeschwindigkeit einer der beiden Wellen ist, wird ähnlich wie bei der Wanderfeldröhre zwischen ihnen eine Wechselwirkung stattfinden. Die beiden Anordnungen unterscheiden sich allerdings grundlegend darin, daß Elektronen in ungünstiger Phasenlage, die Energie aus dem elektrischen Feld aufnehmen würden, sehr schnell auf die Katode zurückfallen. Daraus erklärt sich der mit Magnetronröhren erreichbare hohe Wirkungsgrad. Die Elektronen in günstiger Phasenlage hingegen, welche potentielle Energie an das elektrische Drehfeld abgeben, verbleiben relativ lange im Zwischenraum von Katode und Anode und treffen schließlich auf die Anode mit verschwindend kleiner kinetischer Energie.

Da die „ungünstigen“ Elektronen schnell auf K zurückfallen, bildet die Raumladung der effektiven Elektronen gewissermaßen die Speichen eines Rades, das mit etwa der Phasengeschwindigkeit der Resonatorwelle rotiert.

Als Winkelgeschwindigkeit der Elektronen im Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ ergibt sich bekanntlich die Larmor-Frequenz

$$\omega = \frac{e}{2m} B, \tag{8/51}$$

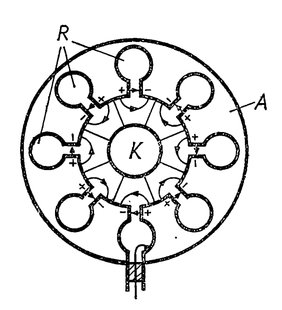


Abb. 8.11 Schema eines Magnetrons

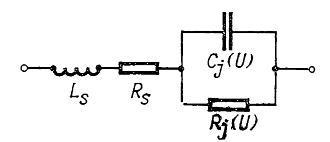


Abb. 8.12 Ersatzkreis einer Tunneldiode als Mikrowellenoszillator

die bei schwacher Anregung gleich der Oszillatorfrequenz dividiert durch die doppelte Anzahl der Resonatoren sein muß.

Nach einer von Hartree berechneten Formel ergibt sich die Anodenspan-

nung zu

$$U_0 = \frac{300\pi}{p\lambda} (r_A^2 - r_K^2) \left(B - \frac{10{,}5}{p\lambda}\right), \tag{8/52}$$

wenn p die Anzahl der Resonatorpaare, r_A und r_K die Radien von Anode und Katode sind [*8.24*].

8.36 Tunneldiode als Höchstfrequenzoszillator [*8.131, 8.160, 8.174*]

Wie in § 4.244 erwähnt wird, eignen sich *Tunneldioden* wegen ihres negativen Widerstandes innerhalb eines bestimmten Spannungsbereichs zur Herstellung hochfrequenter Schwingungen.

Betrachtet man das Ersatzschaltbild einer Tunneldiode, die in einen Serienschwingkreis eingeschaltet ist (Abb. 8.12), so stellt $R_j(U) = \mathrm{d}U/\mathrm{d}I_j$ den negativen Widerstand der Diode innerhalb des günstigen Spannungsbereichs dar. Die Kapazität des pn-Überganges, der bei Tunneldioden nur 10 nm dick ist, ergibt sich aus der Beziehung

$$C_j(U) = K(\Phi - U)^{-1/2}, \tag{8/53}$$

worin K eine Konstante und Φ das Kontaktpotential ist, das bei Germanium 0,8, bei GaAs 1,1 V beträgt. Die Impedanz der Tunneldiode findet man aus dem Ausdruck

$$\boldsymbol{Z}_d = R_s - \frac{|R_j|}{R_j^2 C_j^2 \omega^2 + 1} + \mathrm{j}\left(\omega L_s - \frac{R_j^2 C_j \omega}{R_j^2 C_j^2 \omega^2 + 1}\right). \tag{8/54}$$

Hieraus lassen sich zwei Parameter der Tunneldiode ableiten, die für das Zustandekommen von selbsterregten Schwingungen ausschlaggebend sind. Der erste liefert die *Grenzfrequenz* f_{cr}, oberhalb der der Realteil der Diodenimpedanz positiv und daher keine Schwingung möglich ist. Der Ausdruck hierfür lautet:

$$f_{cr} = \frac{1}{2\pi\,|R_j|\,C_j} \sqrt{\frac{|R_j|}{R_s} - 1}. \tag{8/55}$$

Der zweite Parameter ergibt die Grenzfrequenz f_{cx}, bei der der Imaginärteil von $\boldsymbol{Z}_d$ verschwindet; er ergibt

$$f_{cx} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{L_s C_j} - \frac{1}{R_j^2 C_j^2}}. \tag{8/56}$$

Unterhalb von f_{cx} ist die Diode kapazitiv, bei höheren Frequenzen induktiv, d. h., Schwingungserzeugung ist möglich.

Oszillatoren dieser Art eignen sich für Frequenzen bis zu 100 GHz bei Leistungen von einigen Milliwatt.

8.37 Übersicht

In *Tabelle 8.4* sind die Kenngrößen einiger Höchstfrequenzröhren zusammengestellt.

Tabelle 8.4 Eigenschaften von Höchstfrequenzröhren

Type	C_{ak} pF	C_{gk} pF	P_a W	P_{HF} W	λ cm	U_a V	Bemerkungen
Trioden							
LD 1	0,6	1,5	5	0,3	≥ 22	200	
LD 2	1,3	3,5	50	4	≥ 40	800	
LD 5	2	3,2	25	12	≥ 35	380	
LD 11/110	0,14	9	80	15	≥ 10	800	Scheiben-T.
HT 311	0,03	10	80	4,5	≥ 8	800	„
HT 321	0,025	9	300	40	≥ 8	1500	„
HT 711	0,02	2,6	25	1,8	≥ 5	400	„
GL 446	0,5	1,4	5	0,5	≥ 9	200	„
Magnetrons							
RD 2 Ma	—	—	4	0,5	19…26	400	$B = 0{,}13\,T$
RD 2 Me	—	—	70	10	8…10	900	$0{,}16\,T$
MS 50/14 R	—	—	35	14	40…60	2000	$0{,}053\,T$
4 J 51	—	—	500	200	32	20000	—
718 AY-EY	—	—	600	250	11	14000	—
HMI 941	—	—	33000	7000	3,4	5500	Impulsbetrieb
HMI 941	—	—	90	—	3,4	5500	Dauerstrich
HMI 952	—	—	145 kW	45 kVA	3,4	12 kV	Impulsbetrieb
HMI 952	—	—	170	—	3,4	12 kV	Dauerstrich
Klystrons							
LZG 10	—	—	1000	100	>9	2500	
k 417	—	—	—	0,15	9…10	600	Reflex-K.
707 A	—	—	—	0,08	8…12	300	„
726 A	—	—	—	0,02	10	300	„
TK 6	—	—	—	0,18	4	300	„
TK 76	—	—	—	0,9	8	500	„
HKR 301	—	—	—	0,04	9…11	300	
HKR 601	—	—	—	0,1	4,6…19	350	
HKR 902	—	—	—	0,04	3,2…3,5	330	
Wanderfeldröhren							Kollektor-spannung
HWE 402	—	—	—	0,3	7…9	300…600	900…1000 V
HWL 412	—	—	—	10	7…9	400…800	1600…1800
TPO 570	—	—	—	20	7…9	—	1800…2000
7527	—	—	—	6	6…7	—	1130 V

8.4 Molekularverstärker (Maser) [*8.156, 8.173, 8.183, 8.194, 8.179, 8.184*]

Die bedeutendste Entwicklung auf dem Gebiet der Erzeugung und Verstärkung von Mikrowellen stellt der *Molekularverstärker* oder Maser (***M**olecular **a**mplification by **s**timulated **e**mission of **r**adiation*) dar. Er unterscheidet sich

in Aufbau, Wirkungsweise und Anwendungsbereich grundsätzlich von den elektronischen Oszillatoren und Verstärkern, bei denen der Verstärkungsvorgang auf der Wechselwirkung zwischen einem hochfrequenten elektromagnetischen Wechselfeld und einer Elektronenströmung beruht.

8.41 Grundlagen [8.141, 8.178, 8.193]

Im Gegensatz zur klassischen Absorption elektromagnetischer Strahlung kann in *Materie* unter gewissen Bedingungen ein *Verstärkungsprozeß* stattfinden. Betrachtet man zu diesem Zweck in Abb. 8.13 zwei Energieniveaus E_1 und E_2 eines Moleküls mit den Besetzungszahlen N_1 und N_2, wobei $E_2 > E_1$, so lassen sich drei Energieübergänge unterscheiden:

1. Absorption der einfallenden Strahlungsdichte u_ν, wobei $B_{12}N_1u_\nu$ Übergänge pro Sekunde stattfinden.

2. Spontane Emission, wobei $A_{21}N_2$ Übergänge von 2 nach 1 mit der Übergangswahrscheinlichkeit A_{21} in der Zeiteinheit stattfinden.

3. Induzierte Emission, d. h. Abgabe von Lichtquanten an das Strahlungsfeld mit der Rate $B_{12}N_2u_\nu$, die *kohärent* zum Strahlungsfeld erfolgt.

Im stationären Zustand, d. h. im thermischen Gleichgewicht, muß gelten:

$$B_{12}N_1u_\nu = A_{21}N_2 + B_{12}N_2u_\nu. \qquad (8/57)$$

Nimmt man für die Strahlungsdichte u_ν die eines schwarzen Strahlers an, so findet man nach Boltzmann das Verhältnis der Besetzungszahlen zu

$$N_2/N_1 = e^{-h\nu/kT} \qquad (8/58)$$

und für das Verhältnis der Übergangswahrscheinlichkeiten die Beziehung

$$A_{21}/B_{12} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}, \qquad (8/59)$$

E2 N2 Absorption Emission E1 N1

Abb. 8.13 Niveauschema

wenn man die Plancksche Strahlungsformel zugrunde legt.

Das Verhältnis von spontaner zu induzierter Emission ist demnach proportional zu ν^3. Da beim Maser die induzierte Emission der abgegebenen HF-Leistung entspricht, die spontane Emission das Verstärkerrauschen darstellt, wird das Signal-Rausch-Verhältnis mit abnehmender Frequenz günstiger.

Das Verhältnis der Intensitäten von induzierter Emission und Absorption hängt von den Besetzungszahlen N_1 und N_2 ab; beobachtet wird ihre Differenz $B_{12}u_\nu(N_1 - N_2)$. Das bedeutet, daß für $N_1 > N_2$ die Absorption überwiegt, für $N_1 = N_2$ das System transparent ist und erst bei $N_2 > N_1$ die

Emission überwiegt. Vom Standpunkt der Boltzmann-Gleichung (8/59) würde das einer *negativen Temperatur* entsprechen. Wie man leicht errechnen kann, finden im Sichtbaren ausschließlich Absorptionsprozesse statt. Im Gebiet der Mikrowellen mit $\nu = 1$ GHz wird $N_2/N_1 = \mathrm{e}^{-10^{-3}}$, d. h., es kommen auf 1000 Absorptionsprozesse 999 induzierte Übergänge. Das bedeutet, daß es in diesem Frequenzbereich grundsätzlich möglich ist, $N_2 > N_1$ zu machen und induzierte Übergänge — wenn auch mit kleiner Ausbeute — anzuregen.

Als Energieniveaus kommen für den Spektralbereich um 1 GHz folgende Übergänge in Betracht: 1. Rotations- und Inversionsübergänge, 2. Zeeman-Übergänge zwischen Aufspaltungsniveaus elektronischer Zustände im Magnetfeld, 3. Stark-Effekt-Übergänge im elektrischen Feld.

8.42 Quantitative Behandlung des Masers

Für die quantitative Behandlung der Verstärkereigenschaften des Masers müssen zunächst die Zeitfaktoren betrachtet werden, die für die Wiederherstellung des thermischen Gleichgewichts nach einer vorhergehenden Störung verantwortlich sind.

Als *Spin-Gitter-Relaxationszeit* T_1 wird nach der Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{\Delta E}{T_1} \tag{8/60}$$

die Zeit T_1 definiert, welche die Abgabe der Anregungsenergie an das Kristallgitter regelt; sie nimmt gewöhnlich mit abnehmender Temperatur zu.

Die *Spin-Spin-Relaxationszeit* T_2 beschreibt den Entropieausgleich, d. h. den Verlust bestimmter Phasenbeziehungen zwischen angeregten Zuständen, wie z. B. das gleichzeitige Umklappen entgegengesetzter Spin-Orientierungen.

Betrachtet man das System in Abb. 8.13 mit zwei Energieniveaus und der Resonanzfrequenz ν_0, so lautet die Resonanzgleichung für den Energieumsatz im stationären Zustand:

$$I = h\nu \frac{1}{2T_2}\left(\frac{\mu E}{h}\right)^2 \cdot \frac{1}{(\nu-\nu_0)^2 + \left(\frac{1}{2\pi T_2}\right)^2 + \frac{T_1}{T_2}\left(\frac{\mu E}{h}\right)^2}, \tag{8/61}$$

wobei μ das elektrische bzw. magnetische Dipolmoment und E die elektrische bzw. magnetische Feldstärke bedeuten. Da $(\nu - \nu_0)^2$ klein gegen den Rest des Nenners in Gl. (8/61) ist, wird die Intensität I der Energie $h\nu$ und der Zahl der Übergänge proportional, wobei die Übergangszahl unabhängig von ν ist. Daraus läßt sich die Resonanzlinienbreite, d. h. die Bandbreite des Verstärkers, finden, für die gilt:

$$(\nu-\nu_0)^2 \sim \left(\frac{1}{2\pi T_2}\right)^2 + \frac{T_1}{T_2}\left(\frac{\mu E}{h}\right)^2. \tag{8/62}$$

Eine große Bandbreite ergibt sich also, wenn T_2 klein und E groß ist. Weiter folgt aus Gl. (8/61), daß $I \sim E^2$, d. h., daß die Verstärkung *linear* ist. Als *Verstärkungsfaktor* wird das Verhältnis von austretender zu eintretender

Strahlungsleistung bezeichnet; diese ergibt sich annähernd aus

$$\alpha \sim \frac{\mu^2 N}{\Delta \nu}, \tag{8/63}$$

wenn N die Anzahl der beteiligten Atome oder Moleküle und $\Delta \nu$ die *natürliche Linienbreite*

$$\Delta \nu = \frac{1}{2\pi T_2} \tag{8/64}$$

ist.

8.43 Gasmaser

Der erste von GORDON, ZEIGER und TOWNES [*8.63*] verwirklichte Maser arbeitet mit Inversionszuständen des Ammoniakmoleküls, die schematisch in Abb. 8.14 dargestellt sind. Für das N-Atom gibt es ober- und unterhalb der H-Ebene zwei mögliche Gleichgewichtszustände, deren Übergang durch einen quantenmechanischen Tunnelvorgang möglich ist und der als *Inversion* bezeichnet wird. Die Inversionsfrequenz ν_{inv} bestimmt die Energiedifferenz $\Delta E = h\nu_{\text{inv}}$ im Schema der Abb. 8.14; sie beträgt 24 GHz.

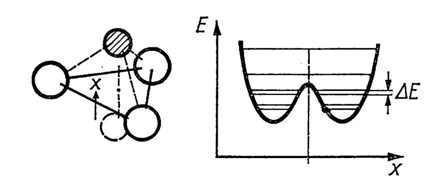


Abb. 8.14 Potentialkurve des NH_3-Moleküls

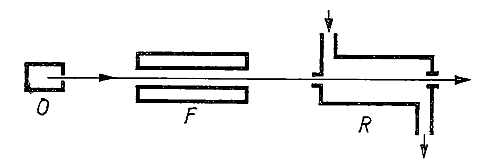


Abb. 8.15 Prinzip des NH_3-Masers

Moleküle in unterschiedlichem Inversionszustand zeigen im elektrischen Feld einen quadratischen Stark-Effekt mit entgegengesetztem Vorzeichen, d. h., durch ein stark inhomogenes elektrisches Feld lassen sich Moleküle verschiedenen Zustandes räumlich trennen. In Abb. 8.15 ist schematisch der Aufbau des NH_3-Masers dargestellt. Dieser besteht aus dem Molekularstrahlofen O, aus dem der NH_3-Strahl mit konstanter Geschwindigkeit austritt. Er durchsetzt den Multipol F, eine 4- oder 6-Polanordnung aus abwechselnd positiv und negativ aufgeladenen stabförmigen Elektroden, dessen elektrisches Feld stark inhomogen ist und nur Moleküle im oberen angeregten Zustand durchläßt. Der Strahl, dessen Moleküle nur einen der zwei möglichen Quanten-

zustände besetzen, durchläuft dann den Hohlraumresonator R, in den gleichzeitig die Inversionsfrequenz von 24 GHz eingestrahlt wird. Diese Strahlung wird durch die induzierte Emission der NH_3-Moleküle verstärkt und tritt von R unten wieder aus.

Die Bedeutung dieser Anordnung liegt wegen der geringen Leistung von nur 0,1 nW in der außerordentlich hohen Frequenzkonstanz von etwa 10^{-12}, die der Bandbreite von einigen Kilohertz entspricht. Er dient daher in erster Linie als *Frequenznormal* für einen kurzzeitigen Frequenzvergleich; siehe Bd. I, § 3.61, ferner [*8.18, 8.41, 8.78, 8.123*].

Beim *Caesiummaser* (siehe Bd. I, § 3.62) wird ein Cs-Atomstrahl im Magnetfeld aufgespalten und der Hyperfeinstrukturübergang 3,0 → 4,0, der bei etwa 9,19 GHz liegt, angeregt. Dieser Maser dient ebenfalls als Zeitnormal zur Steuerung von Quarzuhren. Die erreichbare Frequenzgenauigkeit liegt bei 10^{-10} [*8.12, 8.48, 8.49, 8.81*].

8.44 Festkörpermaser (Grundlagen) [*8.33, 8.121, 8.116, 8.117, 8.151, 8.162, 8.192, 8.154*]

Der *Festkörpermaser* arbeitet mit Übergängen zwischen Zeeman-Niveaus paramagnetischer Ionen im Magnetfeld. Die Ionen sind durch ihren Spin s und ihr magnetisches Moment $g\mu_B$ ausgezeichnet, wobei g der Landé-Faktor und $\mu_B = e\hbar/2mc$ das Bohrsche Magneton ist. Den Regeln der Richtungsquantelung zufolge gibt es im äußeren Magnetfeld $2s + 1$ Einstellmöglichkeiten für die paramagnetischen Ionen, die verschieden großen potentiellen Energien entsprechen. Der äquidistante Abstand dieser Energiniveaus beträgt

$$h\nu = \Delta E = g\mu_B H_0, \tag{8/65}$$

wenn H_0 das von außen angelegte Magnetfeld ist. In ähnlicher Weise wie beim Gasmaser läßt sich für dieses System der stationäre Zustand der emittierten Leistung angeben, wenn man senkrecht zum Aufspaltungsfeld H_0 ein HF-Feld H_1 in der Nähe der Resonanzfrequenz ν_0 anlegt. Man findet dann

$$I = \frac{M_0 \omega_0^2 H_1^2 / H_0 T_2}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{T_2} + \left(\frac{\omega_0 H_1}{H_0}\right)^2 \frac{T_1}{T_2}} \tag{8/66}$$

analog zu Gl. (8/61), wenn T_1 und T_2 die beiden Relaxationszeiten und M_0 die Gleichgewichtsmagnetisierung bedeuten, die proportional zum Feld H_0, der Konzentration N der paramagnetischen Ionen und umgekehrt proportional der absoluten Temperatur ist. Das HF-Feld H_1 soll die Besetzungszahl des höheren Energieniveaus auf Kosten des niedrigeren vergrößern (Spinumkehr) und damit die induzierte Emission möglich machen.

Nun entspricht das magnetische Feld am Ort der Ionen in einem Kristall nicht dem von außen angelegten Feld H_0, sondern der Resultierenden aus H_0 und dem Kristallfeld. Aus diesem Grunde werden die Energiedifferenzen zwischen den verschiedenen Feinstrukturniveaus ungleich, d. h., es treten $2s + 1$ Übergangsfrequenzen auf.

Beim *Zwei-Niveau-Maser* wird der Übergang $E_1 \rightarrow E_2$ durch die *Pumpfrequenz* $\nu_{12} = (E_2 - E_1)/h$ bewirkt, wodurch die Besetzungszahl des oberen Niveaus größer als die des unteren wird und bei der induzierten Emission $E_2 \rightarrow E_1$ eine Verstärkung des Pumpsignals erfolgt. Den Nachteil dieses Masers, die zu verstärkende Frequenz in großer Intensität als Pumpfrequenz anwenden zu müssen, vermeidet der heute fast ausschließlich verwendete *Drei-Niveau-Maser*.

Dieser arbeitet, wie bereits die Kennzeichnung besagt, mit drei Energieniveaus (Abb. 8.16a), wobei durch die Pumpfrequenz ν_{31} die thermische Gleichgewichtsbesetzung N_3 gestört wird. Je nachdem die Relaxationszeit für den Übergang $3 \rightarrow 2$ oder $2 \rightarrow 1$ die größere ist, erzielt man durch die Sättigung mit der Pumpfrequenz einen emissionsfähigen Zustand für die Frequenz ν_{21} oder ν_{32}, da $N_3 = N_1 > N_2$.

Ist die Relaxationszeit T_{12} größer als T_{23}, so wird die Frequenz ν_{23} emittiert; die entsprechende Leistung ist durch die Beziehung

$$P_{32} = \frac{N h^2 \nu_{32} (w_{21}\nu_{21} - w_{32}\nu_{32}) (W_{32})_R}{3kT[w_{21} + w_{32} + (W_{32})_R]} \tag{8/67}$$

gegeben, wobei die w_{ij} thermische Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den einzelnen Zuständen und $(W_{32})_R$ die Wahrscheinlichkeit für den Strahlungsübergang zwischen 3 und 2 ist. Setzt man in diesen Ausdruck das effektive Dipolmoment μ_{32} für diesen Übergang ein und ist ϱ_{32} der Formfaktor für

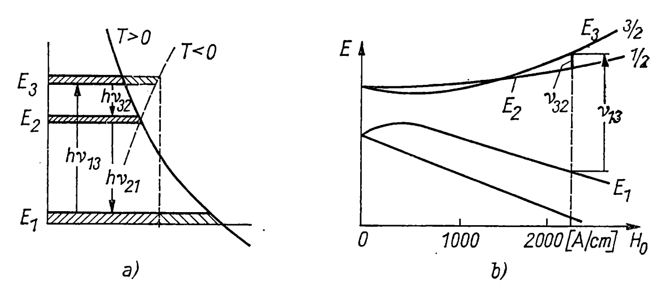


Abb. 8.16 Schema eines Drei-Niveau-Masers

die Übergangslinie, so wird aus Gl. (8/67)

$$P_{32} \approx \frac{\pi^2 N \nu_{32}}{3kT} \frac{w_{21}\nu_{21} - w_{32}\nu_{32}}{w_{21} + w_{32}} \, |W_{32} H_1|^2 \varrho_{32}, \tag{8/68}$$

wenn H_1 die Amplitude des Magnetfeldes bei ν_{32} ist.

Um eine *Verstärkung* des Signals zu bekommen, muß $w_{21}\nu_{21} > w_{32}\nu_{32}$ sein; aus Gl. (8/68) geht auch der Einfluß der Temperatur, der Dipolmomente zwischen den Zuständen und der Relaxationszeiten, die in den w_{ij} impliziert sind, hervor.

8.45 *Ausgeführte Festkörpermaser*

Beim Drei-Niveau-Maser von McWhorther und Meyer [*8.117*] wird als paramagnetische Substanz Kalium-Kobaltzyanid $K_3CO(CN)_6$ mit 0,5% Cr^{3+}-Ionen verwendet. Das Cr^{3+} besitzt 3 Elektronen in der Außenschale und 4 niedrig liegende Zeeman-Niveaus $s_m = \pm\, ^3/_2, \pm\, ^1/_2$ im Wirtskristall; ihre Lage als Funktion des Magnetfeldes H_0 ist aus Abb. 8.16b ersichtlich. Bei der angewandten Magnetfeldstärke von 1750 A/cm beträgt die Pumpfrequenz $\nu_{31} = 9{,}4$ GHz und die Signalfrequenz $\nu_{32} = 2{,}8$ GHz. Für die richtige Einstellung der Relaxationszeiten wird der Maser bei $T = 1{,}25$ K betrieben. Der Maserkristall befindet sich, wie in Abb. 8.17a wiedergegeben, in einem Hohlraumresonator R, dessen axiale Länge einer halben Wellenlänge bei 2,8 GHz entspricht. Die Signalfrequenz wird über ein Koaxialkabel K mit Kopplungs-

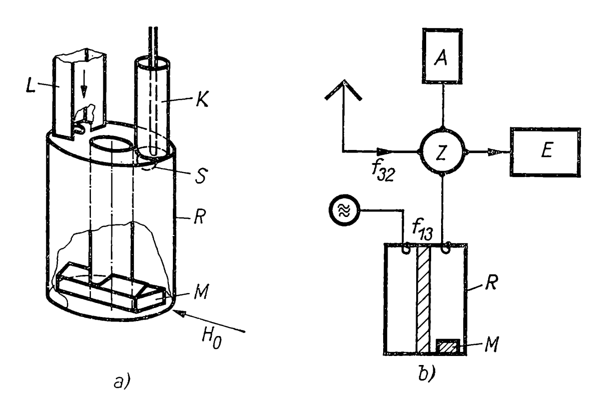


Abb. 8.17 Aufbau eines Festkörpermasers: Resonator (a), Schaltschema (b)

schleife S eingekoppelt. Die Pumpfrequenz von 9,4 GHz regt den Resonator in einer $TE_{1,1,3}$-Welle an und wird in einem Rechteckleiter L zugeführt. Das Magnetfeld H_0 steht senkrecht zur Resonatorachse und ist in der Achse des paramagnetischen Kristalls M orientiert. Infolge der relativ langen Relaxationszeit $T_1 \approx 0{,}2$ s wird eine kleine Pumpleistung benötigt. Die erzielte Signalleistung liegt bei 3 μW bei einer Bandbreite von 60 kHz und 15 mW Pumpleistung.

Die grundsätzliche Schaltanordnung geht aus Abb. 8.17b hervor. Das von der Antenne aufgenommene und zu verstärkende Signal wird über den Zirkulator Z geleitet, ein Ferritelement, das Ein- und Ausgangssignal trennt und den Maser gegen Reflexionssignale vom Ausgang schützt. Die durch die Wirkung des Masers im Resonator R verstärkte, reflektierte Leistungswelle läuft in den Zirkulator zurück und gelangt über die Einwegleitung zum Empfänger E. Der vierte Arm von Z wird von einer reflexfreien Hohlleitung, dem Absorber A, gebildet. Hohlraumresonator und Kristall M befinden sich in einem Kryostaten mit flüssigem Helium, das unter verringertem Druck siedet.

Als weitere Substanzen für den Aufbau eines Masers kommen *Rubin* (Cr^3

in Al_2O_3), *Saphir* (Fe^3 in Al_2O_3), *Rutil* (Cr^3 und Fe^{3+} in TiO_2) in Betracht; siehe [*8.4, 8.5, 8.7, 8.17, 8.25, 8.161, 8.196*].

Bei einer zweiten Ausführungsform, dem *Wanderfeldmaser* (*travelling-wave maser*), ist der Maserkristall in einem Wellenleiter (siehe § 8.33) angeordnet, durch den das zu verstärkende Signal läuft. Infolge der Wechselwirkung mit dem Kristall, dem durch einen Hohlleiter die Pumpfrequenz zugeführt wird, wird das Signal im Wellenleiter exponentiell mit der Länge verstärkt.

Beim *ferromagnetischen Maser* nach SUHL [*8.166*] werden ferromagnetische Resonanzen im Magnetfeld benutzt; von Vorteil ist die relativ hohe erzielbare Leistung und der Fortfall der tiefen Temperaturen.

8.46 Rauscheigenschaften der Maser [*8.118, 8.129*]

Die hervorragendste Eigenschaft der Molekularverstärker ist das niedrige Eigenrauschen, das nur wenige Kelvin beträgt. Die kleinste erreichbare Rauschzahl wird durch die inkohärente Spontanemission begrenzt. Da beim Drei-Niveau-Maser die Rauschleistung der Besetzungsdichte N_3, die Signalleistung der Differenz $N_3 - N_2$ proportional ist, wird das Verhältnis Signalleistung zu Rauschleistung $\sim (N_3 - N_2)/N_3$. Im Grenzfall $N_2 = 0$ und vernachlässigbarer Dämpfung erreicht die Rauschtemperatur den theoretischen Grenzwert

$$T = h\nu_{32}/k, \qquad (8/69)$$

der bei $\nu_{32} = 1$ GHz der Temperatur $T = 0{,}05$ K entspricht. In der Praxis liegen die gemessenen Rauschtemperaturen um eine halbe Größenordnung höher. Die Rauschzahlen einer kompletten Empfangsanlage für die *Radioastronomie* sind von der Größe 60 ···100 K, wobei auf den Maser selbst nur einige Kelvin entfallen.

8.47 Zusammenstellung von Maser-Daten

In *Tabelle 8.5* sind für verschiedene Maser die wichtigsten Daten zusammengestellt.

Tabelle 8.5 Daten von Masern

Substanz	Temperatur K	Frequenz GHz Pumpe	Frequenz GHz Signal	Leistung W Pumpe	Leistung W Signal	Bandbreite kHz	Verstärkung dB
NH_3	300	24	24	10^{-10}	10^{-11}	2,6	10
Cs	≈ 300	9,19	9,19	—	—	0,006	—
$La(C_2H_5SO_4)$ + Gd + 0,02% Ce	1,2	17,5	9	0,2	$1{,}5 \cdot 10^{-5}$	—	—
$K_3Co(CN)_6$ + Cr	1,2	9,4	2,8	0,02	$2 \cdot 10^{-6}$	2800	20
	2	8	1,4	0,09	$1 \cdot 10^{-6}$	1400	5
	4,2	9	2,85	—	$1{,}5 \cdot 10^{-5}$	—	Oszillator
Al_2O_3 + 0,1% Cr	4,2	9,3	2,4	0,12	—	12000	20
Ferrite	300	9	4,5	20 kW (3 μs)	100	—	8

8.5 Verstärkung von Mikrowellen [8.40, 8.69]

Für die Verstärkung von Signalen bei Höchstfrequenzen, wie sie bei Zentimeterwellen-Funkverbindungen und insbesondere in der Radioastronomie erforderlich ist, lassen sich grundsätzlich zwei Methoden angeben. Die erste benutzt die im vorigen Abschnitt beschriebenen Oszillatoren zur Überlagerung und Mischung mit dem nachzuweisenden Signal, wobei zur Verstärkung die bekannten HF-Methoden benutzt werden. Das zweite Verfahren verwendet unmittelbar die rauscharmen Festkörperverstärker oder die Wanderfeldröhre, die in § 8.33 besprochen ist.

8.51 Rauschen

Unter *Rauschen* versteht man ungeordnete Schwankungsvorgänge, die statistischen Gesetzmäßigkeiten gehorchen. Als Rauschquellen kommen die Verstärker selbst in Betracht, deren Röhren, Transistoren, Widerstände eine nach der Nyquist-Formel berechenbare Rauschleistung erzeugen (siehe § 4.6). Als äußere Rauschquellen kommen das kosmische und troposphärische Rauschen in Frage, das in einer Empfangsantenne als Rauschleistung aufgefangen wird und durch eine äquivalente Rauschtemperatur charakterisiert werden kann.

Das *kosmische Rauschen* nimmt mit zunehmender Frequenz ab und entspricht bei einigen 100 MHz einer äquivalenten Rauschtemperatur von 300 °K. Im GHz-Bereich ist es zu vernachlässigen.

Die Rauschtemperatur der *Troposphäre* steigt mit zunehmender Frequenz und erreicht die Zimmertemperatur zwischen 10 und 100 GHz. Sie hängt stark vom Elevationswinkel der Richtantenne ab.

Beim Empfang eines Signals überlagert sich diesem das Fremd- und Eigenrauschen des Empfängers. Als *Rauschzahl F* wird die Leistung definiert, die in der Antenne verfügbar sein muß, um am Empfänger Gleichheit von Signal und Störung zu erhalten. Befindet sich die Antenne in einem Strahlungsfeld der Temperatur T_s, so ist diese Leistung

$$P = \left(\frac{T_s}{T_0} + F - 1\right) k T_0 \Delta f. \qquad (T_0 = 300\ \mathrm{K}) \tag{8/70}$$

Das Verhältnis T_s/T_0 kennzeichnet den *äußeren* Störpegel; eine Verkleinerung von F ist nur dann angebracht, wenn T_s/T_0 nicht viel größer als $F - 1$ ist. Anstelle von F wird auch die äquivalente Rauschtemperatur

$$T_s = (F - 1) T_0 \tag{8/71}$$

als Maß für die Verstärkereigenschaften benutzt.

Während bei Funkübertragung mit Frequenzen unterhalb von 100 MHz der äußere Störpegel überwiegt und Röhren mit niedriger Rauschzahl verfügbar sind, kehren sich die Verhältnisse bei höheren Frequenzen um. In diesem Frequenzbereich bringt jede Verkleinerung der Empfängerrauschzahl einen echten Gewinn an Empfangsleistung.

8.52 Molekularverstärker [*8.75, 8.102*]

Der in § 8.4 besprochene *Maser* ist besonders für die Verstärkung von Signalen mit kleinem Störpegel geeignet. Die Eigenrauschleistung des Molekularverstärkers infolge der spontanen, statistisch schwankenden Übergänge aus dem Energieniveau 3 in das schwächer besetzte Niveau 2 (vgl. Abb. 8.16) unter Abgabe von jeweils einem Energiequant $h\nu_{32}$ ist sehr gering und fast unabhängig von der Temperatur des Maserkristalls. Die äquivalente Rauschtemperatur dieses Materials liegt bei 1 K; die des Hohlraumresonators einschließlich der Leitungen bei der Temperatur des flüssigen Heliums, d. h. zwischen 1 und 4 K. Die Rauschtemperatur des kompletten Molekularverstärkers des Reflexionstyps liegt nach Messungen zwischen einigen MHz und 10 GHz bei etwa 20 K [*8.62*].

Der *Wanderwellenmaser* eignet sich vor allem zur Erzielung einer großen Bandbreite, die für den *Rubinmaser* 3 dB bei einem Verstärkungsfaktor von 25 dB beträgt.

8.53 Parametrische Verstärkung [*8.16, 8.76, 8.133*]

Als *parametrische Verstärkung* versteht man das Verfahren, den Energieinhalt eines Schwingungskreises, der durch eine kleine Spannung in Resonanz erregt wird, durch Einkopplung mechanischer oder elektrischer Arbeit zu vergrößern und damit einen Verstärkungseffekt zu erzielen. Dieses Prinzip läßt sich leicht verfolgen, wenn man den Schwingungskreis in Abb. 8.18 betrachtet. Er besteht aus der Induktivität L, dem Widerstand R und der Kapazität C, die durch Verändern des Plattenabstandes zwischen den Werten C und $C - \Delta C$ variiert werden kann.

Nimmt man an, daß bei $t = 0$ die Spannung $U_0 = q/C$ am Kondensator herrscht, d. h. die Ladung q aufgebracht ist, und vergrößert man den Plattenabstand durch Leistung mechanischer Arbeit, so verringert sich die Kapazität

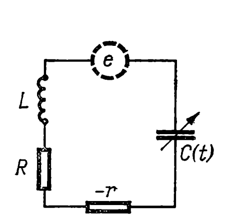


Abb. 8.18 Schwingungskreis mit variablem Kondensator

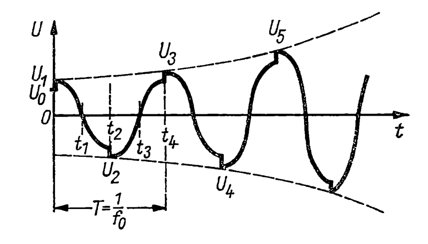


Abb. 8.19 Prinzip der parametrischen Verstärkung

von C auf $C' = C - \Delta C$, wodurch sich gleichzeitig die Spannung U_0 auf den Wert $U_1 = U_0 C/C'$ vergrößert. Dieser Vorgang soll sprunghaft bei $t = 0$ vor sich gehen. Die Spannung ändert sich nach einer cos-Funktion mit der Frequenz $f_0 \approx (LC)^{-1/2}/2\pi$ und erreicht bei $t_1 = 1/4\, f_0$ den Wert Null. Wenn in diesem Zeitpunkt die Kapazität C' wieder auf den ursprünglichen Wert C gebracht wird, ändert sich U_1 nicht, da ihre Ladung Null ist. Hat nach

dem Durchschwingen die Spannung an C den (negativen) Scheitelwert U_1 (bei verschwindender Kreisdämpfung) erreicht, so wird bei $t_2 = 1/2 f_0$ (siehe Abb. 8.19) wieder sprungartig die Kapazität auf C' erniedrigt und die Spannung auf $U_2 = U_1 C/C' = U_0 (C/C')^2$ erhöht. Wiederholt man diesen Vorgang in jeder Periode, so steigt die ursprüngliche Spannung U_0 exponentiell auf den Wert $U_n = U_0 (C/C')^n$ nach $n/2$ Perioden an, wenn man den Dämpfungswiderstand $R = 0$ setzt.

Mit endlichem Dämpfungswiderstand R würde U_0 für $C = \text{const}$ nach einem Exponentialgesetz abklingen. Durch den geschilderten *Pumpvorgang* kann das Abklingen aufgehoben oder sogar in einen Anstieg umgewandelt werden. Die im Verlustwiderstand R umgesetzte Joulesche Wärme kann durch die beim Pumpen zugeführte mechanische Arbeit teilweise oder ganz kompensiert werden, was sich durch einen negativen Widerstand $-r$ kennzeichnen läßt. Für $R - r = 0$ werden ungedämpfte HF-Schwingungen erhalten; für $R - r < 0$ erhält man *Selbsterregung*. Wird der Schwingungskreis durch eine Spannungsquelle e (siehe Abb. 8.18), z. B. durch eine Antenne, angeregt und stellt R den Eingangswiderstand des nachgeschalteten Verstärkers dar, so wird diesem die *Signalleistung*

$$p_i = e^2/R \tag{8/72}$$

zugeführt. Durch phasenrichtiges Pumpen wird R auf $R - r$ verringert und die Signalleistung auf den Wert

$$p_0 = \frac{e^2 R}{(R - r)^2} \tag{8/73}$$

erhöht. Daraus läßt sich ein Leistungsverstärkungsfaktor

$$A_p = \frac{p_0}{p_i} = \frac{R^2}{(R - r)^2} \tag{8/74}$$

ableiten, der für $R = r = 0$ unendlich wird.

Anstatt die Kapazität C durch Verändern des Plattenabstandes zu „pumpen“, kann auch die Induktivität L sprungweise verändert werden.

Bei der parametrischen Verstärkung wird die Entdämpfung des Kreises durch eine veränderliche *Reaktanz* erzielt, die keine Rauschspannung abgibt. Das Verfahren ist also besonders zur Verstärkung von Signalen geeignet, die durch eine kleine Rauschzahl gekennzeichnet sind.

Für hohe Frequenzen scheidet die mechanische Kapazitätsvariation aus. Statt dessen lassen sich *Halbleiterdioden* im Sperrbereich verwenden, deren Kapazität nach § 8.36 Gl. (8/53) eine Funktion der angelegten Spannung ist. Mit solchen *Varactor-Dioden* sind bei einer mittleren Kapazität $C = 2{,}5$ pF Änderungen von $\Delta C = 0{,}2$ pF/V erzielbar, wobei der Bahnwiderstand durch geeigneten Aufbau so klein als möglich gemacht werden muß.

Bei der praktischen Ausführung des parametrischen Verstärkers werden meist koaxiale Kreise verwendet, die für die Pumpfrequenz und für die Signalfrequenz in Resonanz gebracht werden. Die Pumpleistung wird von einem Klystron geliefert. Ausgeführte Verstärker für einen Frequenzbereich zwischen

2,7 und 2,9 GHz besitzen eine Verstärkung von 20 dB bei einer Bandbreite von 20 MHz und einer Rauschzahl, die kleiner als 3 dB ist.

8.54 Verstärkung mit Wanderfeldröhren [*8.3, 8.82, 8.128, 8.185*]

Die in § 8.33 besprochenen *Wanderfeldröhren* eignen sich zur Verstärkung mit großer Bandbreite und erreichen einen Verstärkungsfaktor von etwa 30 dB. Die Ankopplung des zu verstärkenden Signals geschieht im Zentimeterwellenbereich durch koaxiale Leitungen. Das zur Strahlführung meist angewandte axiale Magnetfeld wird oft durch Permanentmagneten erzeugt. Durch die Fortentwicklung der letzten Zeit (Kühlung der Wendel) gelang es, die Rauschzahl dieser Röhren auf 1,7 dB herabzusetzen.

8.55 Überlagerungsverstärker

Das Prinzip des Überlagerungsempfangs, das in § 7.644 für den normalen HF-Bereich besprochen ist, läßt sich ebenso für höchste Frequenzen anwenden. Die grundsätzliche Anordnung eines solchen Verstärkers geht aus Abb. 8.20 hervor. Als Wellenleiter werden konzentrische Leiter verwendet, wo bei S die nachzuweisende Signalspannung ankommt. Als Mischstufe wird der Kristalldetektor D benutzt, dessen nichtlineare Charakteristik nach § 7.643 ein Überlagerungssignal mit der reinen Sinusspannung der Differenzfrequenz liefert. Die Überlagerungsfrequenz wird dem Oszillator O entnommen, der meist aus einem Reflexklystron (§ 8.32) oder Magnetron (§ 8.35) besteht und deren HF-Feld in den Wellenleiter eingekoppelt wird. Die Zwischenfrequenz

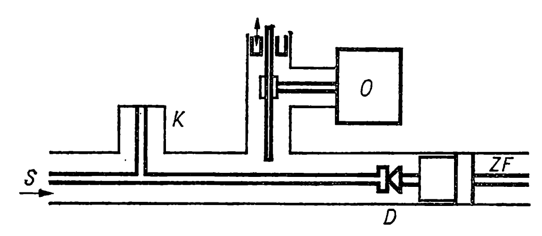


Abb. 8.20 Überlagerungsempfang bei Höchstfrequenzen

ZF wird mit gewöhnlichen Röhren weiterverstärkt. Bei kleiner Signalspannung ist die ZF-Spannung dieser proportional, so daß die Mischung empfindlicher als die Gleichrichtung ist. Die Oszillatorspannung ist immer viel größer als die Signalspannung. Die Anpassung muß eine doppelte sein: einmal soll der Detektor D den Wellenleiter ideal abschließen, damit ihm die gesamte einfallende Leistung zugeführt wird. Zum anderen muß er auch einen passenden Eingangswiderstand für den ZF-Verstärker abgeben. Um die Ausbreitung der Oszillatorfrequenz in entgegengesetzter Richtung zu verhindern, ist ein Richtkoppler K eingebaut, der nur auf die Wellenlänge des Signals abgestimmt ist. Über Kristallmischdioden siehe [*8.9*], Klystronverstärker siehe [*8.23, 8.171*].

8.6 Nachweismethoden im Höchstfrequenzbereich [*8.6, 8.77, 8.188, 8.191*]

8.61 Grundsätzliches

Auf Grund der mit dem elektromagnetischen Feld verknüpften Energie im Bereich der Millimeter- und Zentimeterwellen sind Strom und Spannung in Widerständen örtlich nicht mehr zugeordnet. Trotzdem ist es möglich, beide Größen unter bestimmten Voraussetzungen und Einschränkungen zu messen, während man in der Optik auf Leistungsmessung beschränkt bleibt. Da Spannung und Strom in Mikrowellenapparaten keine eindeutigen Größen sind, mißt man statt Feldstärken oder Relativamplituden besser Impedanzen bzw. Reflexionskoeffizienten.

In § 3.7 ist gezeigt worden, daß Strom und Spannung an jeder Stelle einer Übertragungsleitung entsprechend $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{Z}$ durch die Impedanz $\boldsymbol{Z}$ verknüpft sind. Dies gilt auch für jeden Hohlleiter, dessen Leistungsfluß nach Gl. (8/36)

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{I}^*$$

ist, wenn $\boldsymbol{I}^*$ der zu $\boldsymbol{I}$ konjugiert komplexe Strom ist. Für die elektrische und magnetische Feldstärke läßt sich z. B. für einen rechteckigen Hohlleiter, in dem sich die Welle in der Z-Richtung ausbreitet, der Ansatz machen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(x, y) &= \boldsymbol{U}\boldsymbol{e}(x, y), \\ \boldsymbol{H}(x, y) &= \boldsymbol{I}\boldsymbol{h}(x, y), \end{aligned} \tag{8/75}$$

wobei $\boldsymbol{e}$ und $\boldsymbol{h}$ die Feldverteilung in Transversalrichtung angeben und so normiert sind, daß $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{h} = 1$. Grundsätzlich läßt sich mit diesen Größen die Impedanz der Leitung bestimmen; es ist meist bequemer, ihre Streueigenschaften festzustellen. Bezeichnet man hierzu die durchgehende bzw. reflektierte Welle mit

$$\begin{aligned} t &= |\boldsymbol{t}|\, \mathrm{e}^{-\alpha z - j\beta z} \\ r &= |\boldsymbol{r}|\, \mathrm{e}^{\alpha z - j\beta z}, \end{aligned} \tag{8/76}$$

wobei α die Dämpfungskonstante und β die Phasenkonstante ist, so findet man für den Poynting-Vektor den Ausdruck

$$|\boldsymbol{S}| = |\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}| = |t|^2 - |r|^2. \tag{8/77}$$

Beide Verfahren, Impedanz- und Streumessungen, haben ihren besonderen Anwendungsbereich.

8.62 Leistungsmessung [*8.42, 8.45, 8.163, 8.172 8.138*]

Bei der *Leistungsmessung* läßt sich zwischen Durchgangs- und Absorptionsinstrumenten unterscheiden. Die *Durchgangsmesser* entnehmen während der Messung einen kleinen Teil der einfallenden Leistung und verbrauchen diesen in der Meßdiode oder durch Umwandlung in Wärme. Beim *Absorptionsmesser* wird die gesamte HF-Energie in Wärme umgewandelt und diese kalorimetrisch gemessen.

8.621 Kalorimetrische Leistungsmessung

Beim *kalorimetrischen Leistungsmesser* wird die HF-Energie in Hohlleitungen geführt, die am Ende mit dem Meßelement abgeschlossen sind. In ihm wird die gesamte ankommende Energie absorbiert und in Wärme verwandelt. In Abb. 8.21 sind schematisch zwei Ausführungsbeispiele dargestellt: In (*a*) führt man einen Flüssigkeitsstrom in einem dünnen Rohr in flachem

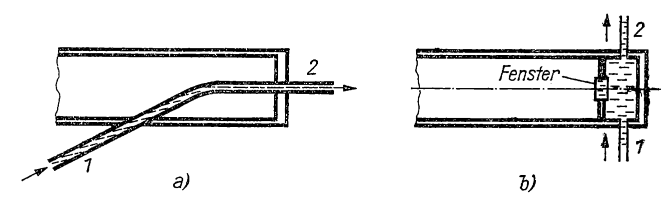


Abb. 8.21 Kalorimetrische Leistungsmessung

Bogen durch den Hohlleiterabschluß, wodurch eine Reflexion vermieden wird; in (*b*) besteht das Kalorimeter aus einem abgeschlossenen Gefäß mit Zu- und Abfluß, in das die Welle durch ein dielektrisches Fenster eintritt. In beiden Fällen erhöht sich die Temperatur zwischen *1* und *2* um $\varDelta T$; man erhält die absorbierte Leistung aus

$$P = \dot{m} c_p \varDelta T,$$

wenn $\dot{m}$ die durchfließende Flüssigkeitsmenge und c_p ihre spezifische Wärme ist. Bei kleinen zu messenden Leistungen sind Meßfehler durch ungewünschten Wärmezustrom zu berücksichtigen. Das Verfahren ist für Leistungen oberhalb von 1 W bis zu vielen Hundert W geeignet. Zwischen einigen mW und 10 W werden *Substitutionsverfahren* benutzt; verschiedene Ausführungsformen siehe [*8.37, 8.38, 8.89, 8.146, 8.147, 8.159*].

Bei dem von JAEGER und SCHNEIDER [*8.86*] angegebenen Mikrowellenkalorimeter, das zur Messung hoher Spitzenleistungen entwickelt ist, befindet sich das absorbierende Meßelement nicht unmittelbar am Hohlleiterabschluß, sondern wird mittels eines Drahtgitters in der Seitenwand des Hohlleiters angekoppelt. Die Leistungsmessung erfolgt nach einer Substitutionsmethode und ist auf $\pm 2\%$ genau.

8.622 Bolometerverfahren [*8.10, 8.34, 8.46, 8.55, 8.106, 8.139, 8.164*]

Bei der *bolometrischen Leistungsmessung* bildet ein temperaturabhängiger Widerstand den Abschluß der Meßleitung, dessen Temperaturerhöhung mit einer Widerstandsmeßbrücke bestimmt wird. Grundsätzlich spielen die Abmessungen des Bolometerdrahtes oder -bändchens keine Rolle; sie sollten so gewählt werden, daß das Bolometer in den Wellenleiter eingebaut werden kann und ihn ohne Hilfsmittel reflexionsfrei abschließt.

In Abb. 8.22 sind zwei Ausführungsformen einer Bolometeranordnung dargestellt. In (*a*) ist der Bolometerdraht *D* für den Abschluß einer konzentrischen Hohlleitung als Teil des Innenleiters ausgebildet. Der Kurzschluß

für die HF am Ende der konzentrischen Leitung wird mit der geknickten Hilfsleitung L hergestellt, so daß das am Abschlußkolben K befestigte Ende des Bolometerdrahtes gegen den Außenleiter isoliert herausgeführt und der Widerstandsbrücke zugeleitet werden kann. Beim Hohlleiter in Abb. 8.22b wird das Bolometer D in Richtung des elektrischen Feldes $\boldsymbol{E}$ angeordnet,

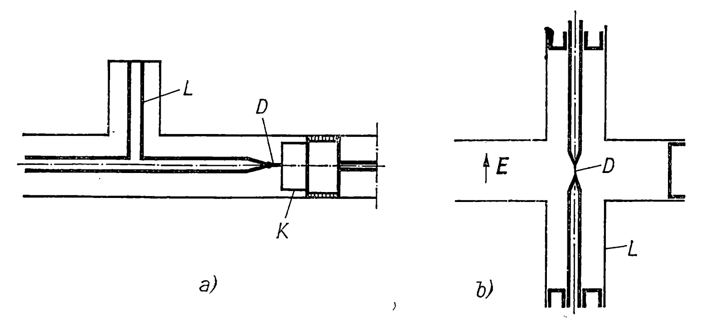


Abb. 8.22 Bolometer zur Leistungsmessung

wozu quer im Rohr eine konzentrische Meßleitung L vorgesehen ist. Durch Verschieben der Abschlußkolben können Reflexionsfaktor und Anpassung optimal eingestellt werden. Da der untere Kolben isoliert in L geführt wird, kann die Meßbrücke durch eine konzentrische Leitung angeschlossen werden.

Als *Meßelemente* kommen metallische Leiter in Form von Wollaston-

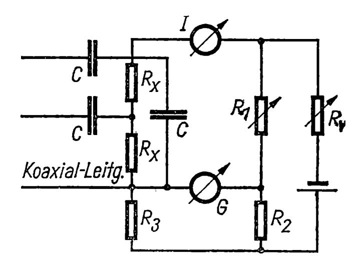


Abb. 8.23 Bolometerbrücke zur Leistungsmessung

Drähten (Durchmesser $< 1\ \mu$m, Länge 1 bis 2 mm) in Betracht, die erst nach dem Einlöten in das Meßsystem abgeätzt werden. Auch aufgedampfte Metallfilme auf Glas- oder Glimmerunterlage, deren Dicke nur einige Zehn Nanometer beträgt, sind hierfür geeignet. Hinsichtlich des Temperaturkoeffizienten sind *Thermistoren* (s. § 9.362) den metallischen Bolometern weit überlegen. Das sind gesinterte Mischungen aus Metalloxiden und Metallpulver in Form von Kügelchen mit einigen Zehntel Millimeter Durchmesser, in die dünne Drähte als Zuleitungen eingesintert sind. Im Gegensatz zu den metallischen Bolometern besitzen sie einen *negativen Temperaturkoeffizienten* bei einer Empfindlichkeit von etwa 5 grd/mW sowie eine thermische Zeitkonstante von 0,1 bis 1 s. Sie sind auch weniger gegen Überlastung empfindlich.

Der Zusammenhang zwischen absorbierter Leistung und Widerstandsänderung des Bolometers hängt vom Temperaturkoeffizienten des Widerstandes, den Abmessungen und der Wärmeabführung an die Umgebung ab. Er braucht jedoch nicht bekannt zu sein, da das Bolometer mit Gleichstrom oder niederfrequentem Wechselstrom geeicht wird. Eine hierfür geeignete Schaltung ist in Abb. 8.23 dargestellt, wobei die beiden Bolometerwiderstände R_x den Abschluß einer Koaxialleitung bilden. Durch die Kondensatoren C wird die aus den Widerständen R_x, R_1, R_2, R_3 bestehende Wheatstone-Brücke gleichstrommäßig gegen die Meßleitung abgeblockt. Der Nullabgleich wird am Galvanometer G abgelesen und mittels R_1 vorgenommen; der Bolometerstrom wird am Strommesser I gemessen und kann durch den Vorwiderstand R_v eingestellt werden. Wie aus Abb. 8.23 ersichtlich, sind die Bolometerwiderstände für die UHF-Welle parallel, für den Meßkreis in Serie geschaltet.

Bolometer besitzen bis etwa 55 dB über Rauschniveau für die anliegende UHF-Spannung eine quadratische Charakteristik und sind wenig überlastbar. Thermistoren sind gegen Überlastung weniger empfindlich, da bei zu großen Leistungen eine erhebliche Fehlanpassung entsteht. Die unmittelbar zu messende Leistung liegt bei 1 mW; durch vorgeschaltete *Dämpfungselemente* (Richtkoppler, Spannungsteiler, Dämpfungsglieder) läßt sich der Meßbereich erweitern. *Impulsleistungen* können als Mittelwert mit Thermistor-Bolometern auf etwa 2% genau gemessen werden.

8.623 Leistungsmessung mit Thermoelementen

Anstelle des Bolometers, das einem Widerstandsthermometer entspricht, kann zum Nachweis von Mikrowellen auch das *Thermoelement* (siehe z. B. Bd. II, § 2.3) verwendet werden. Dieses besitzt gegenüber dem Bolometer den Vorteil der einfacheren Meßschaltung. Von OMORI und SAKURAI [*8.132*] wird für die Bänder um 7 und 10 GHz ein Mikrowellenkalorimeter für 1···10 mW beschrieben, bei dem die Erwärmung des Bolometerkörpers, der auf $\pm 10^{-5}$ grd konstant gehalten wird, durch ein Thermoelement gemessen wird.

Von GORDON-SMITH [*8.64*] wird ein Milliwattmeter für Zentimeterwellen angegeben, das aus zwei 1 cm langen Glaskölbchen mit identischen Heizleitern (Kohleschichtwiderständen) besteht, die an Differentialluftthermometern angeschlossen sind. Während der eine Widerstand durch die HF-Energie erwärmt wird, wird dem zweiten Vergleichswiderstand eine bekannte Gleichstromleistung zugeführt und auf Temperaturgleichgewicht eingeregelt. Der Meßbereich dieses Instruments reicht von 10 bis 100 mW; die erzielbare Genauigkeit wird mit $\pm$ 2% angegeben.

8.624 Tieftemperaturbolometer [*8.14*]

Die Nachweisgrenze der Bolometer ist durch das *Rauschen* des Widerstandselementes gegeben. Dieses setzt sich aus zufälligen Temperaturschwankungen durch den Wärmeaustausch mit der Umgebung, die proportional zu $T^{5/2}$ sind, und dem Widerstandsrauschen ($\sim T$) zusammen. Benutzt man ein Bolometer mit hohem Temperaturkoeffizienten, kleiner Wärmekapazität

und niedrigem Wärmeverlust und legt die Arbeitstemperatur zwischen 1 und 5 K, so läßt sich der Rauschuntergrund stark reduzieren und eine Nachweisgrenze von 1 fW erreichen.

Als Meßwiderstand sind *Halbleiterwiderstände* sowie *supraleitende Metallfilme* geeignet, wobei im letzten Fall die Arbeitstemperatur mit dem Sprungpunkt T_c (s. § 9.82) des Supraleiters zusammenfällt.

8.625 Kristalldetektor (s. a. § 4.242)

Natürlich ist die Quantenenergie von Mikrowellen zu klein, um Energieübergänge in Halbleiterelementen oder anderen Systemen hervorrufen zu können. Die Wirkungsweise von *Kristalldetektoren* im Bereich der Mikrowellen beruht auf dem bei geringen Frequenzen auftretenden Gleichrichtereffekt. Die HF-Energie wird dabei unmittelbar in einen *Richtstrom* umgewandelt, den der Detektor mit dem Innenwiderstand R_i erzeugt. Grundsätzlich sind hierfür auch *Vakuumdioden* (s. § 4.23) kleinster Abmessungen geeignet, sofern Laufzeiteffekte zwischen den Elektroden vernachlässigt werden können. Der apparative Aufwand ist jedoch groß und die Nachweisgrenze wegen der mit $\sqrt{U_a}$ proportionalen Elektronengeschwindigkeit beschränkt.

Sowohl für den *Spitzengleichrichter*, der im Mikrowellenbereich fast ausschließlich verwendet wird, als auch für den Gleichrichter mit einem pn-Übergang gilt analog zu Gl. (4/33) die Beziehung

$$I = I_0(e^{eU/kT} - 1), \tag{8/78}$$

auch für die Sperrichtung mit $U = -U$. Für sehr hohe Frequenzen sind Innenwiderstand R_g und Eigenkapazität C_g maßgebend, die nach Abb. 7.12 als Parallelschaltung im Ersatzbild des Detektors erscheinen. Für relativ kleine Ströme werden diese etwa $\sim U^2$, d. h. nach § 8.61 proportional zur Leistung.

Der Detektor soll möglichst reflexionsfrei und so eingebaut werden, daß die Messung in einer großen Bandbreite möglich ist. Ein Ausführungsbeispiel für den Einbau in einen Rechteckhohlleiter ist in Abb. 8.24 dargestellt. Der Detektor besteht aus dem zylindrischen Keramikröhrchen A, einem Metalleinsatz mit dem Si-Kristall *Si*, gegen den federnd die Wolframspitze W gepreßt wird, und dem metallischen Anschluß C, der Kontakt mit dem isolierten Gegenstück C' am Hohlleiterende gibt. Der gleichgerichtete Strom wird über ein an C' angeschlossenes Koaxialkabel ausgekoppelt.

Für den Nachweis sehr kleiner Leistungen spielt die Rauschleistung der Diode eine dominierende Rolle. In vielen Fällen, z. B. in Meßbrücken, wird sie nur als Nullindikator benutzt (s. § 8.644). Oberhalb des quadratischen Bereichs muß der Kristalldetektor mit thermischen Instrumenten geeicht werden; eine Eichung mit Gleichspannung ist nicht möglich.

8.626 Thermischer Halbleiterdetektor

Nach dem Vorschlag von Kinch und Rollin [*8.95*] lassen sich sehr schwache HF-Energien im Millimeterwellenbereich mit hochreinen n-Halbleitern über die Änderung der Trägerbeweglichkeit nachweisen. Durch Absorption der zu messenden HF-Leistung wird die Energie der Träger gegenüber ihrem ther-

mischen Gleichgewichtswert erhöht und der Widerstand des Halbleiters erniedrigt (s. Gl. 4/29). Maximale Empfindlichkeit läßt sich erzielen, wenn *a*) die Absorption der Strahlung durch die freien Ladungsträger maximal ist; *b*) die Beweglichkeit der Träger stark von ihrer Energie abhängt und *c*) der Energieaustausch zwischen Träger und Kristallgitter klein ist. Dies läßt sich durch Verwendung von n-leitendem *Indiumantimonid* erreichen, das auf Heliumtemperatur gekühlt wird.

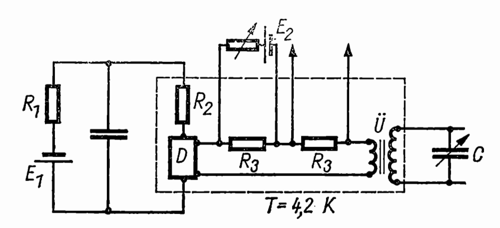


Abb. 8.24 Mikrowellenkristalldiode in einem Hohlleiter

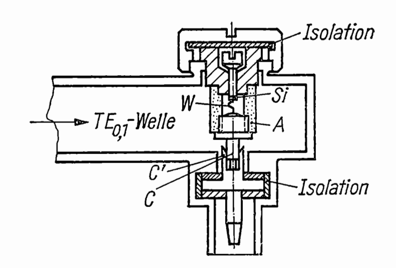


Abb. 8.25 Schaltung eines Halbleiterdetektors

In Abb. 8.25 ist vereinfacht die Schaltung eines solchen Halbleiterdetektors angegeben. Das aktive Element D besteht aus einem Einkristall von hochreinem Indiumantimonid mit n-p $= 5 \cdot 10^{13}$ cm^{-3}. Der Kristall besitzt eine Fläche von $5{,}5 \times 3{,}3$ mm^2 und ist 0,5 mm dick; die Strom- und Potentialanschlüsse bestehen aus Indiumlot mit 0,1% S-Zusatz. Die nachzuweisende Strahlung wird durch einen Hohlleiter im Millimeterwellengebiet, durch einen Lichtleiter im langwelligen Ultrarot auf den Detektor gerichtet, der sich zusammen mit den Widerständen R_2, R_3 und dem supraleitenden Transformator $\ddot{U}$ auf 4,2 K befindet. Der Kristall wird von der Batterie E_1 mit konstantem Strom versorgt. Durch die Absorption *modulierter* Strahlung entsteht an den Potentialklemmen eine Wechselspannungskomponente, die an die Primärwicklung von $\ddot{U}$ gelegt wird. Die Sekundärwicklung ist durch die Kapazität C, die sich außerhalb des Kryostaten befindet, auf die Modulationsfrequenz abgestimmt. Die Ausgangsspannung wird einem Breitbandverstärker zugeführt und in einem phasenempfindlichen Detektor (s. § 7.66) gemessen. Die Empfindlichkeit läßt sich durch die Beziehung

$$S = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial P} \qquad (8/79)$$

definieren, wenn μ die Beweglichkeit und P die absorbierte Leistung ist. Liegt am Detektorkristall die Spannung U, so wird diese durch die absorbierte Energie entsprechend einer Beweglichkeitsänderung $\Delta\mu$ für $I = \text{const}$ um den Betrag ΔU geändert. Damit entsteht die Signalspannung

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}P} = -\frac{U}{\mu}\,\frac{\partial\mu}{\partial P} = -S\,U, \tag{8/80}$$

die wegen des nichtlinearen Verlaufs von $\mathrm{d}U/\mathrm{d}I$ vom Strom abhängt. Die Gleichspannungskomponente wird durch die Kompensationsspannung E_2 mit Serienwiderstand eliminiert.

Für die Wellenlänge von 0,8 cm wird mit dem oben angegebenen InSb-Plättchen bei $I = 2$ mA eine Empfindlichkeit von 150 V/W bei 4,2 K und 300 V/W bei 1,8 K erreicht. Bei einer Bandbreite von 1 Hz lassen sich mit diesem Detektor in einem Spektralbereich von 0,3 bis 10 mm Wellenlänge noch 0,3 pW nachweisen, wobei die Zeitkonstante 0,1 µs beträgt.

8.627 Elektronenstrahl-Leistungsmesser [*8.83*, *8.167*]

Das Verfahren besteht in der Messung der Energieänderung eines Elektronenstrahls, der einen Rechteckhohlleiter in Richtung des elektrischen Vektors durchläuft, d. h. senkrecht zur Rohrachse und größeren Kante für eine $TE_{0,1}(H_{10})$-Welle (s. Abb. 8.2). Entspricht die Laufzeit des Elektronenstrahls, die durch die Beschleunigungsspannung eingestellt werden kann, einem ungeraden Vielfachen der halben HF-Periodendauer, so nimmt er aus dem Feld Energie auf und tritt mit größerer Geschwindigkeit aus dem Hohlleiter aus. Die Geschwindigkeitsänderung wird an einer Elektrode durch die Gegenspannung gemessen, bei der der Strahlstrom gerade verschwindet. Die Differenzspannung zwischen Beschleunigungs- und Gegenspannung ist ein Maß für die elektrische Feldstärke und damit für die Leistung im Hohlleiter.

Die praktische Ausführung besteht aus einer Hochvakuumröhre, die den Hohlleiter senkrecht durchsetzt, einer Elektronenquelle mit Strahlfokussierung und der Gegenelektrode. Das Verfahren verspricht eine Standardmethode zu werden und eignet sich sowohl für die Messung mittlerer und großer Dauerstrich- als auch Impulsleistungen.

Das Verfahren ist auch für Koaxialleiter anwendbar, wenn mit dem Innenleiter eine Glühkatode geringer axialer Länge verbunden ist und die Beschleunigungsspannung phasenrichtig an einer Gegenelektrode gemessen wird.

8.628 Verschiedene Leistungsmeßverfahren

Beim *Ferrit-Leistungsmesser* [*8.87*] wird die Präzession der magnetischen Momente unkompensierter Elektronenspins in ferromagnetischen Materialien benutzt, die einem hochfrequenten Magnetfeld ausgesetzt sind. Nach Penjakowa [*8.107*] läßt sich durch Messung des Strahlungsdrucks, der beim Durchgang elektromagnetischer Wellen auf die Wandungen eines Hohlleiters ausgeübt wird, die Leistung bestimmen. Zur Druckmessung wird eine dünne piezoelektrische Quarzplatte, die an der Schmalseite eines im $TE_{0,1}(H_{10})$-

Modus schwingenden Rechteckleiters eingesetzt wird, verwendet. Das Verfahren ist nur für hohe Leistungen anwendbar und auf einige Prozent genau.

Nach BARLOW [8.8] läßt sich die Leistung von Mikrowellen durch in einem geeigneten Halbleiter hervorgerufenen Hall-Effekt messen. Mit einer Versuchsanordnung für 4 GHz wird bei einer Leistung von 50 mW eine Hall-Spannung von etwa 1,5 μV mit einer linearen Charakteristik gefunden.

Auch die in § 2.366 besprochene Methode, die elektrische Feldstärke mit Hilfe des elektrooptischen Kerreffekts zu bestimmen, kann nach FUJISAWA [8.53] bei sehr hohen Frequenzen angewandt werden. Als Meßkristall wird *Ammoniumorthophosphat* ($NH_4H_2PO_4$) benutzt, das durch eine in Z-Richtung wirkende elektrische Feldstärke doppelbrechend wird. Die optische Phasendrehung wird durch linear polarisiertes Licht fotometrisch gemessen. Durch Vergleich mit einer bekannten Gleichspannung läßt sich die Meßanordnung eichen.

In *Tabelle 8.6* sind Frequenzbereich und Nachweisgrenze einiger physikalischer Leistungsmeßverfahren zusammengestellt.

Tabelle 8.6 Anwendungsbereich und Kenngrößen von Millimeterwellendetektoren

Detektor	Spektralbereich	Nachweisgrenze pW	Rauschmaß*	Zeitkonstante s
InSb-Detektor	300 μm···1 cm	0,3	$2{,}5 \cdot 10^{12}$	$3 \cdot 10^{-7}$
magn. InSb-Det.	200 μm···1 mm	1···5	$2 \cdot 10^{11} \cdots 4 \cdot 10^{10}$	10^{-7}
supraleitendes Bolometer	1 μm···1 mm	3	—	$10^{-2} \cdots 10^{-3}$
Ge-Blolometer	8 μm···2,4 mm	0,5···500	—	$4 \cdot 10^{-4}$
Koheschicht-widerstände	—	10	—	10^{-2}
Golay-Zelle	—	5	—	10^{-2}

* Als Rauschmaß ist das Signal-Rausch-Verhältnis in Volt pro Watt absorbierter Leistung pro Quadratzentimeter Auffangfläche und 1 Hz Bandbreite definiert.

8.63 Frequenzmessung im Mikrowellenbereich

Bei sehr hohen Frequenzen im UR-Bereich ist die Frequenz nur eine berechenbare und keine Meßgröße; im Mikrowellengebiet hingegen ist die direkte Messung der *Frequenz* als Zahl der Schwingungen pro Sekunde möglich. Im Vergleich zur *Wellenlängenmessung* läßt sich mit der Frequenzmessung eine wesentlich höhere absolute Genauigkeit erzielen. Eine weitere Möglichkeit stellt die Benutzung von *Resonanzmessern* in Form geeichter Schwingungskreise dar.

8.631 Frequenznormale

Zur Messung der Frequenz von Absorptionslinien im Mikrowellengebiet wird diese mit einer Normalfrequenz verglichen, die durch Vervielfachung der Frequenz eines Quarzoszillators in Röhrenschaltungen erzeugt wird (vgl.

§§ 7.14, 7.421). Bei einer Ausgangsfrequenz von 20 MHz läßt sich durch Frequenzvervielfachung und -mischung ein Spektrum von Einzelfrequenzen im Abstand von 20 MHz bis ins Mikrowellengebiet erzeugen, wobei die Frequenzgenauigkeit durch die des Quarzoszillators gegeben ist. Soll die unbekannte Frequenz einer Absorptionslinie gemessen werden, so benutzt man einen geeigneten Klystronoszillator (s. § 8.32), der frequenzmoduliert wird und die Absorptionslinie periodisch abtastet. In einem Mischdetektor (s. § 8.55) wird die Klystronstrahlung f_k mit einer passenden bekannten Oberwelle $f = nf_n$ des Frequenznormals überlagert und die beim Überfahren der Absorptionslinie entstehende Differenzfrequenz $f_s = nf_n - f_k$ gemessen. Hierzu ist jeder geeichte und abstimmbare HF-Empfänger geeignet, dessen Absolutgenauigkeit nur einige Promille betragen kann. Die Größe n läßt sich aus der Resonanzmessung mit Hilfe eines Hohlraumresonators (s. § 8.632) bestimmen.

Von FITZKY [*8.50*] wird ein solches Frequenznormal angegeben, dessen Grundfrequenz von 10 MHz von einem Quarzoszillator erzeugt wird und über kurze Meßzeiten auf 10^{-8} konstant ist. Dieses 10-MHz-Signal wird in einer zweiten Stufe auf 20 MHz verdoppelt und mit der von einem Normalfrequenzsender ausgestrahlten Frequenz von 10 MHz oszillographisch verglichen. Durch weitere Vervielfacherstufen werden schließlich 60, 1080 und 2160 MHz erzeugt, die einem Detektorvervielfacher über gesonderte Abschwächer zugeführt werden. Hierdurch läßt sich ein Spektralbereich bis 25 GHz erreichen. Durch Mischung dieser Oberwellenstrahlung mit der Klystronfrequenz wird am Mischdetektor eine Differenzfrequenz $\leqq$ 10 MHz erhalten, die mit einem Überlagerungsempfänger gemessen wird. Das Verfahren eignet sich für Frequenzen bis zu 25 GHz und kann auf 10^{-7} genau ausgeführt werden; siehe auch [*8.90, 8.186, 8.115*].

8.632 Frequenzspektrometer

Zur Messung der Form und Frequenz von Absorptionslinien, wie z. B. bei Elektronenresonanzen, wird das in § 8.631 beschriebene Überlagerungsprinzip in vereinfachter Weise angewandt; die Methode ist als Blockschaltbild in Abb. 8.26 dargestellt. Das zu messende Signal wird der Kristallmischstufe M zusammen mit der frequenzmodulierten Spannung des Klystronoszillators O zugeführt. Zur Frequenzmodulation des Reflexklystrons dient die Sägezahnspannung von 30···50 Hz des Generators S, die der Anodenspannung des Klystrons überlagert wird und den Frequenzhub von O steuert sowie die Zeitablenkung des ESO liefert. Im fest abgestimmten ZF-Verstärker Z wird die Differenz aus Signalfrequenz und Oszillatorfrequenz empfangen und das Band der Signalfrequenzen nacheinander aufgenommen und verstärkt. Nach Gleichrichtung im Detektor D und Verstärkung im Videoverstärker V erscheint auf dem Oszillografenschirm das Spektrum der ankommenden Mikrowellen als Ordinate und über dem Frequenzhub des Oszillators O als Abszisse. Die Auflösung des Gerätes hängt von der Bandbreite von Z sowie vom Frequenzgang des Verstärkers V ab. Mit diesem Spektrometer kann die Signalfrequenz mit einer Normalfrequenz verglichen werden, indem beide gleichzeitig der Mischdiode zugeführt werden.

Zur Messung der Resonanzfrequenz von *Topfkreisen* (s. § 8.2) kann die in Abb. 8.27 dargestellte Prinzipschaltung benutzt werden. Der Oszillator O mit Sägezahnmodulation und der mittleren Frequenz f_0 wird lose an den Hohlraumresonator R angekoppelt, dessen Ausgangsspannung im Mischdetektor D_1

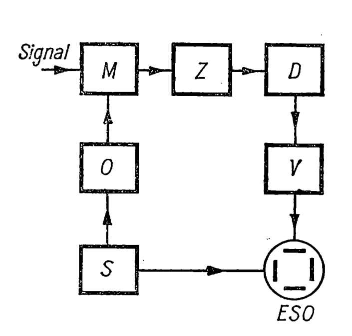


Abb. 8.26 Signalfrequenzspektrometer

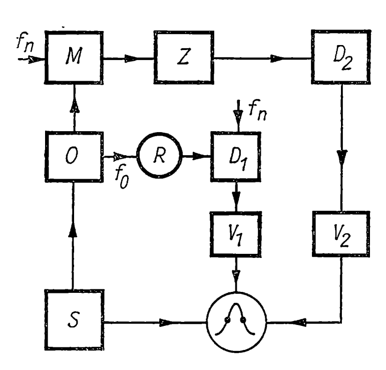


Abb. 8.27 Messung der Resonanzfrequenz von Topfkreisen

mit der Normalfrequenz f_n verglichen wird. Die Sägezahnspannung des Generators S schreibt wie in Abb. 8.26 die Abszisse, die Mischspannung über den Verstärker V_1 die Ordinate des ESO. Auf dem Oszillografenschirm erscheint die Resonanzkurve des Topfkreises. Um die Frequenz für das Maximum der Resonanzkurve zu messen, wird die Normalfrequenz f_n dem Überlagerungsempfänger M zugeführt, dessen Zwischenfrequenz möglichst niedrig sein soll. Im durchwobbelten Frequenzbereich gibt es dann zwei Einstellungen der Oszillatorfrequenz, bei denen die ZF f_z entsteht: $f_0 = f_n \pm f_z$. Wird dieser Frequenzbereich schnell überstrichen, entstehen im ZF-Verstärker Z zwei Impulse, die im Detektor D_2 gleichgerichtet und im Verstärker V_2 verstärkt werden. Steuert man mit dieser Ausgangsspannung den Wehnelt-Zylinder des ESO, so entstehen zwei helle oder auch dunkle Marken auf der Resonanzkurve, die dann symmetrisch zum Resonanzmaximum liegen, wenn f_n mit der Resonanzfrequenz des Resonators übereinstimmt. Der Frequenzabstand zwischen den Marken entspricht der doppelten Zwischenfrequenz.

Ersetzt man den Resonanzkreis durch eine Absorptionszelle in Form eines Hohlrohrs, dessen Füllgas im angewandten Frequenzbereich Absorptionslinien besitzt, so entstehen auf dem Schirm des ESO die entsprechenden Absorptionskurven (*Mikrowellenspektrometer*); siehe auch [*8.182*].

8.633 Frequenzstabilisierung

Eine sehr wichtige Aufgabe besteht darin, die Frequenz eines Reflexklystrons (s. § 8.32) mit der Normalfrequenz eines Hohlraumresonators zu stabilisieren. Da durch Verändern der Beschleunigungsspannung U_0 die Frequenz innerhalb von 1% des Nennwertes variiert werden kann, muß der Beschleunigungsspannung eine *Regelspannung* überlagert werden, die der Differenz zwischen Klystron- und Resonatorfrequenz proportional ist. Bei einer solchen als

Diskriminator bezeichneten Anordnung wird nicht die Amplitude (die an der Resonanzstelle ihr Vorzeichen *nicht* wechselt), sondern die *Phase* des Reflexionsfaktors der Mikrowelle am Hohlraumresonator als Regelgröße benutzt.

In Abb. 8.28 ist eine hierzu geeignete Anordnung dargestellt, wobei zur Phasenmessung ein magisches T (s. § 8.74) verwendet wird. Ein Seitenarm ist an den Topfkreis R angeschlossen, während der andere kurzgeschlossen

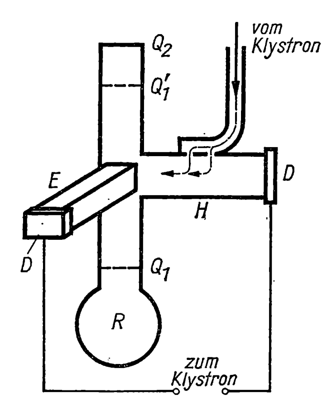


Abb. 8.28 Frequenzstabilisierung eines Klystrons

ist. Bei Resonanz ist sein Abschlußwiderstand in einer geeigneten Querschnittsebene Q_1 ein reiner Wirkwiderstand, an dem die Welle mit 180° Phasensprung reflektiert wird. Der Kurzschluß Q_2 im oberen Seitenarm des magischen T wird so eingestellt, daß er um $\lambda/8$ weiter von der Symmetrieebene entfernt ist als Q_1. Die durch den H-Arm einfallende Mikrowelle verteilt ihre Leistung gleichmäßig auf beide Seitenarme, und die an den Abschlüssen reflektierten Wellen besitzen in der Mitte des T eine Phasenverschiebung von 90°. Sind E- und H-Arm durch ideal angepaßte Detektoren D mit gleichen Kennlinien abgeschlossen, so liefern sie gleiche Gleichspannungen, da sich die Leistung auf beide Arme gleichmäßig verteilt. Ändert sich die Klystronfrequenz, so wird auch die Phasenverschiebung der reflektierten Wellen größer oder kleiner als 90° und ein größerer bzw. kleinerer Leistungsanteil in den E-Arm eingekoppelt. Im Bereich der Resonanz verläuft die Differenz der Detektorgleichspannungen linear. Sie kann als Regelspannung zur mittleren Beschleunigungsspannung des Klystrons addiert werden und bewirkt die gewünschte Frequenzstabilisierung.

8.634 Wellenmesser [*8.100*]

Als *Wellenmesser* werden Anordnungen bezeichnet, bei denen die gesuchte Frequenz mittelbar aus der Beziehung

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

mit Hilfe einer Interferenzmessung bestimmt wird. Im einfachsten Fall werden hierzu stehende Wellen in einer Meßleitung mit einem verschiebbaren Detektor abgetastet und an einer Skala die Abstände der Minima, die einer halben Wellenlänge entsprechen, gemessen. Die erreichbare Genauigkeit beträgt bei Mittelung über mehrere Minima höchstens 10^{-3}. Der Meßfehler resultiert aus den Einflüssen von Temperatur und Luftfeuchtigkeit, aus der Verkürzung der Wellenlänge durch die Leitungsdämpfung sowie aus ihrer Verlängerung durch den Meßleitungsschlitz für die Sonde.

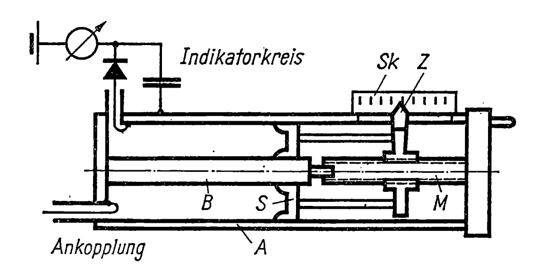


Abb. 8.29 Koaxialleiter-Wellenmesser

Wesentlich genauer ist die Benutzung eines *Leitungsresonanzkreises* oder *Topfkreises,* der, wie aus § 8.2 hervorgeht, eine Interferenzanordnung darstellt. Die extrem hohen Kreisgüten der Hohlraumresonatoren gewährleisten bei sorgfältiger mechanischer Konstruktion eine große Meßgenauigkeit. Die in Abb. 8.29 dargestellte, einfachste Bauform eines solchen Wellenmessers

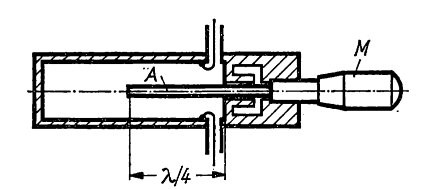


Abb. 8.30 Topfkreiswellenmesser mit λ/4-Abstimmung

besteht aus dem zylindrischen Rohr A und dem Innenleiter B, dessen Hohlraum durch einen Schieber S abgeschlossen ist. Dieser Kurzschlußschieber muß innen und außen einen guten galvanischen Kontakt mit A und B liefern und kann durch die Mikrometerschraube M axial verschoben werden. Die Resonanzfrequenz ist erreicht, wenn der Abstand des Schiebers vom Resonatorboden $\lambda/2$ entspricht. Dieser kann mittels Zeiger Z und Skala Sk abgelesen werden, wenn am Indikatorkreis maximale Spannung angezeigt wird.

Eine zweite Form von Hohlraumwellenmesser stellt der in Abb. 8.30 gezeigte *Topfkreiswellenmesser* mit $\lambda/4$-Abstimmung dar [*8.47*]. Dieser Hohlraumresonator wird durch eine $\lambda/4$-Koaxialleitung gebildet, die an einem Ende kurzgeschlossen und am anderen Ende offen ist. Durch Ändern der Länge des Innenleiters A mit Hilfe der Mikrometerschraube M läßt sich die

Resonanzfrequenz sehr genau einstellen und ablesen. Von ADELSBERGER [*8.1*] werden solche *Stabwellenmesser* für einen Frequenzbereich von 180 MHz bis 80 GHz beschrieben, mit denen bei Einstellung von nur *einer* Resonanzstelle eine Meßgenauigkeit von $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ erreichbar ist.

Für besonders hohe Genauigkeitsansprüche ist wegen der sehr kleinen Dämpfung der in Abb. 8.31 dargestellte Hohlraumwellenmesser geeignet, bei dem die H_{011}-Schwingung angeregt wird (s. Gl. 8/45). Die Resonanzfrequenz läßt sich durch Verschieben des Resonatordeckels B mit Hilfe der Mikrometerschraube M einstellen, wobei es wegen der besonderen Schwingungsform nicht erforderlich ist, daß B leitend mit der Resonatorwand verbunden ist, da an dieser Stelle kein Strom fließt. Zur Unterdrückung anderer Anregungsmoden, bei denen am Rande von B Strom fließt und hinter diesem in das Feld eindringt, wird auf der Rückseite von B eine Scheibe D aus verlustreichem Dielektrikum befestigt, um dieses Streufeld absorbieren zu können. Zur Ankopplung an den Rechteckhohlleiter H ist die Zylinderwand mit einem kleinen Loch versehen. Weitere Konstruktionen siehe [*8.68*, *8.19*].

8.635 Wellenlängenmessung bei freier Ausbreitung

In Analogie zur optischen Wellenlängenmessung sind verschiedene Interferometer vom Michelson- oder Fabry-Pérot-Typ auch im Millimeterwellengebiet in Gebrauch. In Abb. 8.32 ist schematisch ein Millimeterwelleninterferometer des Fabry-Pérot-Typs dargestellt. Die Interferenzplatte besteht aus der dielektrischen Platte P, deren Rückseite durch einen aufgedampften Metallfilm für die benutzte Strahlung halbdurchlässig gemacht ist. Die Refe-

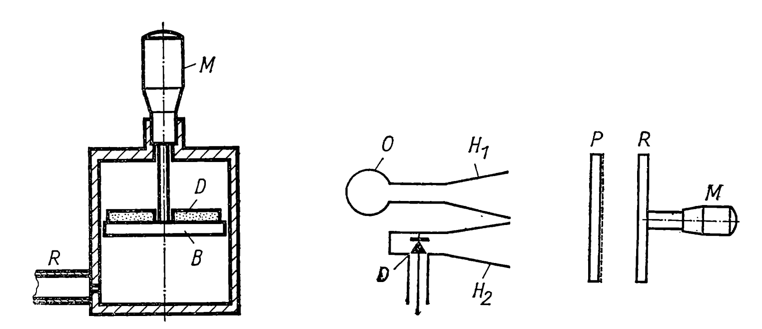


Abb. 8.31 Hohlraumwellenmesser *Abb. 8.32 Fabry-Pérot-Interferometer zur Wellenlängenmessung*

renzplatte R besteht aus Kupfer oder Silber und läßt sich exakt durch die Mikrometerschraube M verschieben. Die vom Oszillator O erzeugte Millimeterwelle wird durch den Hornstrahler H_1 auf die Meßanordnung gerichtet, wobei an P ein Teil reflektiert, der andere zum Reflektor R durchgelassen wird. Verschiebt man R langsam, so entstehen im Detektor D, der an den Empfangshornstrahler H_2 angeschlossen ist, Signalmaxima, die einer Verschiebung von R um $\lambda/2$ entsprechen. Durch Mittelung über eine größere Anzahl dieser Maxima läßt sich eine gute Genauigkeit erzielen.

In ähnlicher Weise kann auch das Michelson-Interferometer [*8.110*] zur Wellenlängenmessung benutzt werden. Beide Anordnungen sind zur Messung der Dielektrizitätskonstanten und Dämpfung dielektrischer Stoffe in Form dünner Platten geeignet (s. a. § 10.6).

8.64 Phasenmessung bei Höchstfrequenz

Phasenmessungen im Millimeterwellenbereich werden zur Messung der DK von Isolierstoffen, für die Bestimmung der Elektronendichte in Plasmen und für viele andere Meßprobleme angewandt. Daneben werden geeichte *Phasenschieber* benutzt, die als Leitung von veränderlicher Länge wirken.

8.641 Phasenschieber

Als *Phasenschieber* wird allgemein eine Anordnung bezeichnet, welche den sogenannten „optischen Weg" $l\lambda/\Lambda$ kontinuierlich zu verändern gestattet, wobei Λ die Wellenlänge in der Hohlrohrleitung ist. Diese ist immer größer als die Vakuumwellenlänge λ und berechnet sich mit Gl. (8/17) zu

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}, \tag{8/81}$$

wenn λ_c die *Grenzwellenlänge* ist, die beim Rechteckhohlleiter die Größe $2b$ (vgl. *Tabelle 8.2*) besitzt. Im einfachsten Fall besteht der Phasenschieber aus einem ausziehbaren Posaunenrohr zur Veränderung von l, das allerdings flexible Anschlüsse an die übrigen Teile erfordert und Kontaktschwierigkeiten mit sich bringt.

Wesentlich günstiger ist die *Quetschleitung* [*8.152*], d. h. ein Stück Rechteckleitung mit je einem Längsschlitz in den Breitseiten und einer Klemmvorrichtung, mit der die Breite b und damit λ_c meßbar verkleinert werden kann. Die erzielbare Phasenverschiebung ist etwa der Länge des elastisch verformten Leitungsstücks proportional.

Eine andere Anordnung, die in Abb. 8.33 dargestellt ist, benutzt die Tatsache, daß ein Dielektrikum an Stellen hoher elektrischer Feldstärke die Rohrwellenlänge Λ stärker verkürzt als an solchen mit geringer. Verschiebt man daher eine dielektrische Platte P von der schmalen Seitenwand des Hohlrohrs mit $TE_{0,1}(H_{10})$-Anregung in die Mitte, so erhält die durchlaufende Welle eine Phasennacheilung. Um Reflexionen zu vermeiden, wird die Platte auf eine Länge von $\Lambda/2$ zugespitzt (s. a. [*8.31*]).

8.642 Messung kleiner Phasenwinkel durch Interferometer

Zur Messung des Brechungsindex der Elektronendichte in Plasmen, der eine lineare Funktion von n/f^2 (n Elektronendichte) ist, lassen sich mit Vorteil Millimeterwellen benutzen. Von Hotson und Seidl [*8.84*] wird hierzu ein Interferometer benutzt, mit dem Phasenwinkel zwischen 0 und 40° mit einer Genauigkeit von 10% gemessen werden können. Die Anordnung, die in Abb. 8.34 vereinfacht dargestellt ist, besteht aus einer Brückenschaltung, bei der

ein Pfad durch die Wellenausbreitung in der Meßstrecke, der andere durch einen geeigneten Phasenschieber gebildet wird. Der Phasenabgleich wird an einem Detektor beobachtet. Im einzelnen enthält die Meßapparatur den Klystronoszillator O für das 3-cm-Band, den Ferritisolator F_1, der verhindert, daß die in der Brücke reflektierten Wellen zum Oszillator gelangen und diesen verstimmen, das Dämpfungsglied A_1 und schließlich ein symmetrisches T-Glied E_1 (s. § 8.74) zur Aufteilung der ankommenden Welle in zwei gleiche

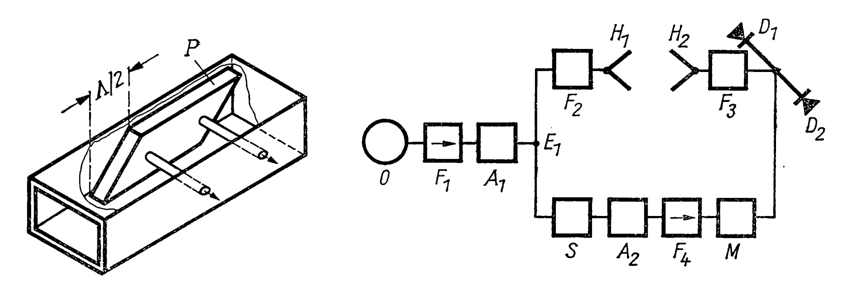


Abb. 8.33 Phasenschieber mit verschiebbarem Dielektrikum

Abb. 8.34 Phasenmeßbrücke bei freier Wellenausbreitung

Anteile für die beiden Meßpfade. Der obere Meßpfad enthält die Hornstrahler H_1 und H_2 mit den Ferritisolatoren F_2 und F_3, welche die eigentliche Meßstrecke (20 cm) überbrücken. Der untere Brückenpfad besteht aus dem Phasenschieber S, dem Dämpfungsglied A_2, dem Ferritisolator F_4 und dem Absorptionswellenmesser M. An einem zweiten symmetrischen T-Glied E_2 sind die beiden Detektoren D_1 und D_2 angeschlossen, die quadratische Kennlinien besitzen. Durch Vergleichsmessungen mit abwechselnd abgeschaltetem oberem oder unterem Pfad und bei ungedämpfter Wellenausbreitung zwischen H_1 und H_2 läßt sich die gesuchte Phasendrehung aus den Ausschlägen an D_1 und D_2 ermitteln (s. a. [*8.168*]).

8.643 Phasenvergleich [*8.158*]

Zur Eichung von Phasenschiebern (s. § 8.641) lassen sich die in Abb. 8.35 dargestellten Schaltungen verwenden. In Abb. 8.35a wird der zu untersuchende Phasenschieber S (mit geringen Verlusten) einem geeichten Leitungskurzschluß K vorgeschaltet, wodurch in der geschlitzten Meßleitung L eine stehende Welle zustande kommt. Der Oszillator O wird auf der anderen Seite von L angekoppelt. Das Meßobjekt S wird in der Weise geeicht, daß entweder bei fester Stellung des Kurzschlußkolbens in K für verschiedene Stellungen von S die Verschiebung des Feldstärkemaximums in der Meßleitung beobachtet wird oder bei fester Lage des Detektors in L die Einstellungen von S und des Meßkolbens in K verglichen werden.

Die Meßschaltung der Abb. 8.35b enthält ein „magisches" T-Glied T mit angepaßtem Detektor D und in den beiden Vergleichsarmen die Kurzschlußleitungen K_1 und K_2 sowie den zu eichenden Phasenschieber S. Wird T durch den H-Arm vom Oszillator O gespeist, so verschwindet das Signal des

am E-Arm angeschlossenen Detektors D, wenn die von beiden Kurzschlußkreisen reflektierten Signale die Verzweigungsstelle mit gleicher Phase und Amplitude erreichen.

In beiden Meßanordnungen entsteht ein Fehler, da Phasenschieber und Kurzschlußleitungen nicht vollkommen angepaßt werden können.

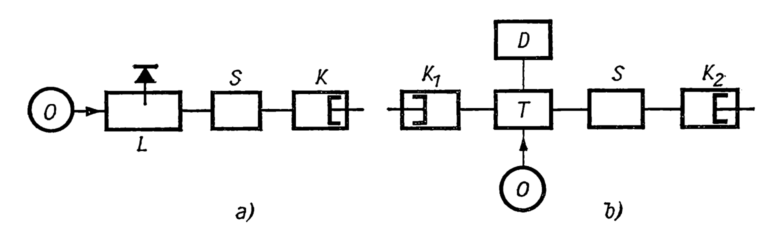


Abb. 8.35 Phasenmessung durch Kompensation

8.644 Phasenmeßbrücke

Die Schwierigkeiten, die beim Vergleich eines Phasenschiebers mit einer Kurzschlußleitung auftreten, lassen sich vermeiden, wenn der Phasenschieber zwischen einen angepaßten Oszillator und eine angepaßte Last geschaltet wird.

Von Magid [*8.113*] wird eine *Phasenmeßbrücke* angegeben, bei der die Leistung des frequenzstabilisierten Oszillators in zwei ungleiche Teile aufgespalten wird. Die durch die beiden Kanäle laufenden Wellen, in die der zu eichende Phasenschieber bzw. ein Standardphasenschieber geschaltet ist, werden über einen Richtungskoppler wieder zusammengeführt. Wenn die von beiden Zweigen herkommenden Signale auf gleiche Amplitude abgeglichen sind und eine Phasenverschiebung von 180° besitzen, verschwindet das Signal im Detektor. Als Standardphasenschieber werden ein 20-dB-Richtungskoppler und ein Präzisionskurzschlußkreis verwendet, denen die HF-Leistung über zwei Ferritisolatoren zugeführt wird, um eine vollkommene Entkopplung zu erreichen. Das Auflösungsvermögen dieser Methode im X-Band beträgt 0,3°; es wird für größere Frequenzen durch die mechanische Genauigkeit bei der Konstruktion des Kurzschlußkreises, für kleinere Frequenzen durch mögliche Abstimmungsfehler begrenzt.

8.645 Varactor-Diode als Phasenschieber [*8.57*]

Spezielle Halbleiterdioden (s. § 4.24) aus *Galliumarsenid*, deren Eigenkapazität mit der angelegten Sperrspannung innerhalb bestimmter Grenzen veränderlich ist, können im Millimeterwellenbereich nach Hardin et al. [*8.72*] zur Phasendrehung angewandt werden. Diese Methode besitzt den Vorteil einer schnellen Einstellung durch Verändern der angelegten Spannung. Diese als *Varactor-Dioden* bezeichneten Halbleiterelemente mit veränderlicher Admittanz werden nach Gardner et al. [*8.57*] zweckmäßig als Doppeldioden in den abstimmbaren Rechteckhohlleiter eingesetzt, wobei sich die Katoden

oder auch Anoden gegenüberstehen. Dadurch wird der Einfluß des **E**-Vektors im Hohlleiter auf die Kapazität der Dioden eliminiert und die Eingangsadmittanz von der UHF-Energie fast unabhängig. Bei 9 GHz läßt sich eine Phasendrehung von 110° erzielen, wobei sich die Ausgangsleistung nur um etwa 1% verändert.

Von GARDNER [*8.56*] wird diese Methode zu einem sehr empfindlichen Nullverfahren erweitert, das aus einer Brückenschaltung besteht, deren beide Zweige einen einstellbaren bzw. Varactor-Phasenschieber enthalten. In einem Frequenzbereich um 9 GHz sind Phasenunterschiede von 0,003° noch feststellbar; das Verfahren wird zur Messung geringer Plasmadichten angewandt.

8.65 Höchstfrequenzoszillografie [*8.92*]

In § 6.731 wird in Gl. (6/71) auf den Aufzeichenfehler des ESO bei hohen Frequenzen hingewiesen. Um den Laufzeitwinkel α klein zu halten, müssen hohe Anodenspannung U_a und kleine Plattenlängen b angewandt werden, wodurch jeweils die Ablenkempfindlichkeit abnimmt. Durch Verwendung von Wanderfeldverstärkern (s. § 8.33) für die Signaleingänge und Kippgeneratoren, die wegen der relativ großen Kapazität der Ablenkplatten (5 bis 15 pF) und hoher Ablenkfrequenz Impulsröhren mit großen Strömen erfordern, können Impulse von 1 ns Dauer noch aufgelöst werden.

Hohe Frequenzauflösung bei ausreichender Ablenkempfindlichkeit erzielt man durch Unterteilung des Ablenksystems in mehrere Teilplattenpaare. Die kurzen Plattenpaare werden in Strahlrichtung einzeln über kleine Induktivitäten miteinander verbunden und bilden zusammen mit den Kapazitäten der Plattenpaare eine Laufzeitkette (s. § 3.6). Durch entsprechende Bemessung der einzelnen Kettenglieder wird erreicht, daß die Welle der Meßspannung mit der Geschwindigkeit des Elektronenstrahls fortschreitet. Diese Methode ist besonders für Strahlsysteme mit Nachbeschleunigung geeignet; es lassen sich bis 1000 MHz hohe Ablenkempfindlichkeiten erreichen.

Nach PIERCE [*8.135*] kann der Elektronenstrahl auch durch wendelförmige Elektroden abgelenkt werden; das Schirmbild wird allerdings sehr klein und muß nachvergrößert werden.

8.7 Meßanordnungen im Mikrowellenbereich

Infolge der Besonderheiten bei der Ausbreitung von Mikrowellen in Rechteckhohlleitern werden beim Aufbau von Meßbrücken und anderen Meßanordnungen spezielle Konstruktionselemente benutzt.

8.71 Richtungs- und Polarisationsänderungen in Wellenleitern

Krümmer in einer Wellenleitung ermöglichen, die Ausbreitungsrichtung der Wellen zu verändern. In einem Rechteckhohlleiter kann die Krümmung entweder in der Ebene des elektrischen oder in der des magnetischen Feldes erfolgen, wie man aus Abb. 8.36 sieht. Der gekrümmte Abschnitt besitzt gegenüber der geraden Leitung geänderte Ausbreitungsgrößen, weshalb an den Anschlußstellen eine Unstetigkeit der Impedanz zustande kommt. Wenn der

Innenradius des Krümmers größer als die Leiterwellenlänge ist, wird der Reflexionsfaktor relativ klein. Die optimale mittlere Krümmerlänge beträgt $L = n\lambda_c/2$, wenn λ_c die Grenzwellenlänge nach Gl. (8/17) ist.

Scharfe *Hohlleiterecken* sind nur für kleine Winkel zweckmäßig; bei einem Winkel von 45° wird in einer angepaßten Leitung bereits eine stehende Welle mit dem Spannungsverhältnis $r \approx 1{,}2$ (s. Gl. 7/56) hervorgerufen, das mit wachsendem Winkel stark zunimmt.

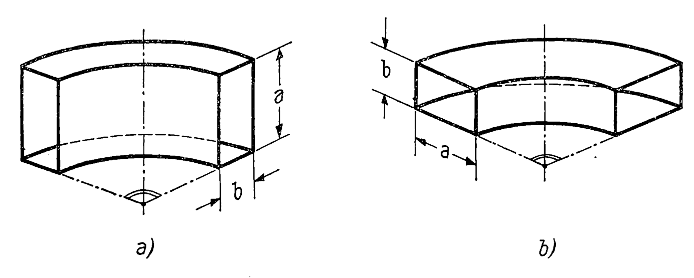


Abb. 8.36 Krümmer für Rechteckhohlleiter: E-Krümmer (a), H-Krümmer (b)

Durch Verdrehen des Rechteckleiters entsprechend Abb. 8.37 kann die Polarisationsebene um 90° gedreht werden. Die optimale Länge dieses Übergangsstückes beträgt $n\lambda_c/2$, ist jedoch nicht sehr kritisch. Für einen $2\lambda_c$ langen Abschnitt wird $r \leq 1{,}1$.

8.72 Dielektrische Fenster in Wellenleitern

Soll ein Hohlleiter mit einem Gas gefüllt (Vermeidung von Wasserkondensation!) oder evakuiert werden (Verwendung bei tiefen Temperaturen), so müssen Fenster eingeführt werden, die elektrisch wenig stören sollen.

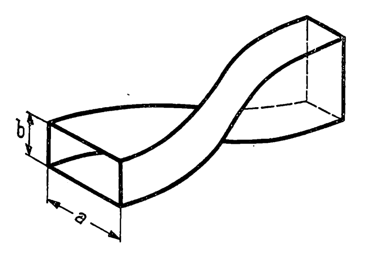


Abb. 8.37 Tordierter Rechteckleiter

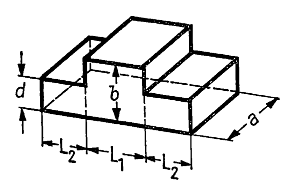


Abb. 8.38 Dielektrisches Fenster

Bringt man eine dielektrische Platte nach Abb. 8.38 in den Hohlleiter mit den Innenmaßen a und b ein, dessen Abmessungen aus der Abbildung hervorgehen, so wird das Verhältnis d/b um so kleiner, je höher die Dielektrizitätskonstante (DK) ε des Materials ist. Der Mittelabschnitt mit der Länge L_1, der den Hohlleiter vollkommen ausfüllt, soll elektrisch $\lambda/4$ lang sein, wie auch die beiden Abschnitte der Länge L_2 mit der Dicke d, welche zur Anpassung

dienen. Die optimalen Abmessungen berechnen sich aus den Beziehungen

$$L_1 = \frac{\lambda_d}{4} = \frac{\lambda}{4\sqrt{\varepsilon - (\lambda/\lambda_c)^2}}; \quad L_2 = \frac{1}{4}\sqrt{\lambda\lambda_d}, \tag{8/82}$$

wobei λ_d die Wellenlänge im Dielektrikum bedeutet. Der thermische Ausdehnungskoeffizient des Dielektrikums soll dem des Hohlleitermaterials entsprechen, damit dichte Kittungen ausgeführt werden können.

Dünne dielektrische Platten erbringen einen nur kleinen Reflexionsfaktor, der von der Wellenlänge wenig abhängt. Das Verhältnis r der stehenden Wellen ergibt sich für eine Platte von der Dicke d und der DK ε zu

$$r - 1 = \frac{2\pi d}{\lambda} \frac{\sqrt{\varepsilon - (\lambda/\lambda_c)^2}}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}. \tag{8/83}$$

Diese Beziehung gilt für ein eingebautes Fenster, das vom Hohlleiter umgeben ist; wird die dielektrische Platte nur zwischen zwei Verbindungsflanschen eingespannt, so treten zusätzliche Strahlungsverluste auf.

8.73 *Einkopplung in Wellenleiter*

Zur Einkopplung der Oszillatorleistung, Auskopplung des nachzuweisenden Signals oder Verbindung von Hohlleitern werden diese mit meist runden Löchern versehen, die als Blende für die auffallende Strahlung wirken.

Für einen Rechteckleiter (Abb. 8.39a), der mit der $TE_{0,1}(H_{10})$-Welle betrieben wird, entspricht ein kleines Loch in einer sehr dünnen Metallblende, die senkrecht im Leiter angeordnet ist, einem induktiven Nebenschluß,

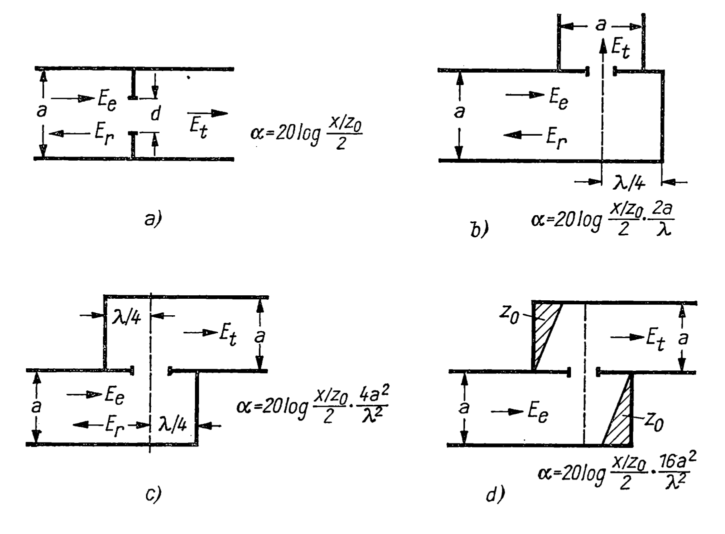


Abb. 8.39 Ankopplung zweier Rechteckleiter durch eine Lochblende bei $TE_{0,1}(H_{10})$-Anregung

für den gilt

$$\frac{X}{Z_0} = \frac{3}{2\pi} + \frac{ab\lambda_c}{d^3}, \tag{8/84}$$

wenn d der Lochdurchmesser ist. Gleichzeitig ergibt sich zwischen angepaßtem Oszillator und Empfänger ein Dämpfungsmaß

$$\alpha = 10 \log \left[\frac{(X/Z_0)^2}{4} - 1\right] \text{dB}, \tag{8/85}$$

das um einen mit der Blendendicke linearen Term noch erhöht wird.

Wird die Öffnung dazu benutzt, zwei Wellenleiter, deren Achsen nicht koinzidieren, miteinander zu koppeln, so können die in Abb. 8.39 eingetragenen Formeln angewandt werden, wobei die Größe X/Z_0 aus Gl. (8/84) zu entnehmen ist. Ein reflexionsfreier Abschluß der Leitungen ist durch das Symbol Z_0 gekennzeichnet.

8.74 Leitungsverzweigungen [*8.2*]

Zum Aufbau von Meßbrücken mit Nullabgleich im Bereich der Mikrowellen, die gegenüber den direkten Meßverfahren für Widerstände mit Hilfe von beweglichen Abtastsonden den Vorteil der geringeren Störanfälligkeit und meist größerer Genauigkeit besitzen, sind Leitungsverzweigungen verschiedener Ausführung notwendig.

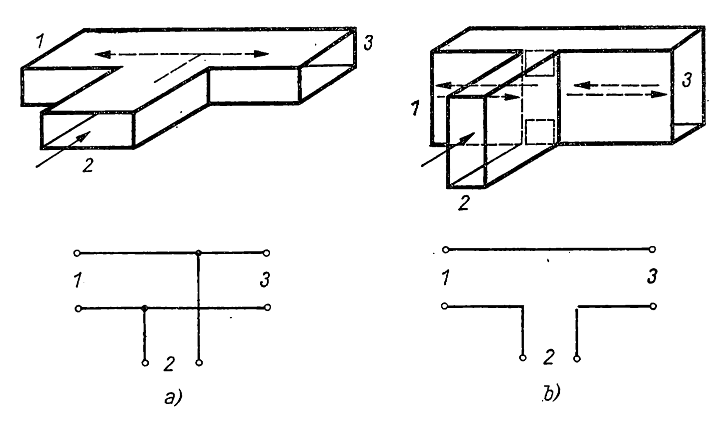


Abb. 8.40 Symmetrische Leitungsverzweigungen: H-Verzweigung (a), E-Verzweigung (b)

Symmetrische Leitungsverzweigungen haben die Aufgabe, eine einfallende Welle auf zwei Zweige zu gleichen Leistungen aufzuteilen. Bei Rechteckhohlleitern mit $TE_{0,1}(H_{10})$-Welle, die in der Praxis fast ausschließlich für diese Zwecke verwendet werden, geschieht dies durch ein rechtwinkliges T-Stück mit denselben Abmessungen für die Zuleitung und die *beiden* Arme. Man unterscheidet die *H-Verzweigung* (*Shunt-T*), die in Abb. 8.40a dargestellt ist und bei der vor und nach der Verzweigung die H-Ebenen (s. Abb. 8.2)

in allen Armen erhalten bleiben. Aus der Ersatzschaltung (Doppelleitung) für diese Verzweigung ist zu ersehen, daß das im Arm *2* ankommende Signal an der Verzweigungsstelle geteilt wird und in den Armen *1* und *3* in Ebenen, die gleichen Abstand von jener besitzen, in Phase sind.

Bei der in Abb. 8.40b dargestellten *E-Verzweigung*, die an der breiteren Seite des Hohlleiters angesetzt wird, bleiben die Ebenen der elektrischen Feldstärke überall erhalten. Man bezeichnet diese Anordnung auch als *Serien*-T, da die entsprechende Doppelleitung einer Serienschaltung der Arme *1* und *3* entspricht und die entsprechenden Signale *nicht* in Phase sind.

In beiden Beispielen ist die Verzweigung nicht angepaßt, und es tritt im Eingangsarm *2* eine reflektierte Welle wegen der Impedanzdiskontinuität an der Verzweigungstelle auf. Wie aus den Ersatzkreisen leicht zu erkennen ist, sind in den Armen *1* und *3* Ebenen aufzufinden, die eine reflexionsfreie Transmission oder auch vollkommene Reflexion der Energie bewirken, wenn man diese kurzschließt. Experimentell sind beide Fälle nicht völlig zu realisieren; auch ist die genaue Stellung des Kurzschlußschiebers von der Wellenlänge abhängig. Um an einer T-Verzweigung reflexionsfreie Wellenausbreitung zu erhalten, muß zur Anpassung eine einstellbare Blende angebracht werden, wie sie in Abb. 8.40b zu sehen ist. Häufig wird auch bei der *E*-Verzweigung die Höhe der Zweige *1* und *3* nur halb so groß gewählt wie bei der Zuleitung *2*, um die Anpassungsbedingungen besser erfüllen zu können.

Als *magisches* T bezeichnet man die Kombination einer *E*- und einer *H*-Verzweigung (Abb. 8.41). Die in den *H*-Arm *4* einlaufende Welle erzeugt in den Seitenarmen *1* und *2* zwei gleichphasige Wellen gleicher Amplitude und

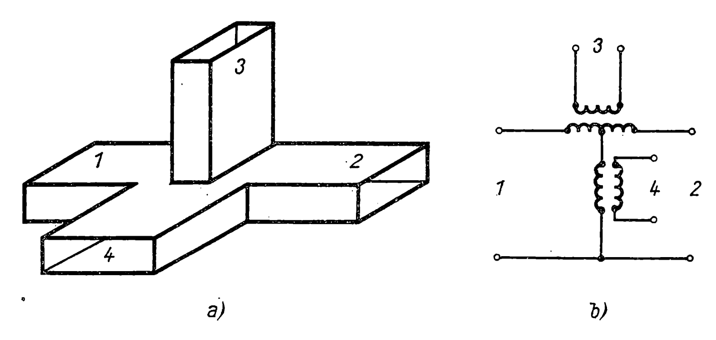


Abb. 8.41 Magische T-*Verzweigung*

ohne besondere Anpassung einen reflektierten Anteil. Im *E*-Arm *3* kann wegen der Symmetrie der Anordnung keine fortschreitende Welle entstehen, da die breiten Seitenwände auf gleichem HF-Potential liegen. Die Symmetrie wird nicht gestört, wenn die beiden Seitenarme durch zwei gleiche Impedanzen belastet werden; bei ungleichen Lasten wird die Symmetrie gestört und Energie in die *E*-Verzweigung *3* übertragen. Die Kennzeichen des magischen T entsprechen denen einer Wechselspannungsbrücke (vgl. § 7.54), wobei der Nulldetektor sich im *E*-Arm *3* befindet. Umgekehrt wird sich ein in den *H*-

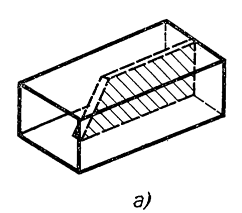
Arm *2* eingespeistes Signal auf die beiden Arme *4* und *3* verteilen, wenn diese angepaßt sind und keine Kopplungen zum Arm *1* auftreten.

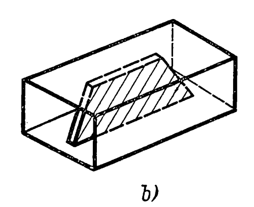
In Abb. 8.41b ist das Ersatzschaltbild des magischen T für Niederfrequenz angegeben, das aus zwei (idealen) Übertragern besteht, die zur Einspeisung des Betriebsstroms bzw. zur Auskopplung der Nullspannung dienen. Sind die Arme *1* und *2* durch die Blindwiderstände $\boldsymbol{R}_1$ bzw. $\boldsymbol{R}_2$ abgeschlossen, so verschwindet das Brückensignal, wenn $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_2$. Das magische T übernimmt die Funktion einer Brücke für Mikrowellen mit dem Übersetzungsverhältnis 1:1.

Die Anpassung der Seitenarme kann in der H-Verzweigung durch einen zum $\boldsymbol{E}$-Vektor parallel stehenden Metallstift am Kreuzungspunkt und im E-Arm *3* durch eine asymmetrische induktive Blende erzeugt werden.

8.75 Dämpfungsglieder und Richtkoppler

Zum *reflexionsfreien Abschluß* eines Hohlleiters sind schräg abgeschnittene Metallstreifen geeignet, die parallel zum $\boldsymbol{E}$-Vektor symmetrisch eingesetzt sind (Abb. 8.42a). Beträgt die Gesamtlänge dieses Streifens 2λ und mehr, so ist diese Vorrichtung über ein breites Frequenzband wirksam. Auch Platten


a)


b)

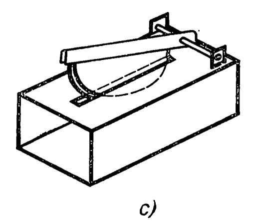

c)

Abb. 8.42 Reflexionsfreier Abschluß (a), fester Abschwächer (b), veränderlicher Abschwächer (c)

oder Streifen aus dielektrischem Material mit großem Verlustfaktor sind als Dämpfungsglied brauchbar. Vielfach werden dünne, auf verlustfreien Isolierstoffen aufgedampfte Metallfilme oder Aquadag-Überzüge hierfür verwendet.

Abschwächer mit festem Dämpfungsfaktor werden ähnlich aufgebaut und in der in Abb. 8.42b gezeigten Weise in den Hohlleiter eingesetzt. Die Dämpfung nimmt mit der elektrischen Feldstärke in der Ebene des metallischen Streifens zu, ist demnach bei $TE_{0,1}(H_{10})$-Anregung in der Symmetrieebene parallel zu den schmalen Seitenflächen am größten.

Veränderliche Abschwächer bestehen aus einem Widerstandsfilm meist in Form eines Kreissektors, der durch einen schmalen Schlitz verschieden tief in den Hohlleiter geschoben werden kann (Abb. 8.42c). Dieses Hilfsmittel besitzt den Vorteil, daß die Dämpfung auf Null verringert werden kann, wenn man den Filmstreifen ganz herauszieht oder in den Bereich minimaler elektrischer Feldstärke verschiebt [*8.79*].

Als *Richtungskoppler* versteht man Vorrichtungen zwischen zwei benachbarten Hohlleitern, welche die Ausbreitungsrichtung in der angekoppelten Leitung eindeutig der Richtung der ankommenden Welle zuordnen. Eine

einfache Lösung dieser Aufgabe ist in Abb. 8.43 dargestellt. Die beiden Hohlleiter *1* und *2* sind mit den schmalen Seitenflächen aneinandergesetzt und durch zwei kreisförmige Öffnungen A und B miteinander gekoppelt, deren Mittenabstand $\lambda/4$ beträgt. Die Kopplung erfolgt in diesem Fall über die wandnahen magnetischen Feldlinien der $TE_{0,1}$ (H_{10})-Welle. Eine in der Leitung *1* nach rechts laufende Welle induziert durch beide Öffnungen je zwei Wellen mit entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung im Leiter *2*. Infolge ihres Abstandes von $\lambda/4$ im Leiter *1* wird die Öffnung B mit 90° Phasenverschiebung gegenüber der Öffnung A erregt. Da der Abstand der Kopplungslöcher auch für die angekoppelte Leitung *2* derselben Phasenverschiebung entspricht, werden die nach links laufenden Teilwellen in *2* die Phasenverschiebung 180° erhalten, d. h. ausgelöscht, während die nach rechts laufenden Wellen sich verstärken. Die Ausbreitungsrichtung in beiden Hohlleitern ist also dieselbe; diese Ausführungsform wird daher auch *Vorwärts-Richtkoppler* genannt.

In der praktischen Ausführung tritt in der angekoppelten Leitung *2* auch eine Welle mit entgegengesetzter Richtung auf, deren Amplitude durch den

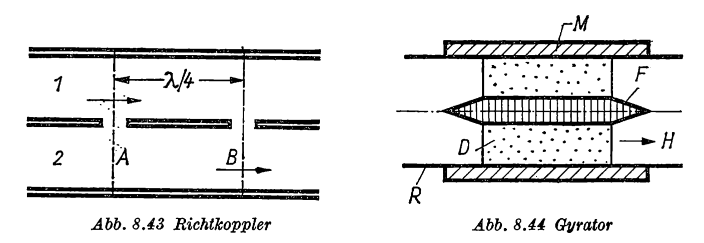


Abb. 8.43 Richtkoppler *Abb. 8.44 Gyrator*

Richtfaktor des Kopplers ausgedrückt wird. Als *Koppelfaktor* ist das Verhältnis der Wellenenergien in der Koppelleitung zu der in der angekoppelten Leitung definiert. In der in Abb. 8.43 gezeigten Anordnung ist die Koppelwirkung auf einen sehr kleinen Wellenlängenbereich beschränkt. Eine *Breitbandkopplung* läßt sich durch mehrere Öffnungen in geeignetem Abstand erreichen [*8.36*].

8.76 Ferrite in Hohlrohrleitern [*8.28, 8.61, 8.73, 8.80, 8.189*]

Im Mikrowellengebiet und in einem statischen Magnetfeld hängen die Ausbreitungseigenschaften von Phase, Polarisation und Amplitude von der magnetischen Energiedichte im Hohlleiter ab, wenn er ferromagnetisches Material enthält. Während gewöhnliche Ferromagnetika im kompakten Zustand wegen hoher ohmscher Verluste nicht in Betracht kommen, spielen die *Ferrite* eine hervorragende Rolle.

Ferrite (s. §. 12.8) sind weichmagnetische Werkstoffe mit hohem spezifischem Widerstand ($10 \cdots 10^7\ \Omega$ cm), großer DK ($10 \cdots 10^6$) und Verbindungen von der Art $x\mathrm{MO} \cdot \mathrm{Fe_2O_3} + y\mathrm{M'O} \cdot \mathrm{Fe_2O_3}$, worin M und M' zweiwertige Metalle (Zn, Ni, Mn, Mg, Cu, Be, Co) sind und $x + y = 1$. Ihre Struktur entspricht dem Spinell $\mathrm{MgAl_2O_3}$, weshalb sie auch *Ferrospinelle* genannt werden. Ihre Herstellung geschieht nach keramischen Verfahren, wobei die Ausgangsstoffe feingemahlene Metalloxide sind. Im Mikrowellenbereich zeigen die Ferrite die Erscheinung der ferromagnetischen Resonanz; siehe [*8.144*].

Diese besteht darin, daß im statischen Magnetfeld eine Zeeman-Aufspaltung der Energieniveaus stattfindet, deren energetischer Abstand $h\nu_0 = g\mu_B H$ ist (g Landé-Faktor, μ_B Bohrsches Magneton). Wird die Resonanzfrequenz ν_0 durch das Mikrowellenfeld an den Ferrit gelegt, so beobachtet man Energieabsorption. Fällt daher auf das Ferromagnetikum — wie in der $TE_{0,1}(H_{10})$-Welle — eine linear polarisierte Welle der entsprechenden Frequenz, so wird diese in eine elliptisch polarisierte umgewandelt. Dieser Faraday-Effekt ermöglicht die Drehung der Polarisationsebene einer linear polarisierten Welle in Abhängigkeit von der statischen Magnetfeldstärke H.

Eine Anwendung im Mikrowellenbereich findet dieser Effekt im *Gyrator*, dessen Aufbau in Abb. 8.44 dargestellt ist. Er besteht aus einem zylindrischen Ferritstift F mit zugespitzten Enden, der in ein Dielektrikum D eingebettet und koaxial im kreisförmigen Hohlleiter R angebracht ist. Das statische Magnetfeld wird durch die koaxiale Spule M erzeugt, die um R gewickelt ist. Durch Verändern der magnetischen Feldstärke kann die Polarisationsebene um 90° gedreht werden. Schließt man an den Gyrator Rechteckhohlleiter, deren Schwingungsebenen um 45° gegeneinander verdreht sind, und erzeugt im Gyrator ebenfalls eine Drehung um 45°, so kann eine ankommende Welle nur dann den zweiten Hohlleiter passieren, wenn das Magnetfeld richtig gepolt ist. Andernfalls und in der Gegenrichtung bleibt die Anordnung gesperrt. Man bezeichnet daher eine solche Vorrichtung auch als *Wellenfalle*.

Für zirkular polarisierte $T_{0,1}(H_{10})$-Wellen wirkt der Gyrator als veränderlicher *Phasenschieber* (s. a. § 8.641), dessen optische Wellenlänge vom Magnetfeld H abhängt.

Wird in einen Rechteckhohlleiter ein Ferritstreifen parallel zu den Schmalseiten des Leiters angebracht, so hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der H-Welle vom Magnetfeld sowie von der Lage des Streifens ab und ist in den beiden möglichen Richtungen verschieden, wenn der Streifen von den Seitenflächen einen verschieden großen Abstand besitzt.

Für die Anwendungen der Ferrite im Mikrowellenbereich lassen sich folgende Forderungen aufstellen:

1. hoher spezifischer Widerstand,
2. geringe dielektrische Verluste,
3. kleiner Temperaturkoeffizient von Sättigungsmagnetisierung, Permeabilität, Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit,
4. große Dielektrizitätskonstante,
5. hohe Sättigungsmagnetisierung und Curie-Temperatur.

Über verschiedene Verfahren zur Messung von elektrischem Widerstand, Halbleiterkonstanten u. a. siehe [*8.54*, *8.91*, *8.181*].

8.8 Freie Wellenausbreitung bei Höchstfrequenzen [*8.52*, *8.71*, *8.155*]

Während im HF-Bereich die benutzten Wellenlängen im Vergleich zu den Antennendimensionen groß sind, werden die Millimeterwellen vergleichbar oder sogar merklich kleiner als die Vorrichtungen, welche zur Abstrahlung

dienen. Solche Antennen können daher nach den Gesetzen der geometrischen Optik berechnet werden.

Für die *Radioastronomie* [*8.35, 8.111, 8.153*], die sich mit dem Nachweis und der Analyse der von der Sonne und dem Weltraum kommenden elektromagnetischen Strahlung zwischen 10 MHz und 50 GHz befaßt, steht neben Intensitätsfragen die erreichbare Winkelauflösung im Vordergrund, die annähernd aus der Beziehung

$$\alpha = 70^\circ \frac{\lambda}{D}$$

folgt, worin D der mittlere Durchmesser der Empfangsfläche ist. Ähnliche Probleme stehen beim Richtfunkverkehr im Zentimeterwellengebiet und bei Übertragungssatelliten an.

Bei physikalischen Untersuchungen über die Absorption sehr kurzer Wellen in Plasmen, Gasen und Dämpfen, die wegen der besonderen Erzeugungsverfahren oder zu großer Schichtdicken nicht innerhalb eines Hohlleiters oder Resonators bestimmt werden kann, wird freie Wellenausbreitung angewandt und die Strahlung von speziellen Antennen ausgesandt bzw. empfangen.

8.81 Grundsätzliches über die Abstrahlung

Geht man davon aus, daß die emittierte Strahlung eine sehr viel kleinere Wellenlänge besitzt als die geometrischen Ausmaße des Strahlers bzw. seiner freien Öffnung, so lassen sich die Ergebnisse der *geometrischen Optik* anwenden. Ein aus einer ebenen elektromagnetischen Welle geschnittenes Flächenstück, das Huyghenssche Quelle genannt wird, ist durch die örtliche Verteilung der elektrischen und zugehörigen magnetischen Feldstärke gekennzeichnet. Die freie Öffnung eines Hornstrahlers (s. § 8.82) stellt bei gegebener Anregung eine solche Huyghenssche Quelle dar, deren Feldverteilung bei H-Anregung aus den Beziehungen des § 8.13 zu entnehmen ist.

Ist $\lambda \ll a$ (a Breite des Strahlers), so kann man mit gleichmäßiger Verteilung der elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{E}$ rechnen und erhält eine Intensitätsverteilung in größerem Abstand vom Strahler, die durch die *Spaltfunktion*

$$S(\alpha) = \frac{\sin \xi}{\xi}; \quad \xi = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \alpha \tag{8/86}$$

gegeben ist, wobei der Winkel α zur Flächennormalen gerechnet wird. Dies entspricht der Beugungsfigur eines gleichmäßig ausgeleuchteten Spaltes in der Optik, die aus einem Hauptmaximum und symmetrisch verteilten Nebenmaxima besteht. Ist diese Bedingung nicht mehr erfüllt und die elektrische Feldstärke durch eine Funktion $G(y)$ gegeben, wobei $0 < y < a$, so ergibt sich das Strahlungsdiagramm durch vektorielle Addition der Amplituden, und man erhält die Beziehung

$$S(\alpha) = \int_0^a G(y)\, \mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha}\, \mathrm{d}y, \tag{8/87}$$

die für $G(y) = \text{const}$ in Gl. (8/86) übergeht.

Für den Sende- und Empfangsfall ist nach dem Reziprozitätsprinzip das Strahlungsdiagramm dasselbe. Ist die Bedingung konstanter Phase innerhalb der Strahlerebene nicht mehr erfüllt, was bei großem Öffnungswinkel von Hornstrahlern vorkommt, so muß in Gl. (8/87) ein Phasenfaktor hinzugesetzt werden.

8.82 Hornstrahler

Hornstrahler sind Hohlrohrleiter, deren Abmessungen sich stetig auf einer endlichen Länge vergrößern. Als *Sektorhorn* werden Strahler bezeichnet, bei denen sich nur die schmale oder breite Fläche eines Rechteckhohlleiters erweitert, wie das in Abb. 8.45 dargestellt ist. Da sich der *Feldwellenwiderstand* eines Hohlleiters

$$Z_{0H} = 120\pi \frac{1}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2}} \quad (H\text{-Welle}) \tag{8/88a}$$

$$\text{bzw.} \quad Z_{0E} = 120\pi \frac{1}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2}} \quad (E\text{-Welle}) \tag{8/88b}$$

von dem des freien Raums nur wenig unterscheidet, ist das offene Ende des Hornstrahlers relativ gut angepaßt. Die Richtcharakteristik hängt vom Verhältnis Sektorbreite A zu Wellenlänge ab, wobei zusätzlich ein Phasenfehler auftritt, der bei konstantem A um so größer wird, je größer der Öffnungswinkel ψ ist.

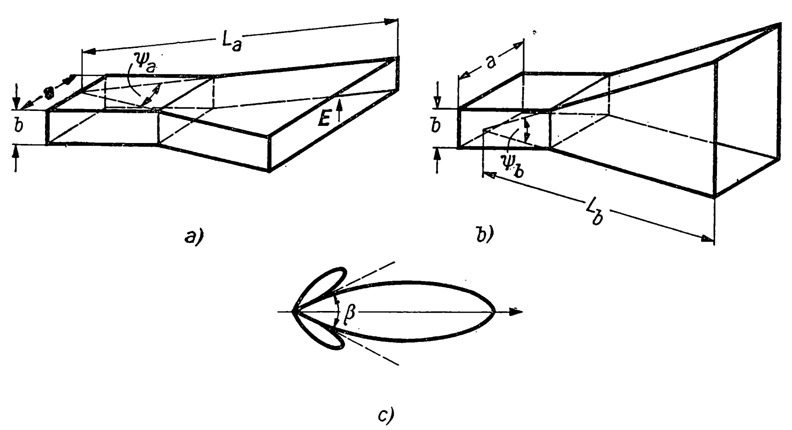


Abb. 8.45 Hornstrahler: Sektorstrahler in H-Ebene (a), in E-Ebene (b); Strahlwinkel (c)

Hornstrahler werden meist in der $TE_{0,1}$ (H_{10})-Welle angeregt, die auch am freien Austritt durch die Strahleröffnung erhalten bleibt. Unter dem *Strahlwinkel* β (Abb. 8.45c) versteht man den Winkel zwischen den Strahlrichtungen des Hauptmaximums, für die 10% der Maximalintensität gefunden werden. In Abb. 8.46 ist der Strahlwinkel in der H-Ebene des Sektorstrahlers der Abb. 8.45a als Funktion des Sektorwinkels ψ_a für verschiedene Sektorlängen L_a

dargestellt. Man erkennt daraus, daß der Strahlwinkel β_a immer größer als der Sektorwinkel ist und beide Größen sich für große Werte von L_a/λ asymptotisch nähern.

Durch Aufweitung des Hohlleiters in beiden Ebenen zu einem Trichter läßt sich die Bündelung wesentlich verbessern, wenngleich wegen des Phasenfehlers in der Öffnungsebene der Strahlwinkel immer größer als der Trichterwinkel bleibt. Von PIEFKE [*8.134*] ist der *Pyramidentrichter* mathematisch behandelt worden. Der *Kegeltrichter* strahlt nur in den beiden Mittelebenen linear polarisiert ab; sein Strahlwinkel ist größer als der eines gleich großen quadratischen Trichters.

8.83 Spiegelstrahler [8.39]

Der parabolische Reflektor stellt eine einfache Vorrichtung dar, die es gestattet, mit im Verhältnis zur Wellenlänge großer Apertur eine enge Bündelung der abgestrahlten Energie zu erreichen. Er eignet sich für eine relativ große

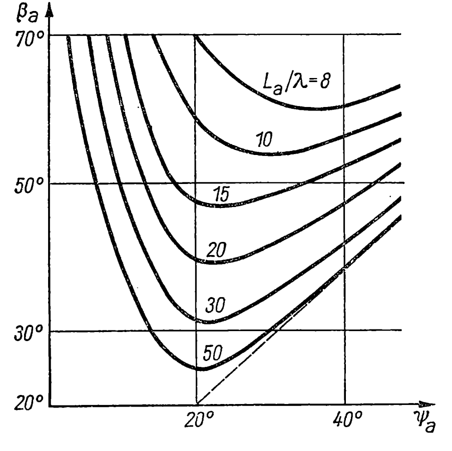


Abb. 8.46 Strahlwinkel eines Hornstrahlers

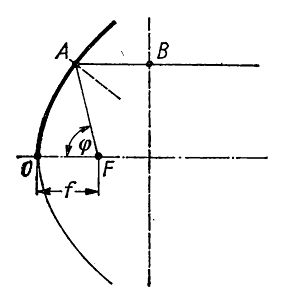


Abb. 8.47 Parabolreflektor

Bandbreite, die nur von der Anregung im Brennpunkt abhängt. Grundsätzlich besitzt der Parabolspiegel (s. Abb. 8.47) die Eigenschaft, daß die vom Strahler im Brennpunkt F ausgehenden, an der Spiegeloberfläche reflektierten Wellen eine ebene Wellenfront erzeugen, da für jeden Winkel φ die Strecke FAB konstant bleibt. Die Feldverteilung in der Öffnungsebene nimmt allerdings gegen den Rand hin ab, da die Amplitude vom Strahler F bis zur Spiegeloberfläche mit $1/r = 1/\overline{FA}$ abnimmt, während sie in der Planwelle nach der Reflexion konstant bleibt. Dadurch wird der Strahlwinkel im Vergleich zur gleichmäßigen Ausleuchtung vergrößert. Ist ferner die Phasenfront des Strahlers in F nicht kugelförmig, so entsteht nach der Reflexion keine ebene Wellenfront, was ebenfalls zu einem vergrößerten Strahlwinkel führt.

Für die Anregung des Spiegelstrahlers ist zu beachten, daß unter Berücksichtigung des Phasensprungs von 180° bei der Reflexion der Abstand $\overline{FO} = f = (2k + 1)\lambda/4$ sein soll. Für längere Wellen ist die Dipolanregung gebräuchlich; für kurze Wellen werden Hohlrohrstrahler benutzt, die trichterförmig erweitert sind.

Von RIVERS und SHEPPARD [*8.148*] wird eine Methode angegeben, für den Millimeterwellenbereich sehr genaue Parabolspiegel von 30 cm Durchmesser herzustellen. Dabei wird eine dünne Al-Folie von 25 µm Dicke über eine genau gearbeitete Form aus V2A-Stahl gezogen und mit Kunstharzzement ausgegossen.

8.84 *Linsen* [*8.27*]

Im Zentimeterwellenbereich können zur Strahlbündelung auch Linsen aus dielektrischem Material mit geringen Verlusten verwendet werden. Ihre Oberfläche ist derart geformt, daß die optischen Wege vom Brennpunkt bis zur Austrittsebene in jeder Strahlrichtung gleich sind. Ist f der Abstand vom Brennpunkt zum Scheitel einer plankonvexen Linse und φ wieder der Öffnungswinkel am Strahler, so muß gelten:

$$R = \frac{(n-1)f}{n \cos \varphi - 1}. \tag{8/89}$$

Dabei ist R der Abstand vom Brennpunkt zur Linsenoberfläche und $n = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$ der Brechungsindex des Linsenmaterials. Für $n > 1$ ergibt sich daraus eine Hyperbel, für $n < 1$ eine plankonkave Linse mit einer rotationselliptischen Fläche.

Linsen mit kurzer Brennweite, die nach Gl. (8/89) sehr dick werden würden, lassen sich auch als Zonenlinsen ausbilden, die den Vorteil einer kleineren chromatischen Aberration aufweisen. Als *Material* für Mikrowellenlinsen kommen Dielektrika mit kleinem Verlustwinkel in Betracht, wie Paraffin und Polystyrol mit einer DK von etwa 2,5 (s. a. *Tabelle 10.6*), oder auch anorganische, keramische Stoffe auf Rutilbasis mit einer sehr viel höheren DK.

Eine zweite Möglichkeit, Mikrowellenlinsen herzustellen, besteht in der Verwendung *künstlicher Dielektrika*, d. h. Anordnungen, bei denen der optische Weg größer oder kleiner als der geometrische ist. Wie aus Gl. (8/81) zu entnehmen ist, kann man einem Hohlleiter in $TE_{0,1}$ (H_{10})-Anregung den Brechungsindex

$$n = \frac{\lambda}{\Lambda} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \tag{8/90}$$

zuordnen, der kleiner als eins ist und von der Höhe b des Hohlleiters nicht abhängt. Auf Grund dieser Beziehung läßt sich eine *Hohlrohrlinse* aus parallelen Metallstreifen im Abstand a konstruieren, deren Enden auf der einen Seite durch eine Ebene, auf der anderen durch ein Rotationsellipsoid begrenzt werden, wie dies aus Abb. 8.48 hervorgeht. Die elektrische Feldstärke der einfallenden $TE_{0,1}$ (H_{10})-Welle muß parallel zu den Platten verlaufen.

Optisch dichtere Medien als Luft erhält man, wenn metallisch leitende

Teilchen, deren Abmessungen klein gegen die Wellenlänge sind, in einem Dielektrikum homogen verteilt sind. Die effektive DK ε_r und Permeabilität μ_r hängen von den Teilchenabmessungen und ihrer Anzahl N pro cm³ ab. Für kleine Kreisscheibchen vom Durchmesser d, deren Ebenen in Richtung des elektrischen Feldes stehen, ergibt sich

$$\varepsilon_r = 1 + 2d^3N/3; \qquad \mu_r = 1 - d^3N/3;$$

suspendierte Kügelchen liefern die Werte

$$\varepsilon_r = 1 + 4d^3N; \qquad \mu_r = 1 - 2d^2N.$$

Der resultierende Brechungsindex berechnet sich aus der bekannten Beziehung

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}. \tag{8/91}$$

Von Hu und Cheng [*8.85*] wird ein Verfahren beschrieben, dielektrische Linsen durch Kügelchen herzustellen, die außen aus einem Dielektrikum und innen aus einem metallischen Kern bestehen. Weitere Ausführungsformen siehe [*8.29, 8.140, 8.175, 8.176*].

8.85 Dielektrischer Strahler [*8.127, 8.187*]

Füllt man einen Hohlleiter mit einem dielektrischen Material und regt z. B. eine $TE_{0,1}(H_{10})$-Welle an, so wird von der Endfläche ähnlich wie beim gewöhnlichen Hohlleiter Leistung abgestrahlt [*8.180*]. Die Wellen werden an der Grenze Dielektrikum—Luft totalreflektiert und bleiben wie beim Lichtleiter im Rohr.

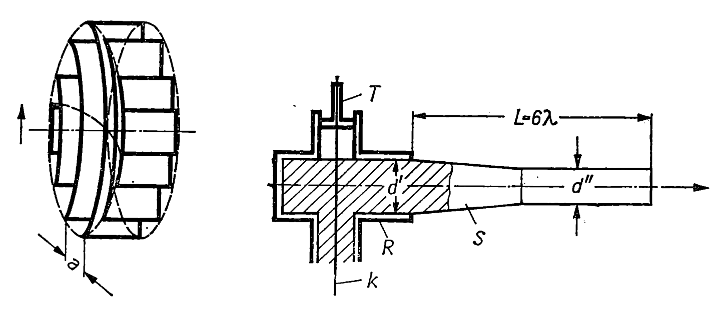


Abb. 8.48 Hohlrohrlinse *Abb. 8.49 Dielektrischer Strahler*

Diese Eigenschaften werden bei der Konstruktion von *dielektrischen Strahlern* ausgenutzt; ein Beispiel ist in Abb. 8.49 dargestellt. Der eigentliche Strahler besteht aus einem dielektrischen Stab S, z. B. aus Polystyren, der konisch in Strahlrichtung verjüngt ist. Die Ankopplung geschieht über das Koaxialkabel K, das zur Anpassung den Kurzschlußschieber T besitzt. Der Stab ist an der Anregungsstelle in einen rohrförmigen Wellenleiter R eingepaßt und verjüngt sich vom Durchmesser $d' = \lambda/2$ auf $d'' = 0{,}3\,\lambda$ auf einer

Gesamtlänge von 6λ, von der die Hälfte zylindrisch ist. Der besondere Vorteil dieser Strahler besteht darin, daß keine Abschneidefrequenz existiert, diese also als *Breitbandstrahler* benutzt werden können. Die Richtwirkung ist etwa dem Verhältnis L/λ proportional.

8.86 Schlitzstrahler [*8.97, 8.177*]

Bringt man in der Wand eines Rechteckhohlleiters einen schmalen Schlitz an, der senkrecht zu den Stromlinien in der Wandung verläuft, so tritt eine Strahlung aus, die von der Stromdichte und Schlitzlänge abhängt. Praktische Bedeutung besitzen diese Strahler in Flugzeugen, bei denen ohne Störung der aerodynamischen Strömung an der Außenhaut eine scharf gebündelte Strahlung ausgesandt werden kann.

§ 9 ELEKTRISCHER WIDERSTAND

Als *elektrischen Widerstand* bezeichnet man das Verhältnis der an einem Kreiselement liegenden Spannung zu dem Strom, der durch dieses fließt. Der Widerstand stellt meist eine komplexe Größe dar (vgl. § 3.4) und wird durch ohmsche Widerstände, Kapazitäten, Induktivitäten, sowie beliebige Kombinationen dieser Widerstände gebildet. In diesem Abschnitt ist nur von Widerständen die Rede, die beim Transport von Ladungsträgern unter dem Einfluß einer elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{E}$ auftreten. Bei bekannter Geometrie läßt sich aus dem Widerstand die *elektrische Leitfähigkeit*

$$\sigma = \frac{\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{E}} \tag{9/1}$$

aus der Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und der Stromdichte $\boldsymbol{j}$ ermitteln. Die elektrische Leitfähigkeit ist eine temperaturabhängige Eigenschaft des Leitermaterials; sie wird ausführlicher in § 9.2 behandelt. Leitungsvorgänge in Gasen werden an dieser Stelle nicht besprochen und erst in Bd. V behandelt.

9.1 Allgemeines über Widerstände

9.11 Ohmsches Gesetz

Für *Gleichstrom* ist der elektrische Widerstand R eines Leiters oder Netzwerks mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes

$$U = iR \tag{9/2}$$

definiert, wobei vorausgesetzt ist, daß keine Gegen-EMK oder Polarisationsspannung auftritt. In diesem Fall wird die gesamte elektrische Leistung in Joulesche Wärme umgesetzt, die sich aus

$$P = i^2 R \tag{9/3}$$

berechnet.

In *Wechselstromkreisen* reicht das Ohmsche Gesetz zur Berechnung der elektrischen Verluste nicht mehr aus; durch die elektromagnetischen und elektrostatischen Felder im Stromkreis und an den Kreiselementen, die sich zeitlich schnell ändern, treten zusätzliche Verluste auf. Diese lassen sich einteilen in:

1. Wirbelstromverluste;
2. Hysteresisverluste in magnetischen Materialien;
3. dielektrische Verluste in Isolationsstoffen;
4. Energieabsorption durch benachbarte Leiter und Kreise;
5. Verluste durch elektromagnetische Strahlung;
6. Skineffekt.

9.12 Einheit des Widerstandes

Die SI-Einheit des Widerstandes ist das *Ohm* (Ω), s. *Tabelle 1.2*. Zur Darstellung des Ohm siehe § 9.3.

Allgemein gilt für einen zylindrischen Leiter vom Querschnitt A und der Länge L die bekannte Beziehung

$$R = \varrho \frac{L}{A}, \tag{9/4}$$

worin ϱ der spezifische Widerstand des Leitermaterials ist und den Kehrwert der spezifischen Leitfähigkeit σ darstellt; d. h.,

$$\varrho = \frac{1}{\sigma}. \tag{9/5}$$

Setzt man $U/L = \boldsymbol{E}$ sowie $i/A = \boldsymbol{j}$, so ergibt sich mit den Gln. (9/4) und (9/5) die Definitionsgleichung (9/1) für die elektrische Leitfähigkeit.

Plattenförmige Widerstände der Länge L, der Breite b und der Dicke d ergeben nach Gl. (9/4) mit $A = bd$ den Widerstand $R = \varrho L/bd$, der für $L = b$, d. h. für quadratische Platten oder Filme, den Wert

$$R = \frac{\varrho}{d} \tag{9/6}$$

erhält. Diese einfache Beziehung ist für die experimentelle Bestimmung von ϱ für dünne aufgedampfte Filme von Bedeutung (s. § 9.9).

9.13 Widerstandsberechnung für beliebige Begrenzung

Den Widerstand zwischen zwei beliebigen Elektroden, die an der Spannung U_{ab} liegen und sich in einem isotropen Medium mit der elektrischen Leitfähigkeit σ befinden, berechnet man aus den allgemeinen Gesetzmäßigkeiten des elektrischen Feldes (s. Abb. 9.1). Für jede der beiden Elektroden a und b muß die Beziehung

$$i = \int \boldsymbol{j} \, \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{9/7}$$

gelten, woraus im raumladungsfreien Feld das 1. Kirchhoffsche Gesetz

$$\oint \boldsymbol{j} \, \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0 \tag{9/8}$$

resultiert. Mit Gl. (9/1) ergibt sich aus Gl. (9/8) die Poissonsche Potentialgleichung

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi = 0, \tag{9/9}$$

wenn $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ gesetzt wird. Die an den Elektroden liegende Spannung findet man aus der Beziehung

$$U_{ab} = \int_a^b \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \varphi_a - \varphi_b. \tag{9/10}$$

Der Vergleich der Gln. (9/7) und (9/10) liefert den gesuchten Widerstand. Für

einfache Begrenzungen läßt sich Gl. (9/9) explizit lösen und damit R berechnen. In komplizierten Fällen werden die in § 2.41 beschriebenen grafischen Verfahren benutzt, oder es wird der elektrolytische Trog (s. § 2.43) für die experimentelle Bestimmung angewandt.

9.14 *Skineffekt*

Der Widerstand eines Leiters wird ein Minimum, wenn die Stromdichte gleichmäßig über den Leiterquerschnitt verteilt ist. Diese Bedingung ist bei Gleichstrom erfüllt. Bei Wechselstrom wird die Verteilung des magnetischen

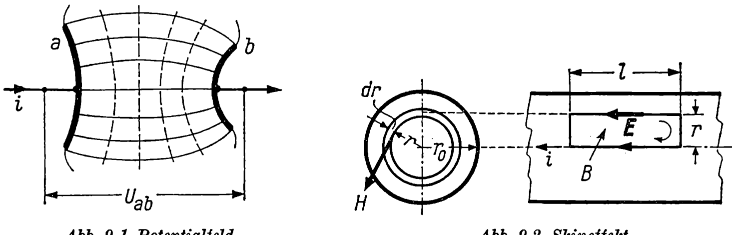


Abb. 9.1 Potentialfeld *Abb. 9.2 Skineffekt*

Flusses derart verändert, daß die Stromfäden nach außen gedrängt werden und die Stromdichte an der Leiteroberfläche den Höchstwert erreicht. Dieses unvollkommene Eindringen des Stromes nennt man *Skineffekt*; er spielt vor allem in HF-Schwingkreisen hoher Kreisgüte eine Rolle.

Betrachtet man die Stromverdrängung in dem in Abb. 9.2 dargestellten zylindrischen Leiter vom Radius r_0 und wendet das Durchflutungsgesetz auf den Kreis mit dem Radius r an, so folgt

$$2\pi r \boldsymbol{H} = \int_0^r \boldsymbol{j}\, 2\pi r\, \mathrm{d}r = 2\pi\sigma \int_0^r \boldsymbol{E} r\, \mathrm{d}r$$

und daraus durch Differenzieren

$$\frac{\partial\,|\boldsymbol{H}|}{\partial r} + \frac{1}{r}\,|\boldsymbol{H}| = \sigma\,|\boldsymbol{E}|. \tag{9/11}$$

Nun wird das Induktionsgesetz auf das in Abb. 9.2 eingezeichnete Rechteck der Kantenlänge l angewandt, das von den magnetischen Kraftlinien senkrecht durchsetzt wird. Der magnetische Gesamtfluß wird dann

$$\Phi = \int_0^r |\boldsymbol{B}|\, l\, \mathrm{d}r = \mu l \int |\boldsymbol{H}|\, \mathrm{d}r,$$

wenn μ die magnetische Permeabilität des Leitermaterials ist. Das Linienintegral der elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{E}$ im eingezeichneten Rechteck erhält man aus dem Induktionsgesetz zu

$$\oint \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = l(\boldsymbol{E}_{r=0} - \boldsymbol{E}_r) = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\mu l\, \frac{\partial}{\partial t}\int_0^r |\boldsymbol{H}|\, \mathrm{d}r,$$

woraus durch Differentiation die Beziehung

$$\frac{\partial |\boldsymbol{E}|}{\partial r} = \mu \frac{\partial |\boldsymbol{H}|}{\partial t} \tag{9/12}$$

entsteht. Differenziert man Gl. (9/11) nach t und setzt dies in Gl. (9/12) ein, so findet man die Differentialgleichung für die Stromverdrängung im zylindrischen Leiter

$$\frac{\partial^2 |\boldsymbol{E}|}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial |\boldsymbol{E}|}{\partial r} = \sigma\mu \frac{\partial |\boldsymbol{E}|}{\partial t}, \tag{9/13}$$

deren Lösung Besselsche Funktionen nullter Ordnung mit dem Argument

$$x = d \sqrt{\frac{\mu f}{\varrho}}$$

darstellen. Dabei bedeutet d die Querdimension (Durchmesser, Dicke) des Leiters und f die angewandte Frequenz. Für kleine Werte von x findet man die Näherung

$$\frac{R}{R_0} = 1 + \frac{1}{3} x'^4 \quad (x' < 1) \tag{9/14}$$

wenn $x' = \sqrt{\pi f \sigma \mu}\, r_0/2$ und $R_0 = l/r_0^2 \pi \sigma$. Für große Werte von x' ergibt sich die Entwicklung

$$\frac{R}{R_0} = x' + \frac{1}{4} + \frac{3}{64 x'}. \quad (x' > 1). \tag{9/14a}$$

In *Tabelle 9.1* ist der HF-Widerstand zylindrischer Drähte als Funktion der Größe $x'' = \pi d \sqrt{2 f \mu/\varrho} \cdot \sqrt{10^{-3}}$ bezogen auf den Gleichstromwert R_0 angegeben.

*Tabelle 9.1 HF-Widerstand von Drähten als Funktion von x''**

x''	R_{HF}/R_0	x''	R_{HF}/R_0	x''	R_{HF}/R_0
0	1,0000	5,5	2,219	15	5,562
0,5	1,0003	6	2,394	18	6,621
1	1,005	6,5	2,568	20	7,328
1,5	1,026	7	2,743	22	8,023
2	1,078	7,5	2,919	25	9,094
2,5	1,176	8	3,094	28	10,15
3	1,318	8,5	3,271	30	10,86
3,5	1,492	9	3,446	40	14,40
4	1,678	9,5	3,622	50	17,93
4,5	1,863	10	3,799	60	21,47
5	2,043	12	4,504	100	35,61

* ϱ in μΩ cm

Zur Verringerung des durch den Skineffekt verursachten HF-Widerstandes von Zuleitungen lassen sich folgende Wege einschlagen:

1. Verwendung dünner Kupferstreifen,
2. Anwendung dünnwandiger Kupferrohre, bei denen die Innenseite viel stärker als die Außenseite durch den Skineffekt beeinflußt wird,
3. Verwendung von Litzendraht, der aus vielen sehr dünnen, oft versilberten Kupferdrähten besteht, die gegeneinander isoliert und so verseilt sind, daß der Einzeldraht vom Zentrum nach außen geführt wird.

Der Einfluß der Stromverdrängung läßt sich durch die *Eindringtiefe* δ der Stromdichte

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu}} \tag{9/15}$$

quantitativ ausdrücken. Der Widerstand bei HF entspricht dann dem eines Rohres vom Drahtradius r_0 und der Wanddicke δ. In *Tabelle 9.2* ist die Eindringtiefe δ für Cu, Al und Fe für verschiedene Frequenzen angegeben.

Tabelle 9.2
Eindringtiefe für Cu, Al und Fe ($\mu_r = 200$)

Frequenz Hz	Eindringtiefe mm Cu	 Al	 Fe
50	9,44	12,3	1,8
10^2	6,67	8,7	1,3
10^3	2,11	2,75	0,41
10^4	0,667	0,87	0,13
10^5	0,211	0,275	0,041
10^6	0,0667	0,087	0,013
10^7	0,0211	0,0275	0,0041
10^8	0,00667	0,0087	0,0013

Aus der Lösung der Differentialgleichung (9/12) findet man außer der Stromverdrängung eine *innere Induktivität*, auf die in § 14 näher eingegangen wird.

Über Messungen des HF-Widerstandes an dünnen Schichten siehe [*9.94*, *9.170*]. Das *Rauschen* in Widerständen wird in § 4.62 näher behandelt.

9.2 Elektrische Leitfähigkeit [*9.70*]

9.21 Elektrische Leitfähigkeit von Metallen [*9.51*, *9.101*, *9.114*, *9.102*, *9.164*]

Nach der ersten atomistischen Theorie der elektrischen Leitfähigkeit von Metallen (DRUDE 1900) bewegen sich unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes $\boldsymbol{E}$ die *Leitungselektronen* quasi frei zwischen den Metallionen. Sie führen mit diesen Stöße aus, werden an diesen gestreut, so daß für $\boldsymbol{E} = 0$ ihre mittlere Geschwindigkeit nach den Streuprozessen Null ist. Beträgt die mittlere

Zeit zwischen zwei Stößen τ, so wird die Wahrscheinlichkeit für einen Stoß $\mathrm{d}t/\tau$ für das Zeitintervall $\mathrm{d}t$. In einem elektrischen Feld $\boldsymbol{E}$ wird das Elektron mit der Ladung e und der Masse m die Beschleunigung

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{e\boldsymbol{E}}{m} \tag{9/16}$$

erfahren. Der thermischen Bewegung wird sich im elektrischen Feld die *mittlere Driftgeschwindigkeit*

$$\bar{\boldsymbol{v}}_d = \frac{e\boldsymbol{E}}{m}\,\bar{t} \tag{9/17}$$

überlagern, wobei $\bar{t}$ mit der mittleren Stoßzeit τ identisch ist. Da die Stromdichte $\boldsymbol{j} = en\boldsymbol{v}_d$ ist, findet man mit Gl. (9/17) hieraus das *Ohmsche Gesetz*

$$\boldsymbol{j} = \frac{e^2\boldsymbol{E}n\tau}{m} \tag{9/18}$$

sowie die *elektrische Leitfähigkeit*

$$\sigma = \frac{\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{E}} = \frac{e^2 n\tau}{m}. \tag{9/19}$$

Da nach der Maxwell-Boltzmannschen Theorie der Gase

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3kT}{2},$$

und $\tau = l/v$, wenn l die mittlere freie Weglänge der Elektronen ist, so sollte die Leitfähigkeit

$$\sigma \sim T^{-1/2} \tag{9/20}$$

werden, wenn man l als temperaturunabhängig ansieht. Nimmt man für l den mittleren Gitterabstand im Metall und für n die Anzahl der Atome pro Kubikzentimeter an, so gibt Gl. (9/19) für eine Reihe von Metallen etwa den richtigen Zahlenwert von σ, nicht aber den experimentell gefundenen Temperatureinfluß wieder. Die Drudesche Theorie versagt auch bei der Beschreibung der Elektronenwärme, des Druckkoeffizienten der Leitfähigkeit sowie anderer ableitbarer Einflüsse auf den spezifischen Widerstand.

Trotz dieser offensichtlichen Mängel wird durch diese Theorie das Verhältnis von elektrischer zu thermischer Leitfähigkeit, d. h. σ/λ, bemerkenswert gut dargestellt. Nach dem von WIEDEMANN und FRANZ (1853) empirisch gefundenen Gesetz soll dieses Verhältnis für verschiedene Metalle dasselbe sein und die Lorentz-Zahl

$$L = \frac{\lambda}{\sigma T} \tag{9/21}$$

für alle Metalle und verschiedene Temperaturen übereinstimmen. Da nach der Drudeschen Theorie die thermische Leitfähigkeit

$$\lambda = \frac{2}{3}\,\tau\, v^2 n c_e \tag{9/22}$$

ist, worin c_e die spezifische Elektronenwärme bedeutet, ergibt der Vergleich von (9/19) und (9/22) für die Lorentz-Zahl den Wert

$$L = \frac{\lambda}{\sigma T} = 3 \left(\frac{k}{e}\right)^2 = 2{,}23 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W\Omega/(grd)^2}, \tag{9/23}$$

wenn man für $c_e = 3k/2$ einsetzt.

Zum Vergleich sind in *Tabelle 9.3* für einige Metalle bei 0 und 100 °C die Lorentz-Zahlen aus den experimentellen Werten von λ und σ berechnet. Trotz der guten Übereinstimmung mit Gl. (9/23) gibt diese über die Größen τ und n keine Auskunft, da sie in der Formel für L herausfallen.

Tabelle 9.3 Lorentz-Zahl für verschiedene Metalle

Metall	σ_{273}	λ_{273}	$10^8\,L$	
	$10^{-5}\,(\Omega\ \mathrm{cm})^{-1}$	W/cm K	273 K	373 K
Na	2,34	1,35	2,10	—
Cu	6,45	3,85	2,18	2,30
Ag	6,60	4,18	2,31	2,37
Be	3,60	2,30	2,34	—
Mg	2,54	1,50	2,16	2,32
Al	4,00	2,38	2,18	2,22
Pb	0,52	0,35	2,46	2,57
Bi	0,093	0,085	3,30	2,88
Pt	1,02	0,69	2,47	2,56

Die von SOMMERFELD (1928) auf der Grundlage der Fermi-Dirac-Statistik aufgestellte Theorie der metallischen Leitfähigkeit liefert sowohl die beobachtete Temperaturabhängigkeit $\sigma \sim T^{-1}$ als auch eine Erklärung für die bei gewöhnlichen Temperaturen außerordentlich kleine Elektronenwärme.

Sie geht vom Pauli-Prinzip aus, wonach nur *ein* Elektron einen gegebenen Quantenzustand besetzen kann. Die mittlere Besetzungszahl eines Energiezustandes E wird durch die Fermi-Funktion

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left[(E - E_F)/kT\right] + 1} \tag{9/24}$$

gegeben, worin die Fermi-Energie E_F durch die Normierung $\sum f(E) = N$ bestimmt wird, wenn N die Teilchenzahl des Systems ist. Aus der in Abb. 9.3

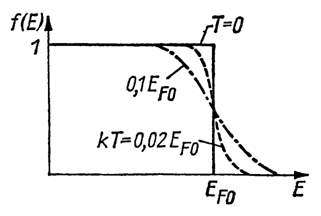


Abb. 9.3 Fermi-Funktion

wiedergegebenen Fermi-Funktion für verschiedene Temperaturen geht hervor, daß für $E < E_F$ bzw. $E > E_F$ die Besetzungszahl $f(E) = 1$ bzw. 0 wird. Der steile Abfall bei $E = E_F$ erfolgt innerhalb eines Energieintervalls kT. Die Fermi-Energie besitzt ein Minimum E_{F0} bei $T = 0$ und hängt von der Teilchenzahl N ab.

SOMMERFELD berechnete die möglichen Energiezustände aus der Schrödinger-Gleichung

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E + U)\psi = 0 \tag{9/25}$$

mit der Annahme, daß sich die Elektronen ohne Wechselwirkung, d. h. als freies Elektronengas, in einem Potential $-U$ bewegen. Die Lösung stellen ebene Wellen mit dem Ausbreitungsvektor $\boldsymbol{k}$ dar, durch den der Elektronenimpuls $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ beschrieben wird. Für ein Metall endlicher Ausdehnung findet man eine endliche Dichte erlaubter $\boldsymbol{k}$-Werte, für die zwei Richtungen des Elektronenspins möglich sind. Für $T = 0$ ergibt sich mit n Elektronen pro Kubikzentimeter die Fermi-Energie zu

$$E_{F0} = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}. \tag{9/26}$$

Oberhalb von E_{F0} bleiben die Zustände mit der Energie

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - U \tag{9/26 a}$$

unbesetzt. Die Oberfläche im $\boldsymbol{k}$-Raum, welche die unbesetzten von den besetzten Werten von $|\boldsymbol{k}|$ trennt, bezeichnet man allgemein als *Fermi-Oberfläche*, für isotrope Metalle als *Fermi-Kugel*. Aus Gl. (9/25) berechnet sich die Fermi-Energie für ein Metall mit dem Atomvolumen von 10 cm³ und mit einem Elektron pro Atom zu $E_{F0} \simeq 9 \cdot 10^{-12}$ erg, was einer Energie kT von etwa 60000 K entspricht. Bei gewöhnlichen Temperaturen ist daher die Elektronenenergie nur wenig von T abhängig. SOMMERFELD berechnete daraus die spezifische Wärme der Elektronen zu

$$C_e = \frac{\pi m k}{3\hbar^2}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{1/3} T = \gamma T, \tag{9/27}$$

die linear mit T wächst und bei normalen Temperaturen gegenüber der Gitterwärme zu vernachlässigen ist.

Zur Berechnung der *elektrischen Leitfähigkeit* mit Hilfe der Sommerfeld-Theorie wird berücksichtigt, daß das in Gl. (9/25) als konstant angenommene Potential $-U$ eine periodische Funktion ist, deren Periode der Gitterstruktur entspricht. Ferner muß anstelle der klassischen Elektronenmasse m in diesem periodischen Potential für das bewegte Elektron die *effektive Masse* eingeführt werden, die durch einen Tensor beschrieben wird. Schließlich ist für den Impuls- und Energieaustausch zwischen Elektron und Gitter die Boltzmannsche Transportgleichung zu lösen. Der Einfluß der thermischen Bewegung des Gitters läßt sich durch dessen Phononenspektrum beschreiben, das oberhalb

der Debye-Temperatur θ_D voll angeregt ist. Auf Grund dieser Vorstellung findet man für ein *einwertiges* Metall bei Zimmertemperatur für den spezifischen Widerstand die Beziehung

$$\varrho_0 = \frac{1}{\sigma} = \frac{\pi}{3} \frac{m^2 V_a}{e^2 \hbar} \left(\frac{T}{M k \theta_D{}^2} \right) C_D^2, \qquad (9/28)$$

worin V_a das Atomvolumen, M das Atomgewicht ist und C_D etwa der Fermi-Energie E_F entspricht. In einem großen Temperaturbereich ist ϱ_0 der Temperatur proportional. Für *tiefe Temperaturen* gelangt man zur Grüneisen-Bloch-Beziehung

$$\frac{\varrho_0(T)}{\varrho_\theta} = 497{,}6 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^5, \qquad (9/29)$$

wonach der Widerstand in diesem Bereich mit der 5. Potenz von T anwächst. In Abb. 9.4 ist für einige Metalle, für die θ_D passend gewählt wurde, der Temperaturverlauf des spezifischen Widerstandes dargestellt und mit den Gln. (9/28) und (9/29) verglichen.

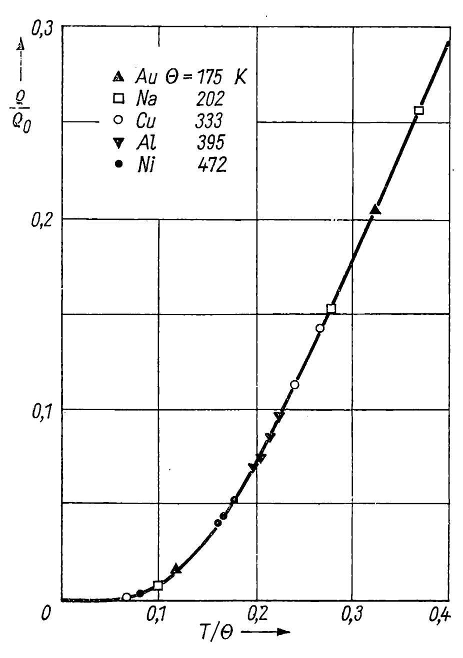


Abb. 9.4 Spezifischer Widerstand nach der Grüneisen-Bloch-Formel

Die elektrische Leitfähigkeit von Metallen hängt von der Relaxationszeit τ, der Struktur der Fermi-Fläche und von der effektiven Elektronendichte n ab, die nicht mit der Ionendichte übereinstimmen muß. Die Relativwerte von τ^{-1}

sind hauptsächlich durch den Faktor $T/M\theta_D^2$ der Gl. (9/28) bestimmt. Vergleicht man die spezifischen Widerstände von Metallen bei Zimmertemperatur, so sollte die Größe $\sigma/M\theta_D^2$ stark von der elektronischen Struktur des Metalls abhängen. In *Tabelle 9.4* sind die Größen σ, M, θ_D und $\sigma/M\theta_D^2$ für reine Metalle bei Zimmertemperatur zusammengestellt.

Tabelle 9.4 Leitfähigkeit reiner Metalle bei 0 °C

Metall	$\sigma \cdot 10^{-4}$ $(\Omega\ \mathrm{cm})^{-1}$	M	θ_D (K)	$(\sigma/M\theta_D^2) \cdot 10^2$
Li	11,8	6,94	363	12,9
Be	18	9,02	1000	2,0
Na	23	23,0	202	24,0
Mg	25	24,3	357	8,1
Al	40	27,0	395	9,5
K	15,9	39,1	163	15,3
Ca	23,5	40,1	230	11,1
Ti	1,2	47,9	342	0,2
Cr	6,5	52,0	495	0,5
Fe	11,2	55,8	420	1,14
Co	16,0	58,9	401	1,7
Ni	16,0	58,7	375	1,9
Cu	64,5	63,6	333	9,1
Zn	18,1	65,4	213	6,1
Ga	2,45	69,7	125	2,25
As	2,85	74,9	291	0,45
Rb	8,6	85,4	85	14
Sr	3,3	87,6	171	1,3
Zr	2,4	91,2	288	0,32
Mo	23,0	96,0	380	1,7
Ru	8,5	101,7	426	0,46
Rh	22,0	102,9	370	1,6
Pd	10,0	106,7	270	1,3
Ag	66,7	107,9	223	12,4
Cd	15	112,4	172	4,5
In	12	114,8	198	2,7
Sn	10	118,7	260	1,2
Cs	5,6	132,9	54	14,0
Ba	1,7	137,4	113	1,0

9.22 *Widerstand von Legierungen und verunreinigten Metallen* [*9.52, 9.122, 9.86*]

Nach Gl. (9/29) sollte der elektrische Widerstand am absoluten Nullpunkt verschwinden. Mit Ausnahme der supraleitenden Elemente (s. § 9.8), deren Widerstand bereits oberhalb von $T = 0$ aus ganz anderen Gründen zu Null

wird, besitzen alle metallischen Leiter für $T = 0$ einen endlichen und temperaturunabhängigen Widerstand, der *Restwiderstand* genannt wird.

Die Theorie zeigt, daß im ruhenden und periodischen Gitter die Leitungselektronen nicht gestreut werden. Die thermische Gitterbewegung dagegen führt nach § 9.21, Gl. (9/28) zu einem temperaturabhängigen Verlauf des Widerstandes $\varrho(T)$. Durch statische Gitterfehler, wie Versetzungen, Fremdatome und andere Gitterdefekte, wird ein zusätzlicher Widerstandsbeitrag ϱ_g erzeugt, der unabhängig von der Temperatur ist und sich nach

$$\varrho = \varrho_0(T) + \varrho_g \tag{9/30}$$

zum temperaturabhängigen Anteil addiert. Diese Beziehung wird als *Matthiessensche Regel* bezeichnet. Differenziert man Gl. (9/30) nach T,

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}T} = \frac{\mathrm{d}\varrho_0(T)}{\mathrm{d}T}, \tag{9/30a}$$

so verschwindet der Einfluß der Strukturfehler und liefert, wie in Abb. 9.5 gezeigt ist, eine Debye-Kurve. Widerstandskurven mit verschiedenem Restwiderstand sind um einen konstanten Betrag gegeneinander verschoben, besitzen jedoch gleiches $\mathrm{d}\varrho/\mathrm{d}T$.

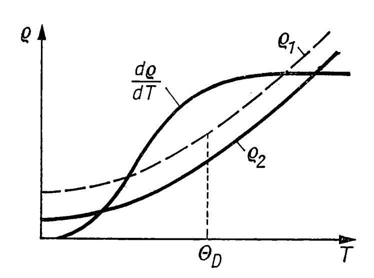


Abb. 9.5 Matthiessensche Regel

Der Einfluß von *Fremdatomen* auf den Restwiderstand ϱ_g läßt sich für die Konzentration x durch die *Nordheim-Regel*

$$\varrho_g(x) = Ax(1 - x) \tag{9/31}$$

ausdrücken, die experimentell bestätigt ist. Der Parameter A hängt von der Art des Fremdatoms ab und ist klein, wenn das gelöste Fremdatom gleiche Wertigkeit wie das Wirtsmetall besitzt [*9.127*, *9.140*].

Unter bestimmten Voraussetzungen können die Gln. (9/28) und (9/31) zusammengefaßt werden zu folgender Beziehung für den Widerstand einer *verdünnten festen Lösung*

$$\varrho = aT + bx. \tag{9/32}$$

Darin stellt a den Koeffizienten von T in Gl. (9/28) und b den von x in Gl. (9/31)

dar. Setzt man $\varrho_0 = a_0 T$ für *reine* Metalle, so findet man aus Gl. (9/32)

$$\frac{T}{\varrho_0} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial T \, \partial \varrho} = \frac{1}{a_0} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{a_0} \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}T} \tag{9/33}$$

für den Einfluß von x auf den Temperaturkoeffizienten. Nach Messungen von LINDE [*9.86*] ergeben sich bei *Cu-Legierungen* für die linke Seite von Gl. (9/33) die in *Tabelle 9.5* wiedergegebenen Zahlenwerte.

Tabelle 9.5 Temperaturkoeffizient von Cu-Legierungen

Fremdatom	$\frac{T}{\varrho} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial T \partial x}$	Fremdatom	$\frac{T}{\varrho} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial T \partial x}$
Be	4,6	Ni	2,4
Al	2,5	Ga	3,6
Si	8,8	Ge	7,4
Cr	−18,1	As	9,6
Mn	−12,8	In	4,3
Fe	−12,0	Sn	7,4
Co	1,7	Sb	9,6

Für die meisten *Legierungen* ist der Restwiderstand relativ hoch. Bei technisch wichtigen Legierungen, wie rostfreien Stählen, Monel, Cu—Ni usf., überwiegt der zweite Term in Gl. (9/30) und liefert einen praktisch von der Temperatur unabhängigen Widerstand. In einigen für Normalwiderstände (s. § 9.3) benutzten Legierungen wie *Manganin* und *Konstantan* sinkt unterhalb von etwa 100 K der spezifische Widerstand um weniger als 20% der ganzen Widerstandsänderung zwischen 300 und 4 K. In *Tabelle 9.6* sind für einige technisch wichtige Legierungen die Widerstandswerte als Funktion der Temperatur angegeben.

Tabelle 9.6 Spezifischer Widerstand (μΩ cm) *von Legierungen*

Legierung	Zustand	295 K	90 K	77 K	4 K
Messing (30 Zn, 70 Cu)	gezogen	7,2	5,0	—	4,3
Kupfer-Nickel (90 Cu, 10 Ni)	,,	14,7	—	12,7	12,0
Kupfer-Nickel (80 Cu, 20 Ni)	,,	26	—	24	23
Manganin (86 Cu, 12 Mn, 2 Ni)	,,	40	39	—	37
Neusilber (65 Cu, 12 Ni, 23 Zn)	,,	30	27,5	—	26
Konstantan (54 Cu, 46 Ni)	,,	52,5	45	—	49
Monel-Metall (67 Ni, 32 Cu, 1 Mn)	,,	50	—	32	30
Rostfreier Stahl	,,	71	52,5	—	49
Inconel	halbhart	107	104	104	104

Der Einfluß physikalischer Defekte auf den Widerstand ist theoretisch nur schwer erfaßbar. Eine plastische Verformung von Silber ergibt z. B.

$\varrho_g = 0{,}2\ \mu\Omega$ cm und wirkt sich daher beträchtlich auf den Gesamtwiderstand aus; bei einer Legierung mit dem Widerstand $\varrho_0(T) = 10\ \mu\Omega$ cm oder mehr spielt diese keine merkliche Rolle [*9.120*]; vgl. auch § 9.252.

9.23 Elektrische Leitfähigkeit von Halbleitern [*9.68, 9.162, 9.109*]

Der spezifische Widerstand der *Halbleiter* mit Werten zwischen 10^{-2} und $10^{9}\ \Omega$ cm liegt zwischen dem von guten Leitern ($10^{-5}\ \Omega$ cm) und Isolatoren ($10^{14} \cdots 10^{22}\ \Omega$ cm). Bei $T = 0$ verhält sich ein reiner und ungestörter Halbleiter wie ein Isolator; die charakteristischen Halbleitereigenschaften werden durch thermische Aktivierung, Zusätze (Dotierung) und Gitterdefekte hervorgerufen.

Wie in § 4.22 dargestellt, läßt sich mit Hilfe des Bändermodells (Abb. 4.13) nach Gl. (4/28) die *Eigenleitfähigkeit* des *reinen* Halbleiters berechnen, sofern die Energielücke ΔE bekannt ist. Als Ladungsträger fungieren Elektronen im Leitfähigkeitsband und Defektelektronen, sogenannte *Löcher*, die infolge der thermischen Aktivierung von Elektronen im Valenzband erzeugt werden. Beide Sorten von Ladungsträgern mit der Elementarladung e besitzen spezifische Beweglichkeiten μ_n bzw. μ_p; ihre Konzentration n_n bzw. n_p hängt außer von der Temperatur von den Diffusionskoeffizienten ab.

Den spezifischen Widerstand für den Eigenhalbleiter mit der Energielücke ΔE erhält man aus der Beziehung

$$\varrho = A\, e^{\Delta E/2kT} \tag{9/34}$$

und daraus durch Logarithmieren

$$\log \varrho = \log A + \frac{\Delta E}{2kT}. \tag{9/34a}$$

Die durch Gl. (9/34a) beschriebene lineare Abhängigkeit von $\log \varrho$ und $1/T$ wird experimentell bestätigt, wie aus Abb. 9.6 zu ersehen ist. Die Konzentration n_n der Elektronen findet man durch Berechnung der Zustandsdichte zu

$$n_n = 2\,(2\pi m_n kT/h^2)^{3/2} \cdot e^{(E_F - \Delta E)/kT}. \tag{9/35}$$

Die Dichte n_p der Defektelektronen ergibt sich analog aus der Beziehung

$$n_p = 2\,(2\pi m_p kT/h^2)^{3/2}\, e^{-E_F/kT}. \tag{9/36}$$

Setzt man $n_n = n_p$, so folgt durch Vergleich von (9/35) und (9/36) für $m_n = m_p$

$$E_F = \frac{\Delta E}{2},$$

d. h., die Fermi-Grenze liegt in der Mitte der verbotenen Zone.

Wie in § 4.21 erläutert, wird durch Fremdatome die Leitfähigkeit des reinen Halbleiters drastisch verändert: eine Bor-Dotierung in Silizium von 10^{-5} erhöht die Leitfähigkeit um den Faktor 1000.

Durch den Einbau geeigneter Fremdatome in das Wirtsgitter wird das Bänderschema des reinen Halbleiters modifiziert, da in der verbotenen Zone

zusätzliche Energieterme der lokalisierten Fremdatome entstehen. Im Falle der vierwertigen Halbleiter *Germanium* und *Silizium* wird ein eingebautes fünfwertiges Fremdatom (P, As, Sb) als *Donator* wirksam sein, der ein Überschußelektron an das Leitfähigkeitsband abgibt. Ein eingebautes dreiwertiges Fremdatom (z. B. Bor) wird *Akzeptor* genannt, da es ein Elektron aus dem Valenzband aufnehmen kann und dort ein Defektelektron hinterläßt. In Abb. 9.7 ist das Energieschema für *Silizium* dargestellt, das sowohl Akzeptoren als

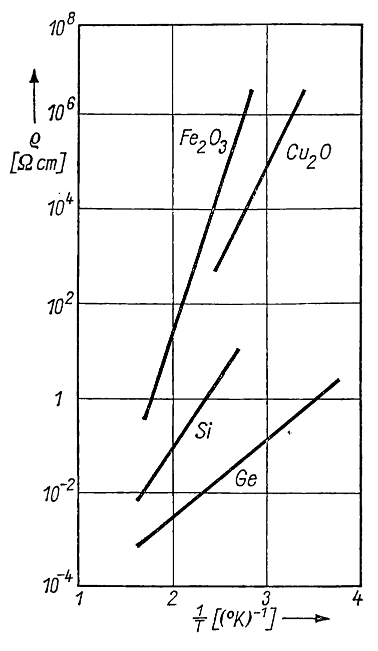


Abb. 9.6 Eigenleitfähigkeit von Halbleitern

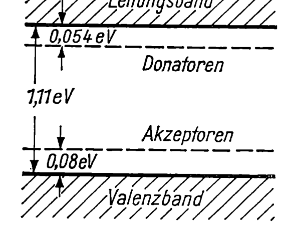


Abb. 9.7 Bänderschema von Si

auch Donatoren enthält und deren Energieniveaus um die jeweilige Ionisationsenergie oberhalb des Valenzbandes bzw. unterhalb des Leitfähigkeitsbandes eingetragen sind.

Der Verlauf der Leitfähigkeit von *dotierten* Halbleitern ist von dem *reiner* Halbleiter verschieden. In der Nähe von $T = 0$ verhalten sich beide wie Isolatoren. Mit wachsender Temperatur werden Elektronen aus dem Donatorniveau thermisch aktiviert und gelangen in das Leitungsband, wobei analog zu Gl. (9/34), jedoch mit der sehr viel kleineren Energiedifferenz ΔE_d die Leitfähigkeit zunimmt. Da die Leitfähigkeit nach Gl. (4/29) proportional zum Produkt aus der Zahl der Ladungsträger und ihrer Beweglichkeit ist und dieses nur langsam mit wachsender Temperatur abnimmt, wird σ zunächst exponentiell mit der Temperatur zunehmen. In Abb. 9.8 ist in halblogarithmischem Maßstab der spezifische Widerstand ϱ von verschieden hoch mit Phosphor dotiertem Silizium abhängig von $1/T$ dargestellt. Mit zunehmender Tempe-

ratur geben die Donatoren ihre Elektronen ganz ab, wodurch ϱ innerhalb eines größeren Temperaturbereichs einen positiven Temperaturkoeffizienten erhält. Bei noch höheren Temperaturen überwiegt die Eigenleitung nach Gl. (9/34).

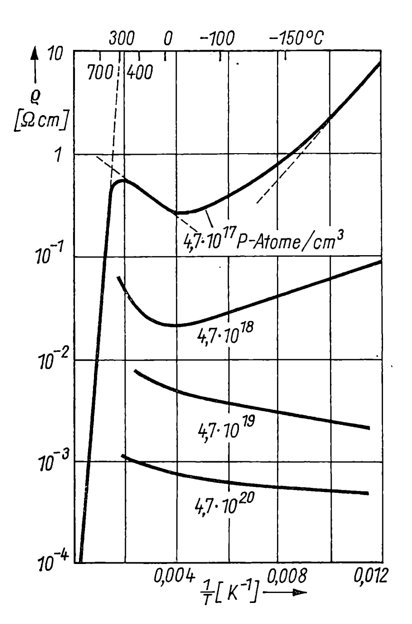


Abb. 9.8 Spezifischer Widerstand von n-Si

Dieses Verhalten findet man auch in dotierten Halbleitern vom p-Typ, in denen der Stromtransport von Defektelektronen übernommen wird.

Die halbleitenden Materialien lassen sich einteilen in folgende Gruppen:

1. Halbleiter vom Diamanttyp, die durch vier gerichtete Valenzbindungen gekennzeichnet sind: Diamant, Ge, Si, graues Sn,
2. A^{III}-B^{V}-Legierungen, die 1952 von WELKER [*9.181*, *9.182*] entdeckt wurden und Verbindungen von Elementen der III. und V. Gruppe darstellen: z. B. InAs, InSb, GaAs,
3. Elemente der VI. Gruppe mit Molekülgittern, die aus Ringen oder Ketten aufgebaut sind: S, Se, Te,
4. Ionenkristalle: NaCl, KCl, $NaNO_3$,
5. Sulfide, Selenide, Telluride,
6. Oxide und Spinelle,
7. Amorphe und flüssige Halbleiter, Lösungen von Na und K in NH_3,
8. Isolierende organische Kristalle, Gläser und Polymere.

In *Tabelle 9.7* sind für verschiedene Halbleiter Energielücke ΔE, Temperaturkoeffizient $\mathrm{d}(\Delta E)/\mathrm{d}T$ sowie die Beweglichkeiten μ_n und μ_p zusammengestellt.

Tabelle 9.7 Eigenschaften von Halbleitern

Substanz	Struktur	ΔE eV	$d(\Delta E)/dT$ eV/grd	μ_n cm^2/Vs	μ_p cm^2/Vs
Elemente					
Diamant	Diamant	5,3	$-2 \cdot 10^{-4}$	800···1800	1200
Si	,,	1,12	$-3 \cdot 10^{-4}$	1900	425
Ge	,,	0,72	$-3{,}5 \cdot 10^{-4}$	3900	1700
α—Sn	,,	0,08	—	1560	1240
P (schwarz)	Schichtgitter	0,33	—	220	350
As	amorph	1,17	$-5 \cdot 10^{-4}$	65	—
Se	amorph	1,7···2,5	$-7 \cdot 10^{-4}$	—	—
Te	Atomkette	0,33	$-2 \cdot 10^{-4}$	1750	1250
J	Molekülgitter	1,3	$-15 \cdot 10^{-4}$	25	—
$A^{III}B^{V}$-Legierungen					
AlSb	Zinkblende	1,65	$-3{,}5 \cdot 10^{-4}$	40	230
GaP	,,	2,4	$-5{,}4 \cdot 10^{-4}$	—	20
GaAs	,,	1,53	$-5{,}0 \cdot 10^{-4}$	4000	240
GaSb	,,	0,8	$-4{,}1 \cdot 10^{-4}$	4000	2000
InP	,,	1,34	$-4{,}6 \cdot 10^{-4}$	4000	60
InAs	,,	0,45	$-3{,}5 \cdot 10^{-4}$	27000	280
InSb	,,	0,25	$-2{,}6 \cdot 10^{-4}$	77000	≈1000
Sonstige Verbindungen					
CuO	Kupferoxid	0,6	—	—	—
Mg_2Si	Antifluorit	0,77	$-6 \cdot 10^{-4}$	370	65
Mg_2Ge	,,	0,74	$-8 \cdot 10^{-4}$	530	106
Mg_2Sn	,,	0,36	$-3 \cdot 10^{-4}$	210	150
CdS	Wurtzit	2,5	—	240	—
CdTe	Wurtzit	≈1,5	$-3{,}6 \cdot 10^{-4}$	700	60
PbS	NaCl	0,37	$+2{,}5 \cdot 10^{-4}$	640	350
PbTe	NaCl	0,45	$+2{,}5 \cdot 10^{-4}$	2100	840
FeS_2	Pyrit	1,2	—	100	2

Über die Bestimmung der charakteristischen Größen eines Halbleiters siehe [*9.19*], Leitfähigkeitsmessungen an *Germanium* siehe [*9.1, 9.33, 9.38, 9.65, 9.77*], *Silizium* siehe [*9.27, 9.130*], *Selen* siehe [*9.40*] sowie *III-V-Legierungen* siehe [*9.28, 9.46, 9.129*]. Neue glasartige Halbleiter werden von Gorjunova et al. [*9.54*] beschrieben; Widerstandsmessungen an *Aluminiumoxid* siehe [*9.60*].

9.24 Widerstandsänderung im Magnetfeld [*9.92*]

9.241 Widerstandsänderung von Metallen

Im allgemeinen erhöht sich der Widerstand eines *metallischen* Leiters, wenn sich dieser in einem Magnetfeld B befindet. In schwachen Feldern ist die Widerstandszunahme proportional B^2. In genügend hohen Feldern kann sich

die Widerstandsänderung einem Sättigungswert nähern oder auch unbeschränkt anwachsen. Nach den theoretischen Überlegungen von KOHLER [9.78] sollte die magnetische Widerstandsänderung $\Delta\varrho$ des Widerstandes $\varrho(B = 0)$ durch die Beziehung

$$\frac{\Delta\varrho}{\varrho} = f\left(\frac{B}{\varrho}\right) \tag{9/37}$$

darzustellen sein, worin f eine für das betreffende Metall charakteristische Funktion ist. Diese hängt vom Winkel zwischen Feld und Strom sowie von der Kristallorientierung ab.

Setzt man in Gl. (9/19) für $\tau = l/v$, so berechnet sich daraus die freie

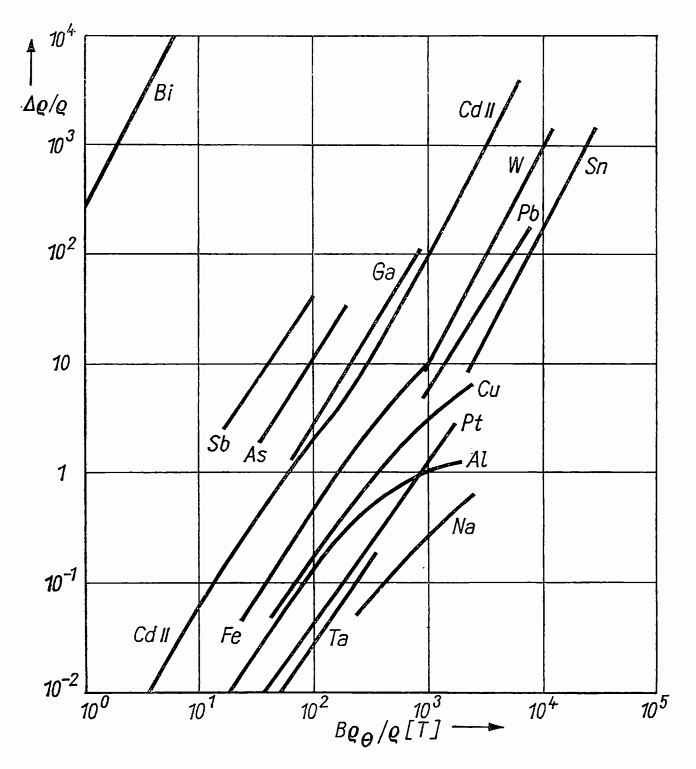


Abb. 9.9 Widerstandsänderung im transversalen Magnetfeld

Weglänge zu $l = mv/(e^2 n\varrho)$. Andererseits beschreibt ein Elektron im Feld B den Radius $r = mv/eB$, so daß durch Vergleich die Beziehung

$$\frac{l}{r} = \frac{B}{\varrho}\,\frac{1}{ne} \tag{9/38}$$

entsteht. Da der Einfluß des Magnetfelds davon abhängt, wie oft ein Elektron die Kreisbahn vom Radius r durchlaufen kann, bis der nächste Stoß erfolgt, erkennt man aus Gl. (9/38), daß die in der *Kohler-Regel* auftretende Größe B/ϱ tatsächlich ein Maß für l/r ist. Gewöhnlich trägt man nach JUSTI [*9.69*] die Widerstandsänderung $\Delta\varrho/\varrho$ gegen die Größe $B\varrho_\theta/\varrho$ auf, worin ϱ_θ der spezifische Widerstand bei der Debye-Temperatur ist. In Abb. 9.9 ist für eine Reihe von Metallen mit polykristalliner Struktur der Widerstandsverlauf im *transversalen* Magnetfeld zusammengestellt. In einigen Metallen wie In und Al nähert sich $\Delta\varrho/\varrho$ einem Sättigungswert von etwa 2, in anderen ändert sich der Widerstand mit B oder B^2.

Im *Longitudinalfeld* ist die Widerstandsänderung kleiner als im Transversalfall und zeigt bei hohen Feldern Sättigungsverhalten. Bemerkenswert ist das Verhalten von *Wismut*, das einen außerordentlich großen Effekt zeigt und aus diesem Grund zur Messung des Magnetfelds (vgl. § 11.72) benutzt wird.

Über Ergebnisse an Cu-Einkristallen siehe [*9.116*], an dünnen Na-Proben [*9.185*], Cu und Au bei tiefen Temperaturen [*9.83*] sowie Ni-Legierungen [*9.80*].

9.242 Halbleiterwiderstand im Magnetfeld

Der elektrische Widerstand von *Halbleitern* nimmt im allgemeinen ebenfalls mit wachsendem Magnetfeld zu, und zwar meist quadratisch mit B [*9.117*]. Von besonderem Interesse sind hierbei die halbleitenden III-V-Verbindungen (s. § 9.23), die ausführlich untersucht wurden [*9.13, 9.22*]. Für InSb finden SUN und WAGINI [*9.167*] $\Delta\varrho/\varrho \sim B^n$, wobei der Exponent n bei Raumtemperatur den Wert 2, bei höheren Temperaturen einen etwas kleineren erhält. Durch Einbau von Schwermetallphasen als eutektischem Gefügebestandteil in III-V-Verbindungen [*9.111*] findet man ausgeprägte anisotrope magnetfeldabhängige Widerstände. Diese Eigenschaft wird in den sogenannten *Feldplatten* aus InSb—NiSb ausgenutzt, um magnetische Feldstärken zu messen oder berührungsfreie Steuerungen zu konstruieren (s. § 15.14).

9.243 Einfluß elektrischer Felder auf den Widerstand

Untersuchungen über den Einfluß sehr starker elektrischer Felder auf dünne W-Drähte [*9.35*] ergeben keinen eindeutigen Zusammenhang, da durch Feldemission Temperaturänderungen der Probe auftreten.

9.25 Widerstandsänderung durch Gitterdefekte

Nach der in § 9.22 besprochenen Matthiessenschen Regel setzt sich der Widerstand aus einem temperaturabhängigen Anteil und einem zweiten zusammen, der von der Struktur des Materials und nicht von der Temperatur abhängt. Jede Abweichung von der ungestörten Struktur verursacht infolge der Streuwirkung auf die Elektronenwellen einen zusätzlichen Widerstand,

wobei sich die Wirkung verschiedener Defekte addiert. Als Ursachen für Gitterdefekte sind anzusehen:

1. elastische und kleine plastische Verformungen,
2. plastische Verformung,
3. Abschrecken von hohen Temperaturen,
4. Bestrahlung mit schnellen geladenen oder neutralen Teilchen.

9.251 Kleine Verformungen

Bei kleinen elastischen oder plastischen Verformungen wird ein linearer Zusammenhang zwischen Dehnung und Widerstandszunahme gefunden, der sich aus der Elektronenstreuung an *Versetzungen* erklärt. Die Widerstandsänderung hängt ferner von der Temperatur ab und ist um so höher, je tiefer die Temperatur ist. In *Tabelle 9.8* sind nach Messungen von MANINTVELD [*9.98*] die Widerstandsänderungen für verschiedene reine Metalle mit polykristalliner Struktur bei einer Dehnung von 10% für zwei verschiedene Temperaturen zusammengestellt.

Tabelle 9.8 Widerstandsänderung bei plastischer Verformung

Metall	Al	Fe	Cu	Ag	Au	Pt	Temp. [K]
$10^2 \frac{\Delta\varrho}{\varrho}$	0,4	0,3	0,55	0,5	0,75	—	273
	—	—	3,9	4,2	3,2	3,1	90

9.252 Plastische Verformung [*9.16*]

Durch plastische Verformung (Ziehen von Drähten, Walzen von Folien) entstehen größere Defektbereiche (Kleinwinkelkorngrenzen, Leerstellen), die durch thermische Aktivierung ausheilen können. In Abb. 9.10 sind nach

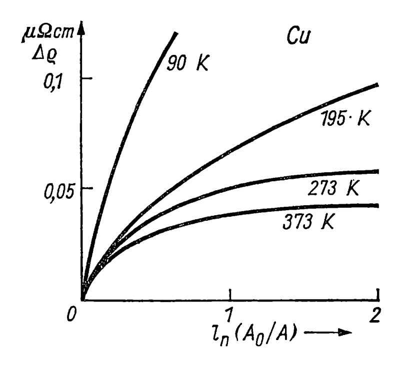


Abb. 9.10 Widerstandsänderung bei plastischer Verformung

Messungen von BROOM [9.12] für verschiedene Temperaturen die Widerstandsänderungen von *Kupfer* angegeben; für höhere Temperaturen strebt $\Delta \varrho$ einem Sättigungswert zu.

Auch bei *Torsion* von Drähten wird eine Widerstandszunahme beobachtet, die stark von der Temperatur abhängt. Beim Walzen von Folien tritt eine anisotrope Widerstandsänderung auf. Über plastische Verformung von Halbleitern siehe [9.56].

9.253 Abschrecken [9.34]

Durch Abschrecken dünner strombeheizter Drähte mittels verdampfenden Heliums oder einer anderen tiefsiedenden Flüssigkeit werden *Leerstellen*, die sich im thermischen Gleichgewicht bei der Ausgangstemperatur gebildet haben, bei tiefer Temperatur eingefroren und verursachen zusätzliche Streueffekte. KAUFMANN und KOEHLER [9.72] erhielten für sehr reines *Gold*, das von 1193 K innerhalb von 10 ms abgeschreckt wurde, eine Widerstandszunahme von $\Delta R/R = 0{,}82$.

9.254 Bestrahlungseffekte [9.153]

Durch Bestrahlung mit energiereichen geladenen oder neutralen Elementarteilchen entsteht eine strukturelle Fehlordnung, die meistens aus *Frenkel-Fehlstellen* besteht. Unter einem Frenkel-Paar versteht man die Zuordnung Leerstelle-Zwischengitteratom, die beim elastischen Stoß an einem regulären Gitterplatz entsteht. Von Bedeutung sind dabei schnelle Neutronen, Deuteronen, α-Teilchen und Ionen schwerer Atome; Elektronen sind nur bei sehr hohen Energien wirksam.

Neutronen unterscheiden sich von den geladenen Teilchen dadurch, daß ihr Wirkungsquerschnitt für Stöße mit Atomen sehr klein ist. Die Fehlordnung im Festkörper entsteht durch elastische Stöße, bei denen ein Teil der kinetischen Energie der Neutronen auf das getroffene Atom übertragen wird. Bezeichnet man die Massen des Neutrons bzw. getroffenen Atoms mit M_1 bzw. M_2, so überträgt ein Neutron mit der Energie E den Energiebetrag

$$\Delta E = \frac{4 M^2}{M_1 M_2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \qquad (9/39)$$

wobei $M = M_1 M_2/(M_1 + M_2)$ und ϑ der Ablenkwinkel des stoßenden Teilchens ist. Die angestoßenen Atome werden im allgemeinen ebenfalls eine große kinetische Energie erhalten und sich nach dem Stoß ähnlich wie die „Primärteilchen" verhalten. Dabei entstehen *Defektkaskaden* mit einigen Hundert Frenkel-Paaren, die innerhalb eines kugelförmigen Volumens von 20⋯30 nm Durchmesser liegen. Diese Vorstellung ist nur bei Tieftemperaturbestrahlung [9.37] zutreffend, da Zahl und Art der Defekte durch Temperaturbewegung und Reaktionsvorgänge verändert werden (*Erholung*).

Für *geladene Teilchen* ist ebenfalls Gl. (9/39) gültig und die übertragene Energie um so größer, je weniger sich die Massen von stoßenden und gestoßenen Teilchen unterscheiden. Infolge der elektrischen Ladung kann das

getroffene Atom ionisiert werden oder das stoßende Teilchen seine Ladung verändern.

Die durch Teilchenbestrahlung entstandenen Gitterdefekte vergrößern den spezifischen elektrischen Widerstand um den Betrag

$$\Delta \varrho = \frac{n_d}{n_A} \, \delta \varrho_d, \tag{9/40}$$

worin n_d die Konzentration der Frenkel-Defekte, n_A die atomare Dichte und $\delta \varrho_d$ die elektrische Widerstandsänderung pro Frenkel-Paar bedeutet, die sich aus $\delta \varrho_L$ und $\delta \varrho_Z$ (Leerstelle, Zwischengitterplatz) zusammensetzt. Repräsentative Werte für Cu nach [*9.158*] sind:

$$\delta \varrho_L = 1{,}5 \; \mu\Omega \; \text{cm}; \qquad \delta \varrho_Z = 1 \; \mu\Omega \; \text{cm}; \qquad \delta \varrho_d = 2{,}5 \; \mu\Omega \; \text{cm}.$$

Ähnliche Werte erhält man auch für Ag und Au.

Wenzl, Schilling und Isebeck [*9.183*] haben reines *Aluminium* ($\varrho_0 = 1{,}8 \; \text{n}\Omega \; \text{cm}$) bei 4,6 K mit einer Neutronendosis von etwa $17 \cdot 10^{17}$ *nvt* ($E > 0{,}1$ MeV) bestrahlt und erhielten bei einer mittleren Defektkonzentration zwischen $5 \cdot 10^{-4}$ und 10^{-3} eine Zunahme des spezifischen Widerstandes um $\Delta \varrho = 0{,}3 \; \mu\Omega \; \text{cm}$. Beim Tempern erholt sich der Widerstand bei wachsender Temperatur in drei diskreten Temperaturintervallen. Die Produktionsrate der Defekte nimmt mit zunehmender Bestrahlungsdauer ab; bei *Uran* [*9.17*] wird bereits nach dreistündiger Bestrahlung mit einem Neutronenfluß von $8 \cdot 10^{12} \; \text{n/cm}^2 \, \text{s}$ eine Sättigung des Widerstandes gefunden.

Über Bestrahlungseinfluß auf den Widerstand von *Halbleitern* siehe [*9.128, 9.161*].

9.26 Abhängigkeit des Widerstands vom Druck [*9.84, 9.168*]

Durch Anwendung hydrostatischen Druckes auf ein Metall nehmen Atomvolumen und die Amplituden der Gitterschwingungen ab, d. h., der spezifische Widerstand sollte sich wie bei einer Temperaturerniedrigung verringern. Andererseits wird sich bei hohem Druck die Überlappung der Energiebänder sowie die Struktur der Fermi-Fläche ändern und den Widerstand vergrößern. Als *Druckkoeffizient des Widerstands* wird die Größe

$$\alpha_{\varrho,p} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial p} \tag{9/41}$$

definiert, wobei die Volumenänderung der Probe zu berücksichtigen ist. Für eine zylindrische Probe der Länge l und mit dem Querschnitt A findet man die Widerstandsänderung

$$\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial p} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial p} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial p} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial p}$$

und speziell bei kubischen Metallen wegen $\partial (\log A)/\partial p = 2 \, \partial (\log l)/\partial p$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial p} = \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial p}. \tag{9/42}$$

In *Tabelle 9.9* sind für verschiedene Metalle nach BRIDGMAN [*9.11*] die mittleren Druckkoeffizienten bei drei verschiedenen Temperaturen und Drücken bis 7 · 10^3 kp/cm^3 zusammengestellt.

Tabelle 9.9 Druckkoeffizient von Metallen
(in 10^{-6} cm^2/kp)

Metall	273 K	195 K	90 K
Mg	4,39	4,49	5,89
Al	4,28	4,71	9,16
Fe	2,34	2,27	2,44
Ni	1,85	2,00	1,88
Nb	1,18	0,98	0,80
Mo	1,30	1,29	1,91
Ta	1,45	1,42	1,17
W	1,37	1,42	1,36
Pt	1,93	1,97	2,34
Cu	1,88	2,14	3,09
Ag	3,45	3,46	4,09
Au	2,94	2,97	3,27
Pb	12,99	12,88	12,76

Bei *Halbleitern* wird eine große Druckabhängigkeit des Widerstandes gefunden, die allerdings stark von der Kristallorientierung abhängt [*9.110*]. In einem weiten Druck- und Temperaturbereich ist die Widerstandsänderung druckproportional und der Druckkoeffizient proportional zu T^{-1}. An halbleitenden III-V-Verbindungen wird ähnliches Verhalten gefunden [*9.126, 9.173*].

Bei sehr hohen Drücken von der Größe 50 kbar werden einige Halbleiter, darunter Ge und Si sowie halbleitende Verbindungen, *supraleitend* mit Sprungpunkten von einigen Kelvin (vgl. § 9.82).

9.27 Dickenabhängigkeit des Widerstandes [*9.26*]

In § 9.22 sind für die Widerstandsberechnung Streuprozesse der Elektronen durch Phononen und solche an Gitterdefekten betrachtet worden. Bei sehr reinen Metallproben und tiefen Temperaturen kann die freie Weglänge der Elektronen von der Größe 1 mm werden, d. h., es muß die Streuung an den Oberflächen berücksichtigt werden. Anstelle von Gl. (9/30) tritt die Beziehung

$$\varrho = \varrho_0(T) + \varrho_g + \varrho_s, \tag{9/43}$$

in der ϱ_s die Streuung an den Oberflächen angibt. Der Widerstand läßt sich nach Gl. (9/19) auch mit Hilfe der freien Elektronenweglänge ausdrücken,

wobei sich Gl. (9/43) umformen läßt in

$$\varrho = \frac{mv}{e^2 n}\left(\frac{1}{l_0} + \frac{1}{l_g} + \frac{1}{l_s}\right). \tag{9/44}$$

Darin sind l_0, l_g und l_s die den Streuprozessen durch Phononen, Gitterdefekte und Oberflächen entsprechenden freien Weglängen der Elektronen, wobei die Größe l_s etwa der Dicke eines Filmes bzw. dem Durchmesser eines Drahtes entspricht. Aus Gl. (9/44) ist zu entnehmen, daß Oberflächeneffekte nur dann bemerkbar sind, wenn $l_s > l_g$ bzw. l_0, d. h. im Bereich tiefer Temperaturen und mit sehr reinen Proben. Analog zur Nordheim-Regel (vgl. Gl. (9/31)) kann der Dickeneinfluß durch eine Beziehung

$$\frac{\varrho}{\varrho_b} = 1 + \frac{l}{d} \tag{9/45}$$

beschrieben werden, wenn ϱ_b den Widerstand des kompakten („bulk") Materials, l die freie Weglänge der Elektronen und d den Drahtdurchmesser bedeutet. Gleichung (9/45) wird überraschend gut durch die experimentellen Ergebnisse bestätigt und gibt die Zunahme des spezifischen Widerstands mit abnehmender Dicke wieder.

Die theoretische Behandlung dieses Problems geht von der Transportgleichung aus und berücksichtigt die Reflexionsbedingungen an der Oberfläche durch die Größe p, die den Teil der Elektronen angibt, die spiegelnd reflektiert werden. Der andere Teil $1 - p$ wird diffus reflektiert und verliert seine Driftgeschwindigkeit vollkommen. Im Falle stromdurchflossener *Filme* ergeben sich für die Grenzwerte für $k = d/l$ die Beziehungen

$$\frac{\varrho}{\varrho_b} = 1 + \frac{3}{8k}(1 - p) \quad \text{für } k \gg 1 \tag{9/46a}$$

bzw.

$$\frac{\varrho}{\varrho_b} = \frac{4(1 - p)}{3(1 + p)k \ln(1/k)} \quad \text{für } k \ll 1. \tag{9/46b}$$

Für einen *Draht* vom Durchmesser d gelten die entsprechenden Formeln

$$\frac{\varrho}{\varrho_b} = 1 + \frac{3}{4k}(1 - p) \quad \text{für } k \gg 1 \tag{9/47a}$$

bzw.

$$\frac{\varrho}{\varrho_b} = \frac{1 - p}{1 + p}\frac{1}{k} \quad \text{für } k \ll 1. \tag{9/47b}$$

In *Tabelle 9.10* sind für verschiedene Werte von k und p die Gln. (9/46) und (9/47) ausgewertet und mit der Nordheim-Gleichung (9/45) verglichen.

Tabelle 9.10 Abhängigkeit des spezifischen Widerstandes ϱ/ϱ_0 von der Draht- bzw. Filmdicke

k	Filme $p = 0$	Filme $p = 0{,}5$	Drähte $p = 0$	Drähte $p = 0{,}5$	nach NORDHEIM
0,001	182	73,5	1000	337	1001
0,002	100,4	41,5	503	170	501
0,005	46,6	20,0	202	69,3	201
0,01	26,5	11,8	102	35,7	101
0,02	15,3	7,1	52,1	18,7	51
0,05	7,69	3,87	21,6	8,31	21
0,1	4,72	2,62	11,45	4,88	11
0,2	3,00	1,91	6,33	3,02	6
0,5	1,90	1,40	3,14	1,84	3
1,0	1,462	1,206	2,04	1,422	2
2	1,221	1,102	1,475	1,208	1,5
5	1,081	1,039	1,172	1,080	1,2
10	1,039	1,019	1,081	1,038	1,1
20	1,019	1,009	1,039	1,019	1,05
50	1,0076	1,0038	1,0152	1,0076	1,02
100	1,0038	1,0019	1,0076	1,0038	1,01

Über den Einfluß der Frequenz auf den Widerstand von Drähten und dünnen Filmen siehe § 9.14 (Skineffekt).

9.28 *Ionische Leitfähigkeit*

Die elektrische Leitfähigkeit von Metallen und Halbleitern beruht auf der Elektronenbewegung im elektrischen Feld und geht zumindest primär ohne stoffliche Umsetzungen vor sich. Bei der *elektrolytischen Leitung* in Flüssigkeiten und Festkörpern treten als Ladungsträger *Ionen* beider Vorzeichen auf, die im elektrischen Feld sowohl Ladung als auch Materie transportieren.

Für die elektrolytische Leitung im Festkörper gilt wie in Flüssigkeiten das Faradaysche Gesetz (s. Gl. 1/4), wonach durch den Strom i in der Zeit t die Menge

$$M = mit \tag{9/48}$$

abgeschieden wird, wenn m das elektrochemische Äquivalent des Stoffes bedeutet.

Die Ionenleitfähigkeit hängt eng mit punktförmigen Strukturfehlern im Kristall zusammen, d. h. Frenkel-Defekten (vgl. § 9.254) sowie Schottky-Defekten, bei denen Gitteratome an die Oberfläche wandern und Leerstellen hinterlassen. Wie beim Halbleiter (vgl. § 4.22) setzt sich der Ionenstrom aus Konzentration n, Ladung e und Beweglichkeit μ zusammen und ergibt eine Leitfähigkeit

$$\sigma = \sum_i e_i n_i \mu_i , \tag{9/49}$$

wenn i verschiedene Ladungsträger im Spiele sind. Analog zu Gl. (4/31) gilt für den Zusammenhang von μ und dem Selbstdiffusionskoeffizienten D die

Einsteinsche Beziehung

$$\mu k T = e D. \tag{9/50}$$

Ein Gitteratom muß während seiner Bewegung unter dem Einfluß eines Konzentrationsgradienten oder eines elektrischen Feldes Potentialwälle der Höhe U überwinden. Bezeichnet man mit ω_g die Schwingungsfrequenz des Zwischengitteratoms, so überwindet dieses den Potentialwall mit der Wahrscheinlichkeit $\omega_g \exp(-U/kT)$. Daraus läßt sich die Temperaturabhängigkeit des Diffusionskoeffizienten zu

$$D = D_0 \mathrm{e}^{-\frac{A/2+U}{kT}} \tag{9/51}$$

berechnen, worin A die Arbeit bedeutet, um ein Gitteratom auf einen Zwischengitterplatz zu bringen. Mit Gl. (9/50) erhält man schließlich die Ionenleitfähigkeit

$$\sigma = \frac{n e^2 D_0}{kT} \cdot \exp\left(-\frac{A/2 + U}{kT}\right) = a \mathrm{e}^{-\frac{b}{T}}. \tag{9/52}$$

Diese Beziehung stellt sich in einem Diagramm mit der Abszisse $1/T$ und der Ordinate $\log \sigma$ als Gerade dar.
In *Tabelle 9.11* sind für einige Ionenkristalle die Konstanten a und b der Gl. (9/52) angegeben.

Tabelle 9.11 Leitfähigkeit von Ionenkristallen

Substanz	Temp.-Bereich °C	a Ω^{-1} cm^{-1}	b K
LiF	440—700	$3 \cdot 10^5$	23000
LiCl	400—550	$2{,}5 \cdot 10^5$	16400
LiBr	350—500	$4{,}2 \cdot 10^5$	14100
LiJ	250—350	$1{,}8 \cdot 10^5$	10680
NaF	330—980	$1{,}3 \cdot 10^3$	16520
NaCl	550—800	$4{,}3 \cdot 10^4$	20500
NaBr	600—730	$1{,}5 \cdot 10^6$	19350
NaJ	350—600	$8{,}1 \cdot 10^3$	14260
KF	< Smpt.	$1{,}5 \cdot 10^6$	16350
KCl	500—725	$1{,}5 \cdot 10^6$	23500
KBr	500—725	$1{,}3 \cdot 10^6$	22900
KJ	450—675	$3{,}8 \cdot 10^4$	18750
AgCl	250—450	$1{,}5 \cdot 10^6$	11950
AgBr	200—400	$2{,}1 \cdot 10^5$	9260
$PbCl_2$	90—500	6,55	5530
PbJ_2	150—375	$9{,}8 \cdot 10^4$	4710

Bei hohen Frequenzen tritt eine Dispersion der Leitfähigkeit auf, d. h., diese verschwindet bereits oberhalb von 30 MHz infolge der geringen Beweglichkeit und der im Vergleich zum Elektron 10^4mal größeren Masse der Ionen.

9.3 Normal-, Meß- und Regelwiderstände

9.31 Fundamentale Widerstandsbestimmung

Zur *Absolutdarstellung* der Widerstandseinheit wird der Widerstand auf das Produkt aus einer berechenbaren Induktivität oder Kapazität und einer Frequenz zurückgeführt.

9.311 Mit Selbstinduktionsnormal

Bei diesem Meßverfahren wird das Ohm aus dem induktiven Blindwiderstand ωL bestimmt. Die Selbstinduktion L kann sehr genau aus dem Wert der magnetischen Feldkonstanten μ_0 und der geometrischen Form der Spule berechnet werden.

Die Messung wird auf die Weise durchgeführt, daß die Induktivität in einer Maxwell-Brücke (§ 6.363) nach Gl. (6/50) als Produkt von zwei Widerständen und einer Kapazität ausgedrückt und die Kapazität in einer Maxwell-Thomson-Brücke (s. § 10.42) bestimmt wird, wobei sich $1/C$ als Produkt aus der Entladungsfrequenz f und einem Widerstand R darstellt. Durch Vergleich findet man

$$R = fL. \qquad (9/53)$$

Bei den neuesten Messungen nach diesem Verfahren [*9.201*] wurde eine Meßunsicherheit (wahrscheinlicher Fehler) von etwa $4 \cdot 10^{-6}$ erreicht.

9.312 Mit Gegeninduktivitätsnormal [*9.132*]

Bei der von CAMPBELL (1912) vorgeschlagenen *absoluten* Ohmbestimmung liegt der zu bestimmende Widerstand R_n in Serie mit der Primärwicklung der Gegeninduktivität M_1 und wird vom Strom der Wechselspannungsquelle O

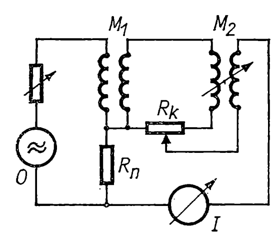


Abb. 9.11 Absolute Ohmbestimmung nach CAMPBELL

durchflossen (s. Abb. 9.11). Nach zweimaliger Phasendrehung durch die Gegeninduktivitäten M_1 und M_2 entsteht im Sekundärkreis von M_2 eine hinsichtlich ihrer Größe und mit Hilfe des Widerstandes R_k auch in der Phase richtige Kompensationsspannung. Das Brückengleichgewicht wird am Nullindikator I

(Vibrationsgalvanometer, Resonanzverstärker) eingestellt und ergibt die Beziehung

$$R_n R_k = \omega^2 M_1 M_2. \qquad (9/54)$$

Die Werte der Gegeninduktivitäten M_1 und M_2 werden durch Vergleich mit einem berechenbaren Normal bestimmt. Bezieht man R_k auf den Widerstand R_n, so erhält man letzteren in absoluten Einheiten [*9.136*]. Für die neuesten Messungen nach diesem Verfahren [*9.202*] wird eine Meßunsicherheit (wahrscheinlicher Fehler) von $2 \cdot 10^{-6}$ angegeben.

9.313 Durch Induktion im Magnetfeld

Zur Absolutmessung des Widerstandes wird eine Unipolarmaschine (vgl. § 15.22) benutzt, deren kreisförmige Induktionsscheibe im Magnetfeld einer vom Strom i durchflossenen Spule mit der Frequenz f rotiert. Zwischen Achse und Umfang der Scheibe entsteht eine Gleichspannung der Größe $f\Phi$, wenn Φ der Induktionsfluß in der Spule ist. Derselbe Strom i fließt durch den zu bestimmenden Widerstand R_n und ruft an dessen Enden den Spannungsabfall iR_n hervor. Durch Gegenschalten beider Spannungen läßt sich mit passender Drehzahl eine Kompensation erzielen, wobei gilt

$$iR_n = f\Phi \quad \text{oder} \quad R_n = \frac{f\Phi}{i} = fM. \qquad (9/55)$$

Mit einer speziellen Versuchsanordnung konnte Smith diese Methode zu hoher Genauigkeit entwickeln.

9.314 Mit Kapazitätsnormal

Nach Thompson und Lampard [*9.203*] ist die Kapazität eines Kreuzkondensators aus einer zylindrischen Anordnung von vier Elektroden (etwa 1 pF) lediglich durch eine genau meßbare Länge und die Lichtgeschwindigkeit bestimmt. Mittels induktiver Teiler wird an einen solchen Kondensator eine Kapazität von etwa 10 nF angeschlossen. Diese wird in einer Wechselstrombrücke bei einer bestimmten Frequenz ($\omega = 10000\ \mathrm{s}^{-1}$) mit einem Widerstand von 10 kΩ verglichen, der seinerseits mit Gleichstrommethoden auf 1 Ω zurückgeführt wird. Die genauesten Messungen nach diesem Verfahren [*9.204*] ergaben für das Ohm eine Meßunsicherheit von weniger als $1 \cdot 10^{-6}$.

Da alle Verfahren zur absoluten Ohmbestimmung einen großen experimentellen Aufwand erfordern, wird die Widerstandseinheit in den metrologischen Staatsinstituten durch Gruppen von 1-Ω-Normalwiderständen repräsentiert, die international verglichen werden.

9.32 Werkstoffe für Normalwiderstände [9.146, 9.198, 9.147]

9.321 Allgemeines

Normalwiderstände werden aus Metallegierungen hergestellt, die folgende Bedingungen erfüllen müssen:

1. hoher spezifischer Widerstand,

2. kleiner Temperaturkoeffizient des spezifischen Widerstands,
3. geringe Thermokraft gegen Kupfer,
4. keine Alterungserscheinungen,
5. gute Lötbarkeit.

Reine Metalle sind wegen ihres großen Temperaturkoeffizienten von etwa 0,4%/grd ungeeignet. In *Tabelle 9.12* sind verschiedene Legierungstypen angegeben, die weite Verbreitung beim Bau von Normalwiderständen gefunden haben.

Tabelle 9.12 Widerstandslegierungen

Legierung	Handelsname	$\varrho \left(\Omega \frac{mm^2}{m}\right)$ bei 20 °C	$\frac{10^6}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho}{\partial T}$ (grd^{-1}) ca.	Thermo-EMK gegen Cu bei 20 °C (µV/grd) ca.
Cu—Ni	Konstantan Nickelin Advance Copel Isotan Rheotan 50	0,50	—30	—43
Ni—Cr mit Zusätzen	Evanohm Karma Isaohm Nikrothal LX Aurothan 130	1,33	± 10	+1
Ni—Cr	CO, COO Nikrothal 80	1,1	25	+3
Cu—Mn	Isa 50	0,50	20	—2
	Manganin Aurotan 43 Ohmal Zeranin	0,43	— 5	± 1
Au—Cr	—	0,33	5	7
Ag—Mn	NBW 108 NBW 139 NBW 173	0,32	—40	+2,5

9.322 Manganin und ähnliche Legierungen

Manganin, Aurotan 43 mit der Zusammensetzung 86 Cu, 12 Mn, 2 Ni besitzt, wie aus Abb. 9.12 hervorgeht, einen S-förmigen Widerstandsverlauf mit wachsender Temperatur, der bei etwa 20 °C eine waagerechte Tangente besitzt. Der Temperaturkoeffizient des Widerstandes geht bei dieser Temperatur durch Null. In der Umgebung von 20 °C ist die Widerstand-Temperatur-Kurve etwa parabelförmig. Das Maximum liegt in der Praxis zwischen 20 und 40 °C; damit erhält der Temperaturkoeffizient bei 20 °C Werte zwischen 0 und $20 \cdot 10^{-6}$ /grd.

Durch Tempern bei 140 °C (10 h) werden die Folgen der Kaltbearbeitung beseitigt und der Werkstoff homogenisiert. Durch den Nickelzusatz läßt sich

die Thermospannung gegen Kupfer fast zum Verschwinden bringen. Manganindrähte, die zu Widerstandseinheiten verarbeitet werden, sind mit mehreren Schichten Lack isoliert, der infolge seiner hygroskopischen Eigenschaften auf den Draht mechanische Kräfte ausüben kann. Änderungen der relativen Feuchtigkeit zwischen 30 und 70% können bei hochohmigen Widerständen relative Änderungen von $2 \cdot 10^{-5}$ bewirken. Manganwiderstände haben eine

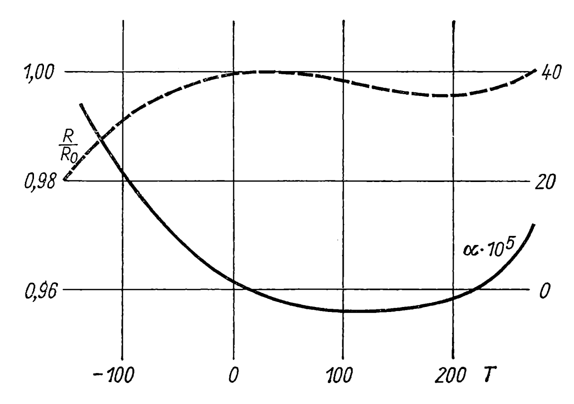


Abb. 9.12 Widerstand und Temperaturkoeffizient von Manganin

hohe zeitliche Konstanz; die jährliche Widerstandsänderung beträgt im allgemeinen weniger als etwa $5 \cdot 10^{-6}$.

In der DDR wird eine dem Manganin entsprechende Legierung mit der Bezeichnung *Aurotan 43* hergestellt. In den USA und England werden ähnliche Legierungen mit den Bezeichnungen *Ohmal* (87 Cu, 9 Mn, 3,6 Ni, 0,3 Fe, 0,1 Si) und *BOS Nr. 36* (79,1 Cu, 10,2 Mn, 10,3 Ni, 0,4 Fe) benutzt.

9.323 Andere Cu–Mn-Legierungen [*9.62*]

Die erhöhten Anforderungen an die Genauigkeit von Präzisionswiderständen führten zur Entwicklung neuer Werkstoffe mit kleinem Temperaturkoeffizienten in einem größeren Temperaturbereich. Die *Widerstandslegierung 306*, eine zinnhaltige Cu–Mn-Legierung, die diese Bedingung erfüllte [*9.146*], wurde wegen fabrikationstechnischer Schwierigkeiten nur kurzzeitig hergestellt. Die aluminiumhaltige Legierung *Novokonstant* wird ebenfalls nicht mehr gefertigt. Erst in jüngster Zeit wurde eine germaniumhaltige Legierung (*Zeranin*) entwickelt, deren Temperaturkoeffizient im gesamten Temperaturbereich zwischen 0 und 70°C nur etwa $\pm\, 3 \cdot 10^{-6}$ /grd und deren Thermokraft gegen Cu $-1{,}3\ \mu$V/grd beträgt.

9.324 Gold—Chrom-Legierungen [*9.42, 9.148, 9.149*]

Für die Verwendung in Normalwiderständen haben sich *Gold—Chrom-Legierungen* mit 2,05% Chromgehalt als sehr günstig erwiesen. Wie aus *Tabelle 9.12* zu ersehen ist, liegt der spezifische Widerstand um 30% unter dem

von Manganin und die Thermokraft gegen Cu bei 7 μV/grd. Durch sorgfältiges Altern bei 200 °C läßt sich ein Widerstandstemperaturkoeffizient bis zu $\pm 1 \cdot 10^{-6}$/grd erzielen. Im Gegensatz zu den Widerstandswerkstoffen auf Cu–Mn-Basis sind Au–Cr-Widerstände sofort nach ihrer Fertigstellung für Meßzwecke brauchbar.

9.325 Nickel–Chrom-Legierungen

Nickel—Chrom-Legierungen mit kleinen Zusätzen besitzen etwa den dreifachen spezifischen Widerstand des Manganins (vgl. *Tabelle 9.12*) und sind diesem Werkstoff außerdem durch höhere mechanische Festigkeit überlegen. Sie eignen sich daher vorzugsweise zur Herstellung von dünnen Drähten für hochohmige Widerstände. Ihr Temperaturkoeffizient liegt in einem relativ großen Bereich um 20 °C zwischen $\pm 10 \cdot 10^{-6}$/grd, die Thermospannung gegen Kupfer ist kleiner als 1 μV/grd. Die zeitliche Konstanz von Widerständen aus diesen Legierungen entspricht etwa der Konstanz von Manganinwiderständen [*9.205*].

Die Legierungen wurden unter den Bezeichnungen *Isaohm*, *Aurotan 130* (71 Ni, 21 Cr, 3 Cu u. a. Zusätze), *Nikrothal LX* (75 Ni, 20 Cr, Si und Mn), *Evanohm* (75 Ni, 20 Cr, 2,5 Cu, 2,5 Al) u. a. hergestellt. Die Legierung Evanohm zeichnet sich dadurch aus, daß ihr spezifischer Widerstand bis hinab zu tiefsten Temperaturen auf 1% konstant bleibt und nach LERNER und DAUNT [*9.85*] bei 4,2 K in Magnetfeldern bis zu 5 T keine Widerstandszunahme beobachtet wird. Über den Einfluß einer thermischen Behandlung dieser Legierung s. [*9.165*].

9.326 Werkstoffe für technische Widerstände

Konstantan mit der Zusammensetzung 54 Cu, 45 Ni, 1 Mn darf für Präzisionswiderstände nicht verwendet werden, da es gegen Kupfer eine Thermokraft von 40 μV/grd besitzt und auch einen relativ hohen Temperaturkoeffizienten von $-30 \cdot 10^{-6}$/grd aufweist.

Von den verschiedenen Cu—Mn-Legierungen für *technische* Widerstände sei hier nur die Legierung *Isa 50* (81 Cu, 12 Mn, 5 Ni, Al) erwähnt, die ähnliche Eigenschaften wie die Legierungen für Präzisionswiderstände besitzt (vgl. *Tabelle 9.12*).

Außerdem werden Nickel–Chrom- und Nickel–Chrom–Eisen-Legierungen verwendet (vgl. *Tabelle 9.12*).

9.33 Normalwiderstände

Als Normalwiderstände bezeichnet man Einzelwiderstände, die meist in bestimmten Abstufungen zwischen 10^{-5} und 10^{5} Ω hergestellt und nach Vergleich mit Widerstandsnormalen amtlich beglaubigt werden. Nach den Beglaubigungsvorschriften des DAMW bzw. der PTB darf der gemessene Widerstandswert im Bereich zwischen 15 und 25 °C höchstens um $\pm 3 \cdot 10^{-4}$ vom Nennwert abweichen. Die Vorschriften verlangen einen spezifischen Widerstand von mindestens $2 \cdot 10^{-5}$ Ω cm, einen Temperaturkoeffizienten von

höchstens 2,5 · 10^{-5}/grd bei Umgebungstemperatur und eine Thermospannung gegen Kupfer von höchstens 10 μV/grd. Die jährlichen Änderungen des Widerstandswertes dürfen nach Alterung nicht mehr als 5 · 10^{-5} betragen. Normalwiderstände dürfen nur aus Widerstandsmaterialien hergestellt werden, die für beglaubigungsfähige Widerstände zugelassen sind: *Manganin, Aurotan 43, Novokonstant, Widerstandslegierung 306* und *Gold-Chrom-Legierung.*

Aufbau. Die äußere Form der Normalwiderstände ist die einer Büchse A mit einem Hartgummideckel D, in dem zwei gebogene starke Kupferleitungen B_1, B_2 eingesetzt sind (Abb. 9.13). Der Widerstandsdraht R ist bifilar auf ein

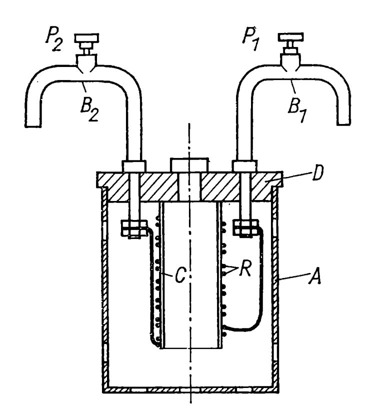


Abb. 9.13 Drahtgewickelter Normalwiderstand

zylindrisches Rohr C gewickelt und an seinen Enden mit den Zuleitungen verbunden. An zwei weiteren Klemmen P_1, P_2, den Potentialklemmen, läßt sich der Spannungsabfall abgreifen. Die freien Enden der Kupferbügel sind amalgamiert und werden in Quecksilbernäpfe eingehängt, die in dicken Kupferschienen eingedreht sind. Der Mittenabstand der Bügelenden beträgt 160 mm. Im allgemeinen kann der Widerstand der Kupferbügel (70···140 μΩ) vernachlässigt werden.

Niederohmige Normalwiderstände von 1 Ω abwärts werden meist aus Manganinblech hergestellt, deren Enden mit den verlängerten Enden der Zuleitungsbügel verlötet sind. *Hochohmige* Widerstände von 100 kΩ an aufwärts werden nicht mit Bügel, sondern nur mit Klemmen hergestellt.

Die Widerstandsbüchsen werden für Präzisionsmessungen und bei relativ großen Strombelastungen in ein Petroleumbad eingehängt, dessen Temperatur konstant gehalten und laufend gemessen wird. Große Widerstände besitzen eine geschlossene Büchse, die mit Petroleum gefüllt wird und mit einem Rührer versehen ist. Auch *eingeschlossene Normalwiderstände* [*9.150*] sind in Gebrauch, bei denen das Gehäuse druckdicht am Deckel befestigt ist und Argon oder Helium als Schutzgas unter einem Druck von 300···400 Torr enthält.

Die *Belastung* der Normalwiderstände soll in Luft 1 W nicht übersteigen, für Präzisionsmessungen auch im Petroleumbad nicht höher als 2 W sein.

Bei Genauigkeitsansprüchen von 0,05% und bei guter Kühlung des Bades können sie noch bis 100 W belastet werden.

Induktionsarme Schichtwiderstände lassen sich durch Aufdampfen von Chrom–Nickel oder Gold auf Polyester- oder Epoxydharzschichten herstellen [*9.157*]. In Glas eingeschlossene Widerstände werden von SLOAN [*9.159*] beschrieben.

Kohleschichtwiderstände werden auf einen keramischen Träger durch Pyrolyse aufgetragen und mit Kupferzuleitungen versehen. Durch Zusatz von Bor läßt sich der Temperaturkoeffizient merklich verringern. Die Oberfläche dieser Widerstände wird durch keramische oder organische Überzüge, gelegentlich auch durch Einschmelzen in Glas geschützt. Der Temperaturkoeffizient solcher Widerstände hängt vom Widerstandswert ab und beträgt im Mittel −0,03% pro Grad.

9.34 Frequenzverhalten von Widerständen [*9.82, 9.175*]

Ein von Wechselstrom durchflossener Meßwiderstand läßt sich durch die in Abb. 9.14 dargestellte Schaltung ersetzen, die zwischen den Klemmen die Parallelkapazität C und in Serie mit dem Widerstand R die Induktivität L enthält. Die Impedanz dieser Schaltung berechnet sich zu

$$\boldsymbol{Z} = \frac{(R + \mathrm{j}\omega L)\,\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{(R + \mathrm{j}\omega L) + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = R\,\frac{1 + \mathrm{j}\omega\left(\dfrac{L}{R} - CR - \dfrac{\omega^2 L^2 C}{R}\right)}{1 + \omega^2(\omega^2 L^2 C^2 - 2LC + R^2C^2)}, \tag{9/56}$$

woraus sich die Abweichung vom Gleichstromwert zu

$$\frac{\Delta R_{HF}}{R} = \frac{|\boldsymbol{Z}| - R}{R} \approx \frac{1}{2}\,\omega^2\left(\frac{L^2}{R^2} - C^2R^2 + 2LC\right) \tag{9/57}$$

ergibt. Für einen *kapazitätsarmen* Widerstand ($C = 0$) vereinfacht sich Gl. (9/57) zu

$$\frac{\Delta R_{\mathrm{HF}}}{R} \approx \frac{1}{2}\,\omega^2\,\frac{L^2}{R^2}. \tag{9/57a}$$

Da der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung in der Ersatzschaltung

$$\varphi = \omega\left(\frac{L}{R} - RC\right) = \omega\tau \tag{9/58}$$

beträgt, wenn mit τ die *Zeitkonstante* bezeichnet wird, läßt sich Gl. (9/57a) auch durch die Beziehung

$$\frac{\Delta R_{\mathrm{HF}}}{R} \approx \frac{1}{2}\,\omega^2\tau^2 \tag{9/57b}$$

ausdrücken. Analog findet man für den *induktionslosen* Widerstand ($L = 0$) $\tau = RC$ und $\Delta R_{\mathrm{HF}}/R \approx \omega^2\tau^2/2$, d. h. einen kleineren Scheinwiderstand als den Gleichstromwiderstand.

Im allgemeinen ist weder L noch C bei hohen Frequenzen zu vernachlässigen. Eine Kompensation $L/R = RC$ ist nicht möglich, so daß immer eine Abweichung vom Gleichstromwert übrigbleibt.

Durch besondere Wickelarten von Drahtwiderständen können L und C klein gehalten werden. Bei der *bifilaren* Wicklung wird der aufzuwickelnde Draht in der Mitte geknickt und der dadurch entstehende Doppeldraht auf den Spulenkörper gewickelt. Für Widerstände über 100 Ω gibt dieses Verfahren zu hohe C-Werte. Abhilfe läßt sich durch die *Chaperon*-Wicklung erreichen, bei der aufeinanderfolgende Wickellagen entgegengesetzten Wickel-

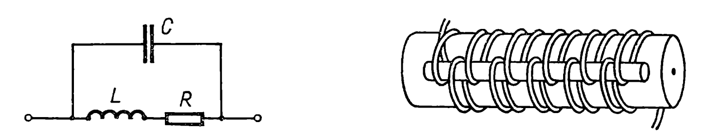


Abb. 9.14 Ersatzschaltung eines Widerstandes *Abb. 9.15 Kapazitäts- und induktionsarme Wicklung*

sinn erhalten und die Gesamtwickellänge in kurze Abschnitte unterteilt wird. Geringe Induktivitäts- und Kapazitätswerte ergibt die von der Fa. Norma (Wien) angewandte Methode, bei der nach Abb. 9.15 jede Drahtwindung längs einer Linie der Zylinderoberfläche eine Umkehrschlaufe bildet, deren Enden um einen dünnen Stab herumgelegt werden.

Für höhere Widerstandswerte werden *Kohle-* oder *Metallschichtwiderstände* benutzt. Eine besondere Schwierigkeit bietet die Konstruktion von Meßwiderständen für hohe Impulsströme im GHz-Bereich. Bei dem von HÖGBERG [*9.63*] angegebenen Widerstand für 10···100 mΩ ist eine kreisförmige Graphitscheibe direkt in die konzentrische Meßleitung eingebaut.

9.35 Variable Widerstände

Regelbare Präzisionswiderstände werden aus einzelnen Widerstandsspulen zusammengesetzt, die durch Kurbelkontakte oder Stöpsel eingeschaltet werden können. Für eine kontinuierliche Widerstandsregelung werden Schleifdrähte, Flüssigkeitswiderstände und verschiedene Röhrenschaltungen verwendet.

9.351 Kurbelwiderstände

Kurbelwiderstände sind meist aus mehreren Dekaden zusammengesetzt, die ihrerseits aus neun oder zehn gleichen Einzelwiderständen bestehen. Die Enden dieser Widerstände sind zu Kontaktklötzchen auf der Deckplatte geführt, die auf einem Kreisbogen angeordnet sind und von einem federnden Kontakt abgegriffen werden. Die kapazitäts- und induktionsarm gewickelten Einzelwiderstände besitzen meist den Wert 0,1 Ω oder dekadische Vielfache dieses Wertes bis 100000 Ω. Die jeweils kleinste Dekade eines Widerstandssatzes hat 10 Einzelspulen, während die folgenden nur 9 enthalten, um eindeutig nur *einen* Widerstandswert einstellen zu können.

Die von Siemens angewandte *Sparschaltung*, die in Abb. 9.16 dargestellt ist, besitzt für neun Schaltstufen nur fünf Widerstände. Davon besitzen vier den Wert von zwei Widerstandseinheiten, während der fünfte gleich der Einheit ist. Bei den geradzahligen Widerstandswerten 2, 4, 6, und 8 werden die Widerstände mit zwei Einheiten durch die Kontaktkurbel hintereinandergeschaltet; die ungeraden Werte werden durch Hinzufügen der Einheit gebildet. Diese Schaltung bietet bei Widerständen für Tonfrequenz den Vorteil

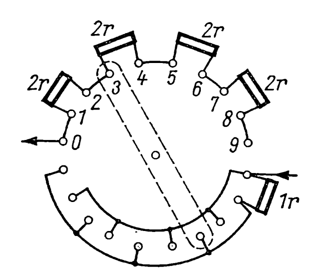


Abb. 9.16 Kurbelwiderstand in Sparschaltung

kleinerer gegenseitiger Beeinflussung der Einzelwiderstände; nachteilig ist die doppelte Zahl von Kontakten gegenüber der Normalausführung.

Die *Abweichungen* der eingestellten Widerstandswerte vom Sollwert betragen bei 20 °C $\pm$ 0,02%; die Einzelwiderstände unterscheiden sich um höchstens 0,02%. Die Einzelwiderstände der kleinsten Dekade von 1 Ω und darunter werden nur auf $\pm$ 0,1% abgeglichen. Der *Übergangswiderstand* an den Kurbelkontakten liegt bei 0,2···0,3 mΩ; bei gleichem Material (Messing) von Kontaktfedern und Kontaktklötzchen ist die Thermospannung zu vernachlässigen. Für Wechselstrommessungen wird die *Erdkapazität* des Widerstandssatzes durch eine Blechabschirmung festgelegt.

Technische Dekadenwiderstände besitzen eine Abgleichgenauigkeit von $\pm$ 0,1% und lassen sich durch Kontaktleisten zu Mehrdekadenwiderständen zusammensetzen.

9.352 Stöpselwiderstände

Präzisionsstöpselwiderstände bestehen aus 1-, 2-, 2-, 5-Einheiten pro Dekade, aus denen man durch Stöpseln den gewünschten Widerstand bilden kann. Die Summe der Widerstände einer Dekade entspricht der Einheit der folgenden Dekade. Die Enden der Einzelwiderstände sind zu Messingklötzchen an der isolierenden Deckplatte des Widerstandskastens geführt. Durch schwach konische Messingstöpsel mit Isolierknopf können die Widerstände beliebig in den Meßkreis eingeschaltet werden. Gegenüber den Kurbelwiderständen haben die Stöpsel den Vorzug eines geringeren Übergangswiderstandes, der bei 50 μΩ liegt.

Bei Stöpselwiderstandskästen mit *Dekadenschaltung* (Abb. 9.17) läßt sich der gewünschte Widerstand durch einen einzigen Stöpsel einstellen. Mit einem

zweiten Stöpsel läßt sich die Unterbrechung des Stromkreises beim Fortschalten verhindern. Der Vorteil dieser Schaltung liegt darin, daß nur *ein* Übergangswiderstand in den Gesamtwert eingeht.

Als Stöpselwiderstandskästen werden ferner die sogenannten *Brückenzweigwiderstände* als Teil einer Meßbrücke benutzt, womit sich in zwei Brückenzweigen wahlweise Widerstände von 1, 10, 100, 1000 und 10000 Ω einschalten lassen.

9.353 Schleifdrähte

Zur feineren Unterteilung des Widerstandswertes zwischen zwei Einheiten eines Kurbelwiderstandes kann dieser mit Doppelkontakten K ausgerüstet werden, wie das am Beispiel eines Feinpotentiometers in Abb. 9.18 gezeigt

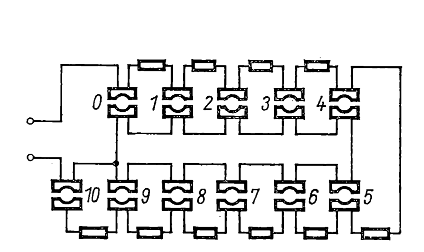


Abb. 9.17 Stöpselwiderstand in Dekadenschaltung

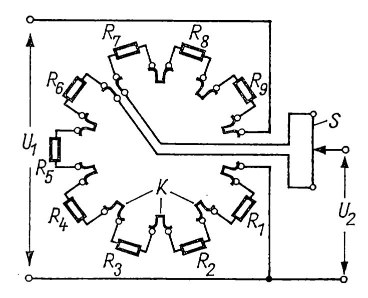


Abb. 9.18 Stufenwiderstand mit Schleifdrahtverlängerung

ist. Durch Drehen des Kontaktteils um eine Stufe kann der Schleifdraht S zwischen alle Einzelwiderstände R gelegt werden. Sind die Widerstände R_1 bis R_9 sowie der des Schleifdrahtes gleich groß, so ist eine stufenlose Einstellmöglichkeit innerhalb der ganzen Dekade möglich.

Für hohe Genauigkeitsansprüche muß der Schleifdraht über die ganze Länge konstanten Querschnitt besitzen und der Abgriffkontakt eine geringe Abnutzung des Drahtes gewährleisten. Anstelle eines Schleifkontaktes wird besser eine Kontaktrolle benutzt, deren Achse durch einen federnden Kontakt der Strom zugeführt wird. Als Schleifdrähte sind Widerstandsmaterialien mit sehr kleinem Temperaturkoeffizienten (s. § 9.32), wie z. B. *Konstantan*, geeignet, wobei die Strombelastung für 0,5 mm Drahtdurchmesser 0,5 A nicht übersteigen sollte. Von Nachteil ist die relativ hohe Thermospannung von 40 μV/grd von Konstantan gegen Kupfer. Die beschränkte Ablesegenauigkeit von etwa 0,5 mm ergibt bei einem Schleifdraht von 1 m Länge eine Meßunsicherheit von 0,05%, d. h. ein Mehrfaches von der bei Präzisionswiderständen.

Schleifdrähte werden meist auf einer mit einer feinen Nut versehenen Kreisscheibe aus Isoliermaterial befestigt. Zur Erhöhung des Widerstandswertes wird der Schleifdraht gelegentlich eng gewendelt und als *Raupendraht* ausgebildet. Größere Ablesegenauigkeit läßt sich erzielen, wenn der Draht in zehn Windungen auf einem kurzen Zylinder gewickelt wird, wobei die Kontaktrolle auf einer zur Zylinderachse parallelen Führung gleiten kann. Kom-

merzielle Widerstände dieser Art, bekannt als *Helipot*-Widerstände, sind mit einer dekadisch unterteilten Feinskala versehen, die eine Ablesegenauigkeit von 0,1% und besser erlaubt.

9.354 Flüssigkeitswiderstände

Als Anlasser für Wechselstrommotoren und andere Starkstromverbraucher werden gelegentlich *Flüssigkeitswiderstände* benutzt. Diese bestehen aus einem Elektrolyten, z. B. Sodalösung, in den Eisen- oder Kohleelektroden eintauchen. Durch die Eintauchtiefe oder variablen Flüssigkeitsstand läßt sich der Widerstand stufenlos verändern. Von Yokley und Shumaker [*9.191*] wird ein Wasserwiderstand mit 21 Elektroden aus Aluminium angegeben, die parallel oder in Serie geschaltet werden können, wobei der Widerstand durch die Füllhöhe des zirkulierenden Wassers reguliert wird. Bei einer Maximalstromstärke von 1000 A läßt sich der Widerstand zwischen 0,5 und 30 Ω verändern.

Für *hochohmige* Flüssigkeitswiderstände ist Benzol mit 0,7% Pikrinsäure und einem Zusatz von Äthylalkohol geeignet. Bei 20% Alkoholgehalt beträgt der spez. Widerstand 1,73 MΩ cm, bei 2% bereits 0,12 TΩ cm.

9.355 Variabler Röhrenwiderstand

Der durch Gl. (4/9) definierte Innenwiderstand R_i einer Elektronenröhre hängt, wie aus Abb. 4.7 zu entnehmen ist, von der Lage des Arbeitspunkts, d. h. von der Gittervorspannung U_g, ab. Mit zunehmender negativer Gittervorspannung nimmt der Innenwiderstand einer Triode sehr stark zu, so daß diese in geeigneter Schaltung als veränderlicher Widerstand benutzt werden kann, dessen Steuerung fast leistungslos möglich ist. Pentoden und Regelröhren ergeben sehr hohe Widerstände von der Größenordnung 1 MΩ. Der Vorteil dieser Hochohmwiderstände liegt in der leichten Regelbarkeit, der Frequenzunabhängigkeit sowie in den kleinen Blindwiderständen. Nachteilig ist die Abhängigkeit des Widerstandes von den Betriebsgrößen, so daß Röhrenwiderstände nur als Regeleinrichtungen benutzt werden können.

9.36 Nichtlineare Widerstände [*9.121*]

Zu den nichtlinearen Widerständen werden Bauelemente gezählt, deren Widerstand sich über einen weiten Bereich mit der angelegten Spannung („Varistor“) oder durch die Umgebungstemperatur („Thermistor“) ändert. Hierzu gehören auch die sogenannten *Kaltleiter*, die im Gegensatz zu den erstgenannten Halbleiterwiderständen aus einem dünnen Metallfaden bestehen, der in einen Glaskolben eingebaut ist. Nichtlineare Widerstände werden für Gleichrichter in Regelanordnungen verwendet.

9.361 Kaltleiter

Der Kaltleiter ist im Prinzip eine kleine Glühlampe mit einer sehr dünnen Wolframwendel, deren Widerstand von der Stromaufnahme, dem Füllgas und der Wärmeabgabe an die Umgebung abhängt. In Abb. 9.19 sind die

Nennlinien von drei verschiedenen Kaltleitern dargestellt, deren Kaltwiderstand 3, 13 und 35 Ω beträgt. Mit zunehmendem Kaltwiderstand wird die Glühtemperatur bei kleinerer Stromstärke erreicht und die Abweichung vom stromabhängigen Widerstand zu kleineren Strömen verschoben. Bei beginnender Rotglut (600 °C) beträgt das Widerstandsverhältnis etwa 3 bis 5.

Kaltleiter dienen als Regelorgan in einer Schaltung, bei der eine bestimmte Stromänderung eine möglichst große Widerstandsänderung zur Folge haben

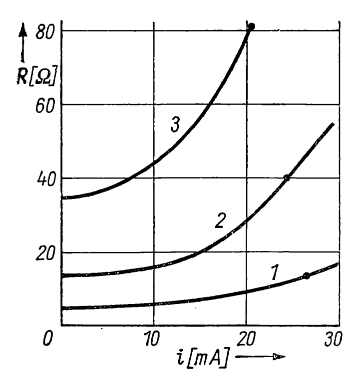


Abb. 9.19 Kennlinien von Kaltleitern

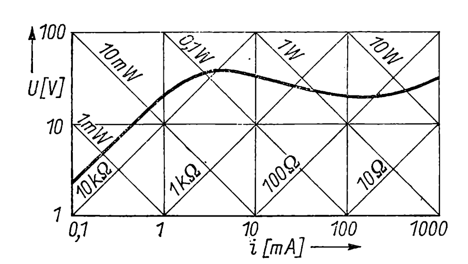


Abb. 9.20 Strom-Spannungs-Kennlinie eines Eisenoxid-Thermistors

soll. Er sollte daher in der Nähe des Glühpunktes betrieben werden. Ein Beispiel ist der in Abb. 7.8 dargestellte Meacham-Oszillator. Kaltleiter sind bis zu Frequenzen von 10 MHz brauchbar und werden auch in Bolometerbrücken für HF-Messungen (s. § 7.312) benutzt.

9.362 Heißleiter (Thermistor) [*9.57, 9.104*]

Heißleiter besitzen die für Halbleiter (vgl. § 9.23) charakteristische Widerstandsabnahme bei wachsender Temperatur und im Vergleich zu den metallischen Leitern einen großen (negativen) Wert des Temperaturkoeffizienten. Sie bestehen aus Mischungen von einem oder mehreren Metalloxiden, wie Fe_2O_3, NiO, MnO_2, die mit inerten Bindemitteln zusammengesintert werden. Es gehören ferner die zu 98% aus SiC (Siliziumkarbid) bestehenden *Silitwiderstände* dazu, die eine besonders hohe Betriebstemperatur besitzen. Die sogenannten *Urdox-Widerstände* enthalten Mg–Ti-Spinell (der Name stammt von dem früher benutzten Urandioxid); die Temperaturabhängigkeit ihres Widerstandes läßt sich gut durch Gl. (9/34) beschreiben. Für höhere Arbeitstemperaturen werden diese Widerstände in einen mit Schutzgas gefüllten Glaskolben eingebracht. Direkt geheizte Urdox-Widerstände werden zur Verhütung von Einschaltüberströmen verwendet.

Die als *Thernewide* bezeichneten Heißleiter bestehen aus Cu-Oxid und werden in Form kleiner Stäbchen von rechteckigem Querschnitt mit zwei Elektroden hergestellt. Die maximale Betriebstemperatur beträgt ca. 200 °C;

ihr Hauptanwendungsgebiet ist der Ausgleich des Temperaturganges der Wicklungen von Meßwerken und Schaltungen. Sie werden mit Temperaturkoeffizienten zwischen —3,0 und 5,4%/grd bei 20 °C, Widerstandswerten zwischen 10 Ω und 500 kΩ und für maximale Ströme von 1 A hergestellt. In Abb. 9.20 ist eine typische statische Kennlinie eines Eisenoxid-Thermistors dargestellt. Für einen bestimmten Strom findet man maximalen Spannungsabfall zwischen den Widerstandsenden; für noch höhere Ströme ergibt sich eine fallende Charakteristik, wie z. B. beim Lichtbogen. Die Widerstandsänderung erfolgt bei der Selbstaufheizung mit einer durch die äußere Form und die Abmessungen gegebenen Zeitkonstanten, die einige Zehntel Sekunden beträgt.

Von WALTER [*9.179*] sind Schichtwiderstände aus einem Mischoxid von Sn und Sb beschrieben worden, deren Temperaturkoeffizient zwischen +0,1 und —1,6%/grd eingestellt werden kann und die sich durch lange Lebensdauer auszeichnen.

9.363 Varistor [*9.200*]

Varistoren sind Bauelemente mit nichtlinearer Strom-Spannungs-Kennlinie und einem Widerstand, der im Gegensatz zu den Thermistoren von der angelegten Spannung abhängt. Die wichtigsten Vertreter bestehen aus SiC-Körnern, die zwischen metallischen Elektroden gepreßt und mit einem Bindemittel zwischen 1000 und 1300 °C gesintert sind. Angenähert läßt sich die Charakteristik durch die Beziehung

$$U = C \cdot I^{\beta} = C \frac{I}{|I|} \cdot |I|^{\beta} \tag{9/59}$$

ausdrücken, wobei eine symmetrische Kennlinie entsteht. In Abb. 9.21 ist eine Varistor-Kennlinie für $C = 340$ und $\beta = 0{,}21$ dargestellt. Während die

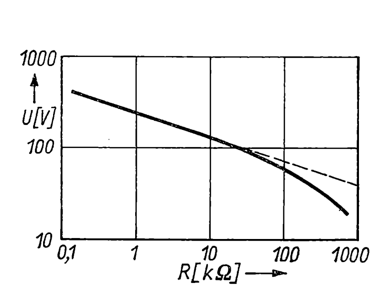


Abb. 9.21 Kennlinie eines Varistors

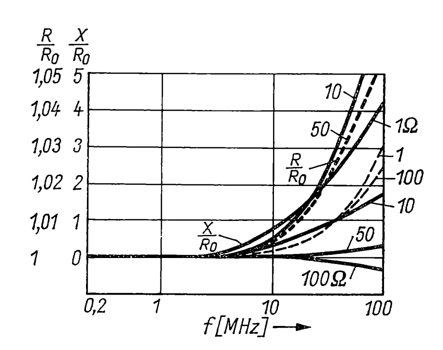


Abb. 9.22 Wirk- und Blindkomponente von HF-Drahtwiderständen

Größe β fast temperaturunabhängig ist, besitzt C einen Temperaturkoeffizienten, der zwischen —0,12 und —0,18%/grd liegt. Aus Gl. (9/59) folgt, daß

die Verlustleistung

$$P = U \cdot I = C \left(\frac{U}{C}\right)^{(\beta+1)/\beta} \tag{9/60}$$

außerordentlich steil mit der angelegten Spannung U ansteigt. Der Varistor läßt sich daher als *Stabilisator* bei Belastungsänderungen verwenden, wie z. B. für die Schirmgitterspannung in Regelpentoden.

9.37 Meßwiderstände bei Hochfrequenz [9.73]

Meßwiderstände für Frequenzen bis 100 MHz werden für HF-Brücken und -Kompensationsschaltungen verwendet und müssen hierzu folgende Forderungen erfüllen:

Der Wirkwiderstand soll dem Gleichstromwiderstand in einem möglichst großen Frequenzbereich entsprechen;
der Betrag des Widerstandes darf sich weder durch Skineffekt im Leiter noch durch Parallelkapazitäten oder -induktivitäten der Verbindungsleitungen verändern;
Phasenwinkel der Widerstände, Erdkapazität und magnetisches Streufeld sollen klein sein.

In § 9.34 sind die Frequenzeinflüsse näher behandelt; daraus ist zu entnehmen, daß die obigen Forderungen um so leichter zu erfüllen sind, je kleiner die Abmessungen des Widerstandes sind.

Präzisionswiderstände für hohe Frequenzen bestehen aus einem gespannten *Manganindraht*, der an zwei Endplatten festgelötet ist, die gleichzeitig als Klemmstücke dienen. Solche Widerstände werden in Einheiten zwischen 1 und 100 Ω hergestellt. In Abb. 9.22 ist der Frequenzgang der Wirk- und Blindkomponente dieser Widerstände dargestellt. Bei anderen Bauformen werden die Drähte zur Verringerung der Blindkomponente kreuz- oder bifilargewebt und zum Schutz gegen Feuchtigkeit imprägniert oder mit Harz vergossen.

Für sehr hohe Frequenzen sind *Schichtwiderstände* aus Kohle oder Metall in Gebrauch, die auf einen Keramikzylinder aufgebracht sind und bei hohen Verlustleistungen durch ein Gebläse gekühlt werden.

9.4 Messung des Widerstandes aus Strom und Spannung

9.41 Meßprinzip

Am einfachsten wird der Widerstand aus dem Verhältnis von Spannungsabfall zu durchfließendem Strom ermittelt. Hierbei ist entsprechend der Abb. 9.23 zu berücksichtigen, daß in der Schaltung (a) bei der Strommessung im Amperemeter A der parallelgeschaltete Innenwiderstand des Voltmeters V bzw. im Fall (b) der Spannungsabfall am Amperemeter mitgemessen wird. In beiden Fällen ist der aus Spannung U und Strom I sich ergebende Widerstand zu korrigieren. Für die Schaltung (a) gilt:

$$R = \frac{U}{I}\left(1 + \frac{R}{R_u}\right) = \frac{U}{I - U/R_u}. \tag{9/61}$$

Ist $R \ll R_u$, so ist das Korrekturglied zu vernachlässigen; das trifft zu, wenn U mit dem Kompensationsapparat (s. § 2.34), einem Elektrometer (s. § 2.1) oder einem Elektrometerröhrenverstärker (s. § 2.31) gemessen wird. Ist R_u mit R vergleichbar, benutzt man besser die Schaltung *b*, für die gilt:

$$R = \frac{U - IR_i}{I}. \qquad (9/62)$$

Ein hoher Widerstand läßt sich durch eine Strommessung allein bestimmen, wenn er an eine Spannungsquelle von konstanter Spannung (s. § 16.2) und kleinem Innenwiderstand gelegt wird.

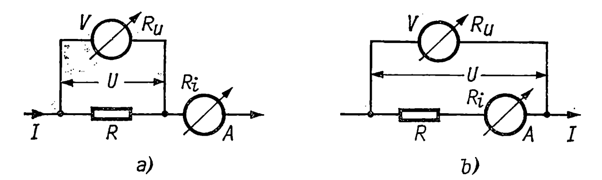


Abb. 9.23 Widerstandsmessung aus Strom und Spannung

9.42 *Direkte Messung hoher Widerstände*

Aus Gl. (9/61) ist ersichtlich, daß der Korrekturfaktor bei der exakten Berechnung des gesuchten Widerstandes fortfällt, wenn $R_u \to \infty$ geht. Dies läßt sich bei der Benutzung eines Kompensationsapparates (§ 2.34) für die Messung des Spannungsabfalls $R \cdot I$ erreichen, wobei Schaltung (*a*) in Abb. 9.23 benutzt wird. Bei der Messung hoher Widerstände kann der Spannungsabfall mit genauen Elektrometern oder Röhrenverstärkern gemessen werden; Beispiele für dieses Verfahren siehe [*9.3, 9.66, 9.99, 9.118, 9.194, 9.49*].

Dieses Meßprinzip ist auch für Wechselstrom geeignet, wenn die Blindkomponente des Widerstandes groß gegen den Wirkwiderstand ist. Zur Messung des Spannungsabfalls am gesuchten Widerstand wird ein *Röhrenvoltmeter* (s. § 6.35) mit hohem Eingangswiderstand benutzt [*9.177*]. Von Sapogin und Ivko [*9.141*] wird ein Meßverfahren angegeben, das die Registrierung von Halbleiterwiderständen als Funktion der Temperatur gestattet. Bei der von Dauphinee und Mooser [*9.29*] beschriebenen Methode zur Messung von Widerstand und Hall-Effekt an Halbleitern lassen sich die durch Thermospannungen und Ettinghausen-Effekt verursachten Meßfehler vermeiden. Zur Widerstandsbestimmung selbst genügt ein Potentiometer und ein empfindliches Galvanometer zum Nullabgleich.

9.43 *Strommessung bei konstanter Spannung*

Legt man nach Abb. 9.23b eine konstante Spannung U an den Meßkreis, so wird nach Gl. (9/62)

$$R = \frac{U}{I} - R_i. \qquad (9/62a)$$

Um genaue Meßergebnisse zu erhalten, wird man $R_i \ll R$ wählen. DORCAS und SCOTT [9.39] haben nach dieser Methode die Leitfähigkeit von Alkalihalogenidkristallen, die bei 20 °C $10^{-17}\ \Omega^{-1}\ \mathrm{cm}^{-1}$ beträgt, bei verschiedenen Temperaturen gemessen. Hierbei liegt die Meßprobe in Serie mit einem Röhrenvoltmeter mit Schwingkondensator (s. § 2.334) an einer Gleichspannung von 300···500 V. Da der kleinste noch nachweisbare Strom 0,5 fA beträgt, lassen sich bei Probendimensionen von 0,3 cm Dicke und 0,2 cm² Querschnitt Leitfähigkeiten von $2\ \mathrm{a}\Omega^{-1}\ \mathrm{cm}^{-1}$ messen.

Nach SCOTT [9.192] können hochohmige Widerstände mit Hilfe eines Luftdrehkondensators bestimmt werden, der von einem Nullindikator gesteuert und motorisch so nachgeregelt wird, daß seine Spannung konstant bleibt. Die erreichbare Genauigkeit bei Widerständen von 1 TΩ liegt bei 0,1%.

Über die Konstruktion von Probenhalterungen siehe § 9.9.

9.44 *Widerstandsmessung bei konstantem Strom*

Ist in der Schaltung nach Abb. 9.23a der Innenwiderstand $R_i \gg R$ und liegt am Meßkreis eine konstante Spannung, so ist der an R gemessene Spannungsabfall $U = I \cdot R$, wobei I durch das Instrument A gemessen wird.

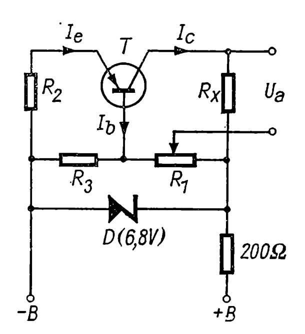


Abb. 9.24 Registrierendes Ohmmeter nach [9.93]

Eine Quelle konstanten Stroms läßt sich durch einen Kondensatorkreis darstellen, bei dem der Ladestrom $i_C = C\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ eines Kondensators von einer linear ansteigenden Spannung u erzeugt wird. Nach diesem Meßprinzip sind von LYNCH und WESENBERG [9.95] Widerstände von 1 GΩ bis 10 TΩ bei Strömen von 1 fA bis 10 pA mit einer Genauigkeit von 0,5% gemessen worden. Der Spannungsabfall am gesuchten Widerstand wird mit hochohmigen Röhrenvoltmetern gemessen.

Von LURIE [9.93] wird ein registrierendes *Ohmmeter* (s. Abb. 9.24) angegeben, bei dem der zu messende Widerstand R_x von einem konstanten Meßstrom durchflossen und der Spannungsabfall registriert wird. Als Konstantstromquelle wird ein Transistor T in Basisschaltung benutzt, dessen Betriebsspannung durch eine Zener-Diode D auf konstantem Wert gehalten wird. Wendet man die in § 4.271 abgeleiteten Beziehungen auf die vorliegende

Schaltung an, so findet man für den durch R_x fließenden Kollektorstrom die Näherungsgleichung

$$\mathrm{d}I_c - (1 - h_{fb})\,\mathrm{d}I_b = 0.$$

Da nach § 4.271 die Größe $h_{fb} = \alpha_{ce} \approx 1$ ist, wird der zweite Term in der obigen Gleichung sehr klein und $I_c \approx$ const. Durch passende Wahl der Widerstände R_1, R_2 und R_3 kann die Bedingung $\mathrm{d}I_c = 0$ in einem weiten Strombereich erfüllt werden. Mit dem Transistor 2N1090, $R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 500\,\Omega$ und $R_3 = 36\,\Omega$ wird die Ausgangsspannung $I_c R_x = 0$ für $R_x = 100\,\Omega$, und 2,0 V für 460 Ω; der lineare Meßbereich erstreckt sich von 0 bis 1750 Ω.

9.45 Direkte Widerstandsmessung an kompakten Proben

Für die Entwicklung von Widerständen aus aufgedampften Filmen und von aktiven Halbleiterelementen ist die Messung von ϱ an schichtförmigen und kompakten Proben von großer Bedeutung. Bei halbleitenden Materialien wird durch gelötete oder aufgedampfte Stromkontakte vermieden, daß Ladungsträgerinjektion oder Gleichrichtereffekte die Widerstandsmessung verfälschen.

Bei der einfachsten *Einkontakt-Methode*, mit der vor allem Widerstandsänderungen durch Temperatur und Lichteinstrahlung bestimmt werden können, wird durch zwei nicht gleichrichtende Kontakte ein schwacher Strom geschickt und der Spannungsverlauf potentiometrisch mittels einer *Spitzensonde* gemessen. Bei konstantem Probenquerschnitt ist der Widerstand dem Potentialgradienten proportional.

Werden zwei Kontakte in bekanntem Abstand auf die Probe gepreßt, so wird der Widerstand direkt der an diesen gemessenen Spannung proportional.

Für beide Verfahren ist die Meßgenauigkeit nicht vom Übergangswiderstand der Stromzuführungen abhängig.

Bei der von VALDES [*9.176*] zuerst vorgeschlagenen *Vier-Spitzen-Methode* entfällt die Beschränkung eines konstanten Probenquerschnitts; sie ist daher am vielseitigsten anwendbar. Auf die flache Meßprobe werden vier Kontaktspitzen aufgesetzt, deren Enddurchmesser klein gegen ihre gegenseitigen Abstände sind und die auf einer Geraden liegen. Wird durch die beiden äußeren Kontakte schwacher Wechsel- oder Gleichstrom I geschickt und an den inneren die Potentialdifferenz U gemessen, so findet man den spezifischen Widerstand an der Meßstelle aus der Beziehung

$$\varrho_0 = \frac{U}{I}\,\frac{2\pi}{\dfrac{1}{D_1} + \dfrac{1}{D_3} - \dfrac{1}{D_1 + D_2} - \dfrac{1}{D_2 + D_3}}, \tag{9/63}$$

wenn D_1, D_2 und D_3 die Kontaktabstände sind. Für $D_1 = D_2 = D_3 = D$ vereinfacht sich Gl. (9/63) zu

$$\varrho_0 = 2\pi D\,\frac{U}{I}. \tag{9/63a}$$

In beiden Fällen ist vorausgesetzt, daß die Meßkontakte auf eine Probe aufgesetzt werden, deren Dicke $W \gg D$. Für Schichten beliebiger Dicke ist der gemessene spezifische Widerstand $\varrho = \varrho_0 f(W/D)$, also nur vom Verhältnis W/D abhängig. In Abb. 9.25 ist ϱ/ϱ_0 als Funktion von W/D dargestellt. Für dünne Schichten, d. h. $W/D \ll 1$, wird $\varrho/\varrho_0 = 0{,}72\,W/D$.

Als Material für die Kontaktspitzen wird Wolfram oder gehärteter Stahl benutzt; die Abstände liegen in der Größenordnung 1 mm.

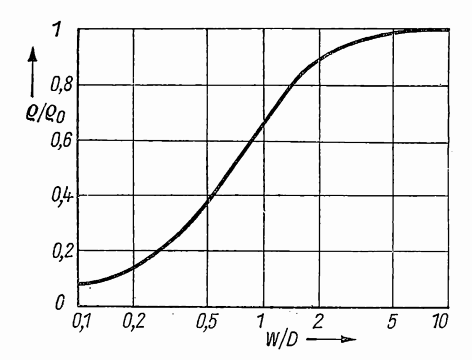


Abb. 9.25 Korrekturfaktor für die Vier-Spitzen-Methode

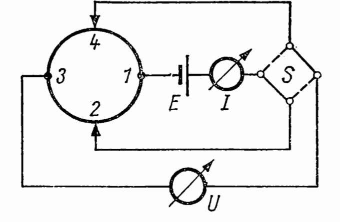


Abb. 9.26 Quadratische Anordnung der Kontaktspitzen

Von ALLEN und RUNYAN [*9.2*] wird ein transistorisiertes Wechselstrom-Widerstandsmeßgerät nach diesem Verfahren beschrieben, dessen Meßbereich von 10^{-2} Ω cm bis 10^3 Ω cm reicht. Durch eine an einem fünften Kontakt zugeführte Vorspannung werden alle Meßkontakte in Durchlaßrichtung von einem kleinen Gleichstrom durchflossen, so daß der Kontaktwiderstand verschwindend klein wird. Die Widerstandsmessung erfolgt bei konstantem 1000-Hz-Wechselstrom, der von einem Rechteckgenerator erzeugt wird. Das an den inneren Kontakten abgenommene Signal wird verstärkt und in einem phasenempfindlichen Detektor (s. § 7.66) gleichgerichtet und gemessen. Durch Verändern des Meßstroms und des Verstärkungsfaktors läßt sich der Meßbereich über 5 Dekaden erweitern. Die Meßgenauigkeit liegt bei $\pm 3\%$.

Über weitere Beispiele dieser Methode siehe [*9.48, 9.61, 9.144, 9.151*]. Ein verbessertes Verfahren, bei dem die vier Kontakte in quadratischer Anordnung auf die zu messende Probe aufgesetzt werden, haben ZRUDSKY et al. [*9.199*] beschrieben. Aus dem Schaltschema der Abb. 9.26 ist ersichtlich, daß in der gezeichneten Stellung des Umschalters S der von der Batterie E gelieferte Strom I über die Kontakte *1* und *2* fließt und am Voltmeter U der Spannungsabfall an den Spitzen *3* und *4* gemessen wird. In der anderen Schalterstellung sind die Rollen der Kontakte *2* und *4* vertauscht. Der gemessene Widerstand ist bei exakter Quadratanordnung der Kontakte von deren Abstand unabhängig und beträgt

$$R = \frac{2\pi}{\ln 2}\,\frac{U}{I}; \qquad (9/64)$$

Umschaltung und Mittelung der gemessenen Spannungen werden selbsttätig ausgeführt. Als Meßgenauigkeit werden 1% in einem Meßbereich von 0,1 Ω bis 10 Ω (pro Quadrat) angegeben. Die Kontakte bestehen aus dreikantigen, geschliffenen Stahlspitzen im Abstand von 1,27 mm, die in einer Hülse exakt geführt und durch Federn mit konstanter Kraft auf das Meßobjekt gedrückt werden.

9.46 *Impulsmessungen*

Bei nichtperiodischen, schnell veränderlichen Strömen und Spannungen läßt sich der Widerstand mit Hilfe eines Zweistrahloszillografen zu jedem Zeitpunkt messen. Schwierigkeiten bereitet dieses Verfahren bei äußerst kurzen Impulsen oder auch bei hohen Strömen und Spannungen.

Fünfer et al. [*9.47*] wenden bei der Untersuchung von Drahtexplosionen, die innerhalb von etwa 1 μs erfolgen, zur Hochspannungsmessung hochohmige, induktionsarme Spannungsteiler, für die Messung des Stroms bis zu 30 kA einen induktionsarmen Serienwiderstand an. Infolge der nicht vermeidbaren Blindkomponenten treten Meßfehler bis zu 8% auf. Durch Verwenden eines Doppelspannungsteilers, der in einem Zweig eine kleine Induktionsspule zur Kompensation der durch die Endladung induzierten Spannung enthält, haben Cassidy et al. [*9.21*] diese Methode wesentlich verbessern können. Da $\int_0^\tau I^2 R \, dt = \int_0^\tau U I \, dt$ sein muß, kann die linke Seite der Gleichung auch mit Hilfe eines Kalorimeters bestimmt und damit die Meßanordnung geeicht werden.

9.5 Widerstandsmessung durch Vergleich

Für den Aufbau von Präzisionsspannungsteilern (Hochspannungsmessung) und zum Vergleich von Widerstandseinheiten mit Normalwiderständen werden Substitutionsmethoden benutzt, die gegenüber anderen Widerstandsmeßverfahren einfacher zu handhaben und sehr genau sind.

9.51 *Vergleich mit dem Kompensator*

Der zu messende Widerstand wird mit einem Normalwiderstand in denselben Stromkreis geschaltet und die Spannung an den Enden der Widerstände über einen thermospannungsfreien Umschalter mit Hilfe eines Kompensationsapparates (s, § 2.34) bestimmt. Die Widerstände verhalten sich wie die gemessenen Spannungen, d. h.,

$$R_x = R_n \frac{U_x}{U_n},$$

wobei der Meßstrom nicht bestimmt zu werden braucht, jedoch während der Meßreihe konstant sein muß. Weitere Verfahren siehe [*9.64, 9.139*].

9.52 *Widerstandsvergleich mit Differentialgalvanometer*

Wie in § 2.231 näher ausgeführt, enthält das Differentialgalvanometer eine Doppelspule gleicher Windungsfläche, mit der gleiche Ströme mit hoher Genauigkeit verglichen werden können. Die in Abb. 2.31 dargestellte Schaltung eignet sich für den Vergleich der etwa gleich großen Widerstände R_1 und R_2; durch Abgleich des variablen Präzisionswiderstandes R_2 läßt sich der unbekannte Widerstand R_1 bestimmen. Mit Hilfe eines Umschalters lassen sich kleine Abweichungen der Windungsfläche der Einzelspulen eliminieren.

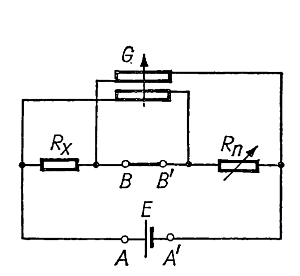


Abb. 9.27 Widerstandsvergleich mit dem Differentialgalvanometer

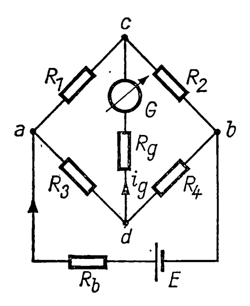


Abb. 9.28 Wheatstone-Brücke

Ein zweites Verfahren, bei dem die beiden Spulen des Galvanometers nicht gleichen Widerstand und gleiche Windungsflächen zu haben brauchen, ist in Abb. 9.27 dargestellt. Die beiden annähernd gleichen Widerstände R_n und R_x werden in Serie vom Strom der Batterie E durchflossen. Die Spannungsabfälle an den Widerständen werden durch das Galvanometer G miteinander verglichen, wobei R_n auf den Wert R_{n1} eingestellt werden muß; durch einen Umschalter wird anschließend die Batterie zwischen BB' geschaltet und AA' kurzgeschlossen. Zum Nullabgleich ist nunmehr der veränderliche Widerstand auf R_{n2} zu verstellen. Trotz Umkehrung der Stromrichtung in den Widerständen bleibt diese im Galvanometer ungeändert. Die Zuleitungen bzw. Verbindungsleitungen zwischen den Widerständen üben keine Wirkung aus. Der gesuchte Widerstand berechnet sich aus der Beziehung

$$R_x = \frac{R_{n1} + R_{n2}}{2}.$$

9.53 *Wheatstone-Brücke*

9.531 Aufbau und Meßempfindlichkeit

Zu den genauesten Methoden der Widerstandsmessung gehört die Wheatstonesche Brückenschaltung (s. a. § 3.25), die aus den vier Brückenwiderständen R_1 bis R_4 besteht, die zu einem Viereck geschlossen sind. An zwei gegenüberliegenden Ecken wird die Batterie E angeschlossen; die beiden anderen sind an das Nullgalvanometer G gelegt (s. Abb. 9.28). Aus den all-

gemeinen Gleichgewichtsbedingungen der Gl. (3/75) findet man für den Galvanometerstrom i_g den Ausdruck

$$i_g = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_g(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)}, \tag{9/65}$$

wenn I den Gesamtstrom und R_g den Galvanometerwiderstand bedeutet. Im abgeglichenen Zustand gilt die bekannte Relation

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}. \tag{9/66}$$

Analog findet man für die am Diagonalzweig cd herrschende Spannung, wenn dieser zunächst unterbrochen wird und in R_b der Innenwiderstand der Batterie enthalten sein soll, die Beziehung

$$u_{cd} = U_0 \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_b(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}. \tag{9/67}$$

Bezieht man alle Widerstände auf den zu messenden Widerstand $R_1 = R$, setzt man also

$$R_2 = nR; \quad R_3 = mR; \quad R_4 = mnR; \quad R_g = gR; \quad R_b = bR,$$

so findet man für die relative Abweichung ε des gesuchten Widerstandes vom Sollwert, d. h. für $R_1 = (1 \pm \varepsilon)R$ die Näherungsgleichung

$$u_{cd} \approx \pm \varepsilon U_0 \frac{n}{1+n} \cdot \frac{m}{m(1+n) + b(1+m)}. \tag{9/68}$$

Wendet man auf die Brückenschaltung nach § 3.24 das Théveninsche Theorem an und berechnet den vom Galvanometer „gesehenen" Gesamtwiderstand R', so ergibt sich

$$R' = R\left[g + \frac{n}{1+n+m} + \frac{n}{1+n}\left(m + \frac{b}{1+n+m}\right)\right] \tag{9/69}$$

und daraus mit Gl. (9/68) der Brückendiagonalstrom

$$i_g = \pm \varepsilon \frac{U_0}{R} \frac{1}{\left[(1+n) + \frac{b}{g}(1+m)\right] \cdot \left[(1+m) + \frac{g}{n}(1+n)\right]}. \tag{9/70}$$

Führt man nach § 2.21 die Stromempfindlichkeit S_i des Nullgalvanometers ein, wonach der Ausschlag $x = S_i i_g$ ist, und berücksichtigt Gl. (2/36), so folgt

$$i_g = \frac{C_u}{gR} x, \tag{9/71}$$

wenn C_u die Spannungskonstante des Instrumentes ist. Durch Vergleich von (9/70) und (9/71) findet man schließlich für die Relativabweichung ε des ge-

suchten Widerstandes den Ausschlag:

$$x = \pm \varepsilon \frac{U_0}{C_u} \frac{g}{\left[(1+n) + \frac{b}{m}(1+m)\right] \cdot \left[(1+m) + \frac{g}{n}(1+n)\right]} = \pm \varepsilon \frac{U_0}{C_u} \frac{1}{K}. \tag{9/72}$$

Große Empfindlichkeit der Meßbrücke wird nach Gl. (9/72) für große Werte von U_0/C_u und des zweiten Terms erreicht, den man *Schaltungsempfindlichkeit* nennt.

Durch partielles Differenzieren von $1/x$ nach den Größen n und m bei vorgegebenen Werten b und g findet man die Bestimmungsgleichungen

$$n = \sqrt{g \frac{1+b}{1+g}}; \quad m = \sqrt{b \frac{1+g}{1+b}} \tag{9/73}$$

für die optimale Brückenschaltung. Führt man diese Bedingungen in Gl. (9/72) ein, so erhält man als Minimalwert für die *Schaltungskonstante* den Wert

$$g K_{\min} = \left(\sqrt{b} + \sqrt{(1+b)(1+g)} + \sqrt{g}\right)^2$$
$$= \left(\sqrt{R_b} + \sqrt{\frac{(R+R_g)(R+R_b)}{R}} + \sqrt{R_g}\right)^2. \tag{9/74}$$

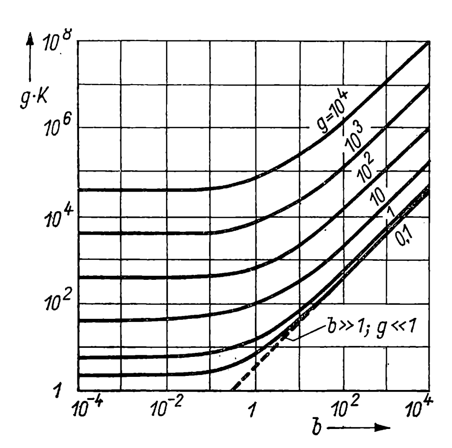


Abb. 9.29 Optimale Schaltungsempfindlichkeit der Wheatstone-Brücke für verschiedene Instrument- und Batteriewiderstände

Es folgen daraus die wichtigen Bemessungsregeln für optimale Empfindlichkeit der Wheatstone-Brücke

$$\frac{R_b}{R_4} = \frac{R_1}{R_g}; \quad R_2 = \sqrt{\frac{R + R_b}{1/R + 1/R_g}}; \quad R_3 = \sqrt{\frac{R + R_g}{1/R + 1/R_b}}. \tag{9/75}$$

In Abb. 9.29 sind Kurven optimaler Schaltungsempfindlichkeit K für die Wheatstone-Brücke als Funktion von b und für verschiedene Werte von g dargestellt, wobei die Optimierungsbedingungen (9/73) berücksichtigt sind.

Für den Fall mit vier gleichen Brückenwiderständen, d. h. $n = m = 1$, wird nach der ersten der Gln. (9/75) $b = 1/g$ und aus Gl. (9/74)

$$g K_{\min} = 4\left(\sqrt{g} + \sqrt{b}\right)^2. \tag{9/74a}$$

Ist der Batteriezweig nahezu widerstandslos, d. h., $R_b = 0$, so folgt aus Gl. (9/75)

$$R_2 = R \sqrt{\frac{1}{1 + R/R_g}}$$

und für ein hochohmiges Galvanometer mit $R_g \gg R$

$$R_2 \approx R.$$

Andererseits wird nach Gl. (9/75) wegen $R_b = 0$ auch $R_3 = 0$, d. h., der Parallelzweig, der den gesuchten Widerstand nicht enthält, sollte so niederohmig wie möglich sein. Optimale Empfindlichkeit ist gegeben, wenn mit dem Meßzweig die Brückenspannung im Verhältnis 1:1 geteilt wird.

In Hochspannungsmeßbrücken liegt im Batteriekreis ein hoher Widerstand vor, d. h., $R_b \to \infty$ und es wird $R_3 = R\sqrt{1 + R_g/R}$. Bei kleinem Galvanometerwiderstand liefert dann die letzte der Gln. (9/75) $R_3 \approx R$; optimale Empfindlichkeit ergibt sich demnach, wenn die beiden Spannungsteiler gleiche Ströme aufnehmen.

Weitere Hinweise über Fragen der Empfindlichkeit und Anwendung von Wheatstone-Brücken siehe [*9.10*, *9.106*, *9.113*].

9.532 Praktische Ausführung

Für den praktischen Aufbau einer Wheatstone-Brücke werden die im § 9.35 besprochenen Kurbel- und Stöpselwiderstände benutzt und in kompletten Apparaten zusammengestellt. Da nach Gl. (9/66) zwei Widerstände frei

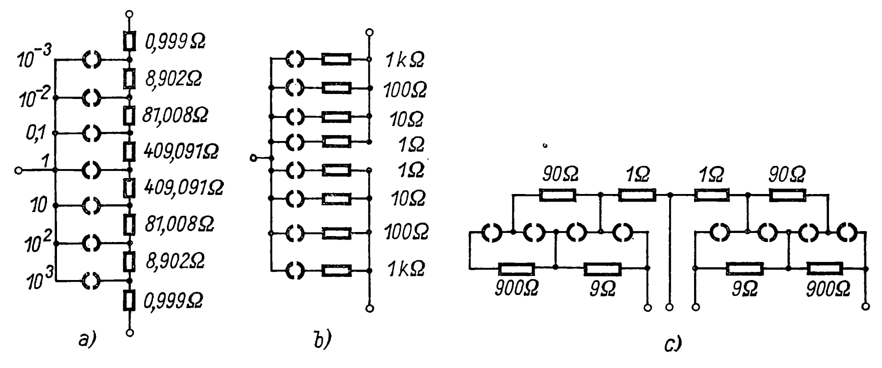


Abb. 9.30 Verzweigungswiderstände für Wheatstone-Brücke

gewählt werden können, unterteilt man zweckmäßig den Abgleich in zwei Stufen: die grobe Anpassung an den gesuchten Widerstand wird durch eine dekadische Widerstandsverzweigung erreicht, während die Feineinstellung durch einen maximal um eine Zehnerpotenz veränderlichen Präzisionswiderstand erfolgt.

Benutzt man das Brückenverhältnis n zur Grobanpassung, so wird der Spannungsteiler $R_3 + R_4$ (s. Abb. 9.28) als dekadisch veränderbarer *Verzweigungswiderstand* ausgeführt, mit dem $n = R_3/R_4$ zwischen 10^{-3} und 10^3 eingestellt werden kann. In Abb. 9.30 sind drei Ausführungsbeispiele eines

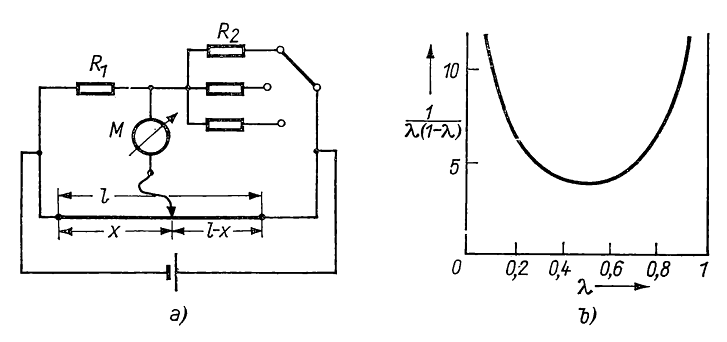


Abb. 9.31 Schleifdrahtmeßbrücke: Schaltung (a), Meßgenauigkeit (b)

solchen Verzweigungswiderstandes dargestellt. In der Schaltung (a) kann durch geeignete Unterteilung des konstanten Gesamtwiderstandes von 1000 Ω in Einzelwiderstände durch *einen* Stöpsel das gewünschte Verzweigungsverhältnis eingestellt werden, wobei der Querstrom konstant bleibt. In den Schaltungen (b) und (c) sind zum Einstellen der dekadisch gestuften Widerstände *zwei* Stöpsel erforderlich; allerdings ist eine bessere Anpassung an Batterie und Galvanometerwiderstand möglich.

Der Brückenwiderstand R_2 für den Feinabgleich umfaßt 3 bis 5 Dekaden und wird als Stöpsel- oder Kurbelwiderstand ausgebildet. Die Kontakte der Kurbelwiderstände müssen sorgfältig gereinigt werden, da der Kontaktwiderstand in das Meßergebnis eingeht.

Für geringere Genauigkeitsansprüche wird vielfach die *Schleifdrahtmeßbrücke* benutzt, wie sie in Abb. 9.31 dargestellt ist. Bei dieser Schaltung ist der Vergleichswiderstand R_2 dekadisch umschaltbar, während der Spannungsteiler R_3, R_4 wie beim Kompensator nach § 2.343 als Schleifdraht (s. § 9.353) ausgebildet ist. Draht oder Drahtwendel müssen über ihre ganze Länge konstanten Widerstand pro Zentimeter besitzen und werden gewöhnlich auf den Umfang einer Kreisscheibe aus Isoliermaterial gewickelt. Befindet sich der Schleifkontakt bei abgeglichener Brücke an der Stelle x des Schleifdrahtes von der Länge l, so gilt:

$$R_1 = R_2 \frac{x}{l - x} = R_2 \frac{\lambda}{1 - \lambda},$$

wenn $\lambda = x/l$. Für die Einstellunsicherheit von $\mathrm{d}x = l\,\mathrm{d}\lambda$ findet man einen

relativen Einstellfehler von

$$\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} = \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} \frac{\mathrm{d}x}{l}.$$

Diese Funktion ist in Abb. 9.31 b dargestellt; sie wird ein Minimum für $\lambda = 0{,}5$, d. h., die Meßunsicherheit ist am geringsten, wenn der Schleifkontakt den Meßdraht halbiert.

Von HAWKINS [*9.59*] wird eine modifizierte Wheatstone-Brücke zur Messung hoher Widerstände beschrieben, bei der das Nullinstrument durch einen Kondensator ersetzt wird, der nach vollständiger Ladung durch ein Relais über ein Galvanometer entladen wird. Widerstände von 100 MΩ lassen sich hiermit auf 1% genau bestimmen. Mit der Präzisionsbrücke für hochohmige Widerstände nach YOSHIZAKI [*9.192*] sind Widerstände zwischen 0,1 und 1000 MΩ auf 0,01% genau zu messen.

9.54 Thomson-Brücke

9.541 Schaltung und Prinzip

Die Thomson-Brücke wird zur Messung von sehr kleinen Widerständen oder von Vierpolwiderständen (z. B. Widerstandsthermometer) benutzt, bei denen der Zuleitungswiderstand das Meßergebnis fälschen würde. Wie in Abb. 9.32 dargestellt ist, sind die zu vergleichenden niederohmigen Widerstände R_1 und R_2 (vgl. den Aufbau nach Abb. 9.13) durch die Leitung D verbunden und werden in Serie vom Meßstrom I durchflossen. Der Spannungsteiler R_3, R_4 wird groß gegen R_1 und R_2 gewählt, damit die Zuleitungswiderstände zu R_3 und R_4 geschlagen werden können. Um auch die Zuleitungen am anderen Ende von R_1 bzw. R_2 eliminieren zu können, wird der Galvanometerzweig an den oberen Knotenpunkt über die Überbrückungswiderstände r_1 und r_2 gelegt, die groß gegen die Zuleitungswiderstände sein müssen.

Für den Galvanometerstrom i_0 findet man den Ausdruck:

$$i_0 = I \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3 + \dfrac{D}{r_1 + r_2} [R_4(R_1 + r_1) - R_3(R_2 + r_2)]}{N}, \quad (9/76)$$

woraus sich für die abgeglichene Brücke ($i_0 = 0$) folgende Gleichgewichtsbedingungen ergeben:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{r_1}{r_2}. \quad (9/77)$$

Setzt man wie bei der Wheatstone-Brücke

$$R_1 = R; \; R_2 = nR; \; R_3 = mR; \; R_4 = mnR; \; r_1 = \mu R; \; r_2 = \mu n R; \; D = \nu R,$$

so ergibt sich der Nenner N in Gl. (9/76) zu

$$N = [R_g R(1+n) + R^2 n] \cdot \left[(1+m) + \frac{\nu(1+m+\mu)}{\mu(1+n)}\right],$$

wenn R_g der Innenwiderstand des Galvanometers ist. Ferner findet man daraus den Widerstand für den äußeren Schließungskreis zu

$$R_a = \frac{1 + m + \mu}{1 + 1/n} R,$$

woraus die optimale Empfindlichkeit der Brückenschaltung entnommen werden kann.

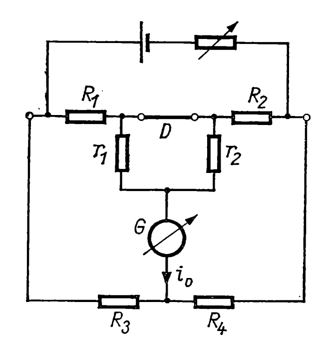



Abb. 9.32 Thomson-Brücke

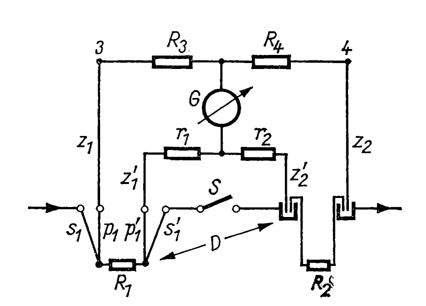


Abb. 9.33 Messung am Widerstandsthermometer mit Thomson-Brücke

9.542 Anwendungen

In Abb. 9.33 ist zur Erläuterung des Vorhergehenden der Vergleich eines Widerstandsthermometers R_1 (s. Bd. II, § 2.4) mit einem Normalwiderstand R_2 gezeigt. Stromzuführungen und Potentialdrähte des Widerstandsthermometers sind mit s_1, s_1' bzw. p_1, p_1' bezeichnet; ferner sind die Zuleitungen z_1, z_1', z_2 und z_2' in die Schaltung eingetragen. Der Widerstand von s_1 spielt für die Messung keine Rolle, während s_1' zusammen mit der Verbindungsleitung D durch die Widerstände r_1, r_2 überbrückt werden. Die Zuleitungen p_1 und z_1 bzw. z_2, die zu R_3 bzw. R_4 rechnen, sind dagegen nicht überbrückt und müssen gemessen oder im Verhältnis $R_1 : R_2$ abgeglichen werden. Zu diesem Zweck wird D mit Hilfe des Schalters S unterbrochen und werden die Punkte *3* und *4* kurzgeschlossen, wodurch eine Wheatstone-Brücke entsteht, die nun abgeglichen werden kann. Um die Zuleitungen zu messen, unterbricht man D sowie die Verbindung zwischen r_1 und r_2 und vergleicht die Spannungsabfälle an den vom Hauptstrom I durchflossenen Widerständen p_1, z_1 und z_2 mit dem an einem in den Stromkreis geschalteten kleinen Normalwiderstand (z. B. 0,01 Ω).

Zum Brückenabgleich wird zunächst der Spannungsteiler R_3, R_4 einreguliert, bis $i_0 = 0$ ist. Dann wird D geöffnet und in der so entstandenen Wheatstone-Brücke die Größe $(R_1 + r_1)/(R_2 + r_2)$ bei kleiner Meßempfindlichkeit abgeglichen, um daraus den Abgleich $R_3/R_4 = r_1/r_2$ zu erhalten. Am besten wird schrittweise abgeglichen, indem man angenähert $R_3/R_4 = R_1/R_2$ einstellt, dann S öffnet und wie oben $r_1/r_2 = R_3/R_4$ abgleicht usf.

9.543 Andere Doppelbrücken

Von BARBER et al. [*9.5*] ist eine verbesserte Smith-Brücke für Präzisionsmessungen an Widerstandsthermometern mit hoher Genauigkeit beschrieben worden. Hierbei wird r_1 zusammen mit R_3 gleichzeitig und in einem bestimmten Verhältnis geändert, wodurch sich die Meßzeit stark verkürzt. Durch sorgfältigen Aufbau der Vergleichsdekaden betragen die jährlichen Relativänderungen der Widerstände nur einige 10^{-6}.

Gelegentlich ist direkt in *einer* Messung die Summe oder Differenz zweier Widerstände mit einem dritten bekannten Widerstand zu vergleichen. Bei sehr kleinen Widerständen mit Strom- und Potentialzuleitungen ist diese Aufgabe nicht trivial und erfordert eine besondere Meßanordnung, wie sie z. B. von PEARLSTEIN [*9.123*] beschrieben wird. Die benutzte Schaltung stellt eine erweiterte Thomson-Brücke dar, deren theoretische Behandlung zu einer komplizierten Abgleichbedingung führt, die aber für die praktische Handhabung stark vereinfacht werden kann.

Bei der Thomson- oder Kelvin-Brücke lassen sich die Fehler 1. Ordnung, die durch Widerstandsänderungen der Zuleitungen entstehen, eliminieren, indem man nach Abb. 9.33 den Knotenpunkt, an den der zu messende Widerstand geschaltet ist, durch ein zusätzliches zweites Widerstandspaar ersetzt, das ebenfalls abgeglichen werden muß. Die verbleibenden Fehler 2. Ordnung sowie Thermospannungen an Umschalt- oder sonstigen Kontakten lassen sich nach WARSHAWSKY [*9.180*] mit Hilfe einer Brückenschaltung vermeiden, bei der alle vier Knoten der einfachen Wheatstone-Brücke durch Verzweigungen ersetzt sind, die bei der Thomson-Brücke aus drei Widerständen (r_1, r_2, D in Abb. 9.32) bestehen. Eine solche Schaltung ist besonders für höchste Genauigkeit und für Langzeitmessungen an technischen Widerständen mit langen Zuleitungen geeignet.

9.55 Andere Brückenmethoden

Zum Vergleich kleiner Widerstände ist die in Abb. 9.34 dargestellte Brückenschaltung nach GALL geeignet. Die zu vergleichenden kleinen Widerstände R_1 und R_2 ($R_1 < R_2$) mit den Potentialdrähten p liegen hintereinander geschaltet im Hauptstromkreis. Parallel dazu werden zwei größere Widerstände R_3, R_4 (ca. 100 Ω), der Regelwiderstand P und ein Schleifdraht S in Serie geschaltet. In der gezeigten Stellung des Umschalters U wird p_1' mit Punkt *2* über das Galvanometer G verbunden und die Brücke mittels P abgeglichen. Sodann wird U umgelegt und p_2 durch Verschieben des Schleifkontaktes *3* auf S abgeglichen. Damit sind die Spannungsabfälle an den niederohmigen Stromzuleitungen von R_1 und R_2 durch die im höherohmigen Brückenteil *1—5* ausgedrückt. Der zwischen *3* und *4* liegende Widerstand des Schleifdrahtes S ist ein Maß für die Differenz $R_2 - R_1$ unter Berücksichtigung der Teilströme in den beiden Brückenpfaden.

Eine Widerstandsmeßbrücke für die Bestimmung hochohmiger Widerstände, vor allem *Erderwiderstände*, wird von UNZ [*9.174*] beschrieben. FERMOR und KIEKSHUS [*9.44*] benutzen zur Messung von Halbleiterwiderständen bis

zu 10 TΩ die in Abb. 9.35 vereinfacht dargestellte Brückenschaltung. Die Meßprobe X wird dabei vom konstanten Strom I_0 durchflossen, den eine regelbare Spannungsquelle G in Serie mit dem Dekadenwiderstand R erzeugt. Der Spannungsabfall an R wird gegen eine Normalspannungsquelle U_n mit Hilfe

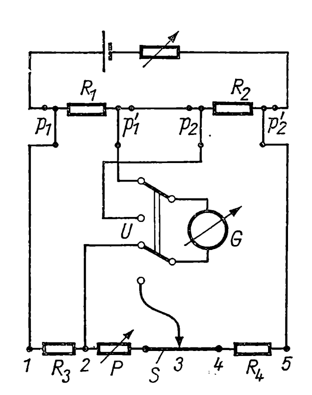


Abb. 9.34 Widerstandsvergleich nach GALI

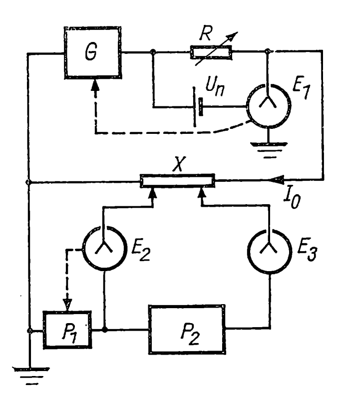


Abb. 9.35 Brückenschaltung für sehr hohe Widerstände

des empfindlichen Elektrometers E_1 verglichen und G automatisch durch das Elektrometer nachgeregelt, bis $I_0R = U_n$ ist. Der Meßstrom ist zwischen 1 mA und 1 pA einstellbar. Der zu messende Spannungsabfall zwischen den Potentialkontakten der Probe X wird mit dem Kompensationsapparat P_2 und dem Elektrometer E_3 als Nullinstrument bestimmt; ein zweites Elektro-

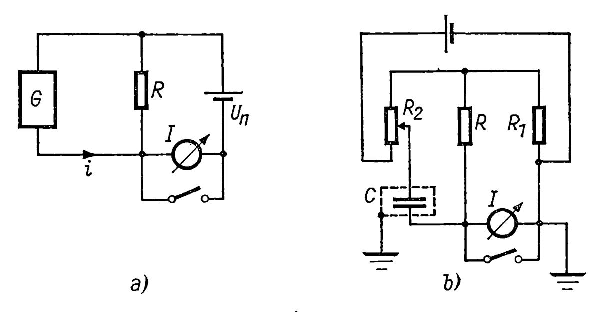


Abb. 9.36 Messung sehr großer Widerstände

meter E_2 im Meßkreis gleicht selbsttätig den Kompensator P_1 auf das Potential des linken Probenkontakts ab, wodurch Erdungsfehler vermieden werden. Die drei Nullinstrumente E_1, E_2 und E_3 sind empfindliche Röhrenvoltmeter (s. § 2.32) mit einer Pentode als Eingangsstufe, deren Gitterstrom weniger als 1 fA beträgt. Die Nachweisgrenze der Instrumente liegt bei 1 mV; die tägliche Drift ist von der gleichen Größe. Mit dem regelbaren Generator lassen sich Spannungen zwischen $-1{,}5$ und $+100$ V mit der Empfindlichkeit von 0,4 mV einstellen.

Widerstände von 10 GΩ und mehr lassen sich nach METTE [*9.103*] mit dem in Abb. 9.36a dargestellten Meßprinzip bestimmen. Hierbei regelt man den Meßstrom i der Stromquelle G so, daß am gesuchten Widerstand R der Spannungsabfall iR der Normalspannung U_n entspricht, wobei der Spannungsvergleich mit dem Nullinstrument I ausgeführt wird. Als Nullinstrument kann ein Röhrenvoltmeter oder auch ein empfindliches Elektrometer verwendet werden. Die Stromquelle besteht aus einem Kondensator C (Abb. 9.36b), dessen Spannung u zeitlich linear verändert wird, so daß ein konstanter Verschiebungsstrom $i = C\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ entsteht, der durch den Widerstand R geschickt wird. Der gesuchte Widerstand ergibt sich aus der Beziehung

$$R = \frac{U_n}{C\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t}. \tag{9/78}$$

Da nach Gl. (9/78) nur das Verhältnis zweier Spannungen in R eingeht, greift man diese als Spannungsabfälle der zwei in Serie geschalteten Widerstände R_1 und R_2 ab, die von einem beliebigen, konstanten Strom durchflossen werden. Damit wird aus Gl. (9/78) die einfache Beziehung

$$R = \frac{R_1}{C\,\mathrm{d}R_2/\mathrm{d}t}; \tag{9/78a}$$

R_1 ist ein Präzisionswiderstand, R_2 z. B. ein Helipot-Widerstand, der durch einen Synchronmotor verstellt wird. Die Meßgenauigkeit hängt besonders von der genauen Kenntnis der Größe $\mathrm{d}R_2/\mathrm{d}t$ ab und wird mit besser als 0,1% angegeben. Der Meßbereich ist durch geeignete Wahl von C und $\mathrm{d}R_2/\mathrm{d}t$ in großen Grenzen veränderbar; mit $R_1 = 50\ \Omega$, $C = 500$ pF und $\mathrm{d}R_2/\mathrm{d}t = 1\ \Omega/\mathrm{s}$ wird $R = 1$ GΩ.

9.56 Ohmmeter

Als *Ohmmeter* bezeichnet man Zeigerinstrumente, an denen unmittelbar der zugeschaltete Widerstand abgelesen werden kann. Bei einfachen Instrumenten liegt der zu messende Widerstand an einer bekannten Spannung und wird mit einem in *Ohm* geeichten Strommesser bestimmt. Durch eine Prüftaste läßt sich die Meßspannung prüfen bzw. mit Hilfe eines eingebauten Potentiometers nachstellen. Über andere Schaltungen siehe [*9.108*].

In weiten Grenzen von der Meßspannung unabhängig ist das mit einem *Kreuzspulsystem* ausgestattete Ohmmeter, dessen Grundlagen in § 2.232 behandelt sind. Das aus zwei gegeneinander verdrehten Spulen bestehende Meßwerk befindet sich im Luftspalt mit örtlich veränderlicher magnetischer Induktion (s. Abb. 2.32) und liefert einen Ausschlag, der nur vom Verhältnis der beiden Spulenströme abhängig ist, da kein Rückstellmoment auf das System wirkt. An einer gemeinsamen Spannungsquelle liegen der gesuchte Widerstand in Serie mit der einen Spule, während die zweite mit dem Vergleichswiderstand in Reihe geschaltet ist.

Auch das *T-Spulmeßwerk* (s. § 2.233) wird für den Bau von Ohmmetern eingesetzt.

Für die direkte Anzeige extrem hoher Widerstandswerte bei geringer Spannungsbelastung des Prüflings ist das *Teraohmmeter* geeignet, bei dem ein elektrostatisches Voltmeter den Spannungsabfall am Widerstand mißt. Prüfling und umschaltbare Hochohmwiderstände liegen im Meßkreis einer Spannungsquelle von etwa 300 V, deren Spannung nachgestellt werden kann. Der Meßumfang von 1 GΩ···10 TΩ wird mit fünf umschaltbaren Vorwiderständen erzielt.

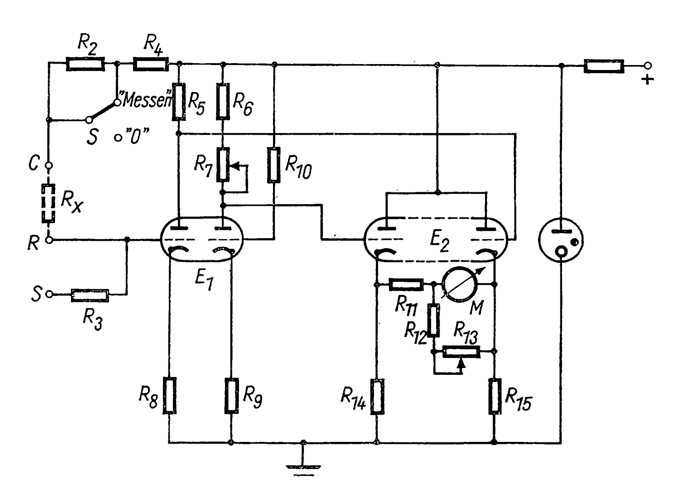


Abb. 9.37 Logarithmisches Megohmmeter

Für viele Zwecke werden anzeigende Ohmmeter mit großem Meßbereich gebraucht, wobei eine Genauigkeit von 1% ausreichend ist. Als Beispiel ist in Abb. 9.37 ein *logarithmisches Megohmmeter* nach HARIMARAN und BHALLA [*9.58*] dargestellt, das einen Meßbereich von 1 MΩ···10 GΩ umfaßt. Es enthält im Eingangskreis die Doppeltriode 6F8, deren Gitter-Katodenwiderstand ca. 1 TΩ beträgt und deren Anoden direkt mit den Gittern der Doppelröhre E_2 verbunden sind. Die Röhre E_2 ist als symmetrische Katodenfolgerstufe (s. § 5.223) geschaltet und enthält im Ausgang das Anzeigeinstrument M mit dem Meßbereich 0···100 μA. Der zu messende Widerstand R_x liegt zwischen den Klemmen R und C, wobei an C eine Spannung von 105 V herrscht. Die Eingangsstufe arbeitet im Anlaufstrombereich und liefert einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Gitterpotential und Anodenstrom. Die Eichung erfolgt mit Hilfe der Eichwiderstände $R_2 = 1{,}00\,\mathrm{M\Omega}$ und $R_3 = 10\,\mathrm{G\Omega}$, indem der Schalter S zuerst auf „*O*" gelegt und C—R kurzgeschlossen werden. Dann wird der Schalter auf „Messen" umgelegt, R mit S verbunden und das Potentiometer R_{13} so eingestellt, daß in M 80 μA fließen. Der Nullabgleich wird mit dem Widerstand R_7 durchgeführt und durch $R_4 = 0{,}5\,\mathrm{M\Omega}$ der Strom im Kurzschlußfall auf 200 μA begrenzt. Das Meßgerät liefert einen fast linearen Zusammenhang von Instrumentenausschlag und log R_x zwischen 1 MΩ und 10 GΩ.

Über linear anzeigende Ohmmeter siehe [*9.74, 9.145*].

Digital anzeigende Ohmmeter besitzen den großen Vorteil gegenüber Zeigergeräten, daß der gesuchte Widerstandswert unmittelbar als Zahl angezeigt und ausgedruckt werden kann. Nach dem Vorschlag von De Witt [*9.189*] ist hierzu eine Wheatstone-Brücke mit selbsttätigem Abgleich geeignet, bei der die eingestellten Werte der Dekaden im Abgleichzweig die Anzeige bilden. Ein anderer Weg ist der, den an einem Potentiometer eines selbstabgleichenden Kompensators abgegriffenen Widerstand in Digitalwerte umzusetzen [*9.20*].

Grundsätzlich ist für die digitale Widerstandsmessung jedes Digitalvoltmeter (s. § 2.35) geeignet, das den Spannungsabfall am gesuchten Widerstand mißt, wenn dieser durch eine Konstantstromquelle mit bekanntem Strom versorgt wird. Mit dieser Methode lassen sich Genauigkeiten von 0,1% und besser erreichen (vgl. auch § 9.44).

Von Littlewood [*9.89*] wird eine selbsttätig abgleichende Wheatstone-Brücke beschrieben, deren hochempfindlicher Nullverstärker einen Verstellmotor steuert. Es läßt sich zeigen, daß in einem weiten Bereich die Abgleichstellung eine lineare Funktion des *Leitwerts* des gemessenen Widerstandes ist.

9.6 Wechselstrommethoden

Die Messung des Widerstandes oder der elektrischen Leitfähigkeit von festen oder flüssigen ionischen Leitern (s. § 9.28) mit Gleichstromverfahren ist oft mit großen Fehlern behaftet, da sich während der Messung die örtliche Konzentration der Ladungsträger ändern kann. In diesen Fällen werden Wechselstrommethoden benutzt, wobei die angewandte Frequenz so gewählt werden muß, daß weder kapazitive Nebenschlüsse noch Laufzeiteffekte das Meßergebnis beeinflussen. In diesen Abschnitt gehören auch die HF-Verfahren zur Messung des durch den Skineffekt hervorgerufenen Wirkwiderstandes metallischer Leiter.

9.61 Wechselstrombrücken

Wird die Wheatstone-Brücke mit Wechselstrom betrieben, so gelten für den Abgleich die Bedingungen der Gl. (3/75), d. h., es müssen auch die Blindwiderstände abgeglichen werden. Bei niedrigen Frequenzen und hohen Widerständen sind die Blindwiderstände meist gegen die Wirkanteile zu vernachlässigen.

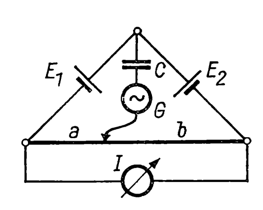


Abb. 9.38 Widerstandsvergleich zweier Elemente

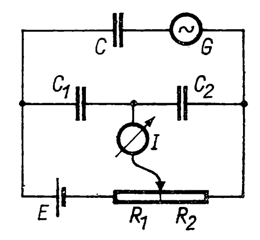


Abb. 9.39 Messung des Innenwiderstandes eines Elements

Ein häufiges Anwendungsbeispiel ist die Messung des *Innenwiderstandes* von *galvanischen Elementen.* In Abb. 9.38 ist eine einfache Schaltung für den Widerstandsvergleich zweier Elemente E_1 und E_2 dargestellt, deren Innenwiderstände R_{i1} und R_{i2} betragen sollen. Die Elemente sind einander entgegengeschaltet und erzeugen im Schleifdraht mit den Abschnitten a und b keinen Strom, wenn sie gleiche EMK besitzen. Die Wechselstromquelle G ist über den Kondensator C an die Brücke gelegt; als Nullinstrument I wird ein Telefon, Röhrenvoltmeter oder Vibrationsgalvanometer verwendet. Bei abgeglichener Brücke gilt: $R_{i1}/R_{i2} = a/b$; durch Zuschalten eines bekannten, mit R_{i1} vergleichbaren Widerstandes R in Serie zu R_{i1} findet man aus den neuen Abgleichbedingungen $(R_{i1} + R)/R_{i2} = a'/b'$. Daraus folgt für den gesuchten Widerstand R_{i1} die Beziehung

$$R_{i1} = R\,\frac{a/b}{a'/b' - a/b}.$$

Ein zweites Verfahren (s. Abb. 9.39) bildet eine Kapazitätsbrücke mit den bekannten Kapazitäten C_1 und C_2, in der der Brückenabgleich am Potentiometer R_1, R_2 erfolgt. Beim Spannungsminimum gilt dann für den gesuchten Innenwiderstand R_i der Stromquelle E

$$\frac{R_i + R_1}{R_2} = \frac{C_2}{C_1}.$$

Von TREGLOAN und LAURENCE [*9.171*] wird eine Wechselstrombrücke für Präzisionsleitfähigkeitsmessungen beschrieben, die aus zwei Festzweigen (1 oder 10 kΩ), der Meßzelle und einem 10 kΩ-Dekadenwiderstand besteht und von einem 33-kHz-Transistoroszillator gespeist wird. Als Brückeninstrument

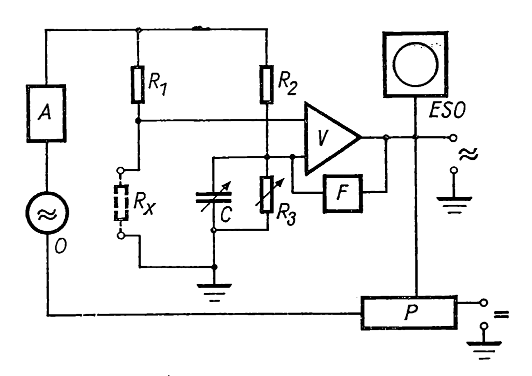


Abb. 9.40 Wechselstromwiderstandsmeßbrücke

dient ein Transistorverstärker mit 0,5 MΩ Eingangsimpedanz; die erreichbare Genauigkeit beträgt 0,05%. Über ähnliche Meßanordnungen siehe [*9.7*, *9.18*]. Eine Doppelwechselstrombrücke in Analogie zur Thomson-Brücke beschreibt GIBBINGS [*9.53*].

Für die genaue Messung sehr tiefer Temperaturen mit Hilfe von Kohleschichtwiderständen (vgl. Bd. II, § 3.3) werden mit Vorteil Wechselstromwiderstandsbrücken benutzt, bei denen dem Meßwiderstand eine Leistung von nur 1 pW···1 μW zugeführt werden darf. In Abb. 9.40 ist die Schaltung einer kommerziellen Brücke dieser Art vereinfacht dargestellt. Die Brücke besteht aus dem Festwiderstand R_1, dem Umschaltwiderstand R_2, dem zu messenden Widerstand R_x und dem Abgleichwiderstand R_3 mit parallelgeschaltetem Kondensator C zur Phasenkorrektur. Die Brücke wird vom Oszillator O über den Abschwächer A mit einer Spannung von 1 bis 50 mV bei 155 Hz versorgt. Das Brückensignal wird im Schmalbandverstärker V (Bandbreite 8 Hz) um den Faktor $2 \cdot 10^5$ verstärkt und kann entweder im Oszillografen ESO oder am Ausgang des phasenempfindlichen Detektors P (vgl. § 7.66) beobachtet werden. Diese Schaltung ist für Widerstände zwischen 1 kΩ und 1 MΩ brauchbar und auf 10^{-4} genau.

Von Diamond [*9.36*] wird eine ähnliche Brückenschaltung für Kohleschichtwiderstände im Tieftemperaturgebiet beschrieben, die mit 1 kHz erregt wird und zur Verringerung der Bandbreite des Nulldetektors einen speziellen Transistorverstärker mit nur 0,1 Hz Bandbreite enthält. Bei 10 nW zugeführter Leistung können noch 10^{-5} K nachgewiesen werden. Für Leitfähigkeitsmessungen an *Elektrolyten* wird von Schmidt [*9.143*] eine einfache transistorisierte Brücke angegeben, deren Ausgang von einem phasenempfindlichen Detektor gebildet wird. Der Meßbereich des Gerätes ist zwischen 1 kΩ und 1 MΩ umschaltbar; die Meßgenauigkeit beträgt 10^{-4}.

9.62 Messung des Innenwiderstandes von Elementen

Die in § 9.61 beschriebene Methode ist nur für den unbelasteten Zustand einer Batterie anwendbar. Um den Innenwiderstand während der Entladung zu messen, öffnet man kurzzeitig den Lastkreis, registriert die Zunahme der Zellenspannung und kann daraus R_i berechnen. Eine direkte Messung des Innenwiderstandes läßt sich mit Hilfe der von Clark und Zaffery [*9.25*]

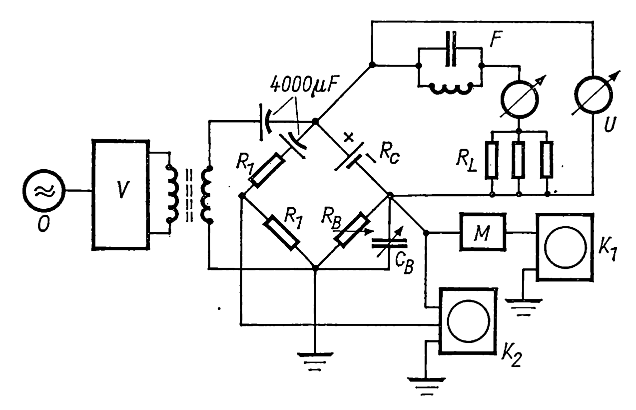


Abb. 9.41 Messung des Innenwiderstandes galvanischer Elemente

angegebenen Brückenschaltung durchführen. Diese besteht, wie in Abb. 9.41 gezeigt ist, aus der symmetrischen Brücke R_1, R_1, R_B und der zu messenden Zelle R_C, die vom 1-kHz-Oszillator O und dem nachgeschalteten 200-W-Verstärker V gespeist wird. Die innere Kapazität des galvanischen Elements wird mit Hilfe des Kondensators C_B kompensiert. Das Brückensignal wird mit dem Röhrenvoltmeter M verstärkt und am Oszillografen K_1 angezeigt. Zum Phasenabgleich ist ein zweites Oszilloskop K_2 vorgesehen. Um den Zellenwiderstand unter Last zu messen, ist zwischen Zelle und den Lastwiderständen R_L das 1-kHz-Filter F geschaltet; die Zellenspannung wird am Voltmeter U gemessen.

Ist die Brücke in Phase, so gilt: $R_C C_C = R_B C_B$, wenn C_C die Zellenkapazität ist. Bezeichnet man mit R_e bzw. C_e den bei abgeglichener Brücke ermittelten Widerstand bzw. die Kapazität der Zelle und setzt man $X_{ce} = 1/\omega C_e$, ferner $X_c = 1/\omega C$, so errechnet sich der wirkliche Zellenwiderstand R zu

$$R = \frac{R_e}{(R_e/X_{ce})^2 + 1} = \frac{R_e}{(\omega R_B C_B)^2 + 1}.$$

9.63 *Spezielle Widerstandsmeßbrücken*

Von Maher [*9.97*] wird die in Abb. 5.88 dargestellte Multivibratorschaltung zur Widerstandsmessung angewandt. Die Methode hat den Vorteil, daß

1. der Brückenausgang unmittelbar zur magnetischen Aufzeichnung oder Übertragung verwendet werden kann,
2. zwei veränderliche Widerstände sowie ihre Summe oder Differenz gemessen werden,
3. auch spannungsabhängige Widerstände in diesem Kreis verwendet werden können,
4. die Empfindlichkeit höher als die der Wheatstone-Brücke ist und
5. auch die Kapazitäten für eine zusätzliche Information ausgenutzt werden können.

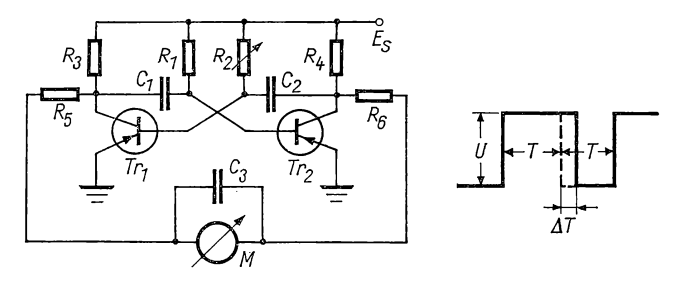


Abb. 9.42 Multivibratorbrücke nach [*9.97*]

Die Meßschaltung in Abb. 9.42 enthält die beiden Transistoren Tr_1 und Tr_2 (ausgesucht für Differentialverstärker), die in der gezeigten Weise über vier Widerstände $R_1 \cdots R_4$ mit der (negativen) Betriebsspannung E_s verbunden

sind. Meßwiderstand R_1 und Abgleichwiderstand R_2 sind viel größer als R_3 bzw. R_4. Die Ausgangsspannung U stellt im Idealfall eine Rechteckspannung dar, deren Amplitude um 0,5···1 V geringer als E_s ist. Für die Dauer der Teilperioden gilt annähernd:

$$T_1 = R_1 C_1 \ln 2 \quad \text{und} \quad T_2 = R_2 C_2 \ln 2. \tag{9/79}$$

Für die abgeglichene Brücke wird $T_1 = T_2 = T$. Eine kleine Änderung von R_1 um ΔR_1 wird die Periode ebenfalls um ΔT verändern und am hochohmigen Millivoltmeter M die Spannung U_0 ergeben. Diese beträgt

$$U_0 = \frac{U(T + \Delta T) - UT}{2T + \Delta T} = \frac{U \Delta T}{2T + \Delta T}. \tag{9/80}$$

Durch Einsetzen von Gl. (9/79) findet man schließlich das Ausgangssignal

$$U_0 = \frac{U \Delta R_1}{2R_1 + \Delta R_1}, \tag{9/81}$$

das doppelt so groß ist wie bei der Wheatstone-Brücke nach Gl. (9/68).

Ein anderes von EDWARDS [*9.41*] angegebenes Meßverfahren ist speziell für Halbleiterwiderstände geeignet und stellt eine Abwandlung des von

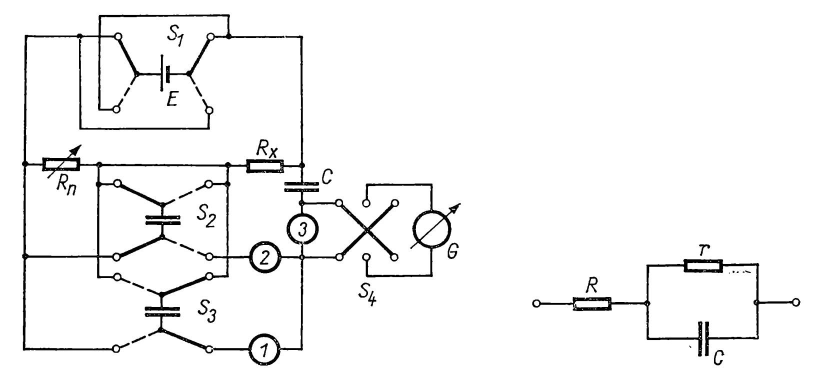


Abb. 9.43 Widerstandsmessung mit Chopperbrücke

Abb. 9.44 Ersatzschaltbild eines Halbleiterkristalls

DAUPHINEE und MOOSER [*9.29*] beschriebenen Kompensators dar. Die in Abb. 9.43 dargestellte Prinzipschaltung enthält drei Synchronumschalter $S_1 \cdots S_3$ (Chopper), durch die die Batterie E und die Kapazitäten C_2 und C_3 periodisch mit 35 Hz umgeschaltet werden und zwischen S_2 und S_3 eine Phasenverschiebung von 180° herrscht. Das Nullinstrument kann wahlweise an den Stellen *1*, *2* oder *3* eingeschaltet werden, wobei im letzteren Fall die Empfindlichkeit verdoppelt, aber ein vierter Umschalter S_4 erforderlich wird. Der unbekannte Widerstand R_x wird mit dem Dekadenwiderstand R_n (0,1 Ω bis 1 MΩ) verglichen.

Diese Meßanordnung wird bevorzugt für Halbleiterwiderstände benutzt, bei denen der Widerstand von der Stromrichtung abhängt (Gleichrichtereffekt). Bezeichnet man den gesuchten Widerstand für die beiden Stromrichtungen mit R_x' bzw. R_x'' und fließen in ihm die Ströme I' bzw. I'', so gelten für die abgeglichene Brücke mit Galvanometer in Stellung „*3*" für die beiden Umschalter die Gleichungen:

$$\text{Umschalter } S_2\text{:}\quad I'R_x' + U_c = R_n I'';$$

$$\text{Umschalter } S_3\text{:}\quad I''R_x'' - U_c = R_n I'.$$

Durch Addition erhält man die Beziehung

$$I'R_x' + I''R_x'' = R_n(I' + I''), \tag{9/82}$$

wenn U_c die Spannung des Ladekondensators ist. Da im Normalfall $R_x' = R_x''$ ist, wird Gl. (9/82) für ein beliebiges Verhältnis I'/I'' erfüllt. Ist $R_x' \neq R_x''$, so läßt sich für $R_x' < R_n < R_x''$ die Brücke abgleichen und im speziellen Fall $I' = I''$ die Bedingung $R_n = (R_x' + R_x'')/2$ erhalten. Zur Messung hoher Widerstände bis 100 MΩ verringert man die Umschaltfrequenz auf etwa 2 Hz. Die Bedingung $I' = I''$ kann man mit einer Konstantstromquelle mit Zener-Diode realisieren, mit der Ströme zwischen 1 μA und 25 mA eingestellt werden können.

9.64 Hochfrequenzwiderstandsmessung

Außer den in § 7.54 beschriebenen HF-Brücken, die natürlich auch zu Widerstandsmessungen herangezogen werden, sind spezielle Methoden für relativ hochohmige *Halbleiterwiderstände* entwickelt worden.

Bei hohen Frequenzen läßt sich das Meßobjekt durch die Ersatzschaltung der Abb. 9.44 darstellen, in der R den Gleichstromwiderstand, C die aus der Raumladungsverteilung resultierende Kapazität und r deren Verlustwiderstand bedeuten. Der komplexe Gesamtwiderstand dieser Anordnung ergibt sich zu

$$\boldsymbol{Z} = \left(R + \frac{r}{1 + \omega^2 C^2 r^2}\right) - \mathrm{j}\,\frac{\omega C r^2}{1 + \omega^2 C^2 r^2}. \tag{9/83}$$

Für $\omega r C \gg 1$, d. h. für hohe Frequenzen läßt sich nach Gl. (9/83) der Volumenwiderstand des Meßobjekts richtig und frequenzunabhängig ermitteln. Für die Widerstandsmessung in HF-Brücken spielt die Auswahl des geeigneten Kontakts eine große Rolle, da sperrfreie Kontakte nur durch Einlegieren hergestellt werden können. Bei der HF-Messung lassen sich, wie Zerbst und Schrenk [*9.196*] gezeigt haben, mit Vorteil *Al-Elektroden* auf die mit einer Oxidschicht versehenen Kristallflächen aufdampfen. Solche Elektroden erhöhen den scheinbaren Volumenwiderstand der Probe um ein zusätzliches, zu ω^{-2} proportionales Glied. Wie an *Si-Kristallen* durchgeführte Messungen gezeigt haben, erhält man für hohe Frequenzen die erwartete asymptotische Näherung für R.

Von Shewchun und Waxman [*9.155*] ist ein automatisches Meßverfahren für Leitfähigkeit und Kapazität von Halbleiterdioden oder auch beliebigen

komplexen, nichtlinearen Widerständen angegeben worden. Beide Größen werden als Funktion der angelegten Vorspannung und der Frequenz zwischen 10 Hz und 100 kHz unter Verwendung eines phasenempfindlichen Detektors aufgetragen, um phasenreine und quadratische Komponenten des von der Diode erzeugten Signals trennen zu können. Nähere Einzelheiten siehe § 10.55.

Über Widerstandsmessung an Hochstromentladungen siehe [*9.21*]; weitere Meßmethoden für nichtlineare Widerstände und Widerstandsmessungen bei HF siehe [*9.91, 9.133*].

Für halbleitende Materialien im *Mikrowellenbereich* geben LINHART et al. [*9.88*] folgende Methode an: Die Meßprobe wird in Form einer kleinen Kugel oder eines dünnen Zylinders in die Achse eines kreiszylindrischen Topfkreises (s. § 8.24) gebracht, so daß er sich im fast homogenen Magnetfeld der darin erzeugten H_{011}-Mode befindet. Durch die an der Probenoberfläche induzierten Wirbelströme wird die Resonatorgüte verringert und aus dieser die Leitfähigkeit der Probe ermittelt. Bei 3 cm Wellenlänge lassen sich spezifische Widerstände zwischen 0,005 und 10 Ω cm messen.

9.7 Widerstandsmessung durch induktive Methoden

Für viele Anwendungen und spezielle Versuchsbedingungen ist die induktive Methode der Widerstandsmessung vorzuziehen, bei der in der Probe durch ein magnetisches Wechselfeld Wirbelströme induziert und diese durch Feldmessungen oder andere Verfahren bestimmt werden.

9.71 Verfahren nach Bean [9.8]

Diese Methode besteht darin, daß der zu untersuchende Leiter plötzlich in ein homogenes Magnetfeld H_0 gebracht und die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses in der Probe verfolgt wird. Die beim Anlegen von H_0 entstehenden Wirbelströme erzeugen ihrerseits in der Probe ein dem äußeren Feld entgegengesetztes Feld, so daß sich das resultierende Magnetfeld mehr oder weniger schnell dem Außenfeld angleicht. Analog zur Ableitung des Skineffekts in § 9.14 findet man aus den Maxwell-Gleichungen für das vorliegende Problem die Ausgangsgleichung

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\varrho}{\mu} \nabla^2 \boldsymbol{B}, \tag{9/84}$$

wenn ϱ und μ spezifischer Widerstand und Permeabilität der Probe sind. Nimmt man einen konstanten Probenradius r_0 an und legt man das äußere Feld in die Z-Richtung, so wird aus Gl. (9/84) eine skalare Gleichung für B_z. Die Lösung dieser Differentialgleichung für ein plötzlich angelegtes Feld H_0 liefert aus magnetischem Fluß $\boldsymbol{B}(r, t)$ und dessen zeitlicher Ableitung die induzierte Spannung in der um die Probe gewickelten Sekundärspule S_2. Diese ergibt sich zu

$$U_s(t) = \varrho H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n{}^2 \alpha t), \tag{9/85}$$

worin $\alpha = \varrho/\mu r_0^2$ sowie $\lambda_1 = 2{,}405$, $\lambda_2 = 5{,}520$, $\lambda_3 = 8{,}654$ usw. die Wurzeln der Bessel-Funktion nullter Ordnung sind. Von der Reihenentwicklung nach Gl. (9/85) bleibt nach einiger Zeit nur noch das Glied mit λ_1 übrig und führt zur Beziehung

$$U_s(t) = N\varrho H_0 e^{-t/\tau_R} \tag{9/85a}$$

mit $\tau_R = 2{,}18\mu r_0^2 \cdot 10^{-9}/\varrho$, wenn die Sekundärspule N Windungen besitzt.

In Abb. 9.45a ist die Meßanordnung schematisch dargestellt. Die zylindrische Probe A ist von der Magnetisierungsspule S_1 umgeben, die ein homogenes Magnetfeld H_0 am Probenort erzeugt. Das in der dünndrähtigen Sekundärspule S_2 induzierte Signal wird mit bekannter Zeitablenkgeschwindigkeit am

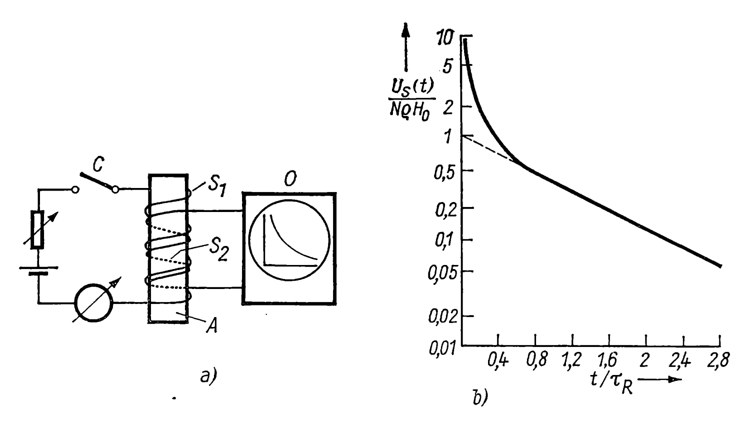


Abb. 9.45 Induktive Widerstandsmessung nach BEAN: *Schaltung (a), Signalform (b)*

Schirm des ESO O bei großer Nachleuchtdauer sichtbar gemacht. In praxi wird das Induktionssignal nicht beim Einschalten des Magnetfeldes, sondern nach dem *Ausschalten* mit Hilfe des Schalters C registriert. Diese Methode ist vorteilhafter, da der Magnetstrom nach Öffnen von C sehr schnell abfällt und zum anderen die Primärspule offen ist und daher keine Eigeninduktivität besitzt. Die Sekundärspule S_2 soll eine kleine Induktivität und verteilte Kapazität besitzen, so daß ihre Resonanzfrequenz $\omega_0 > 1/\tau_R$.

In Abb. 9.45b ist nach Gl. (9/85) die normierte Signalspannung $U_s/N\varrho H_0$ als Funktion der auf τ_R bezogenen Zeit t aufgetragen; etwa von $t/\tau_R = 0{,}5$ an gilt Gl. (9/85a) mit großer Genauigkeit. Geht man davon aus, daß Abklingzeiten zwischen 0,5 µs und 50 s in einem ESO beobachtet werden können, so lassen sich bei einem Probenradius $r_0 = 0{,}5$ cm spezifische Widerstände zwischen 10^{-3} und 10^{-11} Ω cm messen. Weitere Verfahren siehe [*9.131, 9.107*].

9.72 Drehfeldmethode

Das Prinzip dieses Meßverfahrens besteht darin, die kurze zylindrische Probe mit senkrechter Achse in einem waagerechten Magnetfeld aufzuhängen, das um die Probenachse rotiert und infolge der induzierten Wirbelströme ein Drehmoment auf die Probe ausübt. Das Drehmoment läßt sich als Ausschlag α

der an einem elastischen Faden aufgehängten Probe messen. Für feste Proben gilt die Beziehung

$$\alpha = kH^2 L r_0^2/\varrho, \tag{9/86}$$

wenn r_0 und L Radius und Länge der Probe, H die magnetische Feldstärke am Probenort und k eine Apparatekonstante ist, in der das Rückstellmoment der Torsionsaufhängung und die Frequenz des Drehfeldes enthalten ist.

Diese Methode wird von OZELTON und WILSON [*9.119*] für Widerstandsmessungen an flüssigen Metallen und hochschmelzenden Legierungen angewandt. Die Probe wird dabei in einen elektrischen Ofen mit senkrechter Achse gebracht, der sich im Stator eines Drehstrommotors befindet. Dieser wird mit Drehstrom von maximal 30 A gespeist und erzeugt ein 50-Hz-Drehfeld mit etwa 300 A/cm Amplitude. Die erreichbare Genauigkeit wird mit 0,5% angegeben. Soll der spezifische Widerstand flüssiger Metalle bestimmt werden, muß Gl. (9/86) durch ein Korrekturglied erweitert werden, das die Viskosität der Probe enthält.

Prinzipiell ähnlich ist das von KHOTKEVICH und ZABARA [*9.75*] benutzte Verfahren, bei dem die Induktionsdämpfung der zylindrischen, um die Längsachse schwingenden Probe in einem konstanten transversalen Magnetfeld beobachtet wird.

9.73 Induktivitätsmethode

Bringt man in eine Induktionsspule mit dem Widerstand R_0 und der Induktivität L_0 eine Probe aus leitendem Material, so erhöht sich der Wirkwiderstand der Spule auf $R_0 + R' = R$ und verringert sich die Induktivität auf $L_0 - L' = L$, da die in der Probe induzierten Wirbelströme das Magnetfeld in der Spule erniedrigen (s. a. § 9.71). Von ZIMMERMAN [*9.197*] ist dieses Meßprinzip für zylindrische und kugelförmige Proben in einem homogenen Magnetfeld verwirklicht worden. Für zylindrische Proben vom Radius a und der Leitfähigkeit σ findet er die Beziehungen

$$\alpha \frac{R'}{\omega L_0} = \frac{2 M_1(x)}{x M_0(x)} \sin \left[\theta_1(x) - \theta_0(x) - \frac{3}{4}\pi\right], \tag{9/87a}$$

$$\alpha \frac{L'}{L_0} = \frac{2 M_1(x)}{x M_0(x)} \cos \left[\theta_1(x) - \theta_0(x) - \frac{3}{4}\pi\right] - 1 \tag{9/87b}$$

mit $x = a\sqrt{\omega \mu_0 \sigma}$. Dabei sind $M_0(x)$, $\theta_0(x)$, $M_1(x)$ und $\theta_1(x)$ die Polarkomponenten der Bessel-Funktionen $J_0(j^{3/2} x)$ und $J_1(j^{3/2} x)$, ferner $\alpha = A^2/a^2$, wenn A der Spulenradius ist. Für Kugelproben sind analoge Beziehungen ableitbar, wobei $\alpha = A^2/2a^3$. In Abb. 9.46a sind für Kugel- und Zylinderproben die Größen $\alpha L'/L_0$ und $\alpha R'/\omega L_0$ als Funktion der Größe $\omega\sigma\mu_0 a^2$ aus den Gln. (9/87) und den entsprechenden für die Kugel dargestellt. Kugel und Zylinder unterscheiden sich hiernach lediglich im Abszissenmaßstab um den Faktor 2, d. h., die Kugel ist annähernd einem Zylinder vom halben Querschnitt äquivalent. Das bedeutet, daß die Form der Kurven in Abb. 9.46a nicht stark von der Probengeometrie abhängt.

In Abb. 9.46b sind schematisch die Meßkreise für Widerstands- und Induktivitätsänderung der Meßspule dargestellt. Es handelt sich um symmetrische Wechselstrombrücken, die von einem Oszillator O mit 7···200 Hz gespeist werden und deren Brückengleichgewicht durch geeichte Widerstände R_n und Induktivitäten L_n eingestellt und am Oszillografen ESO beobachtet

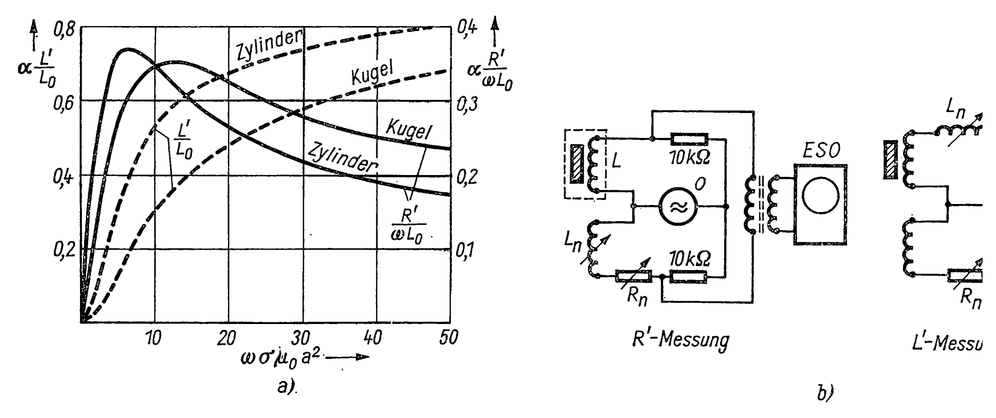


Abb. 9.46 Induktivitätsmethode: Reaktanz- und Widerstandsänderung von Kugel- und Zylinderproben (a), Meßkreise (b)

wird. Nachdem zuvor *ohne* Probe R_0 und L_0 bestimmt wird, werden die Messungen *mit* Probe wiederholt, daraus L' und R' gewonnen und aus den theoretischen Kurven der Abb. 9.46a bei bekanntem ω die gesuchte Leitfähigkeit σ ermittelt. Für Messungen bei sehr tiefen Temperaturen macht man die Meßspulen aus Niobiumdraht, dessen Widerstand R_0 unterhalb des Sprungpunktes (T_c = 9,2 K) verschwindet. Die Genauigkeit dieses besonders für Tieftemperaturuntersuchungen geeigneten Verfahrens wird mit 0,1% angegeben.

Von Nikitin und Zaitsev [*9.112*] wird eine induktive Methode für die Widerstandsmessung an Halbleitermaterialien vorgeschlagen, bei der sich die Meßprobe in der Schwingspule des Resonanzkreises eines selbsterregten Oszillators befindet. Die durch Gl. (9/87b) gegebene Induktivitätsänderung ist ein

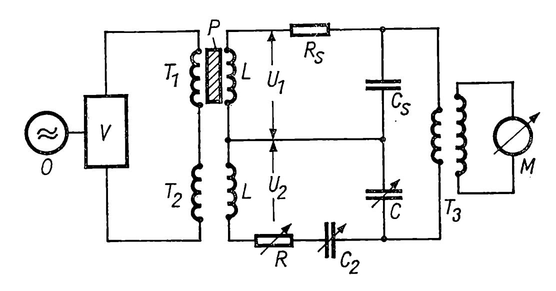


Abb. 9.47 Transformatorbrücke zur induktiven Widerstandsmessung

Maß für den Probenwiderstand und wird durch die Parallelkapazität kompensiert. Die aus Wolfram oder Molybdän hergestellte freitragende Induktionsspule, in welche die Probe eingebracht wird, kann gleichzeitig als Induktionsofen für Probentemperaturen bis 1700 °C verwendet werden.

Die von YOSIM et al. [*9.193*] für Leitfähigkeitsmessungen an *Schmelzen* bei Temperaturen bis zu 500 °C benutzte Methode ist vereinfacht in Abb. 9.47 dargestellt. Diese als *Transformator-Methode* bezeichnete Schaltung beruht ebenfalls auf der Änderung der Impedanz einer Induktivität, wenn die Meßprobe in diese gesteckt wird. Die Brückenschaltung besteht aus den Transformatoren T_1 und T_2, deren Primärwicklungen vom Oszillator O mit nachgeschaltetem Verstärker V mit Frequenzen bis zu 50 kHz gespeist werden. Die Sekundärwicklungen L bilden mit den Kapazitäten C_s und C eine symmetrische Brücke, wobei $\omega^2 LC$ und $\omega^2 LC_s \ll 1$. Am über den Differentialtransformator T_3 angekoppelten Nulldetektor M kann die Einstellung des Brückengleichgewichts abgelesen werden. Die Brücke wird zunächst ohne Probe P durch Verändern des Dekadenwiderstandes R, der Dekadenkapazität C_2 und des Drehkondensators C abgeglichen, wofür mit den Teilspannungen U_1 und U_2 die Beziehung gilt:

$$\frac{U_1}{1 - \omega^2 LC_s + j\omega C_s R_s} = \frac{U_2}{1 + C/C_2 - \omega^2 LC + j\omega CR}. \qquad (9/88)$$

Nach Einführen der Probe in die Sekundärspule von T_1 und Abgleich der Brücke, wobei R in R' und C in C' verändert werden muß, tritt im oberen Brückenzweig die Spannung U_1' auf, die sich aus einer zu Gl. (9/88) analogen Beziehung berechnen läßt. Durch Elimination von U_2 findet man schließlich einen Ausdruck für die Leitfähigkeit der Probe.

Mit Hilfe dieser Methode wurde die Leitfähigkeit von Hg, Bi und BiI_3-Lösungen in flüssiger Phase mit hoher Genauigkeit gemessen.

In ähnlicher Weise hat DAYBELL [*9.32*] mit einer Gegeninduktivitätsmeßbrücke und einem phasenempfindlichen Detektor Restwiderstandsmessungen

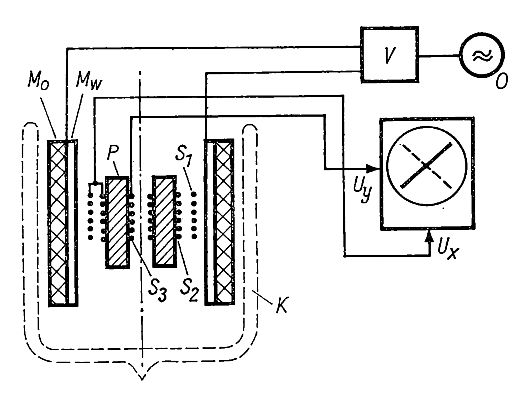


Abb. 9.48 Induktivitätsmethode mit Phasenmessung

an Metallen bei sehr tiefen Temperaturen (bis hinab zu 0,04 K) mit einer Genauigkeit von besser als 0,3% durchgeführt. Weitere Ausführungsbeispiele siehe [*9.31*, *9.125*].

Von VOIGT [*9.178*] ist speziell für relativ kleine spezifische Widerstände ein einfaches und genaues Meßverfahren angegeben worden, das in Abb. 9.48 dargestellt ist. Die Meßprobe P in Zylinderform mit einer konzentrischen Bohrung befindet sich in einem magnetischen Wechselfeld der Zylinderspule M_w, die von einem Tonfrequenzgenerator O mit Leistungsverstärker V zwischen 5 Hz und 40 kHz versorgt wird. Die Probe ist von zwei konzentrischen Induktionsspulen S_1 und S_2 gleicher Windungszahl umgeben. Das in den gegeneinander geschalteten Spulen vom Wechselfeld induzierte Signal ist ein Maß für die Feldänderung im Ringraum zwischen S_1 und S_2, d. h. für die Änderung des Außenfeldes. Diese Differenzspannung wird auf die X-Achse des ESO gegeben, während auf der Y-Achse die in der Spule S_3 in der Probenbohrung induzierte Spannung registriert wird. Während bei niedrigen Frequenzen des Außenfeldes die Spannungen U_x und U_y in Phase sind und auf dem Oszillografen eine Gerade zu beobachten ist, hinkt U_y mit wachsender Frequenz wegen der in der Probe induzierten Wirbelströme gegen U_x immer mehr nach, bis schließlich bei einer bestimmten Frequenz bei einer Phasenverschiebung von 180° auf dem Oszillografenschirm eine um 90° gegenüber der ursprünglichen gedrehte Gerade erscheint. Aus der zugehörigen Frequenz läßt sich die Leitfähigkeit der Probe ermitteln. Das Verfahren ist für spezifische Widerstände zwischen 10^{-8} und 10^{-4} Ω cm geeignet. Für spezielle Messungen an supraleitenden Verbindungen wird eine zweite, supraleitende Magnetspule M_0 benutzt, um auch unterhalb der Sprungtemperatur die Probe normalleitend machen zu können. Die gesamte Meßanordnung wird hierzu in den He-Kryostaten K gebracht.

9.74 *Elektrodenlose Widerstandsmessung in Flüssigkeiten und Plasmen*

Zur Messung der Leitfähigkeit von Flüssigkeiten, die in Gegenwart von Metallen chemisch instabil sind, wird häufig die *Zwei-Transformator-Methode* angewandt. In der von WILLIAMS et al. [*9.187*] angegebenen Ausführungsform,

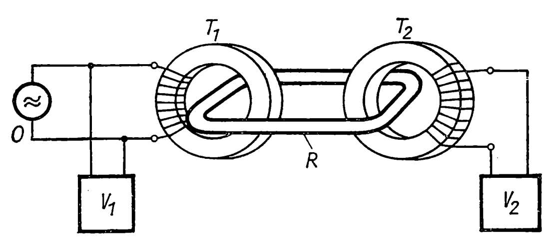


Abb. 9.49 Zwei-Transformator-Methode

die schematisch in Abb. 9.49 dargestellt ist, befindet sich die zu untersuchende Flüssigkeit in einem geschlossenen Rohr R, das durch die beiden identisch bewickelten Toroidkerne T_1 und T_2 aus ferromagnetischem Material geführt

ist. Das Rohr R muß aus isolierendem und nichtmagnetischem Material bestehen, z. B. aus Glas. Die Eingangsspule wird vom Tonfrequenzoszillator O betrieben und induziert in der Meßschleife einen Strom, der der Leitfähigkeit der Probenflüssigkeit umgekehrt proportional ist. Dieser Wechselstrom induziert seinerseits in der auf T_2 gewickelten Spule eine Spannung, die im Röhrenvoltmeter V_2 gemessen und mit der Eingangsspannung V_1 verglichen wird. Die Analyse dieser Methode liefert einen Frequenzbereich, in dem das Meßergebnis frequenzunabhängig ist und eine genaue Leitwertsberechnung gestattet.

Für Leitfähigkeitsmessungen an *Plasmaentladungen* haben OLSON und LARY [*9.115*] ein Verfahren angegeben, bei dem in einem dünnwandigen Isolierrohr eine kleine Induktionsspule von einem HF-Oszillator betrieben wird und mit einem Detektor die ohmschen Dissipationsverluste, welche die Umgebung verursacht, gemessen werden. Man kann damit das Leitfähigkeitsprofil der Strömung in einem MHD-Generator ausmessen.

9.75 HF-Methoden

Bei den meisten Wirbelstrommethoden, die oben aufgeführt sind, muß das Querschnittsverhältnis von Probe zu Meßspule berücksichtigt werden. SOKOLOV [*9.160*] gibt ein von diesen Nachteilen freies Verfahren an, bei dem das Ende einer konzentrischen Leitung (s. § 7.7) durch die Meßprobe kurzgeschlossen wird und die Verluste mit Hilfe eines Q-Meters bei Frequenzen um 20 MHz gemessen werden. Die Anordnung ist besonders für Messungen bei sehr tiefen Temperaturen geeignet und wird speziell auf Halbleiter angewandt.

9.8 Restwiderstand, Supraleitung

Im Temperaturbereich unterhalb von 20 K sind bei metallischen Leitern drei spezielle Phänomene zu beobachten: *a*) der in § 9.22 besprochene *Restwiderstand* reiner Metalle, der temperaturunabhängig ist, *b*) der *Kondo-Effekt*, d. h. das Wiederansteigen des Widerstandes von Nichtsupraleitern bei abnehmender Temperatur, *c*) die *Supraleitung*, d. h. das Verschwinden jeglichen Widerstandes unter einer für das Material charakteristischen *Sprungtemperatur* T_c. In allen diesen Fällen sind sehr kleine Widerstände bei tiefen Temperaturen nachzuweisen und erfordern meist spezielle Verfahren mit besonders hoher Nachweisempfindlichkeit.

9.81 Restwiderstand reiner Metalle

In § 9.22 ist gezeigt worden, daß der Restwiderstand reiner Metalle oberhalb von $T = 0$ temperaturunabhängig ist und von Restverunreinigungen und statischen Gitterfehlern abhängt. Für viele Tieftemperaturuntersuchungen wird das Restwiderstandsverhältnis, d. h. $R_{4,2K}/R_{273K}$ als Maß für die physikalische und chemische Reinheit des Materials angesehen. In *Tabelle 9.13* ist nach LÜTHI [*9.92*] das Restwiderstandsverhältnis einiger polykristalliner Drahtproben aus spektroskopisch reinen Substanzen angegeben.

Tabelle 9.13 Restwiderstandsverhältnis (in %)

Li	Cu	Ag	Au	Zn	Al	In	Sn	Pb	Fe	Ni	Pt
0,43	0,7	0,29	0,61	0,06	0,04	0,007	0,01	0,02	3,19	2,03	0,51
0,47	1,27	0,37	0,79	0,09	0,05	0,02	0,02	0,03	3,95	3,63	1,23
		1,36	2,78	0,11	0,57		0,04				
				0,41							

Eine Reihe von Metallen lassen sich in hoher Reinheit als *Einkristalle* (s. Bd. I, § 13) herstellen, wobei Restwiderstandsverhältnisse von weniger als 10^{-4} erreicht werden können.

Bei verdünnten Metallegierungen, die aus Gold, Silber, Kupfer mit geringen Mengen magnetischer Elemente bestehen, findet man unterhalb einer bestimmten, von der Verunreinigungskonzentration abhängigen Temperatur einen Wiederanstieg des Widerstandes um maximal 10% des Minimalwertes, wie das in Abb. 9.50 dargestellte Beispiel des mit Fe verunreinigten Cu zeigt. Dieses *Widerstandsminimum* beruht auf der Streuwirkung lokalisierter magnetischer Momente für die Leitungselektronen und wird auch als *Kondo-Effekt* [*9.79*] bezeichnet.

9.82 Allgemeines über Supraleitung [9.90, 9.96, 9.50, 9.156]

Kamerlingh Onnes entdeckte 1911 an Quecksilber das völlige Verschwinden des elektrischen Widerstandes unterhalb der *Sprungtemperatur* T_c, die für jedes Material charakteristisch ist. Diese als Supraleitung bezeichnete Eigenschaft

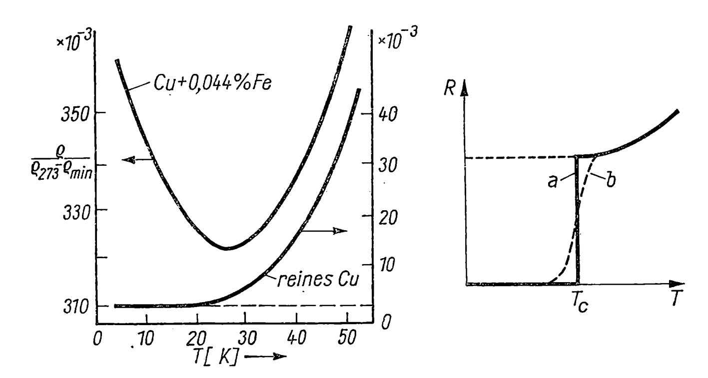


Abb. 9.50 Widerstandsminimum einer Cu–Fe-Legierung (nach Pearson*)*   *Abb. 9.51 Sprungkurven von Supraleitern*

von Metallen, Metallverbindungen und -legierungen stellt ein ganz spezielles Tieftemperaturphänomen dar, dessen theoretische Deutung Bardeen, Cooper und Schrieffer 1956 gelang. Näheres siehe Bd. V.

Hier sollen nur die mit dem elektrischen Widerstand bzw. der Messung der Sprungtemperatur zusammenhängenden Probleme behandelt werden. In Abb. 9.51 sind zwei Typen von Übergangskurven für den Widerstand eines

supraleitenden Metalls dargestellt: die Kurve (*a*) zeigt bei T_c eine scharfe Diskontinuität und wird bei Einkristallen von sehr reinen Metallen und einigen wenigen, getemperten Legierungen gefunden. Die breitere Übergangskurve (*b*) wird bei weniger reinen, inhomogenen, nicht spannungsfreien Proben und Legierungen beobachtet. Genaueste Messungen (s. § 9.83) zeigen, daß der spezifische Widerstand von Supraleitern sicherlich kleiner als $4 \cdot 10^{-23}\ \Omega$ cm ist, während der kleinste gemessene Restwiderstand von der Größenordnung $10^{-13}\ \Omega$ cm ist, d. h., im Vergleich zu Kupfer bei Zimmertemperatur ist der Widerstand eines Supraleiters um den Faktor 10^{17} kleiner!

Die Temperaturdifferenz ΔT_c, innerhalb deren der Übergang vom Restwiderstand auf den Wert Null stattfindet, kann bei Einkristallen 10^{-4} grd erreichen und bei Metallverbindungen einige Grad betragen. Ein supraleitender einfach zusammenhängender Körper aus einem *reinen Metall* zeigt im Magnetfeld den *Meissner-Effekt*, d. h. vollkommenen Diamagnetismus, und verdrängt ein Magnetfeld bis zum kritischen Wert H_c. Bei magnetischen Feldstärken $H \geqq H_c$ erfolgt der Übergang in den *normalleitenden Zustand* (vgl. auch Bd. II, § 3.6). Das kritische Magnetfeld ist eine Funktion der Temperatur und wird durch die magnetische *Schwellenwertkurve* $H_c(T)$ der Abb. 9.52 dargestellt. Für die supraleitenden Elemente und eine große Anzahl von Verbindungen gilt in guter Näherung die Beziehung

$$H_c(T) = H_{c0}\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right], \tag{9/89}$$

worin H_{c0} die kritische Feldstärke bei $T = 0$ ist. Man bezeichnet diese Supraleiter, welche den vollkommenen Meissner-Effekt zeigen, als *Typ-I-Supraleiter*.

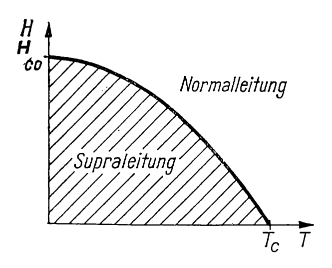


Abb. 9.52 Magnetische Schwellenwertkurve eines Supraleiters

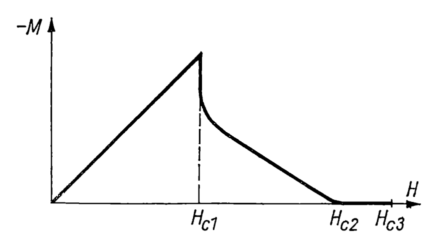


Abb. 9.53 Magnetisierungskurve eines Typ-II-Supraleiters

Seit etwa 1961 sind ausführlich und in großer Anzahl supraleitende Verbindungen, Legierungen und auch einzelne Elemente untersucht worden, die auch bei sehr hohen Magnetfeldern supraleitend bleiben, jedoch bereits bei relativ niedrigen Feldern den magnetischen Fluß in die Probe eindringen lassen. Bei diesen als *Typ-II-Supraleiter* bezeichneten Materialien, von denen eine ganze Reihe großes technisches Interesse für die Erzeugung sehr hoher magnetischer Felder (bis 140 kA/cm) besitzt, tritt der vollkommene Meissner-Effekt nur bei relativ niedrigen magnetischen Feldstärken H_{c1} auf, wie in Abb. 9.53

gezeigt ist. Mit zunehmendem Feld dringt magnetischer Fluß in den Supraleiter immer mehr ein, bis schließlich beim Feld H_{c2} in einem Phasenübergang 2. Ordnung der Supraleiter in die Normalleitung übergegangen ist. Auch jenseits von H_{c2} bis zu einer Feldstärke $H_{c3} \approx 1{,}69 H_{c2}$ sind supraleitende Oberflächenströme möglich. Näheres über die magnetischen Eigenschaften der Supraleiter siehe § 12.25.

Typ-I- und Typ-II-Supraleiter unterscheiden sich bezüglich ihrer physikalischen Eigenschaften insofern, als das Verhältnis von Eindringtiefe λ des Magnetfeldes zu Kohärenzlänge ξ der supraleitenden Elektronenpaare im ersten Fall kleiner, im anderen größer als eine bestimmte, aus der Theorie von GINZBURG-LANDAU folgende Größe ist. Näheres siehe Bd. V. Die Größe λ hängt vor allem von der Konzentration der an der Supraleitung teilnehmenden Leitungselektronen, der Wert ξ von der freien Weglänge und der Fermi-Geschwindigkeit v_F der Elektronen ab.

Im Typ-I-Supraleiter fließt in kompakten Proben ein Transportstrom nur in einer dünnen Oberflächenschicht von der Dicke λ, die von der Größenordnung 0,1 μm ist, wobei Stromdichten in der Größenordnung 10^7 A/cm^2 und mehr auftreten können. Wie oben erwähnt, fließt im Typ-II-Supraleiter der Strom nur für $H < H_{c1}$ in einer dünnen Eindringschicht; bei größeren Oberflächenfeldern wird die Stromdichte über den Drahtquerschnitt konstant und erreicht bei den technisch interessanten Metallegierungen Nb—Ti oder Nb—Zr bei relativ kleinen Magnetfeldern bis 1 T den Wert 10^6 A/cm^2.

In *Tabelle 12.3* sind die Sprungtemperaturen T_c und kritische Magnetfelder H_{c0} für die supraleitenden Elemente zusammengestellt.

Neben diesen supraleitenden Elementen gibt es einige in kompakter Form normalleitende Elemente, die beim Aufdampfen auf ein tiefgekühltes Substrat *supraleitend* werden, wie z. B. Be ($T_c \approx 6 \cdots 8$ K), Bi ($T_c \approx 6$ K) usw. Neuerdings ist von BUCKEL et al. [*9.15*] die Supraleitung von *Halbleitern* bei hydrostatischen Drücken von 60 bis 130 kbar gefunden worden, wie z. B. Ge ($T_c = 4{,}8 \cdots 5{,}4$ K), Se ($T_c = 6{,}8$ K), Si ($T_c = 7{,}1$ K) und Te ($T_c = 3{,}3$ K).

Daneben gibt es eine große Anzahl supraleitender Verbindungen und Legierungen, von denen wiederum die Materialien vom Typ II mit hohem Sprungpunkt und großen kritischen Magnetfeldern von großem technischen Interesse sind (vgl. § 13.32). In *Tabelle 12.4* (§ 12) sind einige dieser Legierungen und Verbindungen zusammengestellt.

Bei hohen Frequenzen wird das Sprungintervall der Supraleiter bei T_c größer, bis schließlich für $f \approx 3{,}5 k T_c / h$ die supraleitenden Cooper-Paare aufgebrochen werden und Normalleitung eintritt.

9.83 Widerstandsbeobachtung an Supraleitern

Es ist von Interesse für die Supraleitungstheorie, den unteren mit heutigen Methoden noch feststellbaren Grenzwert des spezifischen Widerstandes eines Supraleiters anzugeben. Hierzu ist das von KAMERLINGH ONNES zuerst angegebene *Dauerstromverfahren* wegen seiner hohen Meßgenauigkeit geeignet. Dieses besteht darin, daß in dem als Ring ausgebildeten Supraleiter durch Anlegen eines überkritischen Magnetfeldes ein Dauerstrom I_0 induziert wird,

der entsprechend der Beziehung

$$I(t) = I_0 \, \mathrm{e}^{-Rt/L} \tag{9/90}$$

mit der Zeit abnimmt, wenn R und L Widerstand und Selbstinduktion des Ringes bedeuten. Der Ringstrom läßt sich wie beim Elektrodynamometer (s. § 6.312) durch die Kraftwirkung auf ein äußeres konstantes Magnetfeld messen. Aus dem experimentellen Befund konnte auf eine obere Grenze für den Widerstand von $10^{-12}\, R_{273}$ geschlossen werden, wenn R_{273} der Widerstand am Eispunkt ist.

Mit der von GRASSMANN [*9.55*] verfeinerten Differentialmethode, bei der nicht die gesamte Dauerstromstärke, sondern nur ihre Differenz zu Beginn und Ende des Versuchs gemessen wird, läßt sich die Nachweisgrenze gegenüber dem ersten Verfahren um den Faktor 10^3 verschieben. Für 3,5 μm dicke Pb-Schichten wird als obere Widerstandsgrenze der Wert $0{,}5 \cdot 10^{-15}\, R_{273}$ gefunden.

In *Supraleitern des Typs II* wird oberhalb von H_{c1} eine besondere Form des Widerstands gefunden, deren Ursache die im normalleitenden Kern der magnetischen Flußschläuche auftretenden ohmschen Verluste sind, wenn sich diese unter dem Einfluß eines Transportstroms bewegen. Von KIM et al. [*9.76*] wurde experimentell gefunden, daß der Spannungsabfall oberhalb einer bestimmten Minimalstromdichte auftritt, die vom Restwiderstand und der magnetischen Feldstärke abhängt (*flux flow resistance*).

Aus diesem Grunde findet ein, wenn auch kaum nachweisbarer, Abfall der Stromstärke von im Dauerstrom betriebenen supraleitenden Magnetspulen (s. § 13.3) statt. Von FILE und MILLS [*9.45*] sind solche Messungen an einer mit Nb—Zr-Draht gewickelten Spule, die ein Magnetfeld von etwa 2 kA/cm erzeugte, mit einem Kernresonanz-Magnetometer durchgeführt worden. Das Resultat war eine Zeitkonstante $L/R = 1{,}2 \cdot 10^5$ a!

Die Magnetisierungskurve des Typ-II-Supraleiters in Abb. 9.53 ist nur im Idealfall reversibel. Durch strukturelle und chemische „Verunreinigungen" wird eine *magnetische Hysterese* erzeugt, welche im Wechselfeld Anlaß zu ohmschen Verlusten gibt. Die an Typ-II-Supraleitern ausgeführten Wechselstrommessungen (s. z. B. [*9.9*]) zeigen eine starke Zunahme der Verluste mit wachsender Frequenz und Stromdichte bzw. Magnetfeld.

9.84 Messung kleinster Widerstände bei tiefen Temperaturen

Der Nachweis der *Supraleitfähigkeit* von Metallen und Legierungen wird bei Proben kleinen Querschnitts (Filme, dünne Drähte) mit Widerstandsmessungen durchgeführt. Dies setzt das Anbringen von Stromzuführungen und Potentialdrähten voraus, was bei spröden hochschmelzenden Proben schwierig ist. Deshalb werden meist die unter § 9.7 besprochenen Verfahren vorgezogen, da sie keine Zuleitungen erfordern und beim Supraleiter nur die Relativwiderstände bzw. die Lage des Sprungpunkts interessieren.

Bei der *potentiometrischen Methode* handelt es sich um den Nachweis sehr kleiner Spannungen von 1 μV bis 0,1 nV. Hierzu sind die unter den §§ 2.28 und 2.33 aufgeführten Meßmethoden besonders geeignet, bei denen bei kon-

stantem Meßstrom und kleinem Quellenwiderstand der Spannungsabfall gemessen wird. Von THOMPSON [*9.169*] wird hierzu ein geeigneter Stromregler beschrieben.

Über spezielle Meßschaltungen sowie Meßergebnisse an normalleitenden Metallen bei sehr tiefen Temperaturen siehe [*9.124, 9.137, 9.154, 9.184, 9.186*]. Messungen über den Kondo-Effekt (§ 9.81) werden u. a. in [*9.163, 9.166*] mitgeteilt.

Durch Bestrahlung mit energiereichen Neutronen, α-Teilchen oder Elektronen werden in Metallen bevorzugt bei tiefen Temperaturen Gitterdefekte erzeugt, die, wie in § 9.25 gezeigt, den Restwiderstand erhöhen. Bei höheren Temperaturen heilen diese Strukturfehler teilweise aus, so daß der Restwiderstand wieder kleiner wird. Diese „Erholung" geht bei vielen Metallen in mehreren Stufen vor sich. Messungen an Au und Cd, die mit Elektronen bestrahlt wurden, siehe [*9.6*]. Ähnliche Erscheinungen treten auch bei plastischer Verformung von Metallen auf [*9.16*]. Zu experimentellen Untersuchungen dieser Art eignen sich besonders die in § 9.7 beschriebenen induktiven Widerstandsmeßverfahren, da die Kontaktgabe an den Potentialdrähten oft Ursache von Störungen ist.

Für die Bestimmung des Sprungpunkts und des Restwiderstandes supraleitender Metalle und Verbindungen sind die Induktionsmethoden nach § 9.73 besonders gut geeignet, weil vielfach Proben von unregelmäßiger Form zu untersuchen oder Meßzuführungen schwierig anzubringen sind. Häufig wird das von SCHAWLOW und DEVLIN [*9.142*] vorgeschlagene Verfahren angewandt, bei dem die Meßprobe von der Induktivität eines Schwingungskreises umgeben ist und beim Übergang zur Supraleitung wegen des diamagnetischen Verhaltens der Probe sich die Frequenz des selbsterregten Oszillators sprunghaft erhöht. Von Nachteil ist die erforderliche hohe Frequenzstabilität, die besonders in abgepumpten Heliumbändern in Frage gestellt ist.

Günstiger in dieser Hinsicht ist die von LINDSAY et al. [*9.87*] vorgeschlagene HF-Brückenmethode, die vereinfacht in Abb. 9.54 dargestellt ist. Die Brücke enthält zwei Parallelresonanzkreise $C_v L_v$ bzw. $C_x L_x$, die identisch aufgebaut und etwa auf 100 kHz abgestimmt sind. Vergleichskreis und Meßkreis, dessen Induktivität L_x die Probe enthält, befinden sich im Heliumkryostaten. Die übrigen Teile der Brücke liegen außerhalb des Kryostaten und bestehen aus zwei identischen RC-Kombinationen zur Eliminierung von Streukapazitäten. Die Brücke wird vom Oszillator O mit 1 V im Frequenzbereich zwischen 10 und 100 kHz gespeist. Als Brückeninstrument N wird ein Verstärker mit nachgeschaltetem ESO benutzt, mit dem das Brückengleichgewicht auf 0,1 mV genau eingestellt werden kann. Die Meßempfindlichkeit ist so groß, daß eine Sn-Probe von 0,1 mg noch deutlich die Brücke verstimmt. Im normalleitenden Zustand werden in der Probe Wirbelstromverluste erzeugt, die im Schwingkreis Güte und Frequenz herabsetzen. Im supraleitenden Zustand nimmt die Güte zu und verringert wegen der Feldverdrängung den effektiven Wert von L_x.

Für die Messung des Restwiderstandes und HF-Widerstandes von *supraleitenden Drähten* hat ZAR [*9.195*] die in Abb. 9.55 vereinfacht dargestellte

Transformatormethode benutzt, bei der die Meßprobe in Form einer kurzgeschlossenen Zylinderspule verwendet wird. Probespule A, Induktionsspule B und Primärwicklung C sind koaxial auf den Kunststoffspulenkern D gewickelt. Die Primärspule wird vom Tonfrequenzoszillator O zwischen 100 Hz und 30 kHz gespeist. Die Induktionsspule B ist mit dem Röhrenvoltmeter I von hoher Eingangsimpedanz verbunden. Um die Kopplung zwischen B und C einstellen zu können, ist die veränderliche Gegeninduktivität M in Serie mit diesen Spulen geschaltet.

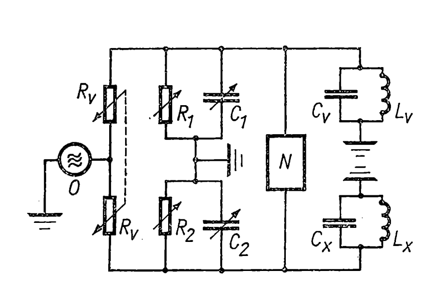


Abb. 9.54 HF-Brücke zum Nachweis der Supraleitung

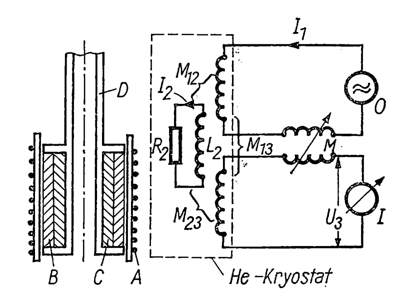


Abb. 9.55 Messung des HF-Widerstandes von Supraleitern

Bezeichnet man Widerstand und Induktivität der Probespule A mit R_2 bzw. L_2 und führt man die in der Abb. 9.55 eingetragenen Gegeninduktivitäten ein, so gelten die Beziehungen

$$I_2 = -\frac{\mathrm{j}\,\omega M_{12}}{R_2 + \mathrm{j}\,\omega L_2}\, I_1 \quad \text{und} \tag{9/91}$$

$$U_3 = -\,\mathrm{j}\,\omega\,(I_1 M_{13} + I_2 M_{23}), \tag{9/92}$$

wenn I_1 der in der Primärspule fließende Strom der Frequenz ω und I_2 der in der Probe vorhandene Strom ist. Bei abgeglichener Brücke mit

$$M_{13} = \frac{M_{12} M_{23}}{L_2} \tag{9/93}$$

wird die Signalspannung U_3 ein Minimum $U_{3\,\min}$ und liegt in Phase mit I_1. Unter dieser Bedingung gelten die Beziehungen

$$\frac{U_{3\,\min}}{I_1} = \frac{M_{12} M_{23} R_2}{L_2^{\,2}} \tag{9/94}$$

und

$$R_2 = \frac{U_{3\,\min} L_2}{I_1 M_{13}}\,. \tag{9/95}$$

Die beiden Gln. (9/94) und (9/95) ermöglichen, den gesuchten Widerstand R_2 zu ermitteln. Der kleinste noch im Rauschen nachweisbare Wert von R_2 liegt bei 0,1 $\mu\Omega$. Besondere Anwendung findet dieses Verfahren bei der Messung

des Wechselstromwiderstandes von Typ-III-Supraleitern, d. h. von Legierungen und intermetallischen Verbindungen in kaltgewalztem Zustand, die im Gegensatz zum Typ-II-Supraleiter sogar bei Niederfrequenz merkliche Verluste aufweisen.

9.9 Spezielle Probleme

Ein technisch wichtiges und noch nicht völlig verstandenes Gebiet ist das der *metallischen Kontakte,* speziell des *Kontaktwiderstandes.* Dieser hängt von Größe, Preßdruck und Wahl des Kontaktmaterials sowie von der Struktur der Kontaktoberfläche ab [*9.105*]. Für variable Widerstände und bei rotierenden elektrischen Maschinen ist die Größe des *Gleitkontaktes* ausschlaggebend [*9.30,* 9.*100*]. Wegen der oft schwankenden und von vielen äußeren Parametern abhängigen Größe des Kontaktwiderstandes werden Registriermethoden besonders bevorzugt. Über geeignete Verfahren zur Messung des Kontaktwiderstandes siehe RUSSAKOFF und SNOWBALL [*9.138*].

Für genaue Messungen der Leitfähigkeit von *geschmolzenen Salzen* werden Brückenanordnungen und für die Meßprobe Meßzellen vorgegebener Geometrie benutzt. In vielen Fällen verwendet man *Kapillarzellen* aus Quarz, Vycorglas oder synthetischem Saphir mit eingeschmolzenen Elektroden [*9.190*]. Wegen des hohen Reaktionsvermögens geschmolzener Carbonate, Oxide und Fluoride sind hierfür solche Zellen ungeeignet und werden Kapillaren aus Einkristallen von MgO benutzt [*9.67*], die sich bis 1000 °C eignen. Als Elektroden werden solche aus Au—20% Pd benutzt, deren thermischer Ausdehnungskoeffizient ($16 \cdot 10^{-6}$/grd) gut mit dem von MgO ($14 \cdot 10^{-6}$/grd) übereinstimmt.

Allgemeines über Meßmethoden und Ergebnisse an geschmolzenen Fluoriden siehe [*9.188*]. Über spezifischen Widerstand des Systems ZrO_2—CaO siehe [*9.172*]. Von LA FLAMME [*9.81*] wird über Meßzellen für die Widerstandsbestimmung an *organischen Halbleitern* berichtet.

Besondere Probleme treten bei Leitfähigkeitsmessungen bei *sehr hohen Drücken* auf. BALCHAN und DRICKAMER [*9.4*] geben eine Widerstandsmeßzelle für Drücke über 100 kbar an, bei der die rechteckige Meßprobe ($1 \times 0{,}25$ mm²) zwischen AgCl-Scheiben und Cu-Elektroden durch Carboloy-Stempel gepreßt wird. In *Tabelle 9.14* ist der relative Widerstand von Pt, In und Pb in Abhängigkeit vom Druck zusammengestellt:

Tabelle 9.14 Druckabhängigkeit des elektrischen Widerstandes (R/R_0)

Druck p kbar	Platin	Indium	Blei	Druck p kbar	Platin	Indium	Blei
30	—	—	0,704	150	0,813	0,436	0,386
50	0,917	0,653	—	200	0,778	0,384	—
60	—	—	0,556	300	0,731	0,319	—
90	—	—	0,478	500 (extrap.)	0,681	0,249	—
100	0,595	0,514	—				

Die elektrische Leitfähigkeit *geschmolzener Metalle* läßt sich mit den in § 9.7 besprochenen Methoden, welche keine Meßzuleitung erfordern, messen [*9.23, 9.43, 9.135*]. Über eine Meßanordnung mit Tauchelektrode siehe [*9.134*].

Für die Messung der äußerst geringen elektrischen Leitfähigkeit von *Alkalihalogeniden* bei Zimmertemperatur sind Meßzellen anzuwenden, die sowohl eine gute Kontaktgabe garantieren als auch sehr hohen Widerstand der Elektrodenhalterung besitzen. Geeignete Konstruktionen siehe [*9.39*].

Die Widerstandsmessung an *dünnen Filmen* wird oft mit Hilfe der in § 9.45 näher beschriebenen Vier-Spitzen-Methode ausgeführt, bei der das Meßresultat vom Abstand der Meßspitzen und von der Filmdicke abhängt. Näheres siehe [*9.24, 9.199, 9.14*].

Über Messungen der Konzentration von Lösungen mit Hilfe von Leitwertsbestimmungen siehe § 17.2.

§ 10 KAPAZITÄT, DIELEKTRIKA [*10.14, 10.56*]

Die Messung der Kapazität eines mit einem Dielektrikum erfüllten Kondensators, dessen Vakuumkapazität aus den geometrischen Abmessungen bekannt oder berechenbar ist, liefert eine neue Materialkonstante, die *Dielektrizitätskonstante* ε. Diese Stoffgröße läßt sich mikroskopisch durch die *Dipolmomente* der einzelnen Moleküle erklären, die unter dem Einfluß eines äußeren elektrischen Feldes polarisiert werden. Die Richtungseinstellung dieser Dipole ist u. a. eine Zeitfunktion und Ursache der *dielektrischen Verluste*. Im folgenden Abschnitt werden die einschlägigen Meßverfahren für Dielektrika diskutiert und die verwandten Effekte der Piezoelektrizität, der Ferroelektrizität sowie der Elektrostriktion besprochen. Die atomistische Deutung dieser Erscheinungen wird in Bd. V gebracht werden.

10.1 Grundbegriffe; Einheiten [*10.126*]

10.11 Elektrostatisches Feld

Bringt man auf metallische Elektroden eine elektrische Ladung, so ist die Tangentialfeldstärke an der Elektrodenoberfläche Null, d. h., die Elektroden stellen *Potentialflächen* dar. Die Oberfläche der Elektroden ist als Sitz der elektrischen Ladung aufzufassen, die sich in bestimmter Weise über die Oberfläche verteilt. Als *Ladungsdichte* bezeichnet man die spezifische Oberflächenladung $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}A$, wenn $\mathrm{d}Q$ die Ladung auf dem Flächenelement $\mathrm{d}A$ bedeutet. Von jedem Flächenelement gehen elektrische Feldlinien aus, die um so dichter liegen, je größer die Ladungsdichte an dieser Stelle ist. Die Gesamtheit der von einer Elektrode ausgehenden Linien bezeichnet man als *Verschiebungsfluß* oder *elektrischen Induktionsfluß*, dessen Größe gleich der *elektrischen Ladung* der Elektrode ist. Die vom Ort abhängige Größe dieses Flusses wird als *Verschiebungsdichte* bezeichnet und durch die Beziehung

$$|\boldsymbol{D}| = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}A} \tag{10/1}$$

definiert. Daraus ergibt sich das *1. Grundgesetz des elektrostatischen Feldes* in der Form

$$\oint \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = Q, \tag{10/2}$$

wobei sich das Integral über eine beliebige Hüllfläche erstreckt. Umschließt diese Integrationsfläche *keine* Ladung, so wird $\oint \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0$.

Da nach Gl. (10/1) der Verschiebungsfluß der Ladung der Elektroden entspricht, kann das Verhältnis Verschiebungsdichte $\boldsymbol{D}$ zu elektrischer Feldstärke $\boldsymbol{E}$ experimentell gefunden werden. Man benutzt hierzu die in Abb. 10.1 dargestellte Meßanordnung, bei der die beiden Platten mit der Fläche A im

Abstand d den Kondensator bilden, dessen Ladung ballistisch über das Galvanometer G gemessen wird. Durch Umlegen des Schalters S wird der Kondensator auf die Spannung U aufgeladen, das andere Mal über G entladen und daraus $Q = \int i \, \mathrm{d}t$ bestimmt. Ist der Abstand d sehr klein gegen die Plattenabmessungen, sind also die Randkorrekturen (s. § 10.31) zu vernachlässigen, so herrscht

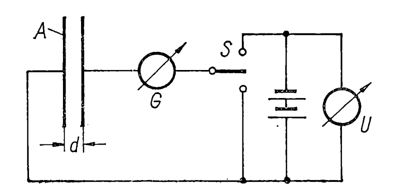


Abb. 10.1 Messung der Verschiebungsdichte

an jeder Stelle die konstante Feldstärke $|\boldsymbol{E}| = U/d$ und der Verschiebungsfluß Q verteilt sich gleichmäßig über die ganze Fläche A. Die Verschiebungsdichte hat daher überall den Betrag

$$|\boldsymbol{D}| = \frac{Q}{A}. \tag{10/2a}$$

Das Ergebnis solcher Messungen, in denen aus der Spannungsmessung die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und aus dem ballistischen Ausschlag von G die Gesamtladung Q bestimmt werden kann, lautet:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}. \tag{10/3}$$

Dies ist das *2. Grundgesetz des elektrischen Feldes*, welches die Proportionalität zwischen Verschiebungsdichte und elektrischem Feld beschreibt und für die meisten Isolatoren zutrifft.

10.12 Dielektrizitätskonstante

Die in Gl. (10/3) auftretende Größe ε ist eine Materialgröße, die *absolute Dielektrizitätskonstante* der betreffenden Substanz genannt wird. Aus der Beziehung

$$\varepsilon = \frac{D}{E} = \frac{Qd}{UA}$$

findet man mit den Einheiten Amperesekunde für Q und Volt für U als Maßeinheit der Dielektrizitätskonstanten das *Farad* (As/V) pro Zentimeter:

$$[\varepsilon] = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vcm}} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{cm}}. \tag{10/4}$$

Für das *Vakuum* gilt nach den genauesten Messungen der Wert

$$\varepsilon_0 = 8{,}85419 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{F/cm} = 8{,}85419 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{pF/cm}.$$

Da das *Farad* eine sehr große Einheit ist, benutzt man es in der Praxis mit den Vorsätzen Piko oder Milli:

$$\mathrm{pF} = 10^{-12}\,\mathrm{F}; \qquad \mu\mathrm{F} = 10^{-6}\,\mathrm{F}.$$

Die Größe ε_0 heißt *elektrische Feldkonstante* und *Verschiebungskonstante*; die Dielektrizitätskonstante aller körperlichen Nichtleiter ist größer als ε_0 und wird zweckmäßig durch das Produkt aus der Vakuum-Dielektrizitätskonstanten ε_0 und der *relativen Dielektrizitätskonstanten* ε_r ausgedrückt:

$$\varepsilon = \varepsilon_0\,\varepsilon_r. \tag{10/5}$$

Die Größe ε_r wird auch *Dielektrizitätszahl* und *Elektrisierungszahl* genannt; sie ist dimensionslos. Über die Dielektrizitätskonstante verschiedener Substanzen siehe *Tabellen 10.4* bis *10.6*.

10.13 Kapazität, Kondensator

Unter einem Kondensator versteht man eine Anordnung, die aus zwei oder mehreren voneinander isolierten Metallelektroden besteht und durch Anlegen einer Spannung aufgeladen werden kann. Im Isolator, dem *Dielektrikum*, zwischen den Elektroden entsteht ein elektrisches Feld, dessen Stärke $\boldsymbol{E}$ der angelegten Spannung proportional ist. Die Verschiebungsdichte ist bei konstantem ε ebenfalls proportional zu $\boldsymbol{E}$ und damit zur angelegten Spannung U. Es gilt also die Beziehung

$$Q = C\,U; \tag{10/6}$$

der Proportionalitätsfaktor C wird *Kapazität* des Kondensators genannt. Sie ist bei konstantem ε nicht von der Spannung U, sondern nur von der geometrischen Form der Elektroden und der relativen Dielektrizitätskonstanten ε_r des Dielektrikums abhängig.

Für den einfachsten Fall des *Plattenkondensators*, bei dem sich zwei Platten der Größe A im Abstand d gegenüberstehen und d im Vergleich zu den Plattenabmessungen sehr klein ist, wird $|\boldsymbol{D}| = Q/A$ und die elektrische Feldstärke $|\boldsymbol{E}| = U/d$. Mit Hilfe der Gl. (10/3) ergibt sich daraus

$$Q = \varepsilon\,\frac{A}{d}\,U.$$

Für die gesuchte Kapazität findet man die Beziehung

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon\,\frac{A}{d}, \tag{10/7}$$

die annähernd auch bei gekrümmten Elektroden gilt, wenn der Abstand d sehr klein gegen den Krümmungsradius ist. Als *Dimension* der Kapazität ergibt sich das *Farad*. Über die Berechnung von Kapazitäten siehe § 10.3.

10.14 Zusammenhang zwischen Kapazität und Widerstand

Zwischen dem Verschiebungsfluß im elektrischen Feld und dem Strom im Strömungsfeld besteht eine weitgehende Analogie, die man zur Berechnung oder auch zur experimentellen Bestimmung unbekannter Kapazitäten benutzen kann.

Zwischen zwei Elektroden ist ein Medium mit konstanter Leitfähigkeit σ vorhanden und die Spannung U angelegt. Aus $I = \oint \boldsymbol{G}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \sigma \oint \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{G}$ Stromdichte, $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ Flächenelement) findet man wegen $R = U/I$ den Widerstand zu

$$R = \frac{1}{\sigma}\,\frac{U}{\int \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}}. \tag{10/8}$$

Befindet sich hingegen zwischen den Elektroden ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε, so gilt nach Gl. (10/2) $Q = \varepsilon \oint \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}$, woraus sich die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon\,\frac{\oint \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{U} \tag{10/9}$$

ergibt. Durch Multiplikation der Gln. (10/8) und (10/9) findet man schließlich die wichtige Beziehung

$$RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}, \tag{10/10}$$

wonach der Isolationswiderstand eines Kondensators beliebiger Form bei homogenem Dielektrikum umgekehrt proportional der Kapazität ist.

10.15 Parallel- und Reihenschaltung

Legt man mehrere Kondensatoren mit den Kapazitäten $C_1, C_2, \ldots$ *parallel* an eine Spannungsquelle der Spannung U_0, so addieren sich die Ladungen $U_i C_i$ der einzelnen Kondensatoren. Es gilt daher

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots;$$

$$U_0 C_0 = U_0 C_1 + U_0 C_2 + U_0 C_3 + \ldots$$

Die Kapazität C_0 als Ersatz für die Parallelschaltung der n Kapazitäten ergibt sich daraus zu

$$C_0 = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots \sum^{n} C_i. \tag{10/11}$$

Legt man n Kondensatoren verschiedener Kapazität *in Reihe* an die Spannungsquelle U_0, so hat der Verschiebungsstrom in jeder Teilkapazität den gleichen Wert. Die Teilspannungen $U_i = Q/C_i$ addieren sich, und es gilt

$$U_0 = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots,$$

$$\frac{Q}{C_0} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \cdots.$$

Die Ersatzkapazität C_0 für n in Serie geschaltete Kondensatoren berechnet sich hieraus zu

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots = \sum^{n} \frac{1}{C_i}. \qquad (10/12)$$

Die am Kondensator C_i liegende Teilspannung beträgt

$$U_i = U_0 \frac{C_0}{C_i}, \qquad (10/13)$$

d. h., sie verhält sich zu U_0 umgekehrt wie die Ersatzkapazität C_0 zur Teilkapazität C_i.

10.2 Dielektrische Stoffe [*10.75, 10,35, 10.61*]

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, daß isolierende Substanzen in einem elektrischen Feld $\boldsymbol{E}$ den Verschiebungsstrom $\boldsymbol{D}$ gegenüber Vakuum um die relative Dielektrizitätskonstante ε_r vergrößern und daß die Kapazität einer festen Elektrodenanordnung im selben Maße erhöht wird. Da seit den Arbeiten Debyes [*10.35*] der theoretische Zusammenhang zwischen der Dielektrizitätskonstanten einer dielektrischen Substanz und dem molekularen Dipolmoment weitgehend bekannt ist, stellt die genaue Messung der Dielektrizitätskonstanten ein wichtiges Hilfsmittel zum Studium der Molekülstruktur und anderer Fragen dar.

10.21 Makroskopische Beschreibung

Bringt man in einen Luftkondensator ein Dielektrikum, so wird seine Kapazität vergrößert, da durch die *elektrische Polarisation* ein Teil der elektrischen Ladung gebunden wird. Betrachtet man einen Vakuumkondensator mit der Kapazität C_0, so erhöht sich diese um den Faktor $\varepsilon'/\varepsilon_0$, wenn er mit einem Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε' gefüllt wird. Die aus Gl. (10/6) resultierende Beziehung

$$U = \frac{Q}{C} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'}$$

ist auch in der Weise zu interpretieren, daß von der Gesamtladung Q nur der Teil $Q\varepsilon_0/\varepsilon'$, die *freie Ladung*, zur Spannung U beiträgt, während die *gebundene Ladung* $Q(1 - \varepsilon_0/\varepsilon')$ durch die Polarisation des Dielektrikums neutralisiert wird.

Dividiert man die freie Ladung durch die Fläche A und beachtet Gl. (10/2), so ergibt sich

$$\frac{Q}{A} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'} = \frac{|\boldsymbol{D}|}{\varepsilon'} \varepsilon_0 = |\boldsymbol{E}| \cdot \varepsilon_0,$$

während analog aus der gebundenen Ladung

$$\frac{Q}{A}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'}\right) = |\boldsymbol{D}| - \varepsilon_0|\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{E}|(\varepsilon' - \varepsilon_0) = |\boldsymbol{P}| \qquad (10/14)$$

eine neue Größe $\boldsymbol{P}$, die *elektrische Polarisation*, abgeleitet werden kann. Das Verhältnis von gebundener zu freier Ladungsdichte, also

$$\frac{\boldsymbol{P}}{\varepsilon_0 \boldsymbol{E}} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0} - 1 = \chi, \qquad (10/15)$$

nennt man *elektrische Suszeptibilität* der betreffenden Substanz.

In einem anisotropen Medium, z. B. in einem kristallinen Dielektrikum, gilt der lineare Zusammenhang

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k \qquad (10/16)$$

für die einzelnen Kristallachsen, wobei die ε_{ik} einen Tensor 2. Grades bilden.

10.22 Dielektrische Dipoltheorie

Die Ursache für die Polarisation $\boldsymbol{P}$ sind elektrische Ladungen im Dielektrikum, die sich unter dem Einfluß des wirksamen elektrischen Feldes verschieben, oder, wenn sie als *elektrische Dipole* enthalten sind, in Feldrichtung zu orientieren suchen. Das elektrische Dipolmoment μ entsteht durch unsymmetrische Ladungsverteilung von Molekülen und wird durch zwei elektrische Ladungen verschiedener Polarität $\pm Q$ repräsentiert, die sich im Abstand d voneinander befinden, d. h.,

$$\mu = Q\boldsymbol{d}. \qquad (10/17)$$

Die Polarisation $\boldsymbol{P}$ eines Dielektrikums entspricht dem Dipolmoment pro Kubikzentimeter und wird im mikroskopischen Bild durch die Beziehung

$$\boldsymbol{P} = \mu_m N \qquad (10/18)$$

wiedergegeben, wenn N die Konzentration der Dipole pro Kubikzentimeter und μ_m das einzelne, *mittlere* Dipolmoment bedeutet. Die Größe $\bar{\mu} = \alpha \boldsymbol{E}'$ ist der lokalen Feldstärke $\boldsymbol{E}'$ am Ort des Dipols und der *Polarisierbarkeit* α proportional, so daß Gl. (10/18) lautet:

$$\boldsymbol{P} = (\varepsilon' - \varepsilon_0)\boldsymbol{E} = N\alpha \boldsymbol{E}'. \qquad (10/18\text{a})$$

Das lokale Feld $\boldsymbol{E}'$ unterscheidet sich gewöhnlich vom angelegten Feld $\boldsymbol{E}$ infolge der Polarisation des umgebenden dielektrischen Mediums.

Als Ursachen für die Polarisierbarkeit α kommen in Betracht:

a) *Elektronenpolarisation*, wenn die Elektronenhülle in bezug auf den Atomkern durch das Feld verzerrt wird,

b) *Atompolarisation* von Molekülen aus ungleichen Atomen, deren Elektronenhüllen exzentrisch gegen die Kerne verschoben sind,

c) *permanente Dipolmomente* durch asymmetrische Ladungsverteilung ungleicher Partner, auch ohne elektrisches Feld vorhanden und im Feld eine Orientierungspolarisation erzeugend.

Sind im Dielektrikum freie oder an Haftstellen lose gebundene Ladungsträger vorhanden, so entsteht im Feld eine geänderte Raumladungsverteilung, die zur Raumladungspolarisation Anlaß gibt.

Für die einfachste Annahme, daß sich das polarisierbare Molekül in kugelförmigen Hohlräumen im Dielektrikum der Dielektrizitätskonstanten ε' befindet, berechnet sich das lokale Feld $\boldsymbol{E}'$ zu

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0} = \frac{\boldsymbol{E}}{3}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0} + 2\right). \tag{10/19}$$

Setzt man diesen Wert in Gl. (10/18a) ein, so ergibt sich die wichtige Beziehung

$$\frac{N\alpha}{3\varepsilon_0} = \frac{\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon_0} - 1}{\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon_0} + 2}, \tag{10/20}$$

die sich für *Gase* bei niedrigem Druck wegen $\varepsilon'/\varepsilon_0 \approx 1$ zur Beziehung

$$\frac{N\alpha}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0} - 1 = \chi \tag{10/21}$$

vereinfacht, aus der die Proportionalität zwischen Gasdruck $p \sim N$ und χ folgt. Über ε_r-Werte für verschiedene Gase siehe *Tabelle 10.2.*

Führt man in Gl. (10/20) anstelle von N die Avogadrosche Zahl $N_0 = NM/\varrho = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ ein (Molekulargewicht M, Dichte ϱ), so erhält man die *Molarpolarisation* aus der Beziehung

$$P_M = \frac{N_0\alpha}{3\varepsilon_0} = \frac{\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon_0} - 1}{\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon_0} + 2}\,\frac{M}{\varrho}, \tag{10/22}$$

die als Clausius-Mosottisches Gesetz bezeichnet wird.

10.23 Dielektrische Relaxation [*10.34*]

Ein Dielektrikum im elektrischen Wechselfeld läßt sich phänomenologisch durch den Ersatzkreis der Abb. 10.2a beschreiben, der einem *Resonator* entspricht. Die vereinfachte, von DEBYE benutzte Darstellung mit vernachlässigtem Beschleunigungsterm L in Abb. 10.2b entspricht einem *Rotator* in einem reibungsbehafteten Medium. In diesem Fall erhält die komplexe Dielektrizitätskonstante ε^* die allgemeine Form

$$\varepsilon^* = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}, \tag{10/23}$$

wenn ε_s die statische Dielektrizitätskonstante, ε_∞ die der elektronischen und atomaren Resonanzpolarisation entsprechende optische Dielektrizitätskonstante und τ die Relaxationszeit bedeuten. Zerlegt man ε^* in Real- und Ima-

ginärteil, so wird aus Gl. (10/23)

$$\varepsilon^* = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \left(\varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 - \omega^2\tau^2}\right) - j\,\frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\omega\,\tau}{1 + \omega^2\tau^2}. \qquad (10/24)$$

Aus dem Realteil $\varepsilon' = \varepsilon_\infty + (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)/(1 + \omega^2\tau^2)$ findet man den Ausdruck

$$\frac{\varepsilon' - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty} = \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2}, \qquad (10/25\text{a})$$

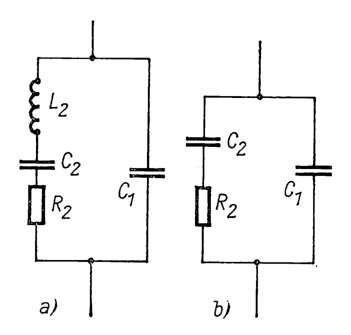


Abb. 10.2 Ersatzkreise für ein Dielektrikum: Resonator (a), Rotator mit Reibung (b)

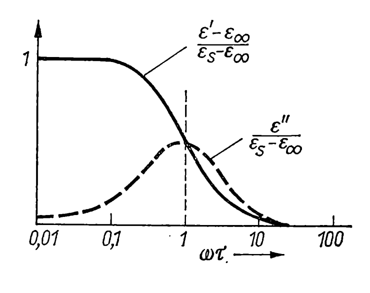


Abb. 10.3 Frequenzabhängigkeit von Real- und Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten

der für niedrige Frequenzen Eins wird und bei hohen Frequenzen verschwindet, wie aus Abb. 10.3 hervorgeht. Analog ergibt sich aus dem Imaginärteil ε'' die Beziehung

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty} = \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}, \qquad (10/26\text{b})$$

die ebenfalls in Abb. 10.3 dargestellt ist und bei $\omega\tau = 1$ ein breites Maximum aufweist.

Die molekulare Interpretation der komplexen Dielektrizitätskonstanten ε^* bzw. der Relaxationszeit τ wurde zuerst von DEBYE [*10.35*] ausgeführt und wird eingehender in Bd. V behandelt werden. Hier soll nur das Ergebnis kurz mitgeteilt werden: Unter der Wirkung des lokalen Feldes $\boldsymbol{E}'$ (s. Gl. 10/19) liefert ein permanentes Dipolmoment μ ein mittleres dielektrisches Moment

$$\mu_m = \frac{\mu^2}{3kT}\,\boldsymbol{E}', \qquad (10/26)$$

wenn k die Boltzmann-Konstante und T die Temperatur ist. Mit Hilfe der Gln. (10/15), (10/18) und der obigen findet man für die komplexe Dielektrizitätskonstante den Ausdruck

$$\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{N}{\varepsilon_0}\left[(\alpha_e + \alpha_a) + \frac{\mu^2}{3kT} - \frac{1}{1 + j\omega\tau}\right], \qquad (10/27)$$

wobei α_e und α_a die von der Elektronen- bzw. Atompolarisation (s. § 10.22) herrührenden Terme sind.

Die *Relaxationszeit* τ beschreibt die Geschwindigkeit der Gleichgewichtseinstellung; sie hängt von der Molekülform und der Viskosität η des Dielektrikums entsprechend

$$\tau = \frac{\eta}{2kT} \qquad (10/28)$$

ab. Für *feste* Dielektrika muß die Größe η durch die quantenmechanische Sprungwahrscheinlichkeit ersetzt werden.

10.24 Dielektrische Verluste

Die Existenz des Imaginärteils ε'' in Gl. (10/24) verursacht Joulesche Verluste im elektrischen Wechselfeld. Mit dem Ausdruck für die Stromdichte

$$g = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varepsilon' - \mathrm{j}\varepsilon'')E = (\mathrm{j}\omega\varepsilon' + \omega\varepsilon'')E \qquad (10/29)$$

ergibt sich eine Wirkleistung

$$P_v = \omega\varepsilon'' E^2, \qquad (10/30)$$

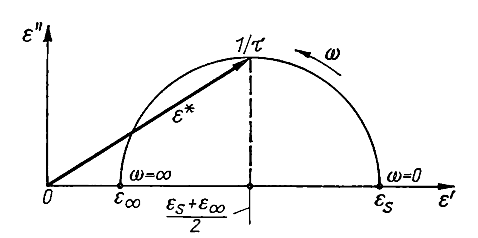


Abb. 10.4 Cole-Cole-Diagramm

die der Kreisfrequenz ω proportional ist und deren Verlauf dem von ε'' in Abb. 10.3 entspricht. Man bezeichnet diese Leistung als *dielektrischen Verlust* und drückt diesen gewöhnlich durch den *Verlustwinkel*

$$\tan\delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty \omega^2 \tau^2}\,\omega\tau \qquad (10/31)$$

aus, so daß Gl. (10/30) auch in der Form

$$P_v = \omega\varepsilon' E^2 \tan\delta \qquad (10/30a)$$

geschrieben werden kann.

Trägt man nach Cole und Cole [*10.30, 10.130*] den Imaginärteil ε'' der Dielektrizitätskonstanten in der komplexen Ebene über dem Realteil ε' mit der Frequenz ω als Parameter auf (Abb. 10.4), so ergibt sich ein Halbkreis, wenn nur *eine* Relaxationszeit vorhanden ist. Der Kreismittelpunkt liegt bei $(\varepsilon_s + \varepsilon_\infty)/2$ auf der ε'-Achse; der maximale Wert von $\varepsilon'' = (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)/2$ entspricht dem Ortskurvenradius und wird für $\omega = 1/\tau$ erreicht. Liegen

mehrere Relaxationszeiten $\tau_i(\omega)$ vor, so ergeben sich innerhalb bestimmter Frequenzbereiche annähernd Kreisbogenabschnitte, aus denen die Verteilungsfunktion abgelesen werden kann.

10.25 Angaben über dielektrische Eigenschaften von Substanzen

Die Dielektrizitätskonstante von *Gasen* ist nur wenig von Eins verschieden und hängt linear vom Druck ab. In *Tabelle 10.1* ist die elektronische Polarisierbarkeit von *Edelgasen*, in *Tabelle 10.2* die relative Dielektrizitätskonstante ε_r von *Gasen* zusammengestellt.

Tabelle 10.1 Elektronenpolarisierbarkeit von Edelgasen

Gas	He	Ne	A	Kr	Xe
α_e (in 10^{-44} F/cm²)	0,23	0,40	1,83	2,3	3,7

Tabelle 10.2 Relative Dielektrizitätskonstante von Gasen (0 °C, 760 Torr)

Gas	ε_r	Gas	ε_r
Luft	1,000590	He	1,000066
CO_2	1,000985	Ne	1,00012
H_2	1,000264	A	1,00051
O_2	1,00055	Kr	1,00077
CO	1,00069	Xe	1,0012
N_2	1,00061	CH_4	1,000944
SO_2	1,0098	C_2H_6	1,0015
NH_3	1,0072	C_3H_8	1,0020
		C_4H_{10}	1,0025

Das elektrische *Dipolmoment* für einige Moleküle ist in *Tabelle 10.3* angegeben, wobei als Einheiten für μ sowohl C · cm als auch 1 *Debye* = 3,33 · 10^{-28} C · cm benutzt werden.

Tabelle 10.3 Elektrisches Dipolmoment einiger Moleküle

Molekül	μ 10^{-28} C cm	μ Debye
H_2O	6,20	1,87
D_2O	6,0	1,80
HCl	3,5	1,05
CsCl	35,0	10,5
NH_3	4,9	1,47
CH_3Cl	6,7	2,00
C_2H_5Cl	6,9	2,07
CCl_4	0	0

In *Tabelle 10.4* ist die Dielektrizitätskonstante einiger organischer Flüssigkeiten bei 20 °C zusammengestellt, wobei Eichsubstanzen durch Kursivdruck hervorgehoben sind.

Tabelle 10.4 Relative Dielektrizitätskonstante organischer Flüssigkeiten

Substanz	ε_r	Substanz	ε_r
Aceton (20 °C)	21,3	Hexan	1,876
Anilin (0 °C)	7,64	Methanol	33,7
Äthylalkohol	25,7	*Nitrobenzol*	35,7
Benzol (20 °C)	2,283	n-Propylalkohol	21,8
Brombenzol (20 °C)	5,397	Schwefelkohlenstoff	2,64
Chlorbenzol	5,67	Tetrachlorkohlenstoff	2,236
Chloroform	5,14	*o-Nitrotoluol*	27,42
Cyclohexan	2,02	Toluol	2,387
Essigsäure	9,7	Trichloressigsäure (61 °C)	4,55
Glycerin	43,0	o-Xylol (17 °C)	2,567

In *Tabelle 10.5* sind einige anorganische Flüssigkeiten aufgeführt und deren Dielektrizitätskonstante unter dem jeweiligen Sättigungsdruck angegeben.

Tabelle 10.5 Relative Dielektrizitätskonstante anorganischer Flüssigkeiten

Flüssigkeit	ε_r	Flüssigkeit	ε_r
NH_3 (−50 °C)	22,7	O_2 (90,3 K)	1,463
Br_2 (17 °C)	3,2	SO_2 (20 °C)	14,0
Cl_2 (−20 °C)	2,03	N_2O (−88 °C)	1,93
HCl (−90 °C)	8,85	N_2 (74,8 K)	1,45
He (4,2 K)	1,048	H_2O (20 °C)	80,3
CO_2 (0 °C)	1,58	H_2 (20,4 K)	1,231
CO (0 °C, 50 at)	1,6016		

Über weitere Ergebnisse von Messungen der Dielektrizitätskonstanten von Flüssigkeiten siehe [*10.2, 10.58, 10.107, 10.108*].

In *Tabelle 10.6* sind für einige Dielektrika in fester Form die Dielektrizitätskonstante und der Verlustfaktor bei verschiedenen Frequenzen angegeben.

Die Ursachen dielektrischer Verluste in Festkörpern können im Aufbau aus Molekülen mit elektrischem Dipolmoment, aber auch in einer schwachen Ionen- oder Elektronenleitfähigkeit liegen. Einen Einblick verschaffen meist Messungen über die Frequenz- und Temperaturabhängigkeit des Verlustwinkels und der Dielektrizitätskonstanten. Im einzelnen liegen ausgiebige Untersuchungen an *Eis* [*10.41, 10.60, 10.84*] vor sowie viele Arbeiten über ε_r und $\tan\delta$ geschichteter oder sonstiger heterogener fester Dielektrika; siehe [*10.37, 10.73, 10.110, 10.154, 10.162, 10.141*]. Über die dielektrischen Eigenschaften von festen Stoffen, die aus linearen Makromolekülen aufgebaut sind,

Tabelle 10.6 Relative Dielektrizitätskonstante und Verlustfaktor fester Substanzen

Substanz	ε_r	$10^3 \tan\delta$ bei 50 Hz	1 kHz	1 MHz
Aminoplaste	bis 8	20···34	20···30	10···30
Bernstein	2,8	8		5
Calan	6,5			0,4
Calit	6,5			1,4
Chlorkautschuk	2,2···2,6	3···7	7,5	6···13
Condensa	40···50			
Frequenta	5,6···6,1	1,3	1	0,2···0,5
Galalith	6···7,5		52	
Gläser	5···16		1···20	0,5···8
Gießharze	4,3···10	40···300	40···500	5···100
Glimmer	6,2···8	0,3···1,5	0,1···1	1,7
Guttapercha	3,3···4,9		22	36
Hartgewebe	5···6		40···80	
Hartgummi	2,5···3,5		2,5···25	6,5
Hartpapiere	3,5···5	20···100	30···80	20···30
Mipolam	3,5			15
Paraffin	1,9···2,2		0.08	0,3···0,9
Pertinax	3,5···4,5	wie Hartpapiere		
Phenoplaste	4,3···10	40···200	40···200	5···100
Plexiglas	3···3,6			20···60
Polystyrol	2,4···2,8	<0,2	<0,1	<0,1
Porzellan	5,4···6,4	50	13	5···12
Quarzglas	3,5···3,8			0,1···0,3
Quarz (krist.)	$\perp$ 4,45		0,17	0,17
	// 4,68		0,17	0,17
Trolitul	2,4	<0,2	<0,1	<0,1
Zelluloid	5,9	50···150	26···33	50

siehe [*10.171*]. Messungen der Dielektrizitätskonstanten und des Verlustwinkels von *Ferriten* wurden von Möltgen [*10.117*] ausgeführt. Diese Stoffe besitzen eine hohe Dielektrizitätskonstante, die mit steigender Frequenz aber rasch abfällt.

10.26 Elektrostriktion; Piezoelektrizität

Unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes wird die Dipolorientierung im Dielektrikum geändert, woraus sehr kleine, aber nachweisbare Änderungen Δl der geometrischen Abmessungen resultieren. Diese als *Elektrostriktion* bezeichneten Längenänderungen hängen nicht von der Feldstärkenrichtung ab; sie lassen sich durch die Beziehung

$$\frac{\Delta l}{l} = A E^2$$

ausdrücken. Durch Anlegen einer mechanischen Spannung an einen neutralen Festkörper hingegen können keine Dipolmomente induziert werden, d. h., der inverse Effekt zur Elektrostriktion existiert nicht.

Wird durch eine mechanische Verzerrung eine Spannung oder eine elektrische Ladung erzeugt, so müssen Dipolmomente ohne ein Symmetriezentrum im Kristallgitter verankert sein. In diesem Fall spricht man vom *piezoelektrischen Effekt*. Einzelheiten siehe Bd. I, § 3.51, Bd. III, § 7.141. Zu den wichtigsten piezoelektrischen Kristallen gehören:

α-Quarz: SiO_2,
Turmalin: $(FeCrNaKLi)_4Mg_{12}B_6Al_{16}H_8Si_{12}O_{63}$,
Seignettesalz: $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$,
Prim. Kaliumphosphat: KH_2PO_4,
Prim. Ammoniumphosphat: $NH_4H_2PO_4$.

10.27 *Ferroelektrizität* [*10.142*]; s. a. § 10.7

Ferroelektrika zeigen das Phänomen der Selbstpolarisation, d. h., benachbarte Dipole im Kristall orientieren sich gleichsinnig infolge gegenseitiger Wechselwirkung unterhalb einer charakteristischen Temperatur. Die Polarisation $\boldsymbol{P}$ solcher Stoffe hängt im Gegensatz zu Gl. (10/14) nicht mehr linear von der äußeren Feldstärke $\boldsymbol{E}$ ab. In Abb. 10.5 ist schematisch die auffälligste Eigenschaft der Ferroelektrika dargestellt, nämlich der nichtlineare Zusammenhang zwischen $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{E}$ in der elektrischen Hysterese. Ähnlich wie bei ferromagnetischen Stoffen (vgl. § 12.41) findet man die *Sättigungspolarisation* P_s sowie eine remanente Polarisation P_r, wenn das äußere Feld abgeschaltet wird. Um $\boldsymbol{P}$ zum Verschwinden zu bringen, muß das Koerzitivfeld E_c in entgegengesetzter Richtung angelegt werden. Nach Gl. (10/14) ist die Gerade $\overline{OA}$ um den Winkel

$$\tan\alpha = \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{E}} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 = \varepsilon_0 \chi(E) \qquad (10/31)$$

geneigt, der von der Feldstärke abhängt.

Wie in ferromagnetischen Materialien werden ferroelektrische Bereiche oder Domänen mit gleicher Polarisationsrichtung angenommen, die sich *spontan* in Richtung des äußeren Feldes einstellen können. Relativ klar lassen sich die

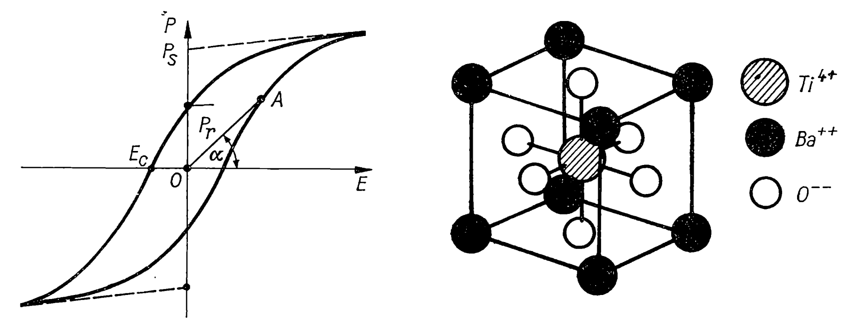


Abb. 10.5 Hysteresisschleife eines Ferroelektrikums

Abb. 10.6 Einheitszelle des $BaTiO_4$

Ursachen für die spontane Polarisation beim *Bariumtitanat*, $BaTiO_3$, übersehen, dessen Einheitszelle in Abb. 10.6 wiedergegeben ist. In der Perovskit-Struktur sitzen die Ba-Atome an den Würfelecken, die O-Atome in Flächenmitte und das Ti-Atom im Würfelzentrum. Da alle Ladungen symmetrisch verteilt sind, besitzt die Einheitszelle kein elektrisches Dipolmoment. Durch eine relative Verschiebung der Ti- und O-Atome gegenüber den Ba-Atomen werden Dipolmomente und daraus eine Nettopolarisation des Kristalls induziert. Aus Messungen von P_s an $BaTiO_4$ läßt sich ableiten, daß Verschiebungen um 0,01 nm bereits die beobachteten Effekte erklären lassen.

Für einige ferroelektrische Stoffe existiert eine *ferroelektrische Curie-Temperatur* T_c, oberhalb derer die ferroelektrischen Eigenschaften verschwinden. In *Tabelle 10.7* sind die Eigenschaften einiger ferroelektrischer Stoffe zusammengestellt.

Tabelle 10.7 Eigenschaften von ferroelektrischen Stoffen

Substanz	chem. Formel	P_s C/cm²	T_c °C
Seignettesalz	$KNaC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$	$0{,}24 \cdot 10^{-6}$	$+24 \cdots -18$
Prim. Kaliumphosphat	KH_2PO_4	$4{,}95 \cdot 10^{-4}$	-150
Kaliumniobat	$KNbO_3$	$3{,}78 \cdot 10^{-4}$	$+434$
Bariumtitanat	$BaTiO_3$	$26{,}0 \cdot 10^{-4}$ (23 °C)	$+120$

Für ferroelektrische Substanzen ist die relative Dielektrizitätskonstante ε_r zwar feldstärkenabhängig, aber meist um Größenordnungen höher als in gewöhnlichen Dielektrika. Für $BaTiO_3$ liegt ε_r bei Zimmertemperatur und $E = 10$ kV/cm zwischen 3000 und 5000.

10.3 Kondensatoren [*10.101*]

10.31 Berechnung von Kapazitäten

Für einfache geometrische Verhältnisse läßt sich die durch Gl. (10/9) definierte Kapazität berechnen, wobei nach § 2.41 bei vorgegebener Berandung die Potentialgleichung (2/155) zu lösen ist.

Kugelkondensator. Eine leitende Kugel mit dem Radius r_0 und der Ladung Q erzeugt im Abstand r eine Verschiebungsdichte

$$|\boldsymbol{D}| = \frac{Q}{4\pi r^2}, \tag{10/32}$$

die gleichmäßig auf Kugelflächen verteilt ist. Daraus errechnet sich die elektrische Feldstärke

$$|\boldsymbol{E}| = \frac{Q}{4\pi \varepsilon r^2} \tag{10/33}$$

sowie das Potential im Abstand r von der Punktladung Q

$$\varphi = \int_r^\infty \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_r^\infty |\boldsymbol{E}|\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}, \tag{10/34}$$

wenn das Potential in großem Abstand Null gesetzt wird. An der Kugelfläche im Abstand r_0 ist das Potential gleich der Spannung zwischen Kugel und einem sehr weit entfernten Punkt, d. h.,

$$U_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r_0}. \tag{10/34a}$$

Daraus ergibt sich die Kapazität der *Kugel* zu

$$C = 4\pi\varepsilon r_0. \tag{10/35}$$

Der aus konzentrischen Kugelelektroden bestehende *Kugelkondensator* mit den Radien r_1 und r_2 besitzt die Kapazität

$$C = 4\pi\varepsilon\frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} = 4\pi\varepsilon r_2\left(1 + \frac{r_2}{r_1 - r_2}\right). \tag{10/36}$$

Ist $r_1 - r_2 = d \ll r_1 = r$, so wird aus Gl. (10/36)

$$C = 4\pi\varepsilon\frac{r^2}{d} = \varepsilon\frac{A}{d},$$

d. h. ein Plattenkondensator nach Gl. (10/7). Der Kugelkondensator ist besonders zur Messung der Dielektrizitätskonstanten von Flüssigkeiten und Gasen bei hohen Drücken geeignet und zeichnet sich durch seine kleine Streukapazität aus.

Zylinderkondensator. (Länge l, Innenradius r, Außenradius $r + a$). Für $l \gg r$ gilt

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(1 + \frac{a}{r}\right)}. \tag{10/37}$$

Für einen Kondensator nach Abb. 10.7 mit ebenen Endflächen im Abstand b von der Außenelektrode tritt zu l in Gl. (10/37) das Korrekturglied

$$\delta l = \delta x + \delta y\,\frac{a}{b}$$

sowie die Kapazität $2\pi\varepsilon r^2/b$ der beiden Stirnflächen hinzu. Für die Korrekturglieder sind die folgenden Ausdrücke einzusetzen:

$$\delta x = \frac{2}{\pi}\left[2b\arctan\frac{a}{b} - a\ln\frac{4a^2}{(a^2 + b^2)}\right],$$

$$\delta y = \frac{2}{\pi}\left[2a\arctan\frac{b}{a} - b\ln\frac{4b^2}{(a^2 + b^2)}\right].$$

Doppelleitung (zwei parallele Zylinder vom Radius r, Achsenabstand a, wobei $r \ll a \ll l$). Die Kapazität beträgt

$$C = \frac{\pi \varepsilon l}{\ln (a/r)}. \tag{10/38}$$

Sie hat den doppelten Wert für *einen* Leiter, der im Abstand $a/2$ einer leitenden Ebene gegenübersteht.

Plattenkondensator [*10.135*]. Die Kapazität eines Plattenkondensators aus zwei Platten der Fläche A, die sich parallel im Abstand a gegenüberstehen, beträgt nach Gl. (10.7)

$$C = \varepsilon \frac{A}{a}. \tag{10/7}$$

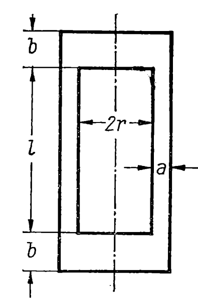


Abb. 10.7 Zylinderkondensator

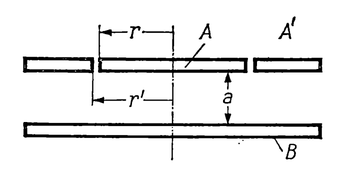


Abb. 10.8 Schutzringkondensator

Kreisplattenkondensator. Stehen sich zwei Kreisplatten vom Radius r und der Dicke d im Abstand a gegenüber, so gilt für $a \ll r$

$$C = \varepsilon \pi \frac{r^2}{a} \tag{10/39}$$

und bei Berücksichtigung des Streufeldes an den Plattenrändern

$$C = \varepsilon r \left[\frac{\pi r}{a} + \ln \frac{\pi r}{a} + 3{,}7724 + f\left(\frac{d}{a}\right)\right], \tag{10/39a}$$

wobei $f(d/a)$ die Thomsonsche Funktion

$$f(x) = (1 + x) \ln (1 + x) - x \ln x \tag{10/39b}$$

ist, die in *Tabelle 10.8* für einige Werte von x angegeben ist.

Drei Kreisplatten [*10.166, 10.167*] gleicher Größe, von denen die beiden äußeren verbunden oder geerdet sind, besitzen die Kapazität

$$C = 2\varepsilon r \left[\frac{\pi r}{a} + 2{,}2156 + \frac{4}{3} f\left(\frac{2d}{a}\right)\right]. \tag{10/40}$$

Eine *Kreisplatte* im gleichen Abstand a zwischen zwei sehr großen ebenen Platten ergibt

$$C = 2\varepsilon r \left[\frac{\pi r}{a} + 2{,}7724 + 4f\left(\frac{d}{4a}\right)\right], \qquad (10/41)$$

wenn $f(d/4a)$ wieder die Thomson-Funktion ist.

Tabelle 10.8 Werte der Thomson-Funktion nach Gl. (10/39b)

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,01	0,056	0,07	0,259	0,4	0,84	1,8	1,82
0,012	0,065	0,08	0,285	0,5	0,96	2,0	1,91
0,014	0,074	0,09	0,310	0,6	1,06	3	2,25
0,016	0,082	0,10	0,335	0,7	1,15	4	2,50
0,018	0,090	0,12	0,38	0,8	1,24	5	2,70
0,02	0,098	0,14	0,42	0,9	1,32	6	2,87
0,03	0,135	0,16	0,46	1,0	1,39	7	3,02
0,04	0,168	0,18	0,50	1,2	1,52	8	3,14
0,05	0,200	0,20	0,54	1,4	1,63	9	3,25
0,06	0,230	0,30	0,71	1,6	1,73	10	3,35

Zur Vermeidung von Randverzerrungen des elektrischen Feldes benutzt man für genaue Messungen den

Schutzringkondensator [*10.86*]. Dieser ist in Abb. 10.8 dargestellt und besteht aus der Kreisplatte A vom Radius r, der Gegenelektrode B im Abstand a sowie dem Schutzring A' mit dem Innenradius r'. Platte A und Schutzring A' besitzen gleiches Potential; gemessen wird nur die Ladung auf A. Es gilt

$$C = \pi\varepsilon \frac{(r + r')^2}{4a} \qquad (10/42)$$

als gute Näherungsformel, wenn $r' - r \ll r$.

Nach demselben Prinzip lassen sich auch *Zylinderkondensatoren* mit Schutzringen, d. h. isoliert angesetzten Rohrenden, konstruieren. Über den Aufbau von *Zylinderkreuzkondensatoren*, die aus gekreuzten Zylinderpaaren gleichen Durchmessers bestehen und deren Kapazität auf 10^{-5} berechenbar ist, siehe [*10.159*].

10.32 Meßkondensatoren fester Kapazität

Für kleine Kapazitäten werden *Luftkondensatoren* mit zwei oder mehreren Metallplatten benutzt und können relativ genau berechnet werden. Für Präzisionsmessungen sind solche Kondensatoren von einem geerdeten Metallbehälter umgeben. Luftkondensatoren sind praktisch verlustfrei; feste Isolatoren wie Quarzglas, Bernstein u. a. sollen zum Zwecke der Abstandhaltung möglichst wenig verwendet werden.

Die *Normalluftkondensatoren* der PTB werden als Platten- oder Zylinderkondensatoren mit Magnaliumelektroden von 1 mm Dicke konstruiert, deren

gegenseitiger Abstand durch Quarzglasisolatoren eingestellt wird. Die Überschlagspannung bei 2 mm Plattenabstand beträgt etwa 3 kV, die zeitliche Konstanz der angegebenen Kapazität ca. 0,02%.

Kondensatoren mit festem Dielektrikum werden für genaue Messungen als *Glimmerkondensatoren* gebraucht, deren Verlustfaktor (s. *Tabelle 10.6*) nur etwa 10^{-4} beträgt. Der Temperaturkoeffizient der Kapazität liegt zwischen -1 und $-2 \cdot 10^{-4}$/grd. Bei Gleichspannung zeigen diese Kondensatoren *dielektrische Nachwirkung*, d. h. eine zeitabhängige Polarisation des Dielektrikums. Durch Aufbewahren in trockenen Räumen verringert sich meist der Verlustfaktor; siehe [*10.134*].

Über den Druckkoeffizienten von Kondensatoren siehe McCall [*10.111*].

Hochspannungskondensatoren werden vielfach als *Schutzring-Zylinderkondensator* nach Petersen ausgebildet, der aus zwei konzentrischen Metallrohren besteht. Der äußere Zylinder ist aus Gründen der höheren elektrischen Festigkeit an beiden Enden mit Wülsten, die innere Elektrode mit Schutzzylindern versehen. Die optimale Durchschlagsfestigkeit erhält man für das Verhältnis der Elektrodenradien $R/r = e$. Kondensatoren dieser Art werden für Spannungen bis zu 100 kV hergestellt.

Preßgaskondensatoren enthalten in einem druckdichten Hartpapierbehälter Zylinderelektroden, deren Zuführungen nach außen verjüngt und mit Sprühschutzwülsten versehen sind. Die Gasfüllung besteht aus trockener Luft, Stickstoff, Kohlensäure oder Freon von 10 at, wodurch die Durchschlagsfestigkeit etwa proportional zum Druck erhöht wird. Kapazitätswerte von 50 bis 100 pF bei 500 kV Betriebsspannung. Über einen 100-kV-Meßkondensator siehe Foord [*10.47*].

Hochspannungskondensatoren mit festem Dielektrikum werden als Flaschen aus *Minosglas* für Spannungen bis zu 20 kV hergestellt und zeichnen sich durch hohe Temperaturkonstanz und kleines $\tan \delta \approx 10^{-3}$ aus.

10.33 Gebrauchskondensatoren fester Kapazität

Festkondensatoren sind mit Kapazitäten zwischen einigen Pikofarad und mehreren Millifarad erhältlich und werden in allen möglichen Formen und für einen großen Spannungsbereich hergestellt. *Wickelkondensatoren* bestehen aus zwei Metallfolien in Bandform, die zusammen mit einem Dielektrikum aus imprägniertem Papier, Kunststoffolie oder Glasfilm auf einen runden Stab oder um eine rechteckige Platte gewickelt werden. Zahl oder Dicke der Isolationsfolien sind durch die Betriebsspannung gegeben. Sind die Metallbänder und die Isolierfolien von gleicher Breite, so können die ersteren abwechselnd über das Isolierband herausragen und gemeinsam auf beiden Seiten des Kondensatorwickels verlötet werden. Diese Kondensatorform zeichnet sich durch einen kleinen Serienwiderstand aus, da alle Lagen parallelgeschaltet sind.

In gleicher Form werden die *MP-Kondensatoren* hergestellt, deren Elektroden aus Zn- oder Al-Aufdampfschichten von 25···100 μm Dicke bestehen, die im Vakuum auf eine dielektrische Folie, z. B. Mylar, aufgebracht werden. Wird durch Überspannung ein elektrischer Durchschlag verursacht, so verdampft

an der Durchschlagstelle beiderseitig der Metallfilm. Hierdurch wird ein Kurzschluß vermieden, und der Kondensator „heilt“ selbst aus.

Glimmerkondensatoren werden aus Metallfolien und Glimmerblättchen oder Kunststoffolien abwechselnd aufeinandergeschichtet und durch Druckplatten zusammengepreßt. Die beiderseits herausgeführten Anschlußfahnen werden verlötet und bilden die Zuleitungen. Der fertige Stapel wird in ein Isoliergehäuse gebracht und mit Isolationsmasse oder Harz vergossen.

Hochspannungskondensatoren werden als Plattenkondensatoren ausgebildet und in Öltanks eingebracht. Kleinere Einheiten werden entweder als Preßgaskondensatoren gebaut oder in ein evakuiertes Glasrohr eingeschmolzen.

Durch die Entwicklung der keramischen Isolierstoffe mit hoher und reproduzierbarer Dielektrizitätskonstante ist es möglich geworden, relativ große Kapazitäten bei kleinen Abmessungen zu realisieren. Als Dielektrika dieser *keramischen Kondensatoren* werden Ba–Sr-Titanate, Ba–Ca-Titanate und Ba–Mg-Titanate benutzt, deren ε_r Werte bis zu 18000 erreichen. Die dielektrische Masse wird in Form kreisförmiger Plättchen, dünnwandiger Röhrchen oder in Pilzform feucht gepreßt und bei 1250···1400 °C geglüht und formiert. Die Kondensatoren werden mit eingebrannten Ag-Elektroden versehen und durch einen Lacküberzug geschützt. Der Temperaturkoeffizient beträgt etwa $4 \cdot 10^{-5}$/grd und der Verlustwinkel bei 1 MHz ca. $2 \cdot 10^{-4}$.

Elektrolytkondensatoren sind billig und klein; sie bestehen aus drei wesentlichen Komponenten: Anode, dielektrischer Film und Elektrolyt. Die Anode besteht aus Al oder Ta hoher Reinheit und bildet eine Elektrode des Kondensators. Der dielektrische Film wird elektrochemisch auf der Anode gebildet und ist sehr dünn. Als Elektrolyt dient eine Flüssigkeit, eine Paste oder neuerdings eine feste Substanz; das Gehäuse stellt gleichzeitig die Katode dar.

Beim *nassen* Elektrolytkondensator (*Elko*) besteht der Elektrolyt aus einer verdünnten wäßrigen Lösung, die Anode meist aus einem gefalteten Al-Band und die Katode aus dem Al-Gehäuse. Der *trockene* Elko enthält um die Anode ein mit dem Elektrolyten getränktes poröses Papier. Beim Tantal-Elko besteht die Anode aus Ta-Blech, -Draht oder gesintertem Ta-Pulver [*10.1, 10.11, 10.112, 10.49*].

Der *Elko mit festem Dielektrikum* enthält keinen Elektrolyten, sondern eine poröse Ta-Anode, die mit einer halbleitenden Schicht, z. B. Mangandioxid, bedeckt ist. Durch „Formieren“ mit einer Gleichspannung von 100···500 V bildet sich ein dielektrischer Film auf der Anode, dessen Dicke der Formierungsspannung proportional ist. Andererseits ist die Kapazität des Elko der Schichtdicke umgekehrt proportional. Die Betriebsspannung ist um so größer, je höher die Formierspannung war. Im allgemeinen kann der Elko nur in einer Stromrichtung (Sperrichtung) verwendet werden, da bei umgekehrter Polung ein beträchtlicher Strom fließen würde. Es gibt auch *bipolare* Elkos, die aus zwei gegengeschalteten Einzelkondensatoren bestehen.

Der Verlustwinkel der Elkos liegt bereits zwischen 50 und 100 Hz bei 5% und nimmt mit der Frequenz zu. Mit wachsender Temperatur trocknet der Elektrolyt aus, was eine Erhöhung des Innenwiderstandes und des Verlustfaktors verursacht. Ta-Elkos sind den Al-Elkos in vielfacher Hinsicht überlegen und vor allem in einem größeren Temperaturbereich anwendbar.

Elkos werden gewöhnlich für die Überbrückung des Katodenwiderstandes in Verstärkern verwendet, wobei die Betriebsspannung bei 6···10 V liegt. Es gibt auch für Netzgleichrichter Hochvolt-Elkos für 300···600 V mit einem Elektrolyten mit großem spezifischem Widerstand.

10.34 Kondensatoren veränderlicher Kapazität

Bei HF-Empfängern und selektiven Röhrenvoltmetern werden als veränderliche Kapazitäten *Luftdrehkondensatoren* verwendet. Diese bestehen aus dem meist geerdeten Stator mit mehreren Metallplatten in gleichem Abstand und dem Rotor, der ganz oder teilweise zwischen die Statorplatten gedreht werden kann. Von der äußeren Berandung der Rotorplatten hängt der funktionelle Zusammenhang zwischen Drehwinkel α und Kapazität ab.

Als Plattenmaterial wird Al oder Messing und für die Drehachse Stahl benutzt. Die Kontaktgabe zwischen der Rotorachse und der Anschlußklemme erfolgt meist über eine Schleiffeder aus Bronzeblech oder durch eine Spiralfeder. Für höhere Spannungen wird der gegenseitige Abstand der Platten größer und müssen die Plattenkanten abgerundet werden. Zur Erhöhung der Durchschlagsfestigkeit kann man Drehkondensatoren auch mit Isolieröl füllen oder sie in Drucktanks mit N_2 von 20 at einbauen. Auch in kleinen Grenzen veränderliche Hochspannungsvakuumkondensatoren für 10···20 pF sind in Gebrauch.

Plattenschnitt. Für Kapazitätsmeßbrücken ist der *Kreisplattenschnitt* gut geeignet, bei dem die Rotorplatten halbkreisförmig berandet sind. Für viele Zwecke ist ein anderer als linearer Zusammenhang zwischen Drehwinkel und Kapazität vorteilhafter, der sich durch eine bestimmte Funktion $r(\alpha)$ erreichen läßt. Nach Abb. 10.9 beträgt die Fläche zwischen den Platten

$$A = \frac{1}{2} \int_0^\alpha r^2 \, \mathrm{d}\alpha .$$

Soll die Kapazität C eine bestimmte Funktion $f(\alpha)$ des Drehwinkels α sein, so gilt

$$f(\alpha) = \frac{n-1}{2} \frac{\varepsilon_0}{a} \int_0^\alpha r^2 \, \mathrm{d}\alpha ,$$

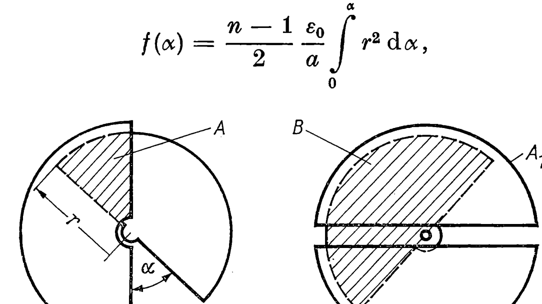


Abb. 10.9 Drehkondensator *Abb. 10.10 Differentialkondensator*

wenn insgesamt n Platten im Abstand a vorhanden sind. Durch Differenzieren und Auflösen nach r findet man

$$r = \sqrt{\frac{2a}{(n-1)\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\mathrm{d}f(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}}. \tag{10/43}$$

Will man eine Abhängigkeit von $1/C = g(\alpha)$ vorschreiben, so tritt anstelle von Gl. (10/43) die Beziehung

$$r = \sqrt{\frac{2a}{(n-1)\varepsilon_0} \frac{1}{g(\alpha)}} \sqrt{-\frac{\mathrm{d}g(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}}. \tag{10/43a}$$

Soll z. B. der Kondensator eines Schwingungskreises eine Teilung erhalten, die linear von der Eigenfrequenz $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$ abhängt, so muß

$$\frac{1}{\sqrt{C}} = c_1\left(1 - c_2\frac{\alpha}{\pi}\right), \quad \text{d. h.,} \quad g(\alpha) = c_1^2\left(1 - c_2\frac{\alpha}{\pi}\right)^2$$

angesetzt werden. Aus Gl. (10/43a) findet man schließlich für die Berandung

$$r = r_{\max}\left(\frac{1 - c_2}{1 - c_2\frac{\alpha}{\pi}}\right)^{3/2},$$

worin $r_{\max}$ der maximale Radius der Rotorplatte ist. Die beiden Größen c_1 und c_2 stellen die *Anfangskapazität* ($\alpha = 0$) bzw. den *Steigungsfaktor* des Drehkondensators dar.

Nach dieser Methode werden Drehkondensatoren hergestellt, deren Teilung eine lineare Funktion der Wellenlänge, der Frequenz oder auch eine logarithmische Funktion beider Größen ist. *Mehrfachdrehkondensatoren* besitzen zwei oder mehrere Statorpakete und auf einer gemeinsamen Achse die gleiche Anzahl Rotorplatten gleichen Plattenschnitts. Sie werden in Überlagerungsempfängern (s. § 7.64) benutzt, um einen Frequenzgleichlauf im Oszillator- und Empfängerkreis zu erzielen.

Von ZICKNER [*10.176*] werden Normaldrehkondensatoren beschrieben, deren Anfangskapazität sich stetig bis auf Null herunterregeln läßt. Dies wird erreicht durch ein zusätzliches Abschirmsystem, das aus zwei Kammern besteht und deren gegenseitiger Durchgriff verändert werden kann.

Variable *Zylinderkondensatoren* mit beweglicher Innenelektrode besitzen einen linearen Zusammenhang zwischen C und der axialen Verschiebung [*10.175*].

Von BAIRNSFATHER [*10.6*] wird ein Präzisionszylinderkondensator von 5 pF Vakuumkapazität beschrieben, bei dem zwischen die festen Zylinderelektroden mittels Mikrometerschraube eine dritte geerdete Zylinderelektrode axial eingeschoben werden kann. Zwischen 1 und 5 pF besitzt der Meßkondensator einen linearen Bereich.

Der *Differentialkondensator* in Abb. 10.10 besteht aus zwei Statorplattenpaketen A_1 und A_2, zwischen denen der halbkreisförmige Rotor B gedreht werden kann. Seine Wirkung entspricht der eines kapazitiven Spannungs-

teilers. Sein Hauptanwendungsgebiet sind HF-Meßbrücken, Rückkopplungsregelung u. a.

Als *Trimmer* bezeichnet man veränderliche Kondensatoren mit meist festem Dielektrikum, die zum Abstimmen von Bandfiltern und anderen HF-Kreisen benutzt werden. Über *Verlustwinkelnormale* und *Verlustwinkelvariatoren* siehe [*10.78*].

10.35 Induktionsarme Kondensatoren

Es ist bereits in § 10.33 darauf hingewiesen worden, daß Wickelkondensatoren mit beiderseits überstehenden Rändern der Beläge, die zudem noch gemeinsam verlötet werden, kleine Widerstands- und Induktivitätswerte aufweisen. Im allgemeinen können bis 5 MHz Verlustwinkel und Induktivität

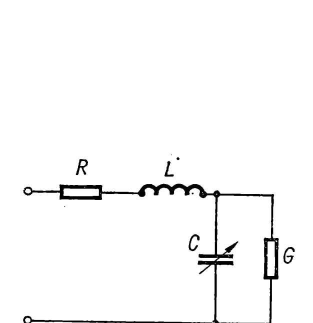




Abb. 10.11 Ersatzschaltbild eines Kondensators

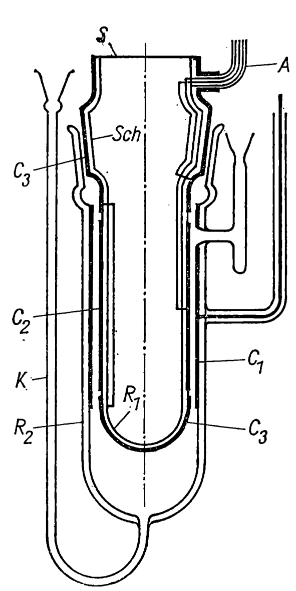


Abb. 10.12 Meßkondensator für die Messung der Dielektrizitätskonstanten von Flüssigkeiten

von Luftkondensatoren vernachlässigt werden. Der in Abb. 10.11 dargestellte Ersatzkreis eines variablen Luftkondensators enthält die statische Kapazität C, den für die Jouleschen Verluste in den Metallteilen verantwortlichen Widerstand R, die Induktivität L der Zuleitungen und inneren Verbindungen sowie den Leitwert G als Folge dielektrischer Verluste in den Isolationsteilen. Der Widerstand R ist unabhängig von C und nimmt wegen des Skineffektes (s. § 9.14) mit $\sqrt{f}$ zu. Aus der Beziehung

$$C_s = \frac{C}{1 - \omega^2 LC} \tag{10/44}$$

für die *scheinbare Kapazität* C_s der Ersatzschaltung geht hervor, daß mit

wachsendem L die Größe $C_s > C$ wird und der Effekt bei hohen Frequenzen nicht mehr zu vernachlässigen ist.

Aus diesem Grund sind besonders bei Kondensatoren zur Erzeugung sehr kurzer Impulse spezielle Bauformen gebräuchlich. Näheres siehe [*10.131*]. Allgemeines über den Einfluß der Zuleitung auf die Kapazität siehe [*10.178*]. Über Kondensatoren kleiner Induktivität zur Erzeugung hoher Stromimpulse und kurz dauernder starker Magnetfelder siehe [*10.74*] und § 13.6.

10.36 Stoffmeßkondensator [*10.89*]

Zur Ermittlung der Dielektrizitätskonstanten und des Verlustwinkels fester und flüssiger Stoffe werden *Meßkondensatoren* (s. § 10.32) berechenbarer Kapazität benutzt und aus *einer* Kapazitätsmessung die gesuchten Größen gewonnen. Die zweite Methode, die Meßkapazität in Luft und *mit* dem gesuchten Dielektrikum im Vergleich zu messen, ist genauer. Meist wird hierzu ein Plattenkondensator mit kreisförmigen, massiv ausgeführten Elektroden angewandt, dessen obere Elektrode von einer Mikrometerschraube geführt wird, so daß der Elektrodenabstand genau gemessen werden kann. Für Messungen an Flüssigkeiten wird die untere Elektrode als flacher Becher ausgebildet. Bei einem Elektrodendurchmesser von 35 mm kann der Abstand zwischen 0 und 5 mm eingestellt werden. Die Größen R und L in Abb. 10.11 für eine bekannte Ausführung eines solchen Meßkondensators betragen 50 mΩ bzw. 14 nH, so daß Messungen bis 100 MHz möglich sind.

Von Claeys et al. [*10.26*] wird ein Meßkondensator von etwa 1300 pF Vakuumkapazität mit Parallelplatten beschrieben, der besonders für Messungen der Dielektrizitätskonstanten von Gasen und Dämpfen bestimmt ist.

Eine aus zwei konzentrischen Pyrexglasrohren bestehende kapazitive Meßzelle nach Vidukich und Kay [*10.161*] zur Messung der Dielektrizitätskonstanten von Flüssigkeiten ist im Schnitt in Abb. 10.12 dargestellt. Die beiden Rohre R_1 und R_2 sind durch den Schliff *Sch* gegeneinander fixiert und werden durch Federn gehalten. Die Elektroden C_1, C_2 und C_3 sind aufgeschmolzene Pt-Filme, die durch eingeschmolzene Pt-Drähtchen mit den Zuleitungen A elektrisch verbunden sind. Die Meßzelle stellt einen Zylinderkondensator mit Schutzelektroden (C_3) dar und ist besonders zur Messung in einer Kapazitätsbrücke mit Differentialtransformator (s. § 10.525) geeignet, wobei die Außenelektrode C_1 an Hochspannung liegt. Die Zelle wird über die Kapillare K gefüllt und kann nach dem Zerlegen mit stark oxydierenden Chemikalien gereinigt werden. Die innere Elektrodenanordnung ist mit einem Al-Blech S statisch abgeschirmt. Bei der Messung großer Dielektrizitätskonstanten läßt sich eine Genauigkeit von etwa 0,1 % erreichen.

Als dielektrische *Eichsubstanzen* werden Benzol, CCl_4, Fluorbenzol, Chlorbenzol und Toluol verwendet (s. a. *Tabelle 10.4*) [*10.113*].

10.37 Homogene elektrische Felder

Die in vielen Fällen notwendigen elektrischen Felder hoher Homogenität (Massenspektrometer, Oszillografie) lassen sich mit Hilfe von speziellen Elektrodenanordnungen erzeugen, von denen in Abb. 10.13 zwei Beispiele

dargestellt sind. Zwischen den Y-Platten liegt die Spannung $\pm U_0/2$, während die X-Platten geerdet sind. Die Anordnung der Abb. 10.13b liefert die gleiche Homogenität wie 10.13a, besitzt aber den Vorteil des größeren Querschnitts für den Strahl. Der Plattenabstand in X-Richtung beträgt h und ist klein gegen die Feldausdehnung in Z-Richtung. Das elektrische Feld in der Umgebung

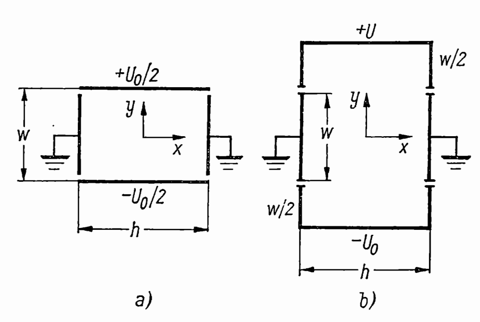


Abb. 10.13 Elektrodenanordnungen zur Erzeugung homogener elektrischer Felder

des Nullpunktes ist homogen innerhalb eines bestimmten, vom Verhältnis w/h abhängigen Querschnitts. Nach ROBINSON [*10.139*] läßt sich das Feld E in der Nähe des Ursprungs als Potenzreihe

$$E = \frac{U_0}{w}\left[1 + \sum \alpha_{ij}\left(\frac{x}{h}\right)^i \cdot \left(\frac{y}{h}\right)^j\right]$$

ansetzen; die Koeffizienten α_{ij} können numerisch berechnet werden.

10.4 Messung der Dielektrizitätskonstanten mit Gleichspannung

Gleichspannungsmessungen sind besonders bei größeren Kapazitäten am Platze, da ungenügende Isolation bei kleinen C-Werten große Meßfehler verursachen kann. Auch *Substitutionsverfahren*, bei denen das Meßobjekt durch einen geeichten Kondensator ersetzt werden kann, sind bei den Gleichspannungsverfahren möglich.

10.41 Entladungsverfahren

Mit der in Abb. 10.1 dargestellten Schaltung, bei der die zu messende Kapazität C auf die Spannung U aufgeladen und anschließend die Ladung UC über das ballistische Galvanometer G entladen wird, kann C unmittelbar bestimmt werden.

Bildet man den Schalter S als periodischen Umschalter aus, der die Kapazität C mit der Frequenz f auf die Spannung U lädt, und mißt den mittleren Entladungsstrom i, so gilt

$$C = \frac{i}{fU}. \tag{10/45}$$

Über eine verbesserte Methode siehe KALISZ und KORBEL [*10.93*].

Mit einem *Differentialgalvanometer* (s. § 2.231) kann das Entladungsverfahren in eine Nullmethode umgewandelt werden, wenn man durch die eine Galvanometerspule den Ladestrom, durch die andere den Entladestrom schickt.

10.42 Maxwell-Thomson-Brücke

Bei der in Abb. 10.14 dargestellten Brückenschaltung wird der zu messende Kondensator C über einen periodisch arbeitenden Umschalter S abwechselnd an den Widerstand R gelegt und in der nächsten Phase entladen. Da die Größe $1/fC$ den Widerstand des Kondensatorzweiges darstellt, muß bei stromlosem Galvanometerzweig gelten:

$$C = \frac{1}{f} \frac{R_2}{R R_1} (1 - \beta), \tag{10/46}$$

wenn β ein Korrekturglied darstellt, in das der Galvanometerwiderstand eingeht. Um die Kapazität der Zuleitungen und des Unterbrechers eliminieren zu können, schaltet man bei unveränderter Lage der Zuleitungsdrähte die *nicht* geerdete Belegung von C ab. Die Zeitkonstante der Widerstände liefert zum Meßfehler dieser Methode keinen Beitrag.

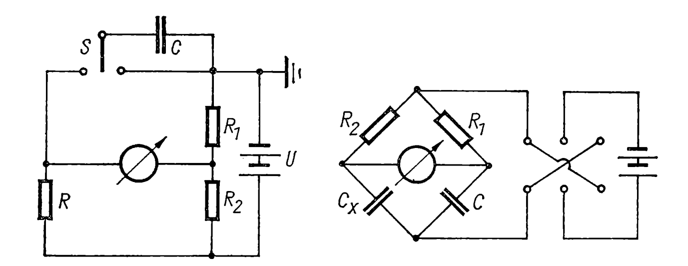


Abb. 10.14 Maxwell-Thomson-Brücke *Abb. 10.15 Kapazitätsvergleich in einer Brücke*

10.43 Relativverfahren

Der bekannte Kondensator C_1 wird mit einem Elektrometer (s. § 2.1) verbunden und auf die Spannung U_1 aufgeladen. Schaltet man die unbekannte Kapazität C_x hinzu, so erniedrigt sich die angezeigte Spannung auf den Wert U_x, und es gilt

$$C_x = \left(\frac{U_1}{U_x} - 1\right) (C + c), \tag{10/47}$$

wenn c die Elektrometerkapazität bedeutet. Das Verfahren erfordert eine ausgezeichnete Isolation und eignet sich besonders für große Kapazitäten $C_x \gg c$.

Über die Messung der Elektrometerkapazität siehe [*10.98*].

Gleichzeitige Entladung. Zwei Kondensatoren, auf gleiche Spannung aufgeladen, werden an ein ballistisches Galvanometer bei entgegengesetzter

Polung gelegt. Der Vergleichskondensator wird so lange geändert, bis der Ausschlag verschwindet. Ist der Vergleichskondensator nicht regelbar, so lädt man auf verschiedene Spannungen auf.

Brückenmethode. Größere Kapazitäten werden wie in Abb. 10.15 in einer Brücke mit der bekannten Kapazität C verglichen. Das Potentiometer $R_1\,R_2$ wird so lange verändert, bis beim Umpolen des Gesamtstroms der Brückenstrom verschwindet. Es gilt dann

$$\frac{C_x}{C} = \frac{R_1}{R_2}.$$

10.44 Periodische Entladung

Der zu messende Kondensator C wird über einen hohen Widerstand R bekannter Größe durch Gleichspannung aufgeladen. Beim Erreichen einer bestimmten Spannung U_1 entlädt er sich über einen relativ kleinen Widerstand. Bei einer unteren Grenzspannung U_2 wird die Entladung unterbrochen und der Kondensator wieder aufgeladen. Als selbsttätiger Schalter kann eine *Glimmröhre* dienen, deren Zündspannung U_1 und Löschspannung U_2 beträgt. Diese periodische Entladung, die eine sägezahnförmige Spannung mit der Periodendauer

$$T = RC \ln \frac{U_0 - U_2}{U_0 - U_1} \tag{5/136}$$

liefert, wird in § 5.61 behandelt. Hält man die Entladungsfrequenz $1/T$ fest, so kann der Kondensator C_x durch einen bekannten ersetzt werden, der so lange verändert wird, bis die gleiche Frequenz erreicht ist. Meßgeräte dieser Art sind als „Glimmbrücke" bekannt und eignen sich für die Messung von Kapazitäten zwischen 10 pF und 10 μF, wobei eine Genauigkeit von 1% erreicht wird.

Auch die anderen in § 5.6 besprochenen Schaltungen für die Erzeugung einer linearen Ablenkspannung in einem ESO sind zur Kapazitätsmessung brauchbar.

10.45 Ponderometrische Messung der Dielektrizitätskonstanten

In ähnlicher Weise wie paramagnetische Substanzen in einem inhomogenen Magnetfeld eine zu $H(\mathrm{d}H/\mathrm{d}r)$ proportionale Kraft erfahren, läßt sich nach Boltzmann die Dielektrizitätskonstante eines Stoffes aus den Kraftwirkungen in einem *inhomogenen elektrischen Feld* ermitteln. Für eine kugelförmige Probe vom Volumen V, die sich im Feld $\boldsymbol{E}$ mit dem Feldgradienten $\mathrm{d}\boldsymbol{E}/\mathrm{d}r$ befindet, gilt die Beziehung

$$\varepsilon - 1 = \frac{F}{\varepsilon_0 V \left(\boldsymbol{E}\,\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}r}\right) - \dfrac{F}{3}}, \tag{10/48}$$

wenn F die gemessene Kraft bedeutet.

Gast und Alpers [10.54] haben dieses Verfahren mit dem inhomogenen elektrischen Feld zwischen den Elektroden eines Kugelkondensators realisiert

und die Kraft F durch eine elektrische Torsionswaage (s. Bd. I § 4.4) gemessen. Bei einem Probendurchmesser von 0,7 cm und einer Kondensatorspannung von etwa 1000 V ist eine Genauigkeit von einigen Prozent zu erreichen. Das Verfahren ist auch dazu geeignet, die Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten, d. h. die Dispersion, bis zu hohen Frequenzen zu bestimmen.

10.5 Wechselstrom- und Hochfrequenzverfahren [*10.123*]

10.51 Verlustbehaftete Kapazität

Nach Gl. (10/24) setzt sich die relative Dielektrizitätskonstante einer Substanz

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r' - \mathrm{j}\,\varepsilon_r''$$

aus Real- und Imaginärteil zusammen; in der Eulerschen Form wäre

$$\varepsilon_r = \bar{\varepsilon}_r \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta} \tag{10/49}$$

zu schreiben, wobei $\bar{\varepsilon}_r = \sqrt{\varepsilon_r'^2 + \varepsilon_r''^2}$ und $\tan\delta = \varepsilon_r''/\varepsilon_r'$ (vgl. auch Gl. 10/31). Die Phasenbeziehung zwischen Strom und Spannung in einem Kondensator mit einem verlustbehafteten Dielektrikum, d. h. mit einer komplexen Dielektrizitätskonstanten, lautet daher

$$I = U\omega C \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)}. \tag{10/50}$$

Die Wirkkomponente I_w des Stromes

$$I_w = U\omega C \tan\delta \tag{10/51}$$

gibt Anlaß zu *dielektrischen Verlusten*, die sich daraus zu

$$P_v = U^2\omega C \tan\delta \tag{10/52}$$

berechnen.

Eine Kapazität mit Verlusten läßt sich, wie in Abb. 10.16 angedeutet, durch eine Parallelschaltung von C und R oder als Serienschaltung von C' und R'

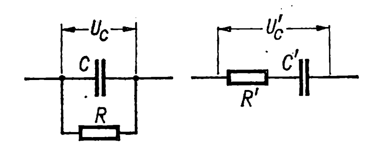


Abb. 10.16 Ersatzschaltungen des verlustbehafteten Kondensators

darstellen. Der Widerstandsoperator wird im ersten Fall

$$\boldsymbol{R} = \left(\frac{1}{R} + \mathrm{j}\omega C\right)^{-1}$$

und für die Serienschaltung

$$\boldsymbol{R}' = R' + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C'}.$$

Vergleicht man beide komplexen Widerstände, so findet man

$$C' = C + \frac{1}{R^2\omega^2 C} = C(1 + \tan^2\delta), \tag{10/53}$$

d. h., die Werte der verlustfreien Kapazitäten unterscheiden sich um den Term $\tan^2\delta$, der für kleine Verlustwinkel zu vernachlässigen ist. In gleicher Weise ergeben sich für die Verlustwinkel der Ersatzschaltungen die Beziehungen

$$\tan\delta = \frac{1}{R\omega C} = R'\omega C'. \tag{10/54}$$

Für den Abgleich von Kapazitätsbrücken ist es oft vorteilhafter, bei kleinen Verlustfaktoren die Parallelschaltung von R und C anzuwenden.

10.52 Brückenmethoden [*10.67*]

Die gebräuchlichsten Verfahren zur Messung von Kapazität und Verlustwinkel sind Brückenmethoden, die ausführlich in § 6.36 behandelt sind. Die Wien-Brücke (s. Abb. 6.43) besteht aus zwei Widerstandszweigen und dem Vergleichszweig *4* mit der Parallelschaltung von C_4 und R_4.

10.521 Allgemeines [*10.53*]

Betrachtet man die in Abb. 10.17 dargestellte Wechselstrombrücke, bei der die einzelnen Zweige durch komplexe Widerstände gebildet werden sollen, so gilt für die Diagonalspannung $\boldsymbol{U}_D$:

$$\boldsymbol{U}_D = U\left[\frac{\boldsymbol{Z}_1}{\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_3} - \frac{\boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_4}\right],$$

wenn U die Speisespannung ist. Die Änderung von $\boldsymbol{U}_D$ bei Variation von $\boldsymbol{Z}_1$

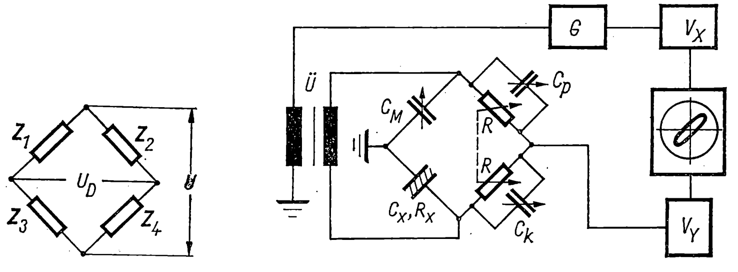


Abb. 10.17 Brücke von komplexen Widerständen

Abb. 10.18 Modifizierte Schering-Brücke

findet man aus

$$\frac{dU_D}{dZ_1} = U\,\frac{(Z_1 + Z_3) - Z_1}{(Z_1 + Z_3)^2} = \frac{Z_3}{(Z_1 + Z_3)^2},$$

woraus

$$\Delta U_D \approx U\,\frac{Z_3}{(Z_1 + Z_3)^2}\,\Delta Z_1 \approx K\,\Delta Z_1 \qquad (10/55)$$

folgt. Wird das Brückenglied Z_1 durch eine Kapazität C mit einem Verlustfaktor tan δ dargestellt, so ergibt sich sein Scheinwiderstand zu

$$Z_1 = \frac{1}{\omega C}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)}.$$

Durch partielles Differenzieren von Z_1 nach C und δ ergeben sich die Beziehungen

$$\frac{\mathrm{d}Z_1}{\mathrm{d}C} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)}\,\frac{1}{\omega C^2}; \qquad \Delta Z_1' \approx -\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)}\,\frac{\Delta C}{\omega C^2}; \qquad (10/56)$$

$$\frac{\mathrm{d}Z_1}{\mathrm{d}\delta} = -\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)}\,\frac{1}{\omega C}; \qquad \Delta Z_1'' \approx -\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)}\,\frac{\Delta \delta}{\omega C}. \qquad (10/57)$$

Die Größen $\Delta Z_1'$ und $\Delta Z_1''$ ergeben in Gl. (10/55) eingesetzt die um 90° phasenverschobenen Komponenten der Brückendiagonalspannung U_D. In registrierenden oder selbstabgleichenden Meßbrücken müssen sie nach Kapazität und dielektrischem Verlustfaktor getrennt abgeglichen werden.

10.522 Schering-Brücke

Die in Abb. 6.45 dargestellte Schering-Brücke ist die gebräuchlichste Brückenmethode zur Messung der Kapazität und des Verlustfaktors. Sie ist besonders für Hochspannung geeignet, da die Abgleichwiderstände R_2 bzw. C_4 am Erdungspunkt liegen.

In Abb. 10.18 ist eine modifizierte Schering-Brücke für einen Frequenzbereich zwischen 25 Hz und 100 kHz wiedergegeben („*NF-Dekameter*"). Die eigentliche Brücke, die aus dem Meßkondensator C_M, den Abgleichwiderständen R und den Kapazitäten C_p und C_k besteht, wird über den abgeschirmten Symmetrierübertrager $Ü$ durch den RC-Generator G gespeist. Die Brückenspannung wird nach Verstärkung im Breitbandverstärker V_y im ESO nachgewiesen, dessen X-Ablenkung über den Verstärker V_x vom Generator G geliefert wird. Auf dem Oszillografenschirm entsteht bei unabgeglichener Brücke eine flache Ellipse, die zu einem waagerechten Strich wird, wenn Brückengleichgewicht herrscht.

Solche Brücken eignen sich im angegebenen Frequenzbereich für Kapazitäten bis zu 1000 pF und Verlustfaktoren zwischen 10^{-5} und 10^{-1} bei einer

Relativgenauigkeit von etwa 1%. Über den Aufbau einer Präzisionsmeßbrücke siehe [*10.177*], allgemeines über andere Ausführungsformen siehe [*10.32, 10.79, 10.105*].

10.523 Selbstabgleichende Kapazitätsmeßbrücken

Auf der Basis der in § 10.521 abgeleiteten Abgleichsbedingungen lassen sich selbstabgleichende Kapazitätsmeßbrücken konstruieren, die sich für einzelne physikalische Problemstellungen eignen, deren Hauptanwendung aber in der industriellen Fertigung liegt.

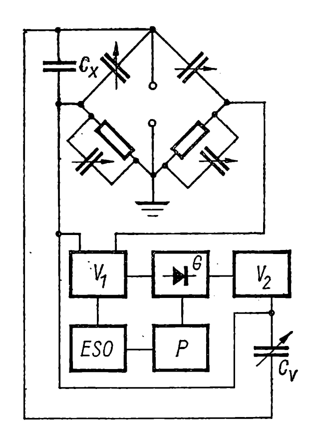


Abb. 10.19 Registrierung kleiner Kapazitätsänderungen

Oft genügt die Registrierung *einer* der beiden ΔZ_1-Komponenten, z. B. der Kapazitätsänderung $\Delta Z_1'$, wie sie bei der kapazitiven Messung mechanischer Größen (s. Bd. I, §§ 2.42, 7.86, 11.43) auftritt. Hierzu ist lediglich als Brückeninstrument ein *phasenempfindlicher* Detektor (s. § 7.452) einzusetzen. Ein Ausführungsbeispiel für die Aufzeichnung kleiner Kapazitätsänderungen ist in Abb. 10.19 dargestellt [*10.53*]. Diese Brückenanordnung nach Giebe und Zickner wird mit einer festen Frequenz, z. B. bei 800 Hz, betrieben. Die Brückenspannung wird dem Resonanzverstärker V_1 zugeführt, an dessen Ausgang der phasenabhängige Gleichrichter G liegt, der seine Vergleichsphase aus dem an den Brückengenerator angeschlossenen Phasenschieber P bezieht. Die in G erzeugte Gleichspannung steuert über den Verstärker V_2 eine veränderliche Kapazität C_v, die parallel zum Meßobjekt C_x liegt und kleine Änderungen ΔC_x kompensiert. Als Abgleichkondensator C_v kann ein kleiner Drehkondensator dienen, dessen bewegliche Platten durch ein Drehspulsystem verstellt werden. Mit dieser Methode lassen sich Kapazitätsänderungen von 1 fF registrieren.

Mit Hilfe von zwei phasenempfindlichen Detektoren, deren Meßphase sich um 90° unterscheidet, kann der Brückenabgleich für C und $\tan\delta$ automatisch ausgeführt werden. Über eine selbstabgleichende Hochspannungsbrücke nach Schmidt und Golbig siehe [*10.148*].

Bei Brücken mit selbsttätigem Abgleich und *veränderlicher Meßfrequenz* müssen Konzessionen hinsichtlich der Meßgenauigkeit gemacht werden. Es ist leicht nachzuprüfen, daß die Empfindlichkeit einer Schering-Brücke, die aus je zwei Widerständen R und Kapazitäten C besteht, am größten ist, wenn $\omega RC = 1$ ist. Mit *festen* Vergleichswiderständen wird die Empfindlichkeit der Brücke bei einer bestimmten Frequenz ihren Höchstwert haben und für niedrigere oder höhere Frequenzen abfallen. Einen Fortschritt bringt der Vorschlag von GAST [*10.53*], die Vier-Kapazitäten-Brücke durch einen Hilfsstromzweig zu erweitern. Einzelheiten sind aus Abb. 10.20 ersichtlich, wo der Zweig mit C_4 durch eine Serienkapazität $C_5 \gg C_4$ erweitert ist und über den veränderlichen Kondensator C_6 ein Hilfsstrom i_h angelegt wird.

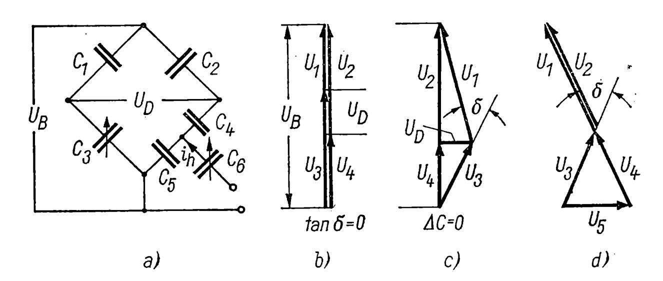


Abb. 10.20 Verlustabgleich durch Hilfsstrom

Sieht man zunächst von C_5 und C_6 ab, so ist aus Abb. 10.20b zu erkennen, daß die Diagonalspannung U_D in Phase mit der Brückenspannung U_B ist. Im Fall des Kapazitätsabgleichs ($\Delta C = 0$), aber mit dielektrischen Verlusten in einem Brückenglied, tritt eine um 90° phasenverschobene Diagonalspannung U_D auf (Abb. 10.20c). Brückengleichgewicht wird wieder erhalten, wenn man, wie in Abb. 10.20d angedeutet, eine um 90° gegen U_B phasenverschobene Hilfsspannung U_5 erzeugt, wodurch $\boldsymbol{U}_3 + \boldsymbol{U}_4 + \boldsymbol{U}_5 = 0$. Dies geschieht durch einen gegen den Brückenstrom um 90° phasenverschobenen Hilfsstrom i_h, der, wie in Abb. 10.20a gezeigt, über die veränderliche Kapazität C_6 zugeführt wird. Der Verlustwinkel δ wird bei abgeglichener Brücke durch Messung des Hilfsstromes bestimmt, wobei angenähert gilt

$$\tan \delta \approx \frac{i_h}{C_5 U_3}.$$

In der praktischen Ausführung wird von GAST [*10.53*] als Brückenindikator ein Torsionsblattelektrometer benutzt, dessen Ausschlag über eine kapazitive Hilfsbrücke gemessen wird. Der selbsttätige Abgleich der gesamten Meßbrücke geschieht mit Hilfe von Stellmotoren, die den C-Abgleich über die veränderliche Kapazität C_3 und den tan δ-Abgleich über den Hilfsstrom i_h bewirken. Die erreichte Meßgenauigkeit wird bei der C-Messung mit 1% angegeben; es sind Verlustwinkel oberhalb von 1% meßbar.

10.524 Andere Brückenmethoden

Von HRIZO und SUBBARAO [*10.80*] wird eine Meßbrücke für die Dielektrizitätskonstanten- und tan δ-Messung an ferroelektrischen Substanzen für einen Temperaturbereich bis zu 700 °C angegeben. Zur oszillografischen Aufzeichnung der Hysteresiskurven wird die in Abb. 10.21 angegebene Schaltung benutzt, die eine RC-Brücke darstellt, welche vom Oszillator O gespeist wird. Auf der (waagerechten) X-Achse des ESO wird die elektrische Feldstärke, auf der Y-Achse die elektrische Polarisation (vgl. Abb. 10.5) registriert. Die Messung der Dielektrizitätskonstanten erfolgt in einer normalen C-Meßbrücke.

Für die Messung *großer Kapazitäten* bei sehr niedrigen Frequenzen unterhalb von 10 Hz gibt GIESEKKE [*10.57*] eine empfindliche Brückenschaltung an.

10.525 Differentialbrücke

Im Vergleich zur Schering- und Wagner-Brücke, bei denen der Abgleich nach Amplitude und Phase schrittweise geschieht, sind Differentialbrücken einfach zu bedienen und auch unempfindlich gegen Streukapazitäten. Sie eignen sich für einen Frequenzbereich von 1···100 kHz. Ihr Aufbau ist in

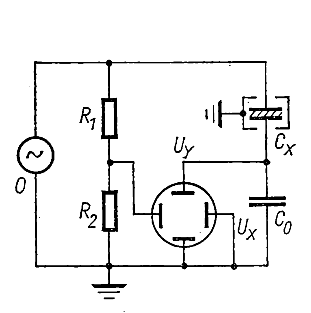


Abb. 10.21 Meßbrücke für ferroelektrische Substanzen

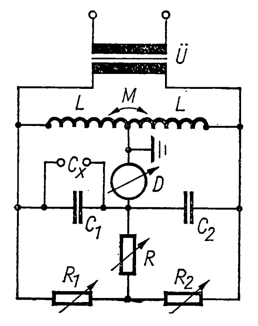


Abb. 10.22 Differentialbrücke

Abb. 10.22 wiedergegeben und entspricht einer symmetrischen Quotientenbrücke. Das aus den Kapazitäten C_1, C_2 und den Widerständen R_1, R_2 bestehende Netzwerk wird durch die an den Enden der Induktivitäten L erzeugten Spannung gespeist. Der Mittelabgriff ist geerdet, so daß im Fall gleicher Induktivitäten die Spannung exakt geteilt wird. Bei abgeglichener Brücke müssen also die komplexen Widerstände für beide Seiten gleich sein. Der veränderliche Widerstand R dient zur Empfindlichkeitsregelung. Streukapazitäten gegen Erde durch Zuleitungen geben keine Fehleinstellung, sondern verringern nur die Meßempfindlichkeit. Der Meßkondensator C_x mit dem unbekannten Leitwert $\boldsymbol{Y}_x = G_x + \mathrm{j}\,\omega C_x$ kann parallel zu C_1 gelegt werden. Das am Detektor D eingestellte Brückengleichgewicht liefert die Bedingungen:

$$C_x = C_2 - C_1; \qquad G_x = (R_1 - R_2)/(R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R).$$

Von MUNGALL und MORRIS [*10.120*] wird eine Präzisionsausführung dieser Brücke beschrieben, mit der Verlustwinkel von $5 \cdot 10^{-4}$ bei 100 Hz und $4 \cdot 10^{-6}$ bei 100 kHz gemessen werden können.

Über Brückenmethoden zur Untersuchung biologischer Lösungen unterhalb von 1 MHz siehe [*10.172*].

10.526 Wien-Brücke

Die Wien-Brücke der Abb. 6.43 besteht aus zwei R-Zweigen, einem Serien- und einem Parallel-RC-Zweig. In die Abgleichbedingungen (6/48) und (6/48a) geht der genaue Wert der Meßfrequenz ein. Zur Messung des Leitvermögens dielektrischer Flüssigkeiten, die mit Gleichspannung wegen der Polarisationserscheinungen erschwert ist, wird von FISCHER und CARSON [*10.46*] der in § 6.223 beschriebene Wien-Brückenoszillator benutzt, dessen Resonanzbedingung (6/23) die unbekannte Zeitkonstante RC zu bestimmen gestattet. Als Frequenzmesser lassen sich direkt anzeigende Instrumente oder besser Frequenzzähler (s. § 7.43) verwenden.

Zur Messung hoher Kapazitäten wird von KONIGSBERG [*10.96*] eine modifizierte RC-Brücke im Frequenzbereich von 0,05···10 Hz benutzt. Den beiden Widerstandszweigen sind Operationsverstärker parallelgeschaltet, wodurch die Meßgenauigkeit merklich erhöht wird.

Von WEBB und WOOD [*10.163*] wird die Wien-Brücke zur praktischen Messung größerer Kapazitäten zwischen 10^{-3} und 1 μF benutzt. Weitere Brückenmethoden siehe [*10.18, 10.138, 10.160*].

10.53 Substitutionsverfahren

Allgemein wird beim Substitutionsverfahren die unbekannte Kapazität mit dem Leitwert $\boldsymbol{Y}_x = G_x + \mathrm{j}\omega C_x$ durch eine bekannte Kapazität mit Serien- oder Parallelwiderstand in einer Brücken- oder Resonanzschaltung ersetzt und der Vergleich in aufeinanderfolgenden Einzelmessungen ausgeführt. Im

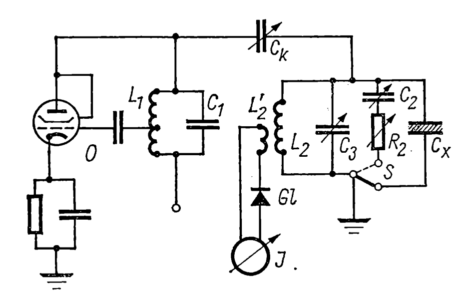


Abb. 10.23 HF-Substitutionsmethode

besonderen schaltet man die Meßkapazität in einen abgestimmten HF-Kreis ein und gleicht diesen auf gleiche Frequenz und Amplitude ab. In Abb. 10.23 ist nach [*10.41*] das Schaltschema dieser Methode angegeben. Die Anordnung

besteht aus dem Röhrengenerator O mit dem Anodenschwingungskreis $L_1 C_1$ und dem durch C_k schwach angekoppelten Meßkreis. Dieser setzt sich aus der Induktivität L_2, der veränderlichen Kapazität C_3 und dem Meßkondensator C_x zusammen. Der Strom im Meßkreis wird in Milliamperemeter J gemessen, das über den Halbleitergleichrichter Gl an die Koppelspule L_2' angeschlossen ist. Zunächst wird C_3 so lange verändert, bis der Meßkreis in Resonanz mit dem Oszillatorkreis schwingt, d. h. in J maximaler Strom angezeigt wird. Durch Umlegen des Schalters S wird C_x durch die Serienschaltung $C_2 R_2$ ersetzt. Durch Verändern von C_2 wird wieder auf Resonanz abgestimmt und mit R_2 der gleiche Strom wie vorher eingestellt. Es gilt dann

$$C_x = C_2; \qquad \tan\delta = \omega R_2 C_2 .$$

Dieses Verfahren, das die Kenntnis der Frequenz ω voraussetzt, läßt sich im Bereich zwischen 50 kHz und etwa 10 MHz anwenden und ist auf relativ kleine Verlustfaktoren $\tan\delta \leqq 2\%$ beschränkt.

Für Dielektrika mit großem Verlustwinkel ist die von ICHIJO [*10.85*] angegebene *Doppelresonanzmethode* besser geeignet. Die in Abb. 10.24 dargestellte

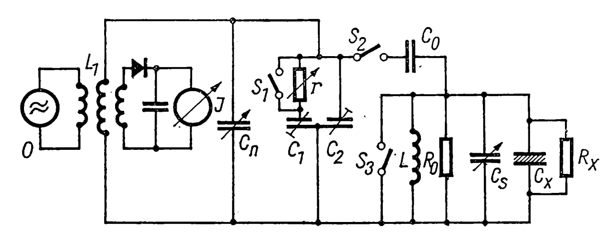


Abb. 10.24 Doppelresonanzmethode

Schaltung besteht aus dem Oszillator O, der den Schwingungskreis $L_1 C_n C_1 C_2$ erregt. Der zweite Schwingungskreis mit der Meßprobe C_x kann über den Schalter S_2 und den Kopplungskondensator C_0 lose an den ersten Resonanzkreis gekoppelt werden. Der Strom wird über das Gleichrichterinstrument J gemessen. Zunächst wird S_3 geschlossen und auf Resonanz mit Hilfe von C_n abgestimmt. Dann wird S_3 geöffnet und C_s so lange geändert, bis in J das Stromminimum angezeigt wird. Hierauf wird in C_x das Dielektrikum entfernt und mit C_s wieder abgestimmt. Aus den beiden C_s-Ablesungen ergibt sich die Dielektrizitätskonstante der Probe. Um den Verlustwiderstand R_x zu bestimmen, muß vorher der Kreiswiderstand R_0 gefunden werden. Dies geschieht durch Abstimmen des Resonanzkreises bei geschlossenen Schaltern S_1, S_2 und S_3 mit Hilfe von C_n. Nun wird S_3 geöffnet und mit C_s auf Stromminimum in J eingestellt. Hierauf schließt man S_3 wieder, öffnet S_1 und verändert C_1 und r so lange, bis sich der gleiche Strom ergibt.

Ist C_{10} die Kapazität des Differentialkondensators $C_1 C_2$ und r_1 die Einstellung von r, so läßt sich nachweisen, daß

$$R_0 = \frac{C_{10}^2 r_1}{C_0^2}$$

ist. Nun bringt man das Dielektrikum zwischen die Platten des Meßkondensators C_x und wiederholt die Messung. Es gilt dann analog

$$R_r = \frac{C_{11}^2 r_2}{C_0^2}.$$

Da meist $R_0 \gg R_x$ ist, kann man $R_x = R_r$ setzen; der Verlustfaktor ergibt sich zu $\tan\delta = 1/\omega C_x R_x$. Dieses Verfahren ist für $\tan\delta \leqq 1$, $\varepsilon \leqq 20$ und für Frequenzen bis 20 MHz anzuwenden.

Über eine Präzisionsmessung der Dielektrizitätskonstanten, bei der die Kapazität eines Schutzringkondensators (s. Abb. 10.8) mit und ohne Dielektrikum gemessen wird, siehe LYNCH [*10.106*]. Weitere Methoden siehe [*10.5*].

10.54 Dielektrische Messungen bei Elektrodenpolarisation

Widerstand und Kapazität flüssiger Dielektrika, in denen an den Elektroden Raumladungen durch Ionen entstehen, müssen mit besonderen Methoden gemessen werden. Durch die Elektrodenpolarisation tritt an den Elektroden ein zusätzlicher, von der Ionenbeweglichkeit, der Meßfrequenz und dem chemischen Potential abhängiger kapazitiver Widerstand auf. Das Ersatzschaltbild einer solchen Meßzelle (Abb. 10.25a) enthält in Serie die Zusatzkapazitäten C' und C'' und besitzt die Impedanz

$$\frac{R}{1+\omega^2 C^2 R^2} - \mathrm{j}\left(\frac{\omega C R^2}{1+\omega^2 C^2 R^2} + \frac{1}{\omega C'} + \frac{1}{\omega C''}\right). \qquad (10/58\,\mathrm{a})$$

Dieses Netzwerk wird in einer Brückenschaltung oder beim Substitutionsverfahren mit der Parallelschaltung von C_m und R_m (Abb. 10.25b) verglichen, deren Impedanz

$$\frac{R_m}{1+\omega^2 C_m^2 R_m^2} - \mathrm{j}\,\frac{\omega C_m R_m^2}{1+\omega^2 C_m^2 R_m^2} \qquad (10/58\,\mathrm{b})$$

beträgt.

Bei schwach leitenden Flüssigkeiten und Frequenzen im MHz-Bereich überwiegt in Gl. (10/58a) im Imaginärteil der erste Term und liefert $R \approx R_m$, $C \approx C_m$. Für gut leitende Dielektrika und im kHz-Bereich ist derselbe Term gegen die beiden anderen Glieder zu vernachlässigen, und man erhält durch Vergleich

$$R = \frac{R_m}{1+\omega^2 C_m^2 R_m^2}; \quad C_m = \frac{1}{\omega^2 R R_m C_s}, \qquad (10/59)$$

worin $1/C_s = 1/C' + 1/C''$. Aus beiden Gleichungen läßt sich entnehmen, daß C_m möglichst klein gewählt werden sollte und C_m fast von C unabhängig wird. Aus diesem Grunde ist es unmöglich, die Dielektrizitätskonstante leitender Flüssigkeiten zwischen Metallelektroden bei Tonfrequenz zu messen. Befriedigende Meßergebnisse lassen sich nur erzielen, wenn man die Meßzelle in einen Resonanzkreis schaltet. Dieses von METCALF [*10.114*] angegebene Verfahren ist in Abb. 10.26 dargestellt. Die Meßzelle (mit den Bezeichnungen der

Abb. 10.25a) ist dem aus L und C_m bestehenden Resonanzkreis parallelgeschaltet. Als Generator O dient ein mit 50 Hz frequenzmodulierter Signaloszillator von 0···10 MHz; die Resonanzspannung wird am ESO über einen Gleichrichter gemessen. Der komplexe Leitwert des Meßkreises

$$\mathrm{j}\omega\left\{\left(\frac{1}{C_s}+\frac{1}{C+1/\mathrm{j}\omega R}\right)^{-1}+C_m-\frac{1}{\omega^2 L}\right\} \tag{10/60}$$

wird zum Minimum für die Resonanzfrequenz ω_0. Ist $1/C_s \gg (C + 1/\mathrm{j}\omega R)^{-1}$, so kann aus der Resonanzfrequenz $\omega_0 = [L(C_m + C_s)]^{-1/2}$ die gesuchte Kapazität C nicht gefunden werden. Wird dagegen $1/C_s \ll (C + 1/\mathrm{j}\omega R)^{-1}$, so

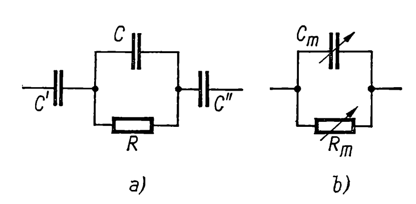


Abb. 10.25 Ersatzschaltung einer Meßzelle

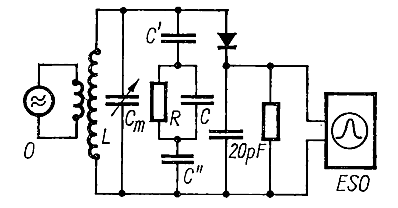


Abb. 10.26 Messung der Dielektrizitätskonstanten leitender Flüssigkeiten

hängt die Resonanzfrequenz $\omega_0 = [L(C_m + C)]^{-1/2}$ von C ab, und die Resonanzeinstellung liefert $\Delta C = -\Delta C_m$. Es ist experimentell zu entscheiden, ob eine C-Messung unter diesen Umständen möglich ist und ob durch eine andere Meßzelle Abhilfe geschaffen werden kann.

Eine von Schwan und Ferris [*10.152*] zuerst angegebene Meßmethode, die Polarisation an den Meßelektroden zu eliminieren, benutzt Meßzellen mit getrennten Zuleitungen für Strom und Spannung. Die Prinzipschaltung dieses Verfahrens ist in Abb. 10.27 wiedergegeben. Die eigentliche Meßzelle M mit den stromführenden Elektroden E_i' und E_i'' sowie den Potentialabgriffen E_u' und E_u'' liegt mit dem Vergleichskreis $C_m R_m$ in Serie am Oszillator O. Die Spannungsabfälle an M und am Vergleichskreis werden zu zwei Verstärkern V_x und V_m mit gleichem Verstärkungsfaktor und gleicher Eingangsimpedanz geführt und die Ausgänge in Gegenschaltung im Instrument I miteinander verglichen. Die veränderlichen Abgleichselemente C_m und R_m werden so lange verstellt, bis der Ausgang der Differentialschaltung spannungslos ist.

In ähnlicher Weise läßt sich auch eine Brückenschaltung und eine Substitutionsschaltung benutzen. Die Meßzelle besteht aus einem zylindrischen Gefäß aus Plexiglas oder einem anderen Kunststoff, besitzt Platinelektroden zur Stromzuführung und zwei seitliche, sich konisch nach außen erweiternde Bohrungen mit Metallelektroden.

10.55 Messung der Dielektrizitätskonstanten an Halbleitern

Ähnliche Meßprobleme wie in § 10.54 treten bei der Untersuchung von halbleitenden Substanzen auf. Die Messung der komplexen Impedanz von *Dioden* oder *Transistoren* (s. § 4.2) ist für die Technologie der Halbleiterelemente von

großer Bedeutung, jedoch schwierig durchzuführen, da sie von der angelegten Spannung und von der Frequenz abhängt.

Die meisten gebräuchlichen Verfahren lassen sich auf die in Abb. 10.28 angegebenen Ersatznetzwerke zurückführen, in denen das Meßobjekt in *a*)

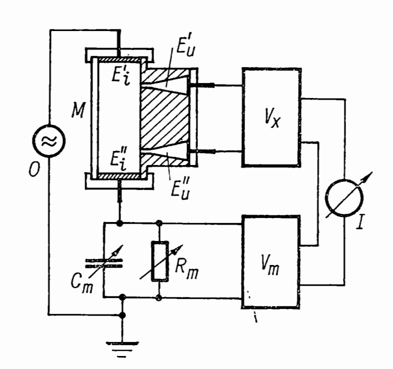


Abb. 10.27 Vier-Elektroden-Methode

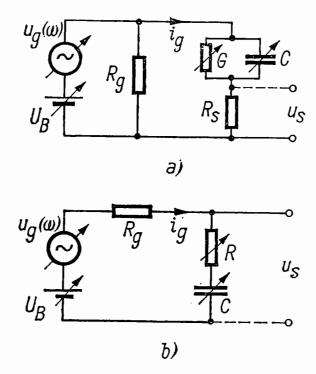


Abb. 10.28 Ersatzkreise für Halbleiterelemente für Kapazitätsmessung

durch $C(U_B, \omega)$ und $G(U_B, \omega)$ in Parallelschaltung, in *b*) durch $C(U_B, \omega)$ und $R(U_B, \omega)$ in Serienschaltung ersetzt ist, wobei U_B die Vorspannung und ω die Meßfrequenz bedeutet. In Abb. 10.28a wird der Strom durch den Ersatzkreis am Widerstand R_s gemessen; die Wechselspannungskomponente an R_s beträgt

$$u_s = \frac{R_s u_g}{R_s + [1/(G + \mathrm{j}\omega C)]}, \tag{10/61}$$

wenn $u_g(\omega)$ die anliegende Wechselspannung ist. Ist $1/(G + \mathrm{j}\omega C) \gg R_s$ und $1/(G + \mathrm{j}\omega C) \gg R_g$, so folgt aus Gl. (10/61)

$$u_s = R_s u_g (G + \mathrm{j}\omega C). \tag{10/61a}$$

Dynamische Leitfähigkeit G und Kapazität C lassen sich aus der phasenreinen bzw. um 90° phasenverschobenen Komponente des an R_s entstehenden Signals ermitteln. Dies läßt sich mit einem *phasenempfindlichen Detektor* (s. § 7.452) ausführen.

Die zweite, in Abb. 10.28b dargestellte Ersatzschaltung liefert am Meßobjekt das Signal

$$u_s = \frac{R - (\mathrm{j}/\omega C)}{R_g + [R - (\mathrm{j}/\omega C)]}\, u_g. \tag{10/62}$$

Ist $R_g \gg R - (\mathrm{j}/\omega C)$, so wird i_g konstant, und es folgt aus Gl. (10/62)

$$u_s = \frac{u_g}{R_g}\left(R - \frac{\mathrm{j}}{\omega C}\right). \tag{10/62a}$$

In diesem Fall findet man den dynamischen Widerstand R und die kapazitive Reaktanz $1/\omega C$ aus den beiden Komponenten des Signals u_s. Für hohe Widerstände $R \geqq 100\,\mathrm{M\Omega}$ ist nur das 1. Verfahren geeignet, da R in Gl. (10/62) auch die Eingangsimpedanz des Verstärkers enthält und der Eingangswiderstand mindestens um eine Größenordnung höher als R sein muß.

In Abb. 10.29 ist die von SHEWCHUN und WAXMAN [*9.155*] benutzte Prinzipschaltung wiedergegeben, mit der nach dem Schema der Abb. 10.28a Kapazität und Leitwert von Dioden automatisch über einen Frequenzbereich zwischen 10 Hz und 100 kHz gemessen werden. Die Wechselspannung wird vom Gene-

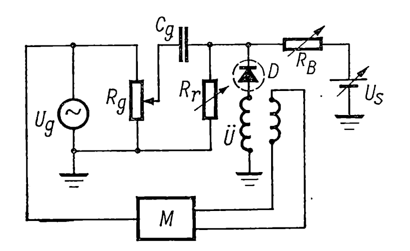


Abb. 10.29 Dielektrische Messung an Halbleiterelementen

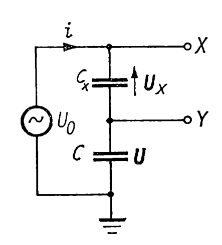


Abb. 10.30 Verlustfaktormessung mit dem ESO

rator U_g über den Vorwiderstand R_B geliefert. Der durch die Diode fließende Strom wird durch die am Transformator $\ddot{U}$ entstehende Ausgangsspannung gemessen und dem phasenempfindlichen Detektor M zugeführt.

Von CLAYTON [*10.29*] wird ein ähnliches Verfahren angegeben, das aber für Frequenzen unterhalb von 1 Hz ausgelegt ist. Weitere Methoden siehe [*10.66, 10.104, 10.146, 10.174*].

10.56 Messung größerer Verlustwinkel mit dem ESO

Große Verlustfaktoren zwischen 0,1 und 2 lassen sich nach der in § 6.64 beschriebenen Methode direkt mit dem ESO bestimmen. Die Ermittlung von $\tan\delta$ aus dem Achsenverhältnis einer auf dem Oszillografenschirm registrierten Ellipse läßt sich nach BURDICK und HICKMAN [*10.22*] vereinfachen, wenn man die Amplituden in beiden Ablenkrichtungen gleich groß macht. Hierzu ist die in Abb. 10.30 dargestellte Meßanordnung geeignet, in der die Verlustkapazität C_x mit der Vergleichskapazität $C \gg C_x$ in Serie an der Meßspannung U_0 liegen. Fließt durch die Serienschaltung der Strom i, so entstehen die Spannungen an C_x

$$U_x = \frac{i}{\mathrm{j}\,\omega C_x} = \left(\frac{\cos\delta}{\omega C_x \varepsilon_r'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\right)\cdot i$$

und an C

$$U = \frac{i}{\mathrm{j}\,\omega C} = \frac{1}{\omega C}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\cdot i,$$

die sich um den Winkel δ in der Phase unterscheiden. Legt man nun die Klemme Y an die senkrechten Ablenkplatten des ESO und die Klemme X an die

waagerechten, so wird wegen $C_x \ll C$ die Spannung $U_x \approx U_0$. Bei gleicher Ablenkempfindlichkeit in der Y- und X-Richtung entsteht dann auf dem Schirm eine Ellipse, deren Hauptachsen um 45° gegen die Ablenkrichtungen geneigt sind. Bezeichnet man das Verhältnis von kleiner zu großer Halbachse der Ellipse mit r, so läßt sich aus der Beziehung

$$\tan \delta = \frac{2r}{1 - r^2} \qquad 0 \leqq r \leqq 1 \tag{10/63}$$

der gesuchte Verlustwinkel berechnen.

Von BISWAS et al. [*10.12*] wird eine direkte Phasenmeßmethode zur Bestimmung kleiner Verlustwinkel angegeben. Weitere Verfahren siehe [*10.48*, *10.137*].

10.57 Direkte Dämpfungsmessung

Der Verlustfaktor einer Kapazität ist in einem abgestimmten Schwingungskreis unmittelbar aus der *Güte Q* des Schwingkreises mit den in § 7.5 behandelten Verfahren zu messen.

MILTON et al. [*10.116*] benutzen zur Messung des Verlustfaktors *dünner Folien*, wie Mylar bei He-Temperaturen, einen Resonanzkreis und beobachten unmittelbar den exponentiellen Abfall der Spannungsamplitude. Zu diesem Zweck werden auf die zu untersuchende Folie von 30 cm Länge drei schmale und ein breiter Bleistreifen im Vakuum aufgedampft und zwei solcher Folien gegeneinander isoliert eng aufgewickelt. Auf diese Weise erhält man eine Kapazität und drei Induktivitäten, deren ohmscher Widerstand unterhalb des Sprungpunkts ($T_c = 7{,}2$ K) verschwindet. Die Kreisgüte dieser Anordnung, deren Resonanzfrequenz bei 500 Hz liegt, wird unmittelbar aus der Dämpfungskonstanten der abklingenden Schwingungen bestimmt. Für *Mylar* wurde $Q = 5600$ ermittelt, woraus sich $\tan \delta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ ergab.

Analoge Messungen lassen sich mit einseitig geerdeten Kapazitäten, z. B. Kabeln, ausführen [*10.51*].

10.58 Spezielle Meßmethoden zur Bestimmung des Verlustfaktors

Nach GAST [*10.54*] läßt sich die ponderometrische Methode auch zur Messung des Verlustfaktors benutzen. Hierzu wird die rotationssymmetrische Probe von einem elektrostatischen *Drehfeld* umgeben und das auf die Probe ausgeübte Moment mit einem Lichtzeiger gemessen oder elektrodynamisch kompensiert. Da das Drehmoment $M \sim E^2$ ist (E elektrische Feldstärke an der Probe), müssen Spannungen von einigen Kilovolt angewandt werden, damit Verlustfaktoren von 10^{-2} noch gemessen werden können.

Ähnliche Verfahren werden bei Flüssigkeiten von LITTLE [*10.102*] angegeben.

10.59 Einige Ergebnisse

Über spezielle Methoden zur Messung der Dielektrizitätskonstanten und des Verlustwinkels an Flüssigkeiten siehe [*10.10*, *10.21*, *10.68*, *10.95*]. Die genaue Kenntnis der Dielektrizitätskonstanten von flüssigem O_2, N_2, H_2 und He spielt für die Standanzeige mittels kapazitiver Verfahren in Kryostaten eine wichtige

Rolle (vgl. Bd. II, § 11.4). Werte von *flüssiger Luft* siehe [*10.144*]. Über Dichtebestimmungen an He^3 durch Dielektrizitätskonstantenmessung mit Hilfe eines kleinen LC-Kreises und eines Tunneldiodenoszillators siehe [*10.16*].

Über die Dielektrizitätskonstante dünner dielektrischer Filme, die im Vakuum aufgedampft werden, und deren Temperaturabhängigkeit siehe [*10.45*]. Meßwerte an *Eis* siehe [*10.41*], an *keramischen Stoffen* [*10.8*] und an *Gläsern* [*10.158*].

Die Dielektrizitätskonstante von isotropen, pulverförmigen Substanzen kann dadurch bestimmt werden, daß man das Pulver in einer Flüssigkeit bekannter Dielektrizitätskonstante dispergiert und die Dielektrizitätskonstante der Mischung mißt [*10.125, 10.136*].

10.6 Dielektrische Messungen im Höchstfrequenzgebiet

Für Untersuchungen der dielektrischen Relaxation (vgl. § 10.23) an Flüssigkeiten und Festkörpern im Zusammenhang mit der Molekülstruktur und für praktische Messungen des Verlustwinkels von Isolierstoffen im Bereich der Zentimeter- und Millimeterwellen sind die bisher besprochenen Methoden nicht mehr anwendbar. Bei sehr hohen Frequenzen scheidet der Meßkondensator aus, da die Wellenlänge im Dielektrikum mit den Elektrodenabständen vergleichbar wird.

10.61 Allgemeines

Alle Meßverfahren zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten und des Verlustfaktors bei sehr hohen Frequenzen beruhen auf der Dispersion und Absorption von fortlaufenden elektromagnetischen oder stehenden Wellen in Wellenleitern bzw. Resonatoren.

Eine in einem Dielektrikum mit den komplexen Stoffkonstanten ε^* und μ^* sich ausbreitende elektromagnetische Welle gehorcht den Maxwell-Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2} = \varepsilon^* \mu^* \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial x^2} = \varepsilon^* \mu^* \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} \tag{10/64}$$

bei Ausbreitung in der X-Richtung. Die bekannte Lösung stellt eine ebene Welle

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t - \gamma x}; \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t - \gamma x} \tag{10/65}$$

dar mit dem komplexen *Ausbreitungsfaktor*

$$\gamma = \mathrm{j}\omega \sqrt{\varepsilon^* \mu^*} = \alpha + \mathrm{j}\beta, \tag{10/66}$$

der sich aus dem Dämpfungsmaß α und dem Phasenfaktor β zusammensetzt. Führt man Gl. (10/66) in die Gln. (10/65) ein, so findet man

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\, \mathrm{e}^{-\alpha x}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta x)}; \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0\, \mathrm{e}^{-\alpha x} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta x)}, \tag{10/67}$$

d. h. Wellenfronten, deren Phasen der Beziehung

$$\frac{\omega t}{2\pi} - \frac{x}{\lambda} = \text{const}$$

gehorchen. Als Ausbreitungs- oder *Phasengeschwindigkeit* ergibt sich die Größe

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v = \nu\lambda = \frac{\omega}{\beta}. \tag{10/68}$$

Für ein *verlustfreies* Dielektrikum ($\varepsilon^* = \varepsilon'$; $\mu^* = \mu'$) wird der Phasenfaktor $\beta = \omega\sqrt{\varepsilon'\mu'}$ und die Phasengeschwindigkeit $v = 1/\sqrt{\varepsilon'\mu'}$.

Die durch die Gleichungen (10/64) beschriebenen Transversalkomponenten von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ bilden mit der Ausbreitungsrichtung x ein Rechtskoordinatensystem $+x \to E_y \to H_z$. Das Verhältnis der elektrischen und magnetischen Feldvektoren

$$\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{H}} = \frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega\varepsilon^*} = \boldsymbol{Z} = \sqrt{\frac{\mu^*}{\varepsilon^*}} \tag{10/69}$$

bezeichnet man als *innere Impedanz* des Dielektrikums.

Für eine Transversalwelle und mit $\varepsilon^* = \varepsilon' - \mathrm{j}\varepsilon''$, $\mu^* = \mu' - \mathrm{j}\mu''$ erhält man aus Gl. (10/66)

$$\alpha = \frac{\lambda\omega^2}{4\pi}(\varepsilon'\mu'' + \varepsilon''\mu') \tag{10/70}$$

und für den Phasenfaktor

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\left\{\frac{\varepsilon'\mu' - \varepsilon''\mu''}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon'\mu'' + \varepsilon''\mu'}{\varepsilon'\mu' + \varepsilon''\mu''}\right)^2}\right]\right\}^{1/2}. \tag{10/71}$$

Für Substanzen ohne magnetische Verluste ($\mu'' = 0$) findet man aus Gl. (10/71) für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{1}{\nu}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon'\mu'(1 + \tan^2\delta)}}. \tag{10/72}$$

Für $\mu' = \mu_0$ ergibt sich daraus der *Brechungsindex*

$$n = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{2}\varkappa'\left(\sqrt{1 + \tan^2\delta} + 1\right)}, \tag{10/73}$$

wenn $\varkappa' = \varepsilon'/\varepsilon_0$, und analog der Dämpfungsfaktor zu

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\frac{1}{2}\varkappa'\left(\sqrt{1 + \tan^2\delta} - 1\right)}. \tag{10/74}$$

Schließlich findet man daraus den *Absorptionsfaktor* zu

$$k = \frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \tan^2 \delta} - 1}{\sqrt{1 + \tan^2 \delta} + 1}}, \qquad (10/75)$$

wenn der Verlustfaktor $\tan \delta = \varepsilon''/\varepsilon'$.

In den folgenden Abschnitten wird von diesen Beziehungen Gebrauch gemacht.

10.62 Brückenmethode

Höchstfrequenzbrücken besitzen gegenüber der Meßleitung (s. § 10.63) den Vorteil des größeren Frequenzumfangs. Ein Beispiel einer Brückenschaltung für 0,5 bis 5 GHz nach CAVELL [*10.24*] ist in Abb. 10.31 schematisch wiedergegeben. Die Oszillatorleistung wird in einem ohmschen Teiler T in die beiden Meßzweige verteilt. Im unteren Zweig befindet sich die Meßzelle X, im oberen der Abgleichkolben A_3 mit Abstimmelementen A. Meßleitung und Vergleichsleistung werden einer koaxialen Hybriden Z zugeführt, deren Arme die Abstände $\lambda/4$ bzw. $3\lambda/4$ gegeneinander haben. Das Vergleichssignal gelangt von c zum Mischer M, der vom Überlagerungsoszillator O_2 betrieben wird und

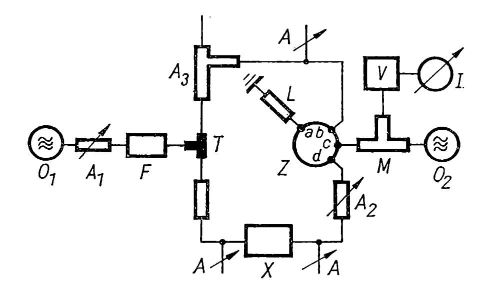


Abb. 10.31 Höchstfrequenzbrücke für dielektrische Messungen

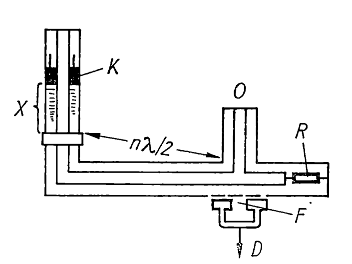


Abb. 10.32 Nullmethode für dielektrische Messungen an Flüssigkeiten

dessen Zwischenfrequenz dem Verstärker V bzw. dem Instrument I zugeführt wird. Durch die Abschwächer A wird in beiden Zweigen auf gleiche Intensität abgeglichen; ferner werden die Wellenlängen im Meßzweig bestimmt und daraus die gesuchten Werte ε' und ε'' ermittelt. Die Meßgenauigkeit dieser Methode beträgt $\pm$ 0,5% für λ und $\pm$ 2% für die Dämpfung.

Eine von MOPSIK und COLE [*10.118*] angegebene einfache Nullmethode für Flüssigkeiten ist vereinfacht in Abb. 10.32 dargestellt. Die Meßzelle X und der Kurzschlußkolben K befinden sich an einem Ende der koaxialen Meßleitung. Im Abstand von $n\lambda/2$ wird der Oszillator O und über eine veränderliche Koppelschleife im gleichen Abstand von der Meßzelle der Detektor D angekoppelt. Das rechte Ende der Meßleitung ist über einen koaxialen 50-Ω-Widerstand R abgeschlossen. Die Wirkkomponente der Impedanz wird über den verschiebbaren Kolben K, die Phase wird mit der Detektorankopplung F

abgeglichen. Das Verfahren ist für Flüssigkeiten mit mittlerem Verlustfaktor und in einem Frequenzbereich zwischen 200 und 1000 MHz geeignet.

Oberhalb von etwa 300 MHz sind für dielektrische Messungen Brücken aus Hohlleitern gebräuchlich, wie sie in Abb. 10.33 dargestellt sind. Die beiden Brükkenzweige enthalten einen festen (A_1) und einen veränderlichen Abschwächer (A_2),

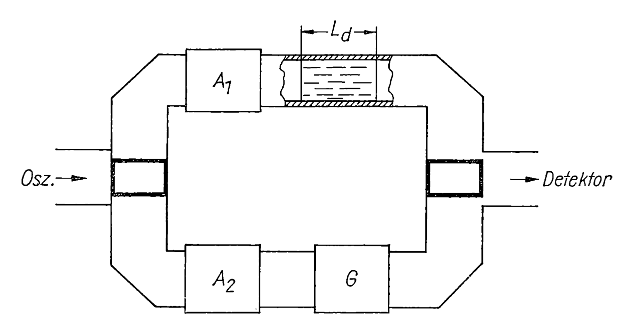


Abb. 10.33 Zentimeterwellenbrücke für dielektrische Messungen

die Meßprobe von der Länge L_d sowie den geeichten Phasenschieber G (s. § 8.76). Die Brückenverzweigungen bilden zwei magische T nach Abb. 8.41, deren E-Arm reflexionsfrei abgestimmt ist. Anregung und Nachweis erfolgen über die Mittelanschlüsse. Aus der für die Einstellung des Brückengleichgewichts (*mit* Probe) erforderlichen Änderung ΔL der „optischen" Weglänge läßt sich die gesuchte Dielektrizitätskonstante ermitteln, und zwar gilt:

$$\varepsilon' = 1 + 4\,\frac{\Delta L}{L_d}\left(1 + \frac{\Delta L}{L_d}\right)\left[1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2\right]. \qquad (10/76)$$

Weitere Beispiele siehe [*10.87*].

10.63 Verfahren mit Meßleitung

Die Meßleitung, die von einem Zehntel bis zu einigen Gigahertz meist aus einem Koaxialsystem besteht, ist nach § 7.74 auch für dielektrische Messungen geeignet. Die schematische Darstellung einer solchen Meßanordnung geht aus Abb. 10.34 hervor.

Die Leitung L ist über eine bestimmte Länge mit einem schmalen Schlitz versehen, durch den mit dem verschiebbaren Halbleiterdetektor D der Spannungsverlauf über einige Wellenlängen gemessen werden kann. Die gesuchte Impedanz $\boldsymbol{Z}$ ist am einen Leiterende angekoppelt; das andere wird durch den Oszillator O erregt.

Durch die unvollkommene Reflexion der elektrischen Welle an der Impedanz $\boldsymbol{Z}$ ändert sich das Stehwellenverhältnis r nach Gl. (7/56) sowie die Lage der Spannungsextrema infolge der Phasenänderung. Nach Gl. (7/52) bewirkt die Impedanz $\boldsymbol{Z}$ in der Leitung mit dem fast reellen Wellenwiderstand $\boldsymbol{Z}_0$ einen

Reflexionskoeffizienten

$$\Gamma = \frac{\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0}{\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_0}. \tag{7/52}$$

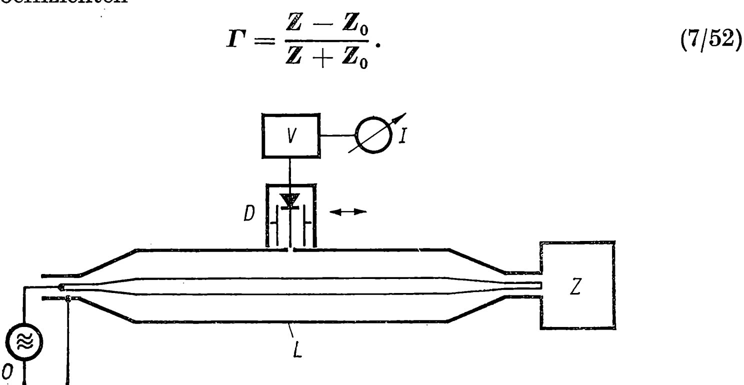


Abb. 10.34 Meßleitung für dielektrische Proben

Nach Gl. (7/58b) kann Γ aus dem Stehwellenverhältnis r und die Phase φ des Reflexionskoeffizienten nach Gl. (7/59a) aus der Lage des 1. Spannungsmaximums ermittelt werden. Die gesuchte Impedanz wird über $|\Gamma|$ und φ

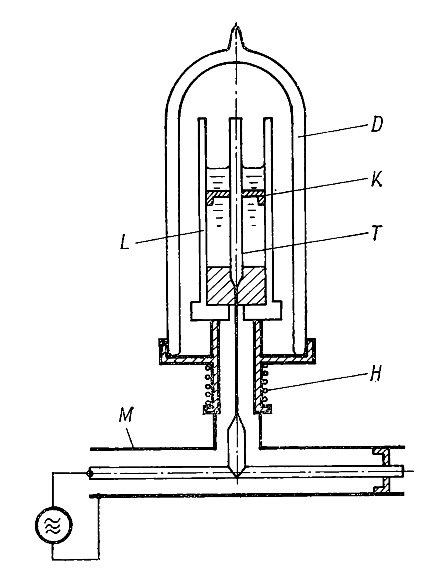


Abb. 10.35 Meßleitung für Flüssigkeiten bis −150 °C

z. B. mit Hilfe des Smith-Diagramms in Abb. 7.49 gefunden. Eine zweite Möglichkeit, das Stehwellenverhältnis r zu bestimmen, geht von der Messung der *Halbwertsbreite* der Spannung längs der Meßleitung aus.

Das Beispiel einer Meßleitung für den Wellenlängenbereich von 8 bis 80 cm ist in Abb. 10.35 wiedergegeben [*10.140*]. Die eigentliche Meßleitung L, die mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt ist, wird mit dem Kurzschlußschieber K auf eine bestimmte Leitungslänge abgestimmt und ist über eine Steckverbindung an den regelbaren Leistungstransformator angeschlossen. In der Meßleitung M werden die Transformationseigenschaften der gesamten Apparatur bestimmt. Zur Messung bei tiefer Temperatur ist das Meßsystem von einem Dewar-Gefäß D umgeben. Mit Hilfe der Heizwicklung H wird eine konstante Temperatur der Zuleitung zu M erreicht. Der Meßfehler wird mit 1···5% angegeben.

Weitere Beispiele ähnlicher Anordnungen siehe [*10.17, 10.153, 10.168, 10.169, 10.7, 10.81, 10.88*]. HOLLWAY et al. [*10.76*] benutzen im Frequenzbereich zwischen 100 und 300 MHz eine $\lambda/4$-Meßleitung, wobei die Meßprobe als dünne Scheibe auf den Innenleiter geschoben wird.

Für den Zentimeterwellenbereich werden *Hohlleitermeßleitungen* meist in H_{01}-Anregung benutzt, wobei in der Mitte der Breitseite ein Schlitz für den Sondenstift auf eine Länge von mindestens 2λ eingefräst ist. Nach einem Vorschlag von FATUZZO und MASON [*10.44*] bildet man die Hohlleitermeßleitung als Winkelstück aus, dessen senkrechter Teil unten elektrisch kurzgeschlossen, aber mit kleinen Löchern für den Durchtritt der zu untersuchenden Flüssigkeit versehen ist. Der waagerechte Teil der Meßvorrichtung ist geschlitzt und dient zur Abtastung des Spannungsverlaufs. Der untere Teil taucht in den Flüssigkeitsbehälter, der mit einer Feinstellvorrichtung soweit gehoben werden kann, bis am Flüssigkeitsspiegel im Hohlleiter die Impedanz reell wird.

Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten von Elektrolyten siehe [*10.156*].

10.64 Messung der Dielektrizitätskonstanten mit Hohlraumresonator

Zur Messung kleiner Verlustwinkel, die mit Meßleitungen schwierig ist, und kleiner Meßproben ist der in § 8.2 behandelte *Hohlraumresonator* geeignet. Es läßt sich nachweisen, daß die Resonanzfrequenz der Kavität beim Einführen einer dielektrischen Probe *abnimmt*. Die Frequenzverschiebung ist bei kleinen Proben eine lineare Funktion von ε', während die Änderung des Q-Faktors unmittelbar von ε'' abhängt.

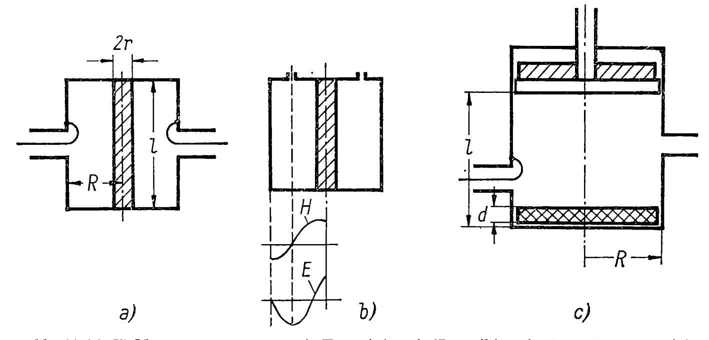


Abb. 10.36 Hohlraumresonatoren: mit E_{010}- (a), mit E_{020}- (b), mit H_{01p}-Anregung (c)

In einem zylindrischen Resonator in E_{010}-Anregung ist in der Zylinderachse ein Maximum des E-Feldes vorhanden. Bringt man die Probe in Form eines zylindrischen Stabes (Abb. 10.36a) vom Radius r in den Resonator (Radius R) mit der Länge l, so gilt nach HORNER et al. [*10.77*] für eine Verstimmung Δf

$$\varepsilon' = 1 - 0{,}539 \frac{V_0}{V} \frac{\Delta f}{f_0}, \tag{10/77}$$

wenn V_0 und V die Volumina des Resonators bzw. der Probe und f_0 die Resonatorfrequenz *ohne* Probe ist. Der Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten wird aus Q-Faktormessungen nach der Beziehung

$$\varepsilon'' = 0{,}269 \frac{V_0}{V} \left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q'}\right) \tag{10/78}$$

bestimmt, wenn der Wert Q *mit* Probe und Q' mit einer verlustfreien Probe mit der Dielektrizitätskonstanten ε' gemessen wird. In der Praxis muß Q' aus der Eindringtiefe des Skinstroms berechnet werden.

Bei der E_{020}-Anregung mit zwei Knoten längs eines Radius für E und H ist in der Zylinderachse wieder das E-Feld maximal, wie aus Abb. 10.36b hervorgeht. Man kann daher den Resonator zum Einbringen der Probe mit einem Deckel versehen, dessen Radius der zweiten Knotenfläche für das H-Feld entspricht. Von Vorteil ist ferner, daß im Vergleich zur E_{010}-Anregung bei gleichen Abmessungen von Probe und Resonator die Änderungen für f und Q größer sind. Die entsprechenden Formeln lauten:

$$\varepsilon' = 1 - 0{,}23 \frac{V_0}{V} \frac{\Delta f}{f_0}; \tag{10/79}$$

$$\varepsilon'' = 0{,}115 \frac{V_0}{V} \left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q'}\right). \tag{10/80}$$

In H_{01p}-Resonatoren treten axiale Wandströme nicht auf (vgl. Abb. 10.36c), so daß der Abstimmschieber keine Kontakte braucht. Die Kreisgüte Q solcher Resonatoren ist sehr hoch, weshalb sie besonders für Messungen der Dielektrizitätskonstanten von Gasen ($\varepsilon' \gg \varepsilon''$) verwendet werden. Die Probe von der Dicke d hat Scheibenform; bei flüssigen Proben ist d die Füllhöhe in einer flachen Schale. Die gesuchte Dielektrizitätskonstante berechnet sich aus der Beziehung

$$\varepsilon' = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_p}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_v}\right)^2, \tag{10/81}$$

worin λ_p und λ_v die im Resonator gemessenen Wellenlängen *mit* bzw. *ohne* Probe sind; λ_p wird graphisch aus der Gleichung

$$\frac{\lambda_v}{2\pi d} \tan\left(\frac{2\pi(l+d)}{\lambda_v}\right) = \frac{\lambda_p}{2\pi d} \tan\frac{2\pi d}{\lambda_p} \tag{10/81 a}$$

gefunden. Näheres siehe [*10.20, 10.38*].

Eine praktische Ausführung eines H_{01}-Resonators wird in [*10.3*] beschrieben, sie ist vereinfacht in Abb. 10.37 dargestellt. Da die Meßanordnung für einen Temperaturbereich zwischen 4,2 und 300 K ausgelegt ist, wird der Resonator R von 1,5 cm Durchmesser in einem evakuierten, geschlossenen Rohr A an den dünnwandigen Zuleitungsrohren M_1 und M_2 für die Anregung bzw. für den Detektor befestigt und kann mit Hilfe der Spindel S verschoben werden. Der Abschlußschieber K ist hierzu am Boden von A befestigt und das Rohr

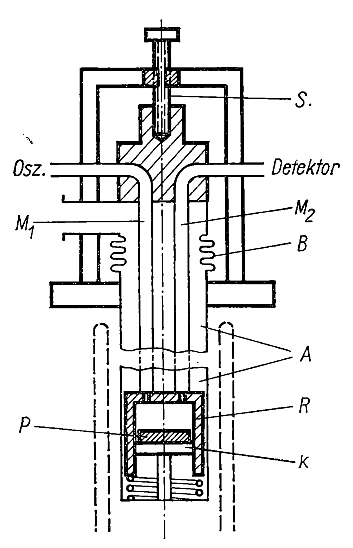


Abb. 10.37 Resonator mit H_{01}-Anregung

durch den Faltenbalg B verlängert. Das ganze Meßrohr taucht in ein He-Bad mit N_2-Mantel. Die Probe P in Form einer dünnen Scheibe wird auf den Schieber K gelegt; als Probendicke wählt man ein ganzzahliges Vielfaches von $\lambda_p/2$ (λ_p Wellenlänge der H_{01}-Welle in der Probe), um Oberflächen- und Schichtdickenfehler zu eliminieren. Real- und Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten werden wie oben aus Frequenz, Resonanzbreite und Kreisgüte berechnet. Bei Verwendung einer Mikrometerspindel für S zum Verschieben des Resonators läßt sich eine Meßgenauigkeit von ca. 3···5% erreichen.

Für Messungen an *Flüssigkeiten* mit kleinem Verlustwinkel kann der *ganze* Resonator gefüllt und ε' aus Gl. (10/81) berechnet werden [*10.64*].

Die Dielektrizitätskonstante von *Gasen* bei höchsten Frequenzen wird ebenfalls mit einem Hohlraumresonator hoher Güte bestimmt. Ein Beispiel stellt die Meßanordnung von NEWELL und BAIRD [*10.122*] dar, deren Resonator aus *Invar* besteht und innen mit Ag plattiert ist. Die Kreisgüte von $3 \cdot 10^4$ bei einer Frequenz von etwa 48 GHz erlaubt Frequenzänderungen von 10^{-7} festzustellen. Der Brechungsindex wird aus der Beziehung

$$n - 1 = \frac{f_v - f_p}{f_p} \tag{10/82}$$

berechnet, wobei die Indizes denen in Gl. (10/81) entsprechen. Über Meßergebnisse an Gasen siehe [*10.67*].

Weitere Beispiele siehe [*10.143, 10.71*]. Meßanordnungen für die Messung der Dielektrizitätskonstanten von Gasen siehe [*10.23, 10.179*]. SCHRÖDER [*10.150*] gibt eine Methode an, bei der ein Resonator in einer einfach entarteten Resonanz betrieben wird. Die Probe wird so im Hohlraum angeordnet, daß die ohne Probe zusammenfallenden Eigenfrequenzen aufgespalten werden und daraus die Dielektrizitätskonstante bestimmt werden kann.

10.65 Hohlrohrinterferometer

Als *Hohlrohrinterferometer* bezeichnet man eine symmetrische geteilte Wellenleitung, bei der die optische Länge der durchstrahlten Meßprobe durch Phasenvergleich mit dem Vergleichszweig festgestellt wird. Das Prinzip der Meßanordnung geht aus Abb. 10.38 hervor [*10.83*]. Der Meßzweig enthält

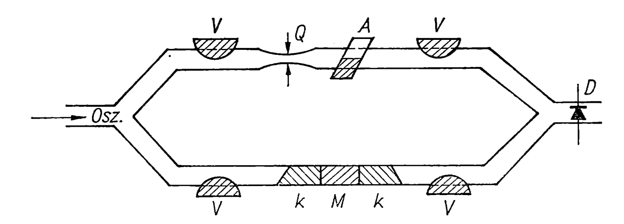


Abb. 10.38 Hohlrohrinterferometer nach [10.83]

drei Kammern K, M, K, die durch Ansaugen blasenfrei mit Flüssigkeit gefüllt sind. Zwischen den Vorkammern K, die mit dem unpolaren Lösungsmittel gefüllt sind, befindet sich in der Meßkammer M die zu untersuchende Dipollösung. Zur Reflexverminderung sind die Glimmerfenster (50 μm dick) der Vorkammern abgeschrägt; zwischen K und M findet wegen des geringen Unterschieds der Dielektrizitätskonstanten keine Reflexion statt. Als Phasen-

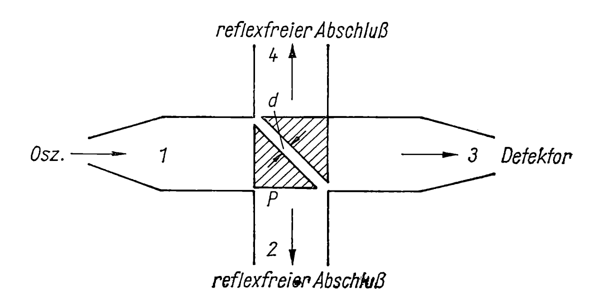


Abb. 10.39 Doppelprismenmethode

meßglied dient die Quetschleitung Q (s. § 8.641) mit Meßuhr und Fühlhebelübersetzung, mit der noch Phasenwinkeländerungen von 0,5° zu messen sind. Der Dämpfer A besteht aus einer Kunststoffolie mit einem Überzug aus kolloidalem Graphit, die mit etwa 30° Neigung gegen die Rohrachse verschoben wird. Das Interferometer wird mit einem Reflexklystron im Zentimeterwellenbereich betrieben; der Abgleich wird am Detektor D festgestellt.

Für den Wellenlängenbereich unterhalb von 0,1 cm haben TAUB und HINDIN [*10.157*] eine quasioptische Meßanordnung (Abb. 10.39) angegeben, in der das Doppelprisma P aus dem zu untersuchenden (verlustarmen) Material besteht. Die bei *1* eintretende polarisierte Welle wird am Luftspalt der Dicke d zwischen den Prismen zum Teil reflektiert, so daß die bei *3* austretende Strahlung, die in einem Detektor gemessen wird, eine Funktion des Prismenabstandes d, der Dielektrizitätskonstanten und der Frequenz ist. Die Meßgenauigkeit wird mit 0,5% angegeben.

10.66 Messung der Dielektrizitätskonstanten bei freier Wellenausbreitung

Bei sehr hohen Frequenzen bieten Verfahren mit freier Wellenausbreitung zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten und des Verlustfaktors gewisse Vorteile. Die Methoden beruhen auf dem optischen Analogon; so können z. B. Prismen aus der zu untersuchenden Substanz hergestellt und deren Brechungseigenschaften mit ebenen Wellen gemessen werden. Auch das in Abb. 8.32

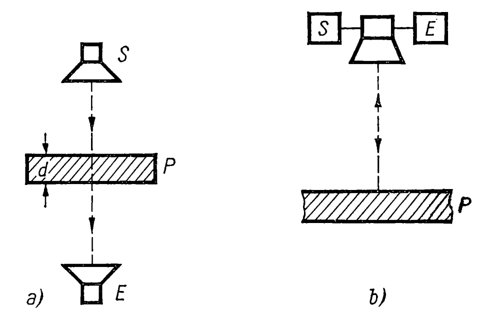


Abb. 10.40 Messung der Dielektrizitätskonstanten bei freier Wellenausbreitung: Transmissionsmethode (a), Reflexionsmethode (b)

dargestellte Fabry-Pérot-Interferometer sowie die Phasenmeßbrücke nach Abb. 8.34 sind für Messungen an dünnen, planparallelen Platten brauchbar.

Im einfachsten Fall, der in Abb. 10.40a dargestellt ist, wird die Transmission der vom Strahler S ausgehenden Welle im Empfänger E gemessen, wobei die Platte P einen großen Verlustfaktor besitzen muß, um Mehrfachreflexionen zu unterbinden. Durch zwei Messungen mit zwei verschiedenen Plattendicken läßt sich die gesuchte Dielektrizitätskonstante ermitteln [*10.69*].

Das in Abb. 10.40b skizzierte Verfahren mit senkrechter Inzidenz beruht auf der Abhängigkeit des Reflexionsfaktors von der Dielektrizitätskonstanten.

Es benutzt nur *einen* Strahler und eine Hybridverzweigung für den Sender S und den Empfänger E.

Über die theoretischen Grundlagen dieser Verfahren siehe [*10.43*] sowie § 10.61. Meßbeispiele siehe [*10.132*] sowie CUMMING [*10.33*], der die Reflexionskoeffizienten von *Eis* und *Schnee* bei schrägem Einfall mit 3,2 cm Wellenlänge gemessen hat.

10.67 Meßwerte im Zentimeterwellenbereich

Über Messungen im Mikrowellenbereich an verschiedenen *Gasen* siehe [*10.9, 10.15, 10.52*]. In *Tabelle 10.9* sind nach [*10.122*] die Brechungsindizes einiger *Gase* zusammengestellt.

Tabelle 10.9 Brechungsindex von Gasen bei 0 °C und 760 Torr

Gas	$(n - 1) \cdot 10^6$	Frequenz GHz
Luft	288,1	9
(trocken,	288,15	24
CO_2-frei)	287,7	72
Ar	277,8	24
	277,7	72
CO_2	494,7	24
	495,2	48
He	35,0	9
	34,5	48
H_2	136,0	9
	135,8	48
N_2	294,1	9
	294,1	24
	294,1	72
O_2	266,2	9
	266,4	24
	263,9	72

Angaben über die Dielektrizitätskonstante und $\tan \delta$ von *Flüssigkeiten* siehe [*10.27, 10.28, 10.63* (Wasser), *10.19* (Alkohole), *10.62, 10.82, 10.97, 10.99, 10.100, 10.129, 10.145*]; *flüssiger Luft* [*10.39*]. Angaben über *feste Dielektrika* siehe [*10.40*] und [*10.55*] (*Selen*), [*10.70*] (*Gläser*), [*10.65*] (*feste Isolierstoffe*), [*10.103, 10.31*] (*Pulver, Sande*) sowie [*10.115*] (*künstliche Dielektrika*).

In *Tabelle 10.10* sind Dielektrizitätskonstante und Verlustfaktor von festen und flüssigen Stoffen bei 10 GHz zusammengestellt.

Tabelle 10.10 Dielektrizitätskonstante und tan δ *fester und flüssiger Stoffe bei* 10 GHz

Material	ε'	$10^4 \tan \delta$	Material	ε'	$10^4 \tan \delta$
Eis (−12 °C)	3,17	7	Araldit	3,1	390
Calit	6,51	10,9	Bernstein	2,6	98
Ergan	5,2	4,3	Hartpapier	3,5	670
Hartporzellan	5,51	155	Hostaflon	2,3	3,9
Steatit	5,8	36	Naturgummi	2,1	40
Jenaer Glas	4,52	85	Paraffin	2,2	< 3
Glimmer	5,4	3	Pertinax	4,2	120
Quarzglas	3,78	1	Plexiglas	2,6	67
Styroflex	2,54	3,7	Wasser (dest.)	38	10300
Teflon	2,08	3,7	„ 25 °C	55	5400
Trolitul EF	2,54	3,7	„ 95 °C	54	2600
Zellophan	3,12	450	Äthylalkohol	8,9	8100
			Tetrachlorkohlenstoff	2,17	16
			Nitrobenzol	29,9	1800
			Siliconöl DC 500	2,63	270

10.7 Ferroelektrika [*10.42, 10.92, 10.142*]

Wie in § 10.27 kurz dargestellt, handelt es sich bei den *Ferroelektrika* um dielektrische Substanzen mit meist hoher Dielektrizitätskonstante und den Erscheinungen der Hysterese im elektrischen Wechselfeld. Ferroelektrische Stoffe stellen eine Untergruppe der *pyroelektrischen Materialien* dar, deren Kristalle anisotrope Eigenschaften wie Piezoelektrizität und eine spontane Polarisation zeigen, die temperaturabhängig ist. Wie in Abb. 10.5 gezeigt ist, beobachtet man im elektrischen Wechselfeld eine ferroelektrische Hysteresis. Ferroelektrizität tritt unterhalb einer charakteristischen Temperatur, der Curie-Temperatur, auf, deren Wert für einige Substanzen in *Tabelle 10.7* angegeben ist.

10.71 Ferroelektrische Materialien

In *Tabelle 10.11* sind eine Reihe von Kristallen, die man als ferroelektrisch ansehen kann, zusammengestellt und die zugehörigen Curie-Temperaturen angegeben. *Seignettesalz* (KNa-Tartrat) besitzt oberen und unteren Curie-Punkt, zwischen denen die Substanz ferroelektrisch ist. Das Salz besitzt eine komplizierte Kristallstruktur, und es scheint, daß das ferroelektrische Verhalten eng mit dem Molekülwasser zusammenhängt. Eine 2. Gruppe ferroelektrischer Kristalle, zu der als typischer Vertreter das primäre *Kaliumphosphat* KH_2PO_4 sowie isomorphe Salze gehören, besitzen Wasserstoffbrücken als ferroelektrisch wirksame Komponente. Die 3. Gruppe sind *Ionenkristalle* mit Perovskit- und Ilmenit-Struktur (vgl. Abb. 10.6), deren bekanntester Vertreter *Bariumtitanat* $BaTiO_3$ ist.

Tabelle 10.11 Ferroelektrische Substanzen

Kristall	Struktur	T_c K	P_s $\mu C/cm^2$
$NaK(C_4H_4O_6) \cdot 4H_2O$ (Seignettesalz)	komplex	297 (oben) 255 (unten)	0,27
$NaK(C_4H_2D_2O_6) \cdot 4H_2O$	„	308 (oben)	0,37
	„	251 (unten)	
$LiNH_4(C_4H_2D_2O_6) \cdot H_2O$	„	106	0,21
KH_2PO_4	tetragonal	123	5,32
KD_2PO_4	„	213	9,0
RbH_2PO_4	„	147	—
RbH_2AsO_4	„	111	
KH_2AsO_4	„	96,5	
KD_2AsO_4	„	162	
CsH_2PO_4	„	160	
CsH_2AsO_4	„	143	
CsD_2AsO_4	„	212	
$BaTiO_3$	Perovskit	380	26,0
$KTaO_3$	„		
$NaTaO_3$	„		
$KNbO_3$	„	708	27,6
$PbTiO_3$	„	763	
$LiTaO_3$	Ilmenit		23,3
$LiNbO_3$	„		
WO_3	Perovskit	220 (?)	
$Cd_2Nb_2O_7$	„	187	1,80
$C(NH_2)_3\,Al(SO_4)_2 \cdot 6H_2O$	komplex		0,35
$C(NH_2)_3\,Cr(SO_4)_2$	„		0,33
$C(NH_2)_3\,Ga(SO_4)_2$	„		0,33
$C(NH_2)_3\,Al(SeO_4)_2$	„		0,45
$C(NH_2)_3\,Cr(SeO_4)_2$	„		0,47

Im Gegensatz zu normalen Dielektrika, bei denen die Dielektrizitätskonstante mit fallender Temperatur abnimmt, steigt sie bei ferroelektrischen Substanzen an, geht bei der Curie-Temperatur T_c durch ein scharfes Maximum und fällt dann weiter mit sinkender Temperatur. Auch die dielektrische Suszeptibilität χ nimmt zu; oberhalb von T_c gehorcht χ dem Curie-Weiss-Gesetz, d. h.,

$$\chi = \frac{C}{T - T_c}, \tag{10/83}$$

worin C die Curie-Konstante ist. In Abb. 10.41 sind für *Kaliumphosphat* und *Seignettesalz* die relative Dielektrizitätskonstante ε_r und die spontane Polarisation P_s als Funktion der Temperatur dargestellt.

Die hohe Dielektrizitätskonstante ist in der ferroelektrischen Phase, besonders in einachsigen Kristallen, stark anisotrop.

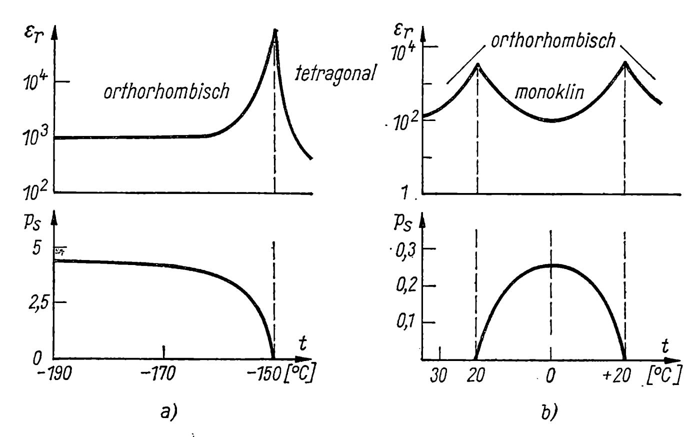


Abb. 10.41 Dielektrizitätskonstante und spontane Polarisation: KH_2PO_4 (a), Seignettesalz (b)

10.72 Messung der Dielektrizitätskonstante und des Verlustfaktors

Die Dielektrizitätskonstante ferroelektrischer Substanzen läßt sich unter gewissen Voraussetzungen mit den in den §§ 10.5 und 10.6 besprochenen Methoden messen. Wegen der großen Absolutwerte von ε' liefern auch einfache Meßverfahren ausreichende Genauigkeit. Als Beispiel ist in Abb. 10.42 eine Anordnung zur Aufnahme der Hysteresis mit dem ESO dargestellt, bei der der Meßkondensator C_x und die Vergleichskapazität C in Reihe an der Sekundärwicklung des Transformators $Ü$ liegen. Auf dem Schirm des ESO

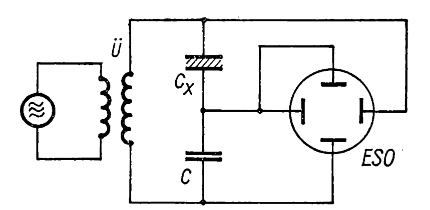


Abb. 10.42 Aufnahme der Hysteresiskurve von ferroelektrischen Substanzen

entsteht ähnlich wie in Abb. 10.6 die Hysteresiskurve $P = f(E)$. Über einen genauen Hysteresisschreiber siehe [*10.151*]. Von DIAMANT et al. [*10.36*] wird eine Brückenmethode zu diesem Zweck beschrieben. Weitere Methoden, speziell für $BaTiO_3$, siehe [*10.165, 10.173, 10.91*].

Die Dielektrizitätskonstante bei *hohen* Frequenzen wird z. B. von SCHMITT [*10.149*] in einem Rechteckhohlleiter bei TE_{10}-Anregung und 9,4 GHz gemessen, wobei die Probe ($BaTiO_3$) die Form einer dünnen Scheibe hat. Die ε_r-Werte liegen abhängig von der Sintertemperatur des Präparats zwischen 170 und 400 bei 9,4 GHz.

JÄCKLE [*10.87*] beschreibt eine Hohlleiterbrückenanordnung für 10 GHz für die Messung der komplexen Dielektrizitätskonstanten von *Seignettesalz*

in Abhängigkeit von der Temperatur und einer elektrischen Vorspannung Über weitere Messungen an $BaTiO_3$ bei hohen Frequenzen siehe [*10.90, 10.133, 10.121*]. Der Einfluß von *Druck* auf die Dielektrizitätskonstante von $BaTiO_3$ wird von MARKS et al. [*10.109*] gemessen. MÜSER [*10.119*] untersuchte mit einer speziellen Meßanordnung die dielektrische Nichtlinearität von *Seignettesalz*, die sich nach MÜLLER durch die Gleichung

$$E = AD + BD^3$$

darstellen läßt, und ermittelte die Konstanten A und B.

10.73 Elektrostriktion

Unter *Elektrostriktion* versteht man die elastische Deformation eines Dielektrikums in einem elektrischen Feld. Für die Volumenänderung ΔV in einem Feld E bei konstantem Druck und konstanter Temperatur gilt

$$\Delta V_{p,T} = -V \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_T \frac{E^2}{8\pi}.$$

Da ε mit p zunimmt, ergibt sich im Feld E eine Kontraktion. Sie ist auch in dipollosen Flüssigkeiten nachzuweisen [*10.59*]. Von SCHMIDT [*10.147*] ist die Elektrostriktionskonstante Q_{11} von $BaTiO_3$ bestimmt worden.

10.74 Anwendungen von Ferroelektrika

Die erst in den letzten 20 Jahren entwickelten keramischen Ferroelektrika mit Dielektrizitätskonstanten von über 1000 und relativ kleinen Verlustwinkeln werden vor allem beim Bau von Miniaturkondensatoren angewandt. Die hohe Spannungsabhängigkeit von ε' kann zum Bau nichtlinearer Kondensatoren und dielektrischer Verstärker benutzt werden, die allerdings eine geringere Verstärkung als die magnetischen Geräte besitzen.

Große Bedeutung haben die ferroelektrischen Materialien als *elektromechanische Wandler*, d. h. Schallschwinger, Tonabnehmer, Beschleunigungsmesser und als Informationsspeicher. Näheres siehe [*10.72, 10.124, 10.127, 10.155*].

10.75 Elektrete

Die von EGUCHI 1925 gefundenen *Elektrete* bestehen aus Mischungen von Wachsen, die während des Erstarrens einem elektrischen Feld ausgesetzt sind. Die Dipolmomente der organischen Moleküle werden im Feld ausgerichtet und geben ein permanentes elektrisches Moment, d. h. eine elektrische Flächenladung. Die Elektrete verlieren in feuchter Luft langsam ihre Ladung, die an der Oberfläche eine Feldstärke von der Größenordnung 1 kV/cm hervorbringt.

Nach WITTMANN [*10.170*] können Elektrete auch aus auspolymerisierten Kunstharzen hergestellt werden. Im Laufe der Zeit verringert sich ihre Ladung [*10.128*]. KHANNA [*10.94*] gibt ein Verfahren zur Herstellung sehr dünner Elektrete mit Dicken zwischen 0,025 und 0,1 mm aus Wachsmischungen an, deren Flächenladung mit zunehmender Dicke auf 10^{-9} C/cm² ansteigt.

10.8 Dielektrische Festigkeit [*10.4, 10.50, 10.164*]

Als *dielektrische Festigkeit* (Durchschlagsfestigkeit) eines Isolierstoffes bezeichnet man die kleinste elektrische Feldstärke, bei der sein Isolationsvermögen aufhört. Da diese Eigenschaft von großem praktischem Interesse ist, andererseits die Spannungsfestigkeit technischer Bauteile von der Formgebung und der Fertigung abhängt, sind physikalische Messungen an definierten Proben von grundlegender Bedeutung.

Der elektrische Durchbruch tritt bei hochwertigen Isolierstoffen plötzlich und in einem homogenen Feld überall gleichzeitig auf, in einem inhomogenen Feld zunächst nur an den Stellen maximaler Feldstärke. Der Zusammenbruch des Isolationsvermögens pflanzt sich als Entladungskanal oder Funke durch das Dielektrikum fort oder bleibt bei besonderer Elektrodenausbildung örtlich begrenzt.

Man unterscheidet die *Durchschlagsspannung* U_s als kleinste Spannungsdifferenz zweier durch das Dielektrikum getrennter Leiter. Der kürzeste Abstand s der Leiter wird mit *Schlagweite* bezeichnet. Näheres über die Mechanismen des elektrischen Durchschlags siehe Bd. V.

Die *Messung der dielektrischen Festigkeit* erfolgt bei *festen* Isolierstoffen mit plattenförmigen Versuchsproben, auf die an den Kanten abgerundete Metallelektroden von 2,5 oder 5 cm Durchmesser beiderseits angepreßt werden. Bei dickeren Platten werden zu beiden Seiten kugelförmige Einsenkungen angebracht und entsprechende Elektroden benutzt. Über Messung im HF-Bereich siehe [*10.25*].

In *Flüssigkeiten* werden meist Kupferelektroden von 5 cm Durchmesser im Abstand von 2,5 mm verwendet. Über die Durchschlagsfestigkeit von *Helium* siehe [*10.13*]. Reine nichtpolare Flüssigkeiten wie die Paraffine besitzen spezifische Widerstände von mehr als 10^{18} Ω cm und Durchbruchsfeldstärken von 10^6 V/cm.

Die elektrische Festigkeit von *Gasen* wird bei Funkenstrecken zur Messung hoher Spannungen benutzt. In Luft beträgt die Durchbruchsfeldstärke etwa 30 kV/cm. Unter Druck nimmt sie bis etwa 15 at linear mit dem Druck zu.

§ 11 MESSUNG MAGNETISCHER FELDGRÖSSEN

Die folgenden Abschnitte behandeln: in § 11 die Messung von magnetischen Feldgrößen, Induktion und magnetischem Fluß, in § 12 die Feststellung der magnetischen Eigenschaften der Materie und schließlich in § 13 die Erzeugung magnetischer Felder. Die Entwicklung ist auf diesen Gebieten in den letzten zwanzig Jahren rasch vorangeschritten, einmal durch die seit 1962 mögliche Herstellung hoher magnetischer Felder durch Verwendung harter Supraleiter, zum anderen durch die Entdeckung von Quantenerscheinungen in makroskopischen Systemen. Dies führte zur Entwicklung neuartiger Meßverfahren und Apparate, die sich durch die Erschließung neuer Meßbereiche oder ungewöhnliche Genauigkeit auszeichnen [*11.107*, *11.123*, *11.133*].

11.1 Allgemeines

11.11 Mechanische Kraftwirkung

In einem magnetischen Feld wird auf einen von Strom durchflossenen Leiter eine *Kraft* ausgeübt. Benutzt man die in Abb. 11.1 dargestellte Versuchsanordnung, bei der ein metallischer Leiter L, an Federn F aufgehängt, in zwei

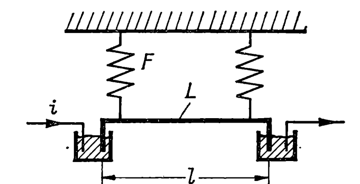


Abb. 11.1 Messung der magnetischen Induktion

Quecksilbernäpfchen taucht und senkrecht zur Zeichenebene ein Magnetfeld wirkt, und läßt durch L den Strom i fließen, so wird auf den Leiter die Kraft

$$F = Bil \sin \alpha \tag{11/1}$$

ausgeübt, wenn l die Leiterlänge und α der Winkel zwischen Strom und Feld ist. Den Proportionalitätsfaktor B bezeichnet man als *magnetische Induktion.* Als *Einheit* von B wird im SI-System das *Tesla* eingeführt, wobei

$$1\,\mathrm{T} = \frac{1\,\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2} = 1\,\mathrm{kg\,s^2\,A^{-1}} \tag{11/2}$$

ist. Die früher benutzte entsprechende elektromagnetische Einheit für die magnetische Induktion wird *Gauß* (G) genannt; es gilt die Umrechnungsformel

$$1\,\mathrm{G} = 10^{-4}\,\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2} = 10^{-4}\,\mathrm{T}. \tag{11/2a}$$

Die Größe $\boldsymbol{B}$ stellt einen Vektor dar, dessen Richtung der der Kraftlinien entspricht. Die gesamte Zahl von Kraftlinien, die durch eine bestimmte Fläche A hindurchgehen, findet man als Oberflächenintegral des Vektors $\boldsymbol{B}$ über diese Fläche. In völliger Analogie zu Gl. (10/2) ergibt sich daraus der *magnetische Induktionsfluß*

$$\Phi = \int \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}. \tag{11/3}$$

Da alle magnetischen Kraftlinien in sich geschlossen sind, muß das Oberflächenintegral über eine geschlossene Fläche verschwinden, d. h.

$$\oint \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0. \tag{11/4}$$

Als *Einheit* des magnetischen Induktionsflusses ergibt sich aus Gl. (11/2)

$$[\Phi] = 1\ \mathrm{Tm}^2 = 1\ \mathrm{Wb} = 1\ \mathrm{V\,s}, \tag{11/5}$$

wobei die früher benutzte Einheit *Maxwell* (M) 10^{-8} V s $= 10^{-8}$ Wb $= 1$ G cm^2 entspricht.

11.12 Kräfte auf bewegte Ladungen

Denkt man sich den Strom i durch eine mit der Geschwindigkeit v bewegte Ladung Q hervorgerufen, so wird mit $il = Qv$ aus Gl. (11/1)

$$F = BQv \sin\alpha \tag{11/6}$$

oder in Vektorenschreibweise

$$\boldsymbol{F} = Q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}). \tag{11/6a}$$

Die Anwendung dieser Beziehung zur Messung von $\boldsymbol{B}$ wird z. B. in § 11.8 (Magnetron) behandelt.

11.13 Induktionsgesetz

Wird der Leiter in Abb. 11.1 mit der Geschwindigkeit v im Feld B bewegt, so tritt an den Enden von L eine Spannung U_i auf, die einer elektrischen Feldstärke $E_i = U_i/l$ entspricht. Das *Induktionsgesetz* liefert den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit v des bewegten Leiters und der magnetischen Induktion B und lautet

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}. \tag{11/7}$$

Ist das Magnetfeld nicht homogen oder die Geschwindigkeit eine Funktion von Zeit oder Ort, so gilt

$$\mathrm{d}e_i = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{E}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{11/8}$$

oder für eine endliche Leiterlänge

$$e_i = \int_a^b (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{11/8a}$$

Da $(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = (\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{v})\boldsymbol{B}$ und $\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{v}$ die Fläche eines Parallelogramms ist, das von den Vektoren $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ und $\boldsymbol{v}$ gebildet wird, folgt aus Gl. (11/8)

$$\boldsymbol{E}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{B}(\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{B}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Phi_s}{\mathrm{d}t}, \tag{11/9}$$

wenn $\mathrm{d}\Phi_s$ der von der Leiterlänge $\mathrm{d}s$ geschnittene magnetische Fluß ist. In einer geschlossenen Leiterschleife wird die Spannung

$$e_i = \oint \boldsymbol{E}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{11/10}$$

induziert, wobei das Minuszeichen den Umlaufsinn der Induktionsspannung festlegt. Enthält die Leiterschleife N Einzelwindungen, so ist die rechte Seite von Gl. (11/10) mit N zu multiplizieren.

11.14 Durchflutungsgesetz

Das *Durchflutungsgesetz* beschreibt den Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke und dem erzeugenden Strom. Der experimentelle Nachweis dieses Gesetzes geschieht mit der in Abb. 11.2 dargestellten Meßanordnung: Der magnetische Spannungsmesser M (s. § 11.3) besteht aus einer

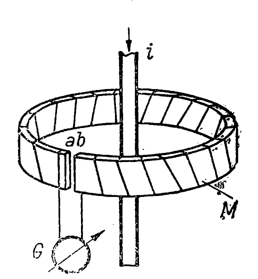


Abb. 11.2 Zum Durchflutungsgesetz

auf einen biegsamen Streifen vom Querschnitt A gewickelten Spule, deren Enden zum ballistischen Galvanometer G geführt sind. Besitzt die Meßspule N_1 Windungen/cm, so ist im Abschnitt $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ der Fluß $\mathrm{d}\Psi_s = N_1 A \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ verkettet, und der Gesamtfluß der Spule ergibt sich durch Integration über die gesamte Länge

$$\Psi_s = N_1 A \int_a^b \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{11/11}$$

Sind die Spulenenden a und b geschlossen und umschließt die Spule den Strom i, so findet man durch fluxmetrische Messung die Relation

$$\oint \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu\,\Theta, \tag{11/12}$$

die man *Durchflutungsgesetz* nennt. Die Größe

$$\Theta = i_1 + i_2 + i_3 + = \sum i_i \tag{11/12a}$$

heißt *Durchflutung* und stellt die Summe aller von der Meßspule umschlossenen Ströme dar. Die Größe μ ist eine Materialkonstante mit der Dimension

$$\frac{\mathrm{T\,m}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}},$$

da $1\,\mathrm{V\,s/A} = 1$ *Henry* $= 1\,\mathrm{H}$ ist. Im SI-System trennt man die Größe μ entsprechend

$$\mu = \mu_0 \mu_r \tag{11/13}$$

in die magnetische Permeabilität μ_r, die eine reine Maßzahl ist, und in die *magnetische Feldkonstante* oder *Induktionskonstante* μ_0, deren Betrag sich aus der historischen Entwicklung zu

$$\mu_0 = \frac{4\pi}{10}\,\frac{\mathrm{G\,cm}}{\mathrm{A}} = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \tag{11/14}$$

berechnet. Im Falle, daß μ eine Konstante ist, kann Gl. (11/12) auch in der Form

$$\oint \frac{\boldsymbol{B}}{\mu}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \Theta$$

geschrieben werden. Die Größe $\boldsymbol{B}/\mu$ stellt die neue Größe $\boldsymbol{H}$ dar, die man *magnetische Feldstärke* nennt; es gilt

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}. \tag{11/15}$$

Das Durchflutungsgesetz (11/12) erhält damit die einfache Form

$$\oint \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \Theta. \tag{11/12b}$$

Als Einheit der magnetischen Feldstärke dient im SI-System die Größe A/m (A/cm), wobei der Zusammenhang mit dem elektromagnetischen Maßsystem durch die Relation

$$1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}} = \frac{4\pi}{10}\ \mathrm{Oe\ (Oersted)}$$

hergestellt wird.

11.15 Magnetischer Dipol

Befindet sich das in Abb. 11.3 dargestellte, vom Strom i durchflossene Drahtrechteck mit den Kantenlängen a und b in einem homogenen Magnetfeld $\boldsymbol{B}$, dessen Komponente in der X-Y-Ebene $|\boldsymbol{B}|\cos\beta$ beträgt, so werden nach Gl. (11/1) lediglich auf die schmalen Seiten a Kräfte ausgeübt. Es ergibt sich ein Kräftepaar mit der Y-Richtung als Drehachse und mit dem Drehmoment

$$M = iab\,|\boldsymbol{B}|\cos\beta.$$

Da $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}$ ist, ergibt sich in Vektorschreibweise

$$\boldsymbol{M} = i(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = i\mu_0(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}, \tag{11/16}$$

wenn man den Ausdruck

$$\boldsymbol{m} = i\mu_0\boldsymbol{A} \tag{11/17}$$

als *magnetisches Dipolmoment* bezeichnet.

Die in den Gln. (11/1), (11/10) und (11/16) formulierten Gesetzmäßigkeiten werden bei der Messung der magnetischen Feldstärke angewandt. Darüber hinaus werden in den §§ 11.5 bis 11.8 Methoden behandelt, die auf anderen, vom Magnetfeld abhängigen Effekten beruhen.

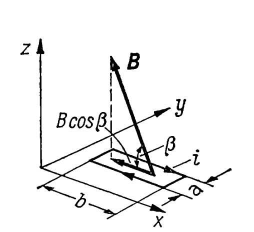


Abb. 11.3 Magnetisches Moment



Abb. 11.4 Cotton-Waage

11.2 Mechanische Magnetometer

Das *mechanische Magnetometer* besteht im einfachsten Fall aus einer stromdurchflossenen Spule oder einem kleinen Permanentmagnet, die an einem Torsionsfaden aufgehängt und dem zu messenden Magnetfeld ausgesetzt werden. Das auf das Meßsystem ausgeübte (mittels Lichtzeiger oder nach einer Kompensationsmethode gemessene) Drehmoment ist nach Gl. (11/16) dem Feld H proportional.

Beim gewöhnlichen Magnetometer, das nur *ein* Magnetchen enthält, dient als rücktreibende Kraft die Horizontalkomponente des *Erdfeldes*. Das *astatische Magnetometer* besteht aus zwei entgegengesetzt gepolten Magnetchen (Nadeln) gleichen magnetischen Moments, die an einer senkrechten Verbindungsachse befestigt sind. Die Verbindungsstange (meist aus Al) wird an einem Quarzfaden oder Pt–Ir-Draht aufgehängt und ist zum Schutz gegen Luftströmungen von einem Glasrohr umgeben. Der untere Magnet wird in das zu messende Feld gebracht.

Die Magnetchen können auch durch stromdurchflossene Spulen ersetzt werden; man kommt damit zu den unempfindlicheren, aber bequem regelbaren *Drehspulmagnetometern*.

Als *Stromwaagen* werden direkte Anwendungen von Gl. (11/1) bezeichnet, die meist unbequem zu handhaben sind, aber den Vorteil der absoluten Bestimmung von B besitzen. Die Cotton-Waage [*11.22*], bei der ein relativer Fehler von nur $2 \cdot 10^{-5}$ auftritt, ist in Abb. 11.4 dargestellt. Sie besteht aus dem Waagebalken W, der Stromschleife S, die über Quecksilbernäpfchen in Achsennähe

mit Strom versorgt wird, und dem Gegengewicht G, das auf einem Kreisbogen gleichen Durchmessers wie S abrollt. Da die bogenförmigen Teile von S nur radiale Kräfte im (senkrecht zur Zeichenebene liegenden) Magnetfeld ausüben, wirkt als Leiterlänge nur das Drahtstück ab. In einem Feld von 1 T und $\overline{ab} = 1$ cm wird die bei einem Meßstrom von 1 A ausgeübte Kraft etwa 1 p. Mit der obengenannten Genauigkeit ist heute das gyromagnetische Verhältnis des Protons (s. § 11.61) bekannt [*11.126*].

Bei dem von Birss et al. [*11.8*] weiter entwickelten *Torsionsmagnetometer*, das vor allem zur Messung magnetischer Stoffgrößen bei verschiedenen Temperaturen angewandt wird, dient zur Momentmessung eine Brückenanordnung mit Dehnungsmeßstreifen (s. Bd. I, § 10.52). Die Anwendung bis herab zu 4,2 K wird in [*11.7*] beschrieben. Über verbesserte Torsionsmagnetometer und solche mit einer photoelektrischen Kompensationseinrichtung siehe [*11.18*, *11.65*].

Von Parton et al. [*11.97*] wird ein auf der Kraftmessung beruhendes Magnetometer beschrieben, bei dem eine Metallfolie vom Strom durchflossen wird. Das Meßelement befindet sich zwischen zwei Kondensatorplatten zur elektrostatischen Kompensation und Messung des Ausschlags. Das Instrument ist für Felder oberhalb von 100 A/cm geeignet. Nach einem Vorschlag von Birebent [*11.6*] wird ein dünner Draht, der senkrecht zum auszumessenden Magnetfeld steht, von Wechselstrom durchflossen und die dabei entstehenden Kräfte mittels eines piezoelektrischen Abtastsystems gemessen. Mechanische

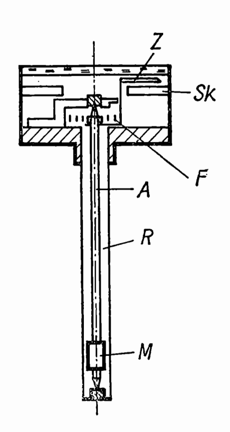


Abb. 11.5 G.E.-Magnetometer

Eigenfrequenz des Meßsystems und die des Wechselstroms fallen zusammen, um die Resonanzüberhöhung ausnutzen zu können. Das Verfahren ist über einen weiten Feldbereich anwendbar.

Das G.E.-Gaußmeter nach Mendelsohn [*11.86*] besteht, wie in Abb. 11.5 schematisch gezeigt ist, aus der in Spitzen gelagerten Achse A, an deren unterem Ende ein quermagnetisiertes Permanentmagnetchen M befestigt ist, der Rückstellfeder F und dem Zeiger Z, der über der Skala Sk spielt. Die Achse

befindet sich innerhalb des Rohres R aus nichtmagnetischem Material. Die Wirkung des Instruments beruht auf der Messung des mechanischen Moments im Feld H, das nach Gl. (11/16) auf den Magneten M mit dem magnetischen Moment m ausgeübt wird. Für kleine Felder wird ein zylindrischer Magnet von etwa 2 mm Durchmesser benutzt, der aus einer Pt–Co-Legierung mit etwa 6000 A/cm Koerzitivkraft besteht. Hiermit läßt sich ein Meßbereich von 25 A/cm bei Vollausschlag erreichen.

Oberhalb von etwa 0,5 T wird anstelle des Permanentmagneten ein Meßsystem aus *pyrolytischem Graphit* verwendet, der stark anisotropischen Diamagnetismus besitzt. In der c-Richtung beträgt die magnetische Suszeptibilität $\chi_c = -2{,}7 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{cm^3/g}$ und in der hexagonalen Ebene $\chi_{ab} = -6{,}3 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{cm^3/g}$. Bezeichnet man den Winkel zwischen dem zu messenden Feld und der c-Richtung mit α, so findet man das auf das System ausgeübte Drehmoment aus der Beziehung

$$M = (\chi_c - \chi_{ab})\, V B^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha\right), \qquad (11/18)$$

wenn V das Volumen der diamagnetischen Meßprobe ist. Die experimentellen Werte stimmen gut mit den aus Gl. (11/18) errechneten überein. Von FISCHBACH [*11.39*] wurde darauf hingewiesen, daß eine hohe Temperaturabhängigkeit der χ-Werte beim Gebrauch des G.E.-Magnetometers zu berücksichtigen ist. Andererseits läßt sich das Instrument auch bei sehr hohen Feldern von 4 T und darüber benutzen.

Zur Feldstärkemessung mittels mechanischer Methoden gehört auch das schon lange bekannte Verfahren, die gesuchte Feldstärke aus der *Steighöhe h* paramagnetischer Flüssigkeiten zu bestimmen. Die Feldstärke H berechnet sich aus der Formel

$$H = C\sqrt{h}, \qquad (11/19)$$

wo die Konstante C der Volumensuszeptibilität proportional ist. Mit *Eisenchloridlösung* findet man in einem Feld von etwa 6 kA/cm den Wert $h = 1$ cm.

11.3 Induktionsmethoden [*11.90*]

Die *Induktionsmethoden* beruhen auf der Anwendung der Gl. (11/10), wonach in einer feststehenden Spule mit der *Windungsfläche NA* in einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld H die Spannung

$$\boldsymbol{e}_i = -NA\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}\,\mu_0 \qquad (11/10\mathrm{a})$$

induziert wird. Die Induktionsspannung e_i läßt sich mit einem ballistischen Galvanometer (s. § 2.22) messen, wenn bei feststehender Probespule das zu messende Feld ab- und angeschaltet werden kann. Anderenfalls kippt man die Probespule um 180° oder zieht sie schnell aus dem Feld heraus. Schließlich kann man auch die Probespule um eine in der Spulenebene liegende Achse schnell rotieren lassen und die Wechselspannung messen. Die Verfahren,

welche unmittelbar durch Integration der Gl. (11/10a), d. h.

$$\int e_i \, dt = (\Phi_1 - \Phi_2) = NA(H_1 - H_2)\mu_0, \qquad (11/10b)$$

die Feldstärke oder deren Differenz liefern, werden in § 11.4 unter „*Fluxmeter*" behandelt.

11.31 Bewegte Spule

Mit Induktionsspulen ist wegen der ungenauen Ausmessung der Windungsfläche $N \cdot A$ eine absolute Meßgenauigkeit von höchstens 0,5% zu erreichen. Andererseits erlauben sie auch in stark inhomogenen Feldern eine nahezu punktförmige Messung. Nach Herzog und Tischler [*11.56*] läßt sich mit einer Zylinderspule, deren Länge sich zum Außendurchmesser wie 0,72:1 verhält, unabhängig von der Spulengröße auch in inhomogenen Feldern das Zentralfeld in Spulenmitte auf 1% genau angeben. Zum Ausmessen schwacher Feldgradienten in starken Feldern muß die Spule mit einer exakten Führung durch das Meßfeld bis zu einem festen Anschlag bewegt werden; Einzelheiten siehe [*11.75, 11.99, 11.120*].

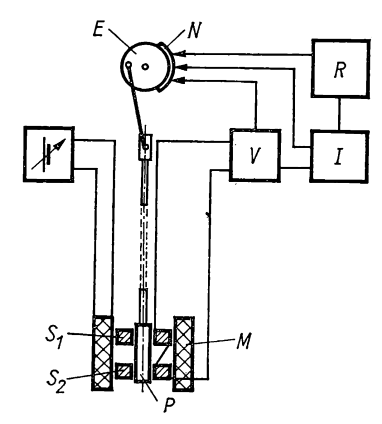


Abb. 11.6 Automatische Magnetisierungsmessung

Für Magnetisierungsmessungen kann auch die Probe im konstanten Magnetfeld aus der Induktionsspule entfernt und die Induktionsspannung registriert werden. Bei der von Ward [*11.129*] angegebenen Meßanordnung, die zur Magnetisierungsmessung an *Supraleitern* dient, sind, wie in Abb. 11.6 dargestellt ist, zwei kleine Induktionsspulen S_1 und S_2 koaxial innerhalb des supraleitenden Magneten M angebracht, deren Ausgänge gegeneinander geschaltet sind. Die zylindrische Probe P wird durch einen motorisch angetriebenen Exzenter E periodisch hin- und herbewegt, so daß am unteren Totpunkt von E die Probe in beiden Spulen, am oberen nur in der oberen Spule steckt. Das Ausgangssignal ist daher der Magnetisierungsänderung des Supraleiters proportional. Es wird im Verstärker V verstärkt, in einer Integrationsstufe I integriert und im X, Y-Schreiber R (s. § 2.66) über der Feldstärke registriert.

Durch eine mit dem Exzenter verbundene Nockenscheibe N werden V und I kurz vor dem Herausziehen der Probe eingeschaltet. Die Dauer eines Meßzyklus beträgt etwa 10 s, die Genauigkeit wird mit 1% angegeben.

11.32 Rotierende Spule

In der Handhabung bequemer sind Magnetometer, bei denen die Meßspule auf der Achse eines schnellaufenden Motors sitzt und die induzierte Wechselspannung direkt oder phasengleichgerichtet angezeigt wird.

Beim rotierenden Magnetometer nach JÜRGENS [*11.64*] besitzt die Feldspule mit 500 Windungen nur 2 mm Durchmesser und sitzt auf der Achse eines 50-Hz-Synchronmotors. Bei einem Meßbereich zwischen 30 und 30000 A/cm beträgt die Meßgenauigkeit etwa 3%.

Die von der Fa. Rawson hergestellten „Gaußmeter“ beruhen auf diesem Prinzip, besitzen jedoch auf der Motorachse einen kleinen Permanentmagneten, der in Phase mit dem Signal der eigentlichen Induktionsspule in einer feststehenden Spule ein Vergleichssignal erzeugt. Beide Spannungen werden in einem Spannungsteiler miteinander verglichen. Nach diesem Verfahren fallen die von der schwankenden Drehzahl der Spule herrührenden Fehler heraus und ist eine Meßgenauigkeit von 1% zu erreichen. Diese Instrumente werden für Meßbereiche von 100 bis 40000 A/cm gebaut. Zu diesen Geräten gibt es den in Abb. 11.7 dargestellten Meßkopf von 10 mm Durchmesser, der zwei Induktionsspulen S_1 und S_2 enthält, die über zwei Kegelräder in zwei zueinander senkrechten Achsen angetrieben werden und die Messung der axialen Feldstärke in Zylinderspulen gestattet.

Feldstärkemesser mit rotierender Spule lassen sich auch für die Messung sehr schwacher Felder bis herab zu 10^{-5} A/cm benutzen, wenn das Induktionssignal in einem Selektivverstärker verstärkt wird. Nach PENN et al. [*11.98*] wird hierzu ein 30-Hz-Verstärker mit einer Bandbreite von 1 Hz und einem Verstärkungsfaktor von 8000 verwendet. Als Anzeigegerät dient ein ESO, wobei eine Empfindlichkeit von $4 \cdot 10^{-5}$ A/cm erreicht wird.

Eine im Vergleich zu [*11.98*] verbesserte Anordnung nach WUNDERER [*11.139*] auf der Basis des Rawson-Instruments addiert algebraisch einen Teil der Referenzgeneratorspannung zum Meßsignal (mit 180° Phasendifferenz) und benutzt zum genauen Nullabgleich einen Schmalbandverstärker ähnlich wie oben, mit dem Differenzspannungen von 0,1 μV gemessen werden können.

Weitere Ausführungsformen für verschiedene Meßbereiche siehe [*11.14, 11.66, 11.91, 11.103, 11.105*]. Anstelle einer zweiten Spule in einem Vergleichsfeld kann man auch durch einen rotierenden Kondensator, der ebenfalls eine sinusförmige Vergleichsspannung liefert, das Meßsignal kompensieren [*11.16*] und erreicht eine Genauigkeit von $4 \cdot 10^{-4}$ bei mittleren Feldern.

11.33 Magnetometer mit schwingender Probe

Zur Messung des magnetischen Moments kleiner Proben werden neben den in § 12 behandelten Methoden der Kraftmessung im inhomogenen Feld und anderen Verfahren *Magnetometer* mit schwingender Probe verwendet. Das

von FONER [*11.41*] angegebene und in Abb. 11.8 dargestellte Instrument besteht aus einem elektrodynamischen Antriebssystem A, das eine dünnwandige Hohlachse B in senkrechte Schwingungen von 90 Hz versetzt, der Meßprobe P_1 sowie der Vergleichsprobe P_2 in Form eines quermagnetisierten Plättchens und den beiden Induktionsspulenpaaren S_1 und S_2. Das von außen angelegte Meßfeld steht senkrecht zur Achse B, die von einem Schutzrohr R,

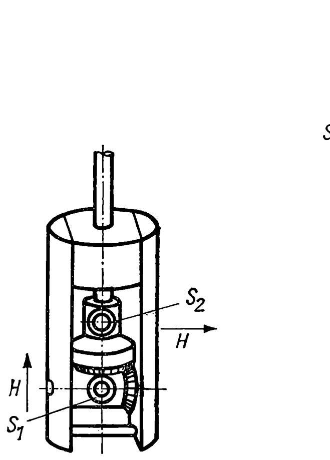




Abb. 11.7 Doppelinduktionsspule

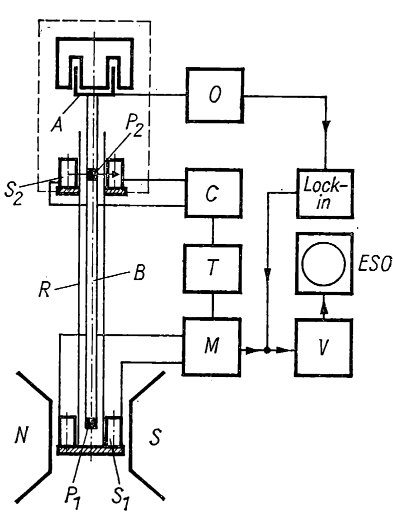


Abb. 11.8 Foner-Magnetometer

das evakuiert werden kann, umgeben ist. Die Einzelspulen von S_1 bzw. S_2 sind parallel und in gleichem Abstand zu B, d. h. mit ihrer Achse senkrecht zum Außenfeld H, orientiert und so kurz, daß bei der Bewegung von P_1 bzw. P_2 in den Spulen möglichst große Induktionssignale entstehen. Das in S_2 erzeugte Referenzsignal wird dem Phasenschieber C zugeführt und gelangt über den Spannungsteiler T in die Mischstufe M, die gleichzeitig das Meßsignal von S_1 erhält. Phasenschieber, Teiler und Mischstufe bilden eine geeichte Wechselspannungsbrücke, deren Ausgang über den Schmalbandverstärker V im ESO abgeglichen wird.

Bei einer Schwingungsamplitude zwischen 0,1 und 1 mm und einer Frequenz um 100 Hz sind bei einem Außenfeld von 1 T Suszeptibilitätsänderungen von $6 \cdot 10^{-11}$ bis $6 \cdot 10^{-12}$ pro Gramm nachweisbar.

Weitere Ausführungsformen und Verbesserungen siehe [*11.89, 11.25, 11.141*]. Das Gerät ist auch für Messungen bei sehr tiefen Temperaturen geeignet.

11.34 Magnetometer mit schwingender Spule

Anstelle der schwingenden Probe wird vielfach das Meßprinzip umgekehrt und bei feststehender Probe das Feld um diese mit einer schwingenden Spule ausgemessen. Diese von SMITH [*11.119*] zuerst verwirklichte Methode verwendet

ebenfalls ein Lautsprechersystem zum Antrieb der Schwingspulen, deren Achsen — wie aus Abb. 11.9 ersichtlich — in Schwingungsrichtung liegen. Die Einzelspulen S_1 und S_2 besitzen einen Wicklungsquerschnitt von $5 \times 5\,\mathrm{mm}^2$, einen Außendurchmesser von 20 mm und sind 2 mm voneinander entfernt. Die Signalspannung in den Spulen S wird durch die Induktionsspannung

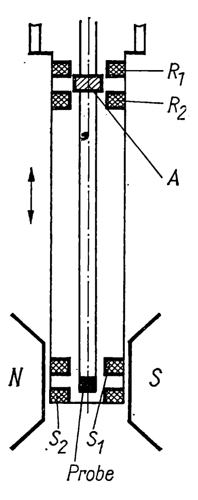


Abb. 11.9 Magnetometer mit Schwingspulen

in zwei gleichen Spulen R_1 und R_2 außerhalb des Meßfeldes kompensiert, wobei ein Vergleichsdipol durch die Spule A erzeugt wird. Durch Verändern des Stromes in A wird schließlich das Ausgangssignal über einen Vorverstärker und einen Lock-in-Verstärker auf Null abgeglichen. KAESER et al. [*11.67, 11.68*] wenden das Magnetometer für Suszeptibilitätsmessungen bei sehr tiefen Temperaturen an, die mit einer adiabatischen Entmagnetisierungsapparatur erzeugt werden. Bei einer Antriebsfrequenz zwischen 30 und 180 Hz und einer Amplitude von 0,5 mm lassen sich Differenzen des magnetischen Moments von 10^{-13} Vscm nachweisen. Der Wärmezufluß durch die Meßvorrichtung beträgt weniger als 10 nW. Über Weiterentwicklungen siehe [*11.33*].

11.35 Direkte Induktionsmethode

Von KNIZAK [*11.72*] wird ein Verfahren zum Messen inhomogener magnetischer Felder angegeben, das die Umkehrung der in Bd. I, § 9.72 beschriebenen elektromagnetischen Pumpe für leitende Flüssigkeiten darstellt. Das Meßfeld wird senkrecht zu einem flachen, isolierenden Kanal mit seitlichen, einander gegenüberstehenden Elektroden angelegt und Quecksilber mit bekannter Geschwindigkeit durch diesen geleitet. Die an den Elektroden abgenommene Induktionsspannung ist dem Magnetfeld B proportional. Auf diese Weise können inhomogene Felder zwischen 0,01 T und vielen Zehntel Tesla punktweise gemessen werden.

11.4 Fluxmeter

Fluxmeter dienen zur unmittelbaren Messung der magnetischen Induktion B und magnetischer Momente durch Integration von $e_i\,dt$ nach Gl. (11/10b). Hierzu werden stark gedämpfte Galvanometer mit kleiner Richtkraft (vgl. § 2.224) benutzt oder elektronische Integratoren (s. § 5.32) eingesetzt, die mit dem Induktionssignal beschickt werden.

11.41 Drehspulfluxmeter [11.87]

In § 2.224 wird für das Kriechgalvanometer die Spannungsstoßempfindlichkeit $S'_{üf}$ in Gl. (2/84) angegeben, worin die Zeitkonstante für die Rückkehr des Anfangsausschlags von besonderer Bedeutung ist. Die Frage, ob für Messungen von Spannungsstößen das ballistische Galvanometer dem Fluxmeter vorzuziehen sei, hängt von der Änderungsgeschwindigkeit des Flusses ab. Das *Fluxmeter* ist besonders für die Registrierung relativ langsamer Feldänderungen geeignet; die Rückfallzeit t_k nach Gl. (2/85) soll mindestens 10 min betragen. Das *ballistische Galvanometer* dagegen mit einer Schwingungsdauer T_0 von maximal einigen Minuten ist in erster Linie zur Messung einer bestimmten Flußänderung, z. B. für die punktweise Aufnahme einer Hysteresiskurve geeignet. Über die Messung kleiner Unterschiede von Φ mit dem ballistischen Galvanometer siehe [*11.32*]. Von POHM et al. [*11.104*] wird ein hochempfindliches ballistisches Galvanometer zur Flußmessung beschrieben.

Für den praktischen Gebrauch wird die Empfindlichkeit eines Fluxmeters in Maxwell bzw. 10 nVs angegeben. *Zeigerinstrumente* besitzen einen Meßbereich von etwa 10 mVs, wobei einem Teilstrich eine Flußänderung von 0,1 mVs entspricht.

Fluxmeter mit Lichtzeiger mit einer großen wirksamen Zeigerlänge und fast richtkraftloser Bandaufhängung sind wesentlich empfindlicher; die größte Empfindlichkeit liegt bei 5 μVs und ist durch einen Regler im Verhältnis 1:400 einstellbar.

11.42 Fluxmeter mit verstärkter Dämpfung

Aus Gl. (2/85) geht hervor, daß die Rückkehrzeit t_k dem Produkt $D \cdot R$ umgekehrt proportional ist. Für die Messung kleiner magnetischer Flüsse, für die die Induktionsspule viele Windungen und daher großen Widerstand R besitzen muß, sind Instrumente mit elektronisch verstärkter Dämpfung besser geeignet.

Das Prinzip dieser Methode ist in Abb. 11.10 dargestellt. Das Fluxmeter-Meßsystem besteht aus der Doppelspule S_1, S_2 auf einem gemeinsamen Rähmchen und dem Verstärker V, der den Strom i_1 in S_1 und Induktionsspule M verstärkt der Wicklung S_2 zuführt. Durch einen einstellbaren Verstärkungsfaktor von V und den richtigen Phasenwinkel zwischen i_1 und i_2 läßt sich die Rückkehrzeit stark vergrößern. Das resultierende Drehmoment des Meßsystems erlaubt den Anbau eines Meßpotentiometers P, das das Anzeigeinstrument I bzw. den Schreiber R steuert. Instrumente dieser Art werden mit einer

maximalen Empfindlichkeit von 0,2 mVs und beliebig höheren einstellbaren Meßbereichen gebaut. Die noch übrigbleibende Drift ist kleiner als 0,1 Teilstriche/min.

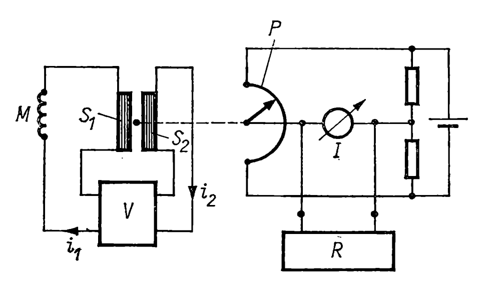


Abb. 11.10 Fluxmeter mit elektronisch verstärkter Dämpfung

11.43 Drehspulfluxmeter mit Driftkompensation

Für die experimentelle Aufnahme komplizierter Magnetisierungskurven ist die Verringerung der Drift des Fluxmetersystems von besonderer Bedeutung. Geht man von Gl. (2/45) aus, so kann man die Bewegungsgleichung des Fluxmeters durch

$$I\ddot{\varphi} + \frac{B^2 n^2 F}{R}\dot{\varphi} + D\varphi = -\frac{BnF}{R}\dot{\Phi} \qquad (11/20)$$

ausdrücken, wenn $\dot{\Phi}$ die zu messende Flußänderung bedeutet. Für verschwindendes Richtmoment D folgt aus Gl. (11/20)

$$\varphi = -\frac{\Phi}{BA}. \qquad (11/21)$$

Es gibt eine Reihe von Methoden, das Richtmoment D durch geeignete Schaltungen stark zu verringern und damit die Rückfallzeit t_k zu erhöhen. Hierzu ist jede Anordnung geeignet, mit der eine dem Ausschlag φ proportionale Spannung $U = S\varphi$ erzeugt und dem Meßsystem zugeführt werden kann. Anstelle von Gl. (11/20) tritt dann der Ausdruck

$$I\ddot{\varphi} + \frac{B^2 N^2 A^2}{R}\dot{\varphi} + \left(D - \frac{SBA}{R'}\right)\varphi = -\frac{BNF}{R}\dot{\Phi}, \qquad (11/22)$$

in dem R' der abgeänderte Schließungswiderstand ist. Für

$$D = \frac{SAB}{R'} \qquad (11/23)$$

verschwindet die resultierende Richtkraft.

Von TREBBLE [*11.125*] wird Gl. (11/22) dadurch realisiert, daß durch einen induktiven Meßwertgeber der Ausschlag des Fluxmetersystems fast rückwirkungsfrei in eine Spannung umgesetzt und in Serie mit Induktionsspule

und Meßsystem dem Meßkreis zugeführt wird. In Abb. 11.11a ist der Meßwertgeber, in Abb. 11.11b die gesamte Meßanordnung dargestellt. Die Drehspule D des Fluxmeters ist mit einer flachen, koaxialen Induktionsspule F versehen, die sich zwischen der geteilten Primärspule G (5 cm lang, je 2500 Windungen) befindet. Wird die Primärspule von einem 5-kHz-Oszillator mit dem Strom i_0 erregt, so entsteht an den Enden von F die Spannung $u_F = M_0 i_0 \sin\varphi$, wenn M_0 die Gegeninduktivität für $\varphi = 90°$ und φ den Winkel zwischen der Achse von G und der Ebene der Spule F bedeutet. Diese Spannung wird über

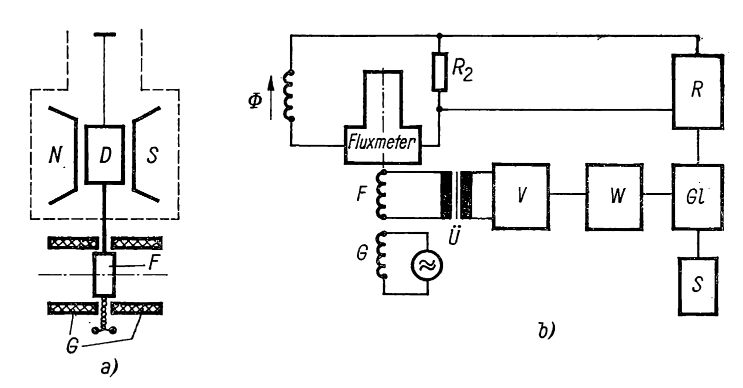


Abb. 11.11 Registrierfluxmeter nach TREBBLE [*11.125*]

den Transformator $Ü$ dem Verstärker V zugeführt, in W gefiltert und in Gl gleichgerichtet. Die dem Gleichrichter Gl entnommene Ausgangsspannung ist dem Instrumentenausschlag proportional und wird durch den Schreiber S registriert; dieselbe Spannung wird über das Rückkopplungsglied R (Widerstandskombination) dem Meßkreis am Serienwiderstand R_2 zugeführt und bewirkt die gewünschte Herabsetzung des Richtmoments.

Anstelle eines induktiven Gebers für den Instrumentenausschlag eignen sich auch optische Methoden der Ausschlagsvergrößerung (vgl. § 2.282), die für fluxmetrische Anwendungen zuerst von EDGAR [*11.34*] angegeben wurden. In Abb. 11.12 ist ein auf diesem Prinzip beruhender *fotoelektrischer Integrator* nach CIOFFI [*11.20*] vereinfacht dargestellt. Hierbei wird der Ausschlag des Fluxmeterinstruments F mit Hilfe der Fotozellen F_1 und F_2 und des Prismas P zur Strahlteilung in eine Spannung umgesetzt und dem Gitter der Röhre E zugeführt. Der Röhrenstrom i_p ist ein Maß für die in der Induktionsspule Sp erzeugte Spannung und wird induktiv über den Transformator $Ü$ an den Meßkreis übertragen. Zur Empfindlichkeitsregelung dient das Netzwerk ER; dem Schreiber R ist der Ayrton-Regler AR (s. § 2.265) vorgeschaltet. Mit dieser Methode läßt sich die Empfindlichkeit eines gewöhnlichen Fluxmeters um den Faktor 25 bis 100 steigern.

Eine von BERNDT [*11.5*] angegebene Methode zur fotoelektrischen Kompensation der Driftbewegung eines empfindlichen Fluxmeters ist in Abb. 11.13 näher erläutert. Das Fluxmeterinstrument M beleuchtet über eine Rechteckblende die beiden Fotowiderstände F_1 und F_2 so, daß beide zur Hälfte aus-

geleuchtet sind und der Diagonalzweig mit den Widerständen R_1 und R_2 stromlos ist. Wird das Fluxmeter durch eine Flußänderung in der Induktionsspule S ausgelenkt, so verstimmt sich die von den Batterien E_2 und E_3 betriebene Brücke, und es entsteht ein zur Auslenkung proportionaler Strom i.

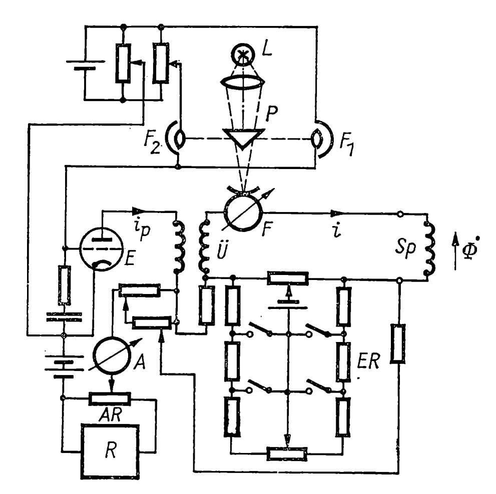


Abb. 11.12 Fotoelektrischer Integrator für fluxmetrische Messungen

Der Spannungsabfall iR_1 wird über die Kapazitäten C (12 μF) ausgekoppelt und mit einer Phasenverschiebung von 180° über eine veränderliche Widerstandskombination dem Meßkreis zugeführt, wodurch der größte Teil der

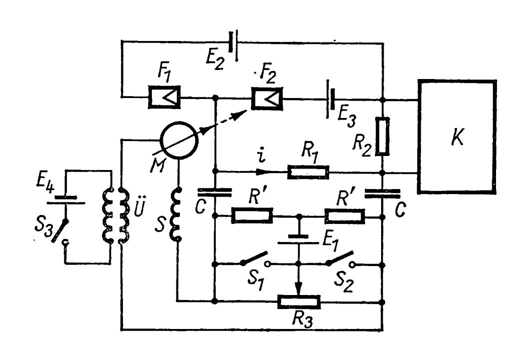


Abb. 11.13 Registrierfluxmeter nach BERNDT

ursprünglichen Auslenkung rückgängig gemacht wird. Durch diese „Gegenkopplung" werden Dämpfung und Rückfallzeit des Instruments stark erhöht.

Die durch die Widerstände R', das Potentiometer R_3 und die Batterie E_1 gebildete Brückenschaltung dient zur Erzeugung einer sehr kleinen Zusatzspannung im Fluxmeterkreis, um die restliche Drift und Thermospannungen zu

kompensieren. Am Serienwiderstand R_2 tritt eine zum Ausschlag φ proportionale Spannung auf, die im Kompensationsschreiber K registriert wird. Der eisenfreie Transformator $\ddot{U}$ dient zusammen mit der Batterie E_4 zur Eichung der Meßanordnung. Bei einer Empfindlichkeit des Fluxmeters (Fa. Norma, Wien) von 0,1 mVs/Skt läßt sich die Drift auf 0,1 Skt/min mit der angegebenen Schaltung verringern.

Von MYRGREN [*11.88*] wird ein *Integrator* mit Fotozellenverstärker angegeben, der mit einer *RC*-Rückkopplung arbeitet. Hierbei wird ähnlich wie in Abb. 11.13 der Ausschlag des Instruments mit einer Differentialfotozelle gemessen und das verstärkte Brückensignal über ein *RC*-Glied dem Meßkreis zugeführt. Die Empfindlichkeit des Integrators ist durch

$$\frac{N\Phi}{U} = RC$$

gegeben, wenn U die noch nachzuweisende Spannung des Instruments und N die Windungszahl der Induktionsspule ist. Mit $RC = 1$ ms lassen sich Flußänderungen von 1 μVs nachweisen.

OHTSUBO et al. [*11.93*] wenden ein fotoelektrisches Fluxmeter, das im Prinzip dem der Abb. 11.12 gleicht, für Magnetisierungsmessungen bei sehr tiefen Temperaturen an und erreichen eine Empfindlichkeit von 10 nVs.

11.44 Elektronischer Integrator

Wie in § 5.32 gezeigt wurde, ist durch Rückkopplung des Verstärkerausgangs durch ein *C*-Glied grundsätzlich die Integration des Eingangssignals möglich. Im speziellen Fall der fluxmetrischen Messung wird eine hohe Empfindlichkeit und verschwindende Drift gefordert.

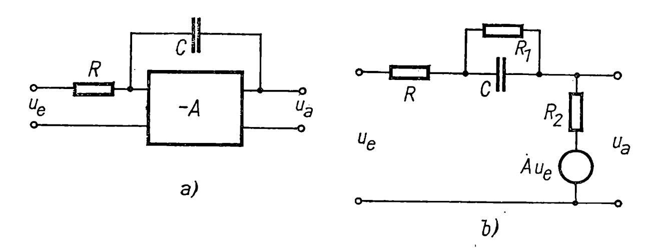


Abb. 11.14 Elektronischer Integrator: Prinzip (a), Ersatzschaltbild (b)

Das Prinzip eines *elektronischen Integrators* [*11.52*] ist in Abb. 11.14a und sein Ersatzschaltbild in Abb. 11.14b dargestellt. Das Induktionssignal u_e wird einem Gleichspannungsverstärker mit dem Verstärkungsfaktor $-A$ zugeführt und die Ausgangsspannung u_a über die Kapazität C in den Verstärkereingang rückgekoppelt. Im Ersatzschaltbild stellt R_1 den Restwiderstand von C und $R_2 \ll R_1$ den Ausgangswiderstand eines Katodenfolgers (s. § 5.223) dar. In guter Näherung findet man für die Ausgangsspannung den

Ausdruck

$$u_a = -\left(\frac{A}{A+1}\right)\frac{1}{RC}\int u_e\,\mathrm{d}t + \ldots \tag{11/24}$$

Für einen hohen Verstärkungsfaktor wird u_a sich nicht von dem eines einfachen RC-Integrators unterscheiden, doch ist die Integrationszeit um den Faktor A größer. Für einen annähernd verlustfreien Kondensator C wird $u_a \sim \int u_e\,\mathrm{d}t$. Infolge des Frequenzgangs des Verstärkers, der durch eine Zeitkonstante τ ausgedrückt werden kann, ergibt sich ein konstanter Fehler der Ausgangsspannung $\Delta u_a/u_e \approx \tau/RC$.

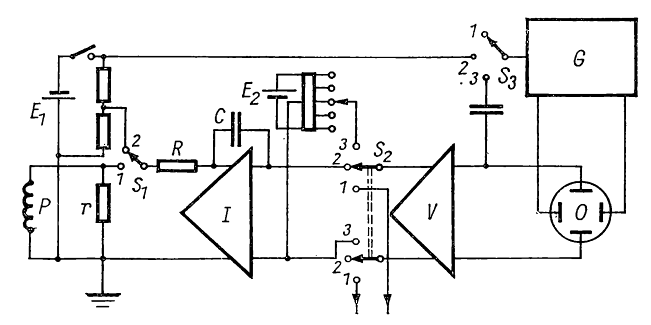


Abb. 11.15 Elektronischer Integrator

In Abb. 11.15 ist vereinfacht ein Integrationskreis mit nachgeschaltetem Verstärker dargestellt. Die Induktionsspule P liegt parallel zum hochohmigen Widerstand r und in Serie mit R am Integratoreingang. Zur Eichung kann über den Schalter S_1 eine Teilspannung der Batterie E_1 an die Integratorstufe I gelegt werden. Dem Integrator ist der Gleichspannungsverstärker V nachgeschaltet, dessen Ausgang an den ESO O gelegt ist. Der Sägezahngenerator G liefert die Zeitablenkung des ESO sowie eine Triggerspannung für den Eichkreis.

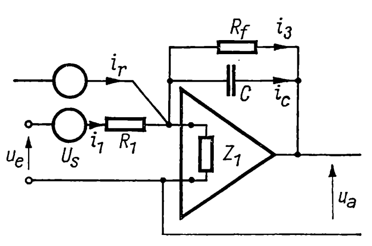


Abb. 11.16 Integrator

Von Fietz [*11.38*] wird die praktische Ausführung eines elektronischen Integrators beschrieben, mit dem Magnetisierungskurven an Supraleitern aufgenommen werden können und dessen Drift innerhalb von 15 min 5% beträgt. Zur Fehlerabschätzung legt man das Schaltbild der Abb. 11.16 zugrunde, das einen als Integrator arbeitenden Operationsverstärker darstellt.

Im Eingangskreis ist neben dem zu messenden Signal u_e eine Störspannungsquelle U_s eingetragen, so daß gelten muß

$$u_e - i_1 R_1 + U_s = u_1 .$$

Auf den Eingang wirkt ferner noch der Rauschstrom i_r, der zusammen mit dem Eingangsstrom i_1 die Beziehung

$$i_1 + i_r = \frac{u_1}{Z_1} + i_3 + i_c$$

erfüllen muß, wenn Z_1 die Eingangsimpedanz und i_3 der Reststrom zwischen Ein- und Ausgang ist. Ausgangsspannung u_a und wirksames Signal u_1 sind über den Verstärkungsfaktor A durch $u_a = A u_1$ verknüpft. Mit der Beziehung $C\,\mathrm{d}(u_1 - u_a)/\mathrm{d}t = i_c$ erhält man schließlich für den maximalen Fehler am Integratorausgang den Ausdruck

$$\frac{\Delta u_a}{U_m} = \left(\frac{1}{R_e C} - \frac{U_s + i_r R_1}{R_1 C U_m}\right) t, \tag{11/25}$$

worin U_m die maximale Spannung, $1/R_e = 1/R_f - 1/AR_1 - 1/AR_i$ und $R_i = Z_i$ der ohmsche Eingangswiderstand des Verstärkers ist. Typische Werte eines ausgeführten Instruments sind: $R_1 = 0{,}1\ \mathrm{M\Omega}$, $R_i = 1\ \mathrm{M\Omega}$, $C = 0{,}2\ \mu\mathrm{F}$, $U_m = 10\ \mathrm{V}$, $u_s = 1\ \mu\mathrm{V}$, $i_r = 10\ \mathrm{pA}$ und $A = -5 \cdot 10^7$. Aus Gl. (11/25) findet man für $R_f = 1\ \mathrm{T\Omega}$ einen Fehler von 1% nach einer Zeit von 10^3 s; für $R_f = 10\ \mathrm{G\Omega}$ hingegen ergibt sich bereits ein untragbarer Fehler von 50% und mehr.

Kommerzielle elektronische Fluxmeter (z. B. von der Fa. Elektro-Physik, Köln) werden mit umschaltbaren Meßbereichen (2···50 mVs) hergestellt, wobei die Drift 0,1 bis 0,2 Skt/min beträgt.

Das in § 11.33 beschriebene Magnetometer nach Foner mit oszillierender Meßprobe kann nach Foner und McNiff [*11.43*] ebenfalls als integrierendes Instrument ausgebaut werden. Hierzu wird die Probe mit kleiner Frequenz zwischen gegengeschalteten Induktionsspulen bewegt und die induzierte Spannung integriert. Das Verfahren ist äußerst genau und besonders für sehr hohe Magnetfelder geeignet.

11.45 Supraleitende Fluxmeter

Supraleitende Kreise, welche Induktivitäten enthalten, besitzen neben verschwindenden elektrischen Widerständen die Eigenschaft, daß im supraleitenden Zustand der gesamte verkettete Fluß Ψ *konstant* bleibt, wenn die Struktur des äußeren magnetischen Feldes geändert wird. Zwei in Serie verbundene supraleitende Spulen mit den Windungszahlen N_1, N_2 und den Querschnitten A_1, A_2 sollen sich zunächst im feldfreien Raum befinden (Abb. 11.17). Nimmt man der Übersicht halber lange Spulen an, deren Radius $r \ll l$ ist, so liefert die Konstanz des verketteten Flusses die Beziehung

$$H_1 = \frac{N_2 A_2}{N_1 A_1} H_2 . \tag{11/26}$$

Man bezeichnet eine solche Anordnung, die entsprechend den Produkten $N_i A_i$ von (langen) Spulen das exakte Übersetzungsverhältnis nach Gl. (11/26) besitzt, als *Fluß-* oder besser als *Feldtransformator*.

Diese Eigenschaft supraleitender Kreise kann mit Vorteil dazu verwendet werden, ein schwaches Feld H_2, das eine Spule mit großem N_2 und A_2 durch-

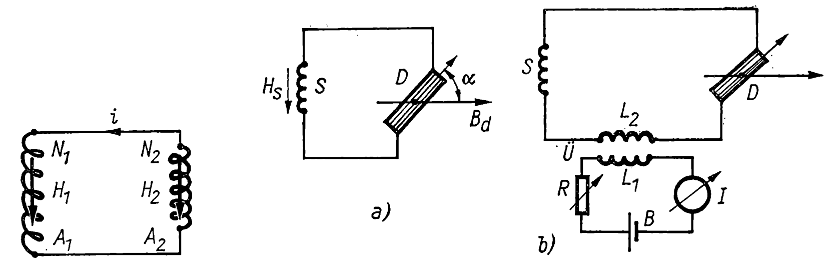


Abb. 11.17 Flußtransformator

Abb. 11.18 Supraleitendes Fluxmeter: Prinzip (a), Kompensationsanordnung (b)

setzt, in ein viel stärkeres Feld in einer Spule mit nur wenigen Windungen N_1 und kleiner Windungsfläche A_1 zu übersetzen. In der Spule 1 läßt sich dann mit bekannten Verfahren das verstärkte Feld H_1 nachweisen.

Bei der zweiten Möglichkeit, die supraleitenden Eigenschaften zur Flußmessung auszunutzen, wird die zweite Spule als bewegliches Meßsystem zur direkten Anzeige des Meßstroms ausgebildet (Abb. 11.18a). Die Feldmeßspule S mit der Windungszahl N_s, der Wicklungsfläche A_s und der Länge l_s ist dem bekannten Feld H_s ausgesetzt. In Serie mit S liegt die Drehspule D mit der Wicklungsfläche A_d und der Windungszahl N_d, die sich in einem homogenen Magnetfeld mit der Induktion B_d drehen kann. Bezeichnet man den Winkel zwischen Spulenebene und B_d mit α, so gilt für den Ausschlag der Drehspule die Beziehung

$$\sin\alpha = \mu_0 \frac{N_s A_s}{N_d A_d B_d} H_s, \qquad (11/27)$$

wenn man das Rückstellmoment vernachlässigt. Hierbei ist vorausgesetzt, daß der gesamte Meßkreis, d. h. Feldmeßspule, Drehspule und Zuleitungen, aus supraleitendem Material besteht. Da der Stromkreis für $T < T_c$ widerstandslos ist, wird die Rückfallzeit dieses Fluxmeters unendlich groß, d. h., der Ausschlag α ist der wirklichen magnetischen Induktion proportional.

Diese Methode läßt sich auch als Kompensationsverfahren ausbilden, wenn — wie in Abb. 11.18b angedeutet — in den Meßkreis die Sekundärspule L_2 des eisenlosen Übertragers $Ü$, die aus supraleitendem Material besteht, eingefügt und dieser induktiv über die Primärspule L_1 (die aus Kupferdraht bestehen kann) eine meßbare Flußänderung zugeführt wird. Mit Hilfe einer fotoelektrischen Einrichtung, wie sie z. B. in Abb. 11.12 benutzt wird, läßt sich die Kompensation auch selbsttätig ausführen.

Von Deaver und Goree [*11.28*] ist die Konservation des magnetischen Gesamtflusses in supraleitenden Kreisen zur Konstruktion eines sehr empfind-

lichen Magnetometers benutzt worden, dessen Prinzip aus Abb. 11.19a zu ersehen ist. Die Induktionsspule S und die Primärwicklung L_1 eines eisenlosen Übertragers bestehen aus supraleitendem Draht und bilden den eigentlichen Meßkreis. Eine Flußänderung $\Delta\Phi$ in S ruft die entsprechende Änderung $-\Delta\Phi$ in L_1 hervor. Der im Meßkreis fließende Strom i stellt ein Maß für den Gesamtfluß dar und kann vor Versuchsbeginn durch den Heizer H, der die Zuleitung

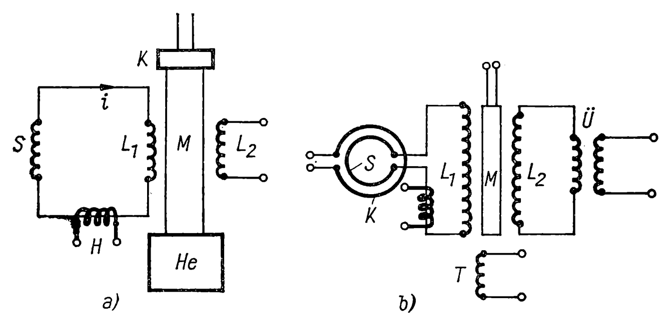


Abb. 11.19 Supraleitendes Magnetometer: Prinzip (a), Schaltung (b)

an einer Stelle bis über ihren Sprungpunkt T_c erwärmen kann, auf Null eingestellt werden. Zur empfindlichen Messung der Flußänderung in L_1 ist die Sekundärspule L_2 innerhalb von L_1 und darin ein supraleitender *Modulator* M angebracht, der durch ein Heliumbad gerade im supraleitenden Zustand gehalten, andererseits durch eine Heizvorrichtung K periodisch bis oberhalb von T_c erwärmt werden kann. Da im supraleitenden Zustand durch M der magnetische Fluß infolge des Meissner-Effekts (s. § 12.25) verdrängt wird, im normalleitenden Zustand, d. h. bei $T > T_c$, der Fluß den Modulator durchdringt, wird periodisch der von L_1 erzeugte und mit L_2 verkettete magnetische Fluß geändert und in L_2 eine Wechselspannung induziert, die dem Strom i und damit der Flußänderung $\Delta\Phi$ proportional ist.

Als *Modulator* wird ein dünnwandiger supraleitender Zylinder benutzt, der wegen der sehr kleinen spezifischen Wärme mit hohen Frequenzen moduliert werden kann. Die Nachweisgrenze dieses Meßverfahrens liegt bei 1 fVs.

Als Anwendung ist in Abb. 11.19b ein *Magnetometer* für sehr schwache Felder dargestellt. Die Feldmeßspule S mit N_1 Windungen und der Windungsfläche A_1 und die Primärspule $L_1(N_2, A_2)$ bilden einen Flußtransformator. Das Magnetfeld in L_1 ist gegenüber dem Meßfeld in S um den Faktor N_1A_1/N_2A_2 verstärkt und wird mit dem supraleitenden Modulator M periodisch auf die Sekundärspule L_2 übertragen. Als Modulator wird ein Indiumzylinder von 1 cm Länge, 40 μm Durchmesser und 1 μm Wanddicke verwendet, der isoliert auf das Heizelement aus Kupfer-Gold und beides auf einen Kupferdraht aufgedampft ist. Die „Schaltfrequenz" dieses Elements beträgt 30 bis 40 kHz. Feldmeßspule und Primärspule L_1 bestehen aus 50 μm dickem Niobiumdraht; an die Sekundärspule L_2 ist ein supraleitender Transformator $\ddot{U}$ und ein rauscharmer Vorverstärker angeschlossen. Die Nachweisgrenze für ein äußeres Magnetfeld liegt bei 10^{-7} A/cm.

Ein ähnliches Verfahren mit einer Modulationsfrequenz von 1 MHz, mit dem 10^{-10} A/cm nachgewiesen werden können, wird von PIERCE [*11.100*] beschrieben. RADHAKRISHNA et al. [*11.106*] wenden diese Methode für Magnetisierungsmessungen an Supraleitern an, benutzen aber zur eigentlichen Feldmessung ein gesondertes Magnetometer.

11.46 Feldmeßspulen

Zur Messung des Linienintegrals $\oint \boldsymbol{B}\, \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ nach Gl. (11/12) wird meist in der Anordnung der Abb. 11.2 eine biegsame Spule mit konstantem Wicklungsquerschnitt und konstanter Windungszahl pro Zentimeter benutzt, die als *Rogowski-Spule* bezeichnet wird. Zur Messung der Durchflutung Θ werden fluxmetrische Verfahren oder auch das ballistische Galvanometer angewandt.

Von WRIGHT und JAHN [*11.138*] wird eine Miniaturausführung einer solchen Spule zur Messung an Plasmaentladungen benutzt, deren Spulenkern aus einem Formvarfaden besteht, der mit dünnstem Draht bewickelt und von einem Isolierschlauch von 1 mm Durchmesser umhüllt ist.

11.5 Nichtlinearität der B-H-Kurve von ferromagnetischen Stoffen

Bei diesen Methoden dient als Meßsonde ein ferromagnetisches Stäbchen oder ein Trafokern aus hochpermeablem Material, um den zwei Spulen L_1 und L_2 (s. Abb. 11.20) gewickelt sind. Wird der Primärkreis mit sinusförmigem Wechselstrom erregt, so entsteht im feldfreien Raum an den Klemmen der Sekundärspule L_2 eine Wechselspannung, die nur die ungeraden Oberwellen

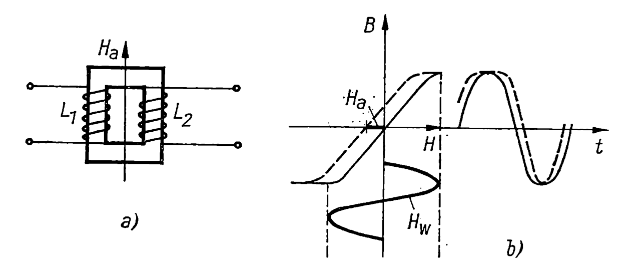


Abb. 11.20 Transformator mit Kern im äußeren Magnetfeld

der Grundfrequenz im Primärkreis enthält. Befindet sich der Übertragerkern in einem magnetischen Gleichfeld parallel zur Achse der Spulen, so treten sekundärseitig auch die zweite und andere geradzahlige Oberwellen auf. Die Amplitude der zweiten Oberwelle dient als Maß für das zu messende Gleichfeld H_a.

Dieses Meßprinzip, das zuerst von FÖRSTER [*11.11, 11.40*] angegeben wurde und sich für Messungen von Magnetfeldern zwischen 10 μA/cm und 30 kA/cm eignet, ist in Abb. 11.20b näher erläutert. Die B-H-Kurve des Magnetkerns zeigt eine ausgeprägte magnetische Sättigung und führt bei sinusförmiger Durchflutung H_w zu dem rechts oben dargestellten Verlauf von B. MAGER

[*11.82*] approximiert die B-H-Kurve durch die Beziehung

$$\frac{B}{B_s} = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{H}{H_s}, \tag{11/28}$$

worin B_s die Sättigungsinduktion und H_s die Feldstärke bedeutet, für die $B = B_s/2$. Für die in der Sekundärspule induzierte Spannung gilt nach Gl. (11/10)

$$U = -N_2 A_2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -N_2 A_2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}H} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -N_2 A_2 \frac{\mathrm{d}H/\mathrm{d}t}{1 + (H/H_s)^2}. \tag{11/29}$$

Überlagert man der Wechselfeldstärke H_w die Gleichspannungskomponente H_a, wobei $H_a \ll H_w$, so ist H in Gl. (11/29) durch $H_a + H_w$ zu ersetzen und die entstehende Sekundärspannung nach Fourier zu zerlegen. In der Praxis werden zwei magnetische Kerne nach Abb. 11.21 verwendet, die von der

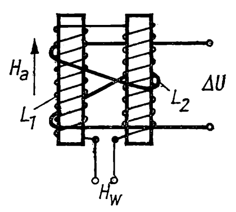


Abb. 11.21 Stiftkernsonde

Wechselkomponente H_w in entgegengesetzter Richtung durchsetzt werden, während das zu messende Gleichfeld H_a auf beide Magnetstifte gleichsinnig wirkt. Die Sekundärwicklungen sind gegeneinander geschaltet, so daß in ihnen die Differenzspannung

$$\Delta U = U_{+H_a} - U_{-H_a} \approx \frac{2H/H_s}{[1 + (H/H_s)]^2} \cdot 2 \frac{H_a}{H_s} \frac{\mathrm{d}(H/H_s)}{\mathrm{d}t} \tag{11/30}$$

induziert wird. Setzt man in diese Beziehung $H = H_w \sin \omega t$, so findet man schließlich die Differenzspannung

$$\Delta U = \omega N_2 A_2 \sin^2 \omega t \frac{2(H_w/H_s)^2}{\left[1 + \left(\frac{H_w}{H_s}\right)^2 \sin^2 \omega t\right]^2} \mu_{\text{eff}} H_a. \tag{11/31}$$

Die Größe μ_{eff} ist die effektive Permeabilität der Magnetkerne. Die resultierende Spannung ΔU ist für kleine Felder dem Meßfeld H_a proportional und tritt in der doppelten Frequenz auf.

In der praktischen Ausführung werden als Sonden magnetische Stifte von einigen Millimetern Länge verwendet. Die Wechselspannung in der Sekundärspule wird durch Vergleich mit der Phase der Oberwelle von H_w demoduliert. Dadurch erhält man das Vorzeichen von H_a sowie eine lineare Beziehung zwischen dem Gleichspannungssignal am Verstärkerausgang und H_a. Die

Linearität beträgt 1% für ein Gerät mit dem Vollausschlag 0,1 μT···0,1 mT. Die *Förster-Sonden* sind auch zum Nachweis von Feldgradienten bis zu 2,5 μA/cm pro m geeignet [*11.140*].

Über verschiedene Bauformen und spezielle ferromagnetische Stoffe für die Meßsonden siehe [*11.10, 11.50, 11.1*]. SELDOWITSCH et al. [*11.113*] verwenden Carbonyleisenkerne und erreichen bei 1,8 T eine Meßgenauigkeit von $5 \cdot 10^{-4}$.

Ein Magnetometer, das auf der feldstärkeabhängigen Permeabilität ferromagnetischer Stoffe beruht, wird von ROGERS und KANTOR [*11.108*] beschrieben. Es dient zur Magnetisierungsmessung an Ferriten oder anderen nichtleitenden magnetischen Materialien und besteht aus einer Spule, die im Innern die Meßprobe enthält und Teil des Schwingkreises eines Oszillators ist. Befindet sich die Probe in einem Magnetfeld, so ändert sich die Oszillatorfrequenz um den Wert Δf, und es gilt

$$\frac{\Delta f}{f_0} = -\frac{1}{2} K \frac{L_0}{L_0 + L_s} \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}H_0}. \qquad (11/32)$$

Hierin bedeuten f_0 die ursprüngliche Frequenz, K den Füllfaktor der Probe in der Spule, L_0 die Induktivität, L_s die Streuinduktivität der Spule und M das magnetische Dipolmoment pro Kubikzentimeter der Meßprobe. Die Oszillatorfrequenz liegt zwischen 1 und 5 MHz; die Wechselfeldamplitude ist von 0,01···0,3 A/cm einstellbar. Aus der Frequenzverschiebung läßt sich unmittelbar nach Gl. (11/32) die Größe $\mathrm{d}M/\mathrm{d}H_0$ entnehmen, wobei H_0 das außen angelegte Feld ist.

11.6 Resonanzmethoden

Unter *Resonanzmethoden* werden Meßverfahren für das Magnetfeld verstanden, bei denen dieses an Atomkernen, paramagnetischen Ionen, der Elektronenhülle oder anderen Quantensystemen eine Zeeman-Aufspaltung erzeugt, die meist mit HF-Verfahren nachgewiesen wird. Diese Instrumente finden wachsende Verbreitung, da sie an Genauigkeit von keiner anderen Methode übertroffen werden.

11.61 Kernresonanzmagnetometer [*11.79*]

11.611 Grundsätzliches

Ähnlich wie das Bohrsche *Magneton* das magnetische Moment einer mit dem Drehimpuls $\hbar$ umlaufenden Elementarladung e und der Elektronenmasse m_e durch die Beziehung

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \qquad (11/33)$$

angibt, ist das *Kernmagneton* durch den Ausdruck

$$\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5{,}05 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{A\ cm^2} \qquad (11/34)$$

definiert, worin m_p die Protonenmasse bedeutet. Ein Atomkern mit dem Kernspin I besitzt das magnetische Kernmoment

$$\mu_I = g_I \mu_K I = \gamma \hbar I\,, \qquad (11/35)$$

wobei im Gegensatz zum Elektronenspin, wo der Landé-Faktor den Wert 2 hat, der Kern-g-Faktor g_I beliebige, aber für den betreffenden Kern charakteristische Werte annimmt. Der Kernspin kann ganzzahlig und halbzahlig, aber auch Null sein. In einem äußeren magnetischen Feld B_0 sind nach den Gesetzen der Richtungsquantelung $2I + 1$ räumliche Einstellungen möglich, was für das *Proton* mit $I = 1/2$ *zwei* mögliche Einstellungen, nämlich parallel und antiparallel, bedeutet. Die Energiedifferenz zwischen diesen beiden Einstellungen beträgt

$$\Delta E = 2\mu_I B_0 = 2\mu_0 \mu_I H_0\,, \qquad (11/36)$$

wenn μ_0 die magnetische Feldkonstante ist. Setzt man in Gl. (11/36) den Ausdruck für μ_I aus Gl. (11/35) ein, so wird

$$\Delta E = g_I \mu_K \mu_0 H_0\,. \qquad (11/36\text{a})$$

In einem Feld von 1 T wird $\Delta E = 28 \cdot 10^{-27}$ J $\triangleq$ $18 \cdot 10^{-8}$ eV. Als *Kernresonanz* wird die selektive Absorption eines HF-Feldes durch Atomkerne bezeichnet, die sich im Feld H_0 in einer Präzessionsbewegung befinden, wobei die Resonanzbeziehung

$$\Delta E = hf = g_I \mu_I \mu_0 H_0 \qquad (11/37)$$

erfüllt sein muß. Für Protonen berechnet sich die Resonanzfrequenz zu

$$f = 42{,}6 \cdot H_0 \text{ MHz/T}. \qquad (11/37\text{a})$$

11.612 Kerninduktion- und -absorption

Die Kerne können im äußeren Feld $2I + 1$ Zustände besetzen, deren potentielle Energie durch

$$E_m = m\,\frac{\mu_I \mu_0}{I}\,H_0 \qquad (m = I, I-1, I-2, \ldots) \qquad (11/38)$$

gegeben ist. Die Besetzung der einzelnen Energieniveaus gehorcht der Boltzmann-Gleichung. Durch ein richtig polarisiertes Strahlungsfeld der Photonenenergie $\hbar\omega$ werden Übergänge zwischen benachbarten Energieniveaus mit $\Delta m = 1$ induziert, woraus die Resonanzbedingung (11/37) oder, anders ausgedrückt,

$$\omega_0 = \gamma H_0 \mu_0 \qquad (11/39)$$

folgt. Die Größe $\gamma = g_I \mu_K/\hbar$ wird *gyromagnetisches Verhältnis* genannt und kann direkt mit HF-Methoden gemessen werden.

Die experimentelle Methode zum Nachweis der Kernresonanz läßt sich mit Hilfe der Abb. 11.22 erläutern. Das stationäre Magnetfeld H_0 in Z-Richtung bewirkt eine bevorzugte Ausrichtung der Kerne, doch sind z. B. für $I = 3/2$ auch $m = 1/2$, $-1/2$ und $\pm 3/2$ möglich. Auf den Kern mit dem Drehimpuls I

und dem magnetischen Moment μ_I wirkt das Moment $\mu_I \times \boldsymbol{H}_0$ und erzeugt eine Präzessionsbewegung um die Z-Achse mit der Larmor-Frequenz ω_0 nach Gl. (11/39). Durch eine Spule, deren Achse in X-Richtung senkrecht zu H_0 steht, wird ein schwaches HF-Feld der Amplitude H_1 am Kernort erzeugt. Stimmt die HF-Frequenz mit ω_0 überein, so können Übergänge mit $\Delta m = 1$ im Kernspinsystem induziert werden, die sich in einer Absorption im HF-Kreis bemerkbar machen.

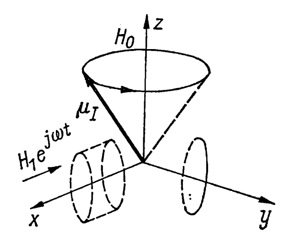


Abb. 11.22 Kernresonanz

Die andere Möglichkeit zum Nachweis der Kernresonanz besteht darin, eine zweite Spule anzubringen, deren Achse in Y-Richtung zeigt und in der die Y-Komponente der mit der Frequenz ω_0 umlaufenden Magnetisierung des Kernspinsystems eine Spannung induziert. Diese als *Kerninduktionsverfahren* bezeichnete Methode wird meistens für magnetometrische Zwecke angewandt.

11.613 Nachweis der Kernresonanz

Zum experimentellen Nachweis der *Kernabsorption* (Abb. 11.23) wird die Meßprobe P, z. B. 1 cm³ Wasser für Protonenresonanz, in ein möglichst homogenes Feld des Elektromagneten N—S gebracht und ist von der Oszillatorspule L umgeben. Der HF-Generator O, dessen Frequenz nach Gl. (11/37 a)

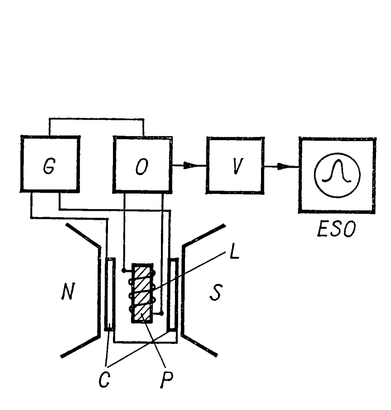


Abb. 11.23 Kernresonanzspektrometer

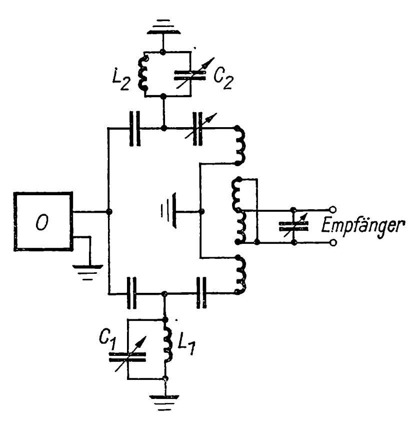


Abb. 11.24 Differentialbrücke

bei einem Feld $B_0 = 0{,}5\,T$ bei 21 MHz liegt, ist innerhalb eines begrenzten Bereichs durchstimmbar und lose an den Schwingungskreis gekoppelt, der L enthält. Um die Aufzeichnung des Resonanzsignals, dessen Breite je nach den Relaxationszeiten der Probesubstanz und der Feldhomogenität 1···10 kHz beträgt, zu erleichtern, sind zwei Wobbelspulen C symmetrisch zur Probe angebracht. Diese Spulen werden von einem NF-Generator G erregt und erzeugen eine Modulation des Feldes B_0 um einige Promille. Im Resonanzfall tritt im Schwingkreis eine zusätzliche Dämpfung infolge der Kernabsorption auf, die sich mit Hilfe des Verstärkers V am ESO nachweisen läßt und eine scharfe Absorptionslinie erzeugt.

Zum Nachweis der kleinen Absorptionsänderung bei Resonanz läßt sich mit Vorteil eine Differentialmeßbrücke verwenden, wie sie in Abb. 11.24 dargestellt ist. Die vollkommen symmetrische Brücke wird über die beiden Schwingkreiskapazitäten C_1 und C_2 abgestimmt; die Induktivität L_1 enthält die Meßprobe, deren gyromagnetisches Verhältnis bestimmt werden soll. Der Empfangskreis wird lose an die Brücke angekoppelt und auf die Resonanzfrequenz abgestimmt.

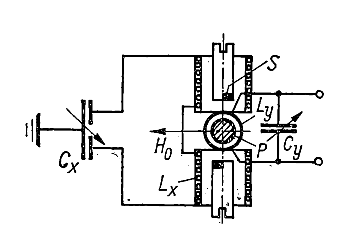


Abb. 11.25 Kerninduktionsmethode

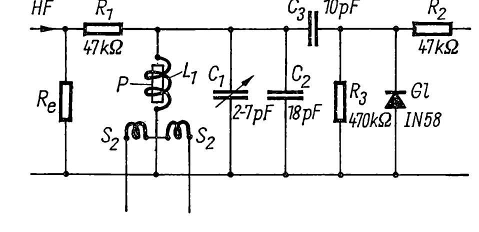


Abb. 11.26 Kernresonanz-Magnetometer nach GARVIN

Das Meßprinzip für den Nachweis der *Kerninduktion* geht aus der Abb. 11.25 hervor. Der Oszillatorkreis enthält die Schwingspule L_x und den Differentialkondensator C_x zur Symmetrisierung der Streufelder. Im Innern von L_x befindet sich die Meßprobe P. Senkrecht zur Achse von L_x ist die Induktionsspule L_y angebracht, die mit der Kapazität C_y auf die Resonanzfrequenz ω_0 abgestimmt ist. Das statische Magnetfeld H_0 ist in Z-Richtung angelegt. Außerhalb der Resonanzfrequenz soll das von L_y aufgenommene Signal möglichst klein sein. Hierzu ist die Doppelspule L_x mit zwei halbkreisförmigen Kupferscheibchen S versehen, die um die X-Achse verdreht werden können, bis das Signal im Empfangskreis minimal wird.

Das Kerninduktionssignal ist von der Größe 1 mV und kann leicht nachgewiesen werden. Für sehr kleine Proben werden zum Nachweis des Induktionssignals phasenempfindliche Detektoren (s. § 7.66) benutzt.

11.614 Ausgeführte Magnetometer

Wegen der sehr großen erreichbaren Genauigkeit werden diese Magnetometer auch häufig zur Messung starker Felder benutzt. Bei einem von GARVIN et al. [*11.49*] angegebenen Meßkreis, der vereinfacht in Abb. 11.26 dargestellt

ist, wird ein beweglicher Meßkopf benutzt, der durch HF-Kabel an den Oszillator bzw. an den Empfänger angeschlossen werden kann.

Das vom Oszillator kommende Kabel ist am Abschlußwiderstand R_e angeschlossen und versorgt die Probespule L_1 über den Widerstand R_1 mit konstantem Strom. Zur Abstimmung dienen die Kapazitäten C_1 und C_2; die Spannung an diesem Schwingungskreis wird über den Kondensator C_3 der Diode *Gl* zugeführt. Über den Widerstand R_2 wird das HF-Kabel zum Empfänger angeschlossen. Es ist wesentlich, daß diese Leitung nicht die Kreisgüte des Meßkreises verringert. Bei Resonanz verursacht die Absorption durch die Kernspins einen Abfall der HF-Spannung am Meßkreis, der mit einem rauscharmen Verstärker mit 500 kΩ Eingangsimpedanz nachgewiesen wird. Die beiden Spulen S_2 dienen zur Feldmodulation und werden mit 50 Hz betrieben.

Als Oszillator wird ein sehr stabiler Transistorkreis mit einer Frequenzkonstanz von 10^{-6} über 30 min benutzt. Die Meßgenauigkeit in einem 1,5-T-Feld wird mit 10^{-4} angegeben.

Von Pierce und Hicks [*11.101*] wird ein Kernresonanzspektrometer mit einem hochstabilisierten Transistoroszillator beschrieben, der zusammen mit dem Verstärker in einem 12-mm-Kupferrohr untergebracht ist und direkt an den Meßort gebracht werden kann. Der in drei Stufen zwischen 22 und 65 MHz abstimmbare Oszillator enthält Meßproben von $LiClO_3$ bzw. D_2O, die sich in einer Meßspule von 2,4 mm Durchmesser und 2,4 mm Länge befinden. Die erreichte Genauigkeit beträgt $2 \cdot 10^{-6}$; es können noch Feldgradienten von 1,5 mT/cm nachgewiesen werden.

Brčić et al. [*11.13*] wenden eine ähnliche Schaltung für die automatische Eichung von Magnetfeldern an, wobei die Oszillatorfrequenz unmittelbar durch einen elektronischen Zähler gemessen wird. Die erste Ableitung der Absorptionslinie an der Resonanzstelle wird zum Nachregeln des Oszillators benutzt.

Durch Verwendung von Varactor-Dioden (s. § 8.36), deren Kapazität eine Funktion der anliegenden Spannung ist, kann man die Oszillatorfrequenz eines Kernresonanzspektrometers automatisch nachregeln und die Resonanzfrequenz selbst als Maß für die Feldstärke H_0 registrieren. Oppliger et al. [*11.94*] geben ein solches Magnetometer an, dessen Oszillator zwischen 11 und 65 MHz mit einer Genauigkeit von 10^{-7} einzustellen ist und der mit Protonenresonanzen nach Gl. (11/37a) für Felder zwischen 0,25 und 1,55 T, mit ^{7}Li-Resonanzen zwischen 0,65 und 4 T benutzt werden kann. Der Apparat ist mit einem Digitalausgang versehen, der unmittelbar vom Frequenzzähler betrieben wird.

Man kann dieses Prinzip auch zur Nachregelung eines Magneten benutzen, wenn man die Abweichungen vom „Sollwert" als Regelgröße des Spannungs- bzw. Stromreglers benutzt. Näheres siehe [*11.136, 11.51*] und § 13.87.

Die untere Grenze für Kernresonanzen liegt bei Feldern von etwa 0,1 A/cm; durch die von Packard und Varian [*11.96*] benutzte Methode kann z. B. das *Erdfeld* auf 10^{-4} genau bestimmt werden [*11.71*]. Hierzu wird eine Wasserprobe von 300···500 cm³ in ein Magnetfeld $H_0 = 100$ A/cm gebracht, das etwa senkrecht zum Erdfeld H steht. Nach einer durch die longitudinale Relaxationszeit T_1 bestimmten Zeit erreicht die makroskopische Magnetisierung der

Probe ihren Gleichgewichtswert. Schaltet man H_0 plötzlich ab, so präzediert der Magnetisierungsvektor um die Richtung des Erdfeldes mit der Frequenz $\omega = \gamma\mu_0 H$, die etwa bei 2 kHz liegt und beobachtet werden kann.

Zur Messung der magnetischen Feldstärke in supraleitenden Spulen (s. § 13.3), die sich im flüssigen Helium bei 4,2 K befinden, sind wäßrige Lösungen als Probe ungeeignet, da sich im festen Zustand ihre Linienbreite stark vergrößert. Hingegen sind *metallische Dispersionen* von ^{133}Cs oder ^{27}Al auch bei sehr tiefen Temperaturen verwendbar.

Von Rupp [*11.110*] wird das Kerninduktionsverfahren mit einer Cs-Probe ausgeführt, die aus 5···20 μm großen Teilchen in einem mit Mineralöl gefüllten Quarzröhrchen von 4 mm Durchmesser besteht. Es ergibt sich für das gyromagnetische Verhältnis von metallischem ^{133}Cs der Wert $\gamma = 5{,}6732 \pm 0{,}0003$ MHz/T, der wegen des Knight-Shift um etwa 1,58% höher als der von ^{133}Cs in Lösungen ist. Für absolute Feldmessungen wird eine Genauigkeit von $\pm 6 \cdot 10^{-5}$, für Relativmessungen eine Meßungenauigkeit von $\pm 0{,}5$ A/cm erreicht. Der Meßbereich erstreckt sich von 0,7···6 T.

Hill und Hwang [*11.58*] verwenden die Kernresonanzen von ^{19}F und ^{23}Na zum Ausmessen einer supraleitenden 3-T-Spule, wobei der Oszillator zwischen 7 und 150 MHz (mit umschaltbaren Induktivitäten) durchgestimmt werden kann.

Über weitere Ausführungen von Kernresonanz-Magnetometern siehe [*11.26, 11.61, 11.73, 11.76, 11.80, 11.115, 11.116, 11.130*].

Zum Ausmessen von *Feldgradienten* eines Elektromagneten müssen der Erregerstrom des Magneten und die Frequenz des Magnetometeroszillators auf wenigstens ein Zehntel der auszumessenden Feldabweichung konstant bleiben. Die dadurch auftretenden Schwierigkeiten lassen sich nach einem Vorschlag von Dolega et al. [*11.29*] umgehen, wenn man anstelle *einer* zwei in Reihe geschaltete Spulen mit identischen Proben verwendet, von denen die eine einen festen Platz im Magnetfeld einnimmt, während die andere im Meßraum verschoben wird. Das resultierende Signal ist proportional der Summe der in beiden Spulen erzeugten Signale. Überstreicht die Oszillatorfrequenz periodisch die den beiden Spulenorten entsprechenden Larmor-Frequenzen, so erhält man während einer Periode vier Resonanzen, aus denen der Feldgradient ermittelt werden kann.

Weitere Verfahren zur Gradientenmessung siehe [*11.2*].

11.615 Angaben über Proben

In *Tabelle 11.1* sind einige für Kernresonanzinstrumente benutzte Kerne und ihre gyromagnetischen Verhältnisse γ zusammengestellt.

Von Lerner [*11.77*] werden für Kernresonanzmagnetometer Proben vorgeschlagen, die neben ^{1}H-Ionen auch ^{7}Li-Ionen enthalten, deren γ-Werte sich wie 2,57 : 1 verhalten. Mit einem durchstimmbaren Oszillator, dessen Frequenz im Verhältnis 1:4 verändert werden kann, läßt sich mit einer ^{1}H—^{7}Li-Probe ein Feldstärkenbereich von 1 : 10 überstreichen. Über die Präparation solcher Proben siehe [*11.77*].

Tabelle 11.1 Gyromagnetisches Verhältnis γ (10^4 Hz/T) einiger Kerne

Kern	Massenzahl	Spin	Kernmoment $[\mu_K]$	$\gamma_I/2\pi$
H	1	1/2	+2,279255	4257
Li	7	3/2	+3,2559	1655
F	19	1/2	+2,6283	4007
Na	23	3/2	+2,2171	1126,7
Al	27	5/2	+3,6408	1110

11.62 *Magnetometer mit Elektronenspinresonanz*

Analog zum Absorptionsvorgang eines Kernspinsystems können *Elektronen* mit Spin 1/2, was zwei Einstellungen im äußeren Magnetfeld entspricht, Resonanzeffekte zeigen, wobei anstelle von Gl. (11/37) die Beziehung

$$hf = 2\mu_e\mu_0 H_0 = g\beta\mu_0 H_0 \qquad (11/40)$$

tritt, in der μ_e das magnetische Moment des Elektrons, $g = 2$ der Landé-Faktor des Elektrons und $\beta = eh/4\pi m_e = 9{,}27 \cdot 10^{-20}$ A cm² bedeuten. Der Wert $g = 2$ gilt nur für freie Elektronen; in Metallen treten Abweichungen auf. Nach Gl. (11/40) liegt die Resonanzfrequenz in einem Feld von 1 T bei rund 30 GHz ($\lambda \approx 1$ cm).

Prinzipiell kann Gl. (11/40) nicht direkt zur Messung unbekannter magnetischer Felder herangezogen werden, da die in der Elektronenhülle eines Ions gekoppelten Elektronen sich in ihrer Wirkung überlagern und zum andern der Kernspin eine Hyperfeinstrukturaufspaltung der Elektronenterme verursacht. Hinzu kommt der Einfluß innerer elektrischer und magnetischer Felder. Die Anwendung von Gl. (11/40) als Magnetometer setzt demnach die Kenntnis der effektiven Größen g und β in einem gegebenen Material voraus.

Da die Frequenzen auch bei kleineren Feldern wegen des sehr viel größeren Wertes von μ_e sehr hoch liegen, kommen zum Nachweis der Elektronenresonanzen die in § 8 besprochenen Meßverfahren in Betracht. Als Beispiel ist in Abb. 11.27 eine gebräuchliche Meßanordnung dargestellt, die sich im homogenen Feld des Elektromagneten N—S befindet. Sie besteht aus einem abstimmbaren Zentimeterwellenoszillator O im 10-GHz-Bereich, der über einen Hohlleiter den Hohlraumresonator R speist, in dem sich die Probe P befindet. Im Detektor D wird die ankommende Strahlung gemessen und im Resonanzfall das Absorptionssignal registriert. Dem äußeren Feld H_0 ist eine niederfrequente Komponente überlagert, die von den Hilfsspulen W erzeugt wird und das Aufsuchen der Resonanzstelle erleichtert. Die Modulation von H_0 geschieht im Generator M, der gleichzeitig den phasenempfindlichen Detektor V versorgt. Im Schreiber S wird das Resonanzsignal in Abhängigkeit vom äußeren Magnetfeld bei konstanter Frequenz registriert.

Als Proben kommen Hydroxyl, Ionenkristalle oder ferromagnetische Substanzen in Frage; mit Yttrium-Eisengranat-Einkristallen tritt die Resonanz-

bedingung etwa bei 28 GHz/T auf; in Feldern oberhalb von 60 mT beträgt bei Zimmertemperatur die Linienbreite 50 μT. Über Magnetometer mit Hilfe der Elektronenspinresonanz siehe [*11.19, 11.46*].

11.63 Magnetometer mittels ferromagnetischer Resonanzen

Ferromagnetische Metalle und Legierungen zeigen starke Resonanzabsorption, welche auf die unkompensierten Elektronen zurückzuführen ist. Sie ähnelt der Energieabsorption in paramagnetischen Festkörpern und liegt zwischen 20 und 30 GHz in Feldern von 0,5 T. Die Linienbreite von etwa 10 mT ist viel größer als bei der Elektronen- und Kernresonanz.

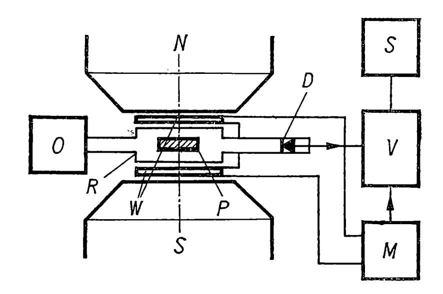




Abb. 11.27 Elektronenspinresonanz-Apparatur

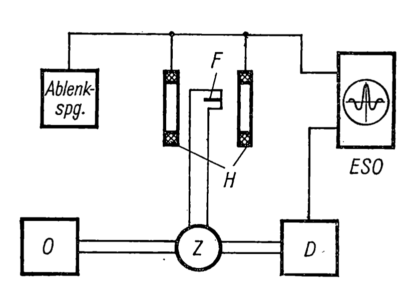


Abb. 11.28 Magnetometer für ferromagnetische Resonanzen

Von Schwee und Irons [*11.112*] wird ein Magnetometer für den Feldbereich 10^{-3} bis 35 A/cm beschrieben, dessen Meßprobe ein magnetischer Film aus 80% Ni und 20% Fe ist. Das Anisotropiefeld H_K der Filme liegt zwischen 1,5 und 10 A/cm, während die magnetische Induktion im Film 1 T beträgt. Resonanz tritt ein für

$$\omega = \gamma[B(H \pm H_K)]^{1/2}, \tag{11/41}$$

wenn H das außen angelegte Feld ist, dessen Richtung senkrecht zum HF-Feld steht, und beide Felder in der Filmebene liegen. Das Vorzeichen von H_K ist davon abhängig, welche Richtung das Außenfeld in bezug auf H_K einnimmt. Das gyromagnetische Verhältnis γ beträgt $2{,}2 \cdot 10^7$ rad/s · A/cm.

Das Magnetometer besteht, wie aus Abb. 11.28 hervorgeht, aus dem Oszillator O für den Frequenzbereich 0,3···1,3 GHz, dem über den Hohlleiter angeschlossenen Zirkulator Z, dem Detektor D und der abgeschlossenen Meßleitung mit der Filmprobe F. Zur Vormagnetisierung dienen die Helmholtz-Spulen H, mit denen Felder zwischen 1 und 60 A/cm in Richtung der Filmebene erzeugt werden. Der Filmstreifen F ist so an den senkrechten Hohlleiterarm gekoppelt, daß er im Resonanzfall einen reflexionsfreien Abschluß darstellt. Die Probe besteht aus einem Stapel von 0,1 mm dicken ferromagnetischen Filmstreifen, deren Länge kleiner als $\lambda/8$ ist. Mit dieser Methode lassen

sich sehr schnelle Magnetfeldänderungen feststellen; zwischen 0 und 100 MHz ist kein Frequenzeinfluß feststellbar.

Weitere Magnetometer nach diesem Prinzip siehe [*11.47*, *11.54*].

11.64 Magnetometer mit Helikon-Resonanzen

Von HOUCK und BOWERS [*11.62*] wird für magnetische Messungen im Bereich von Heliumtemperaturen ein neues Prinzip vorgeschlagen und seine Ausführung beschrieben. Es handelt sich um die Anwendung einer Resonanzerscheinung, die in sehr gut leitenden Metallen im Magnetfeld auftritt und als *Helikon-Wellen* bekannt ist. Durch zwei zueinander senkrechte Spulen, die ihrerseits senkrecht zu einem starken magnetischen Außenfeld stehen, werden Ströme induziert bzw. von der zweiten Spule nachgewiesen, wobei für veränderliche Frequenz scharfe Resonanzstellen im Empfangssignal auftreten. Nach TAYLOR et al. [*11.124*] lautet die Resonanzbedingung

$$\omega = \frac{RB}{\mu_0} \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \frac{1}{u^2}}}, \qquad (11/42)$$

wenn R die Hall-Konstante, B das Magnetfeld, α ein Geometriefaktor und $u = \tan(RB/\varrho)$ ist. Die Größe ϱ stellt den spezifischen Widerstand im Außenfeld B dar. Die Resonanzüberhöhung $Q = (1 + u^2)^{1/2}$ wird in reinen Metallen wie Na, In und Al besser als 10. Als Meßprobe dient, wie in Abb. 11.29 ange-

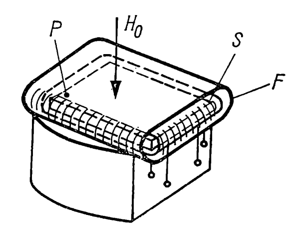


Abb. 11.29 Meßprobe für Helikon-Resonanzen

geben, ein Metallplättchen P ($10 \times 10 \times 1\ \mathrm{mm}^3$) aus z. B. In, das von der Feldspule F (300 Windungen) und senkrecht hierzu von der Induktionsspule S (1200 Windungen) umgeben ist und senkrecht vom Meßfeld durchsetzt wird.

Die Meßanordnung besteht aus einem Oszillator für 100···2000 Hz und einem Empfänger mit vorgeschaltetem Phasenschieber und nachfolgender Integrationsstufe. Als Anzeigeinstrument dient ein Frequenzzähler (s. § 6.51). Für einen Meßbereich zwischen 1 und 8 T wird ein linearer Zusammenhang zwischen ω und H gefunden; die erzielte Genauigkeit wird mit besser als 10^{-3} angegeben [*11.42*].

11.65 Optische Magnetometer

Optische Magnetometer, die optisches Pumpen zur Umverteilung von magnetisch aufgespaltenen Energieniveaus benutzen, gehören zu den empfindlichsten und sehr genauen Resonanzgeräten. Das erste, von STUART et al. [*11.121, 11.127*] angegebene *Rubidium-Magnetometer* benutzt Rb-Dampf, dessen Termschema in Abb. 11.30 dargestellt ist. Im Grundzustand befindet sich das Atom im $5^2S_{1/2}$-Zustand, durch Absorption der $D1$-Linie von 7948 Å wird der

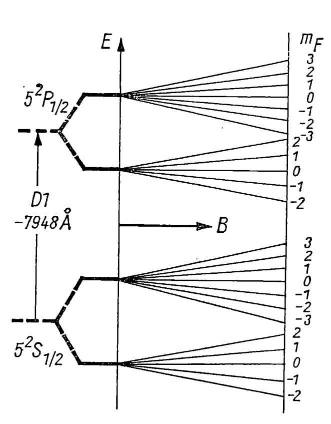


Abb. 11.30 Termschema von ^{85}Rb

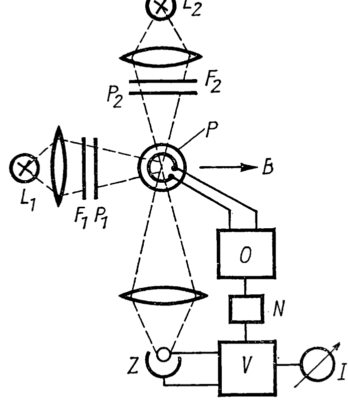


Abb. 11.31 Rubidium-Magnetometer

$5^2P_{1/2}$-Zustand angeregt. In einem Magnetfeld tritt eine Zeeman-Aufspaltung auf, die dem Feld B proportional ist. Wird polarisiertes Licht der Wellenlänge 7948 Å in B-Richtung durch den Rb-Dampf geschickt, so werden Übergänge mit $\Delta m = +1$ induziert, alle Zeeman-Niveaus im $5^2S_{1/2}$-Zustand mit Ausnahme von $m = 3$ geleert, und es wird eine fast vollkommene Polarisation der Rb-Atome parallel zu B erreicht.

Das schematisch in Abb. 11.31 gezeigte Magnetometer nach diesem Prinzip enthält einen Kolben P mit etwas Rb, das bei Zimmertemperatur einen Dampfdruck von $2 \cdot 10^{-6}$ Torr aufweist, sowie Ar als Puffergas von einigen Torr. Das

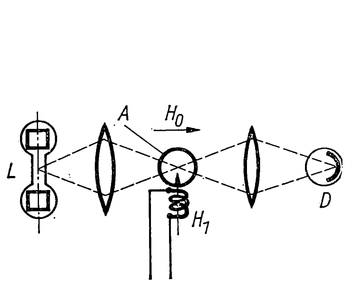


Abb. 11.32 Schema des He-Magnetometers

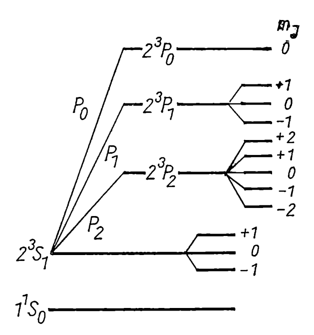


Abb. 11.33 Vereinfachtes Termschema des ^4He

Licht der Rb-Lampe, die durch HF angeregt wird, wird durch das Interferenzfilter F_1 für die $D1$-Linie und das Polarisationsfilter P_1 auf P fokussiert. Im gepumpten Zustand nimmt die Absorption des Rb-Dampfes für zirkular polarisiertes $D1$-Licht ab. Wird senkrecht zu B ein schwaches magnetisches Wechselfeld von etwa 300 kHz angelegt, so führen die Rb-Atome Präzessionsbewegungen um B aus. Das Licht einer zweiten Rb-Quelle L_2, das ebenfalls zirkular polarisiert und durch P geschickt wird, dient zum Nachweis der Absorption des angeregten Rb-Dampfes. Stimmt die HF-Frequenz mit der Larmor-Frequenz der Rb-Atome überein, so ist die Modulation der auf die Fotozelle Z fallenden Intensität am größten. Zum Nachweis der Resonanz dient der phasenempfindliche, vom HF-Oszillator O gesteuerte Detektor V.

In einer anderen Schaltung wird die Ausgangsspannung der Fotozelle Z nach Verstärkung über einen Phasenschieber N der Wechselfeldspule zugeführt. Man erhält dadurch ein bei der Resonanzfrequenz schwingendes System hoher Genauigkeit. Mit dieser Methode kann das magnetische *Erdfeld* auf 10^{-6} genau gemessen werden [*11.37*].

In gleicher Weise ist das optisch gepumpte *Helium-Magnetometer* aufgebaut [*11.114*]. Das Gasvolumen enthält statt Rb und Edelgas ^{4}He oder auch ein Gemisch von ^{3}He und ^{4}He bei einem Druck von 1···5 Torr.

Durch Doll und Graf [*11.30*] wurde das He-Magnetometer wesentlich verbessert und für die Anwendung bei sehr tiefen Temperaturen konstruiert. Die in Abb. 11.32 schematisch dargestellte Versuchsanordnung besteht aus der Meßzelle A mit ^{4}He-Gas von einigen Torr Druck, in der durch eine schwache Glimmentladung metastabile He-Atome erzeugt werden. Die Zelle befindet sich in dem zu untersuchenden Magnetfeld H_0 und ist von einer kleinen Spule zur Erzeugung eines HF-Feldes H_1 umgeben. Die Intensität einer starken He-Gasentladung der Lampe L wird nach dem Durchgang durch die Meßzelle vom PbS-Fotodetektor D gemessen. In der Lampe L werden die für den Pumpvorgang notwendigen Spektrallinien der Wellenlänge 10829,08; 10830,25 und 10830,34 Å, die mit D_0, D_1 und D_2 bezeichnet werden, erzeugt. Durch Resonanzabsorption dieser Spektrallinien werden die metastabilen He-Atome in A vom 2^3S_1-Zustand in die darüber liegenden P-Zustände gehoben, wie sie im Termschema der Abb. 11.33 eingetragen sind. Beobachtet wird die Zeeman-Aufspaltung der He-Atome im metastabilen 2^3S_1-Zustand in drei Linien, deren Aufspaltungskonstante etwa 28 GHz/T beträgt.

Um das Magnetometer für magnetische Messungen bei Heliumtemperaturen nutzbar zu machen, wird die in Abb. 11.34 dargestellte Anordnung des optischen Strahlengangs benutzt. Der Leuchtfleck der He-Entladungslampe L wird durch die beiden Linsen K auf die obere Endfläche eines zylindrischen Lichtleiters N aus einem Spezialglas abgebildet. Der aus dem Lichtleiter unten austretende Lichtkegel hat den gleichen Öffnungswinkel wie der oben eintretende. Die unmittelbar am unteren Lichtleiterende angeordnete Absorptionszelle A enthält einen kleinen Hohlspiegel S_1, mit dem der Strahlengang umgekehrt wird. Zwischen S_1 und dem Eintrittsfenster von A brennt eine schwache Glimmentladung. Mit dieser Strahlumkehr lassen sich hin- und rücklaufende Strahlen trennen. Der an S_1 reflektierte Strahl enthält das Absorptionssignal und gelangt auf die Fotozelle D, die auf der Unterseite der unteren

Kondensorhälfte montiert ist. Das mit einem größeren Öffnungswinkel am oberen Ende von N austretende Licht wird mit Hilfe des sphärischen Spiegels S_2 auf der Zelle D abgebildet. Mit dieser Anordnung, bei der sich lediglich die Feldmeßzelle A auf tiefer Temperatur befindet, lassen sich sehr empfindliche Magnetfeldmessungen im Innern supraleitender Zylinder ausführen. Für fluxmetrische Messungen wird A von der Sekundärwicklung eines supraleitenden Flußtransformators (s. § 11.45) umgeben, womit an beliebigen Proben Magnetisierungsmessungen möglich sind.

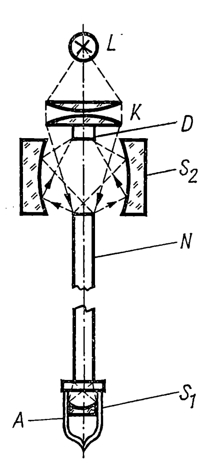


Abb. 11.34 Optische Anordnung des He-Magnetometers

Die Lampe L und die Glimmentladung in A werden von einem 6-MHz-Generator betrieben, der eine Ausgangsleistung von 50 W besitzt. Das hochfrequente Feld H_1 wird von einem HF-Meßsender (20···200 MHz) erzeugt, womit sich ein Feldmeßbereich von 1···10 mT ergibt. Beim Passieren der Resonanzstelle entsteht in der Fotozelle ein Signal, das mit einem phasenempfindlichen Verstärker nachgewiesen und an einem ESO aufgezeichnet wird. Der relative Fehler beträgt bei diesem Verfahren einige 10^{-7}.

11.66 Supraleitende Quanteninterferometer

Neuerdings wird für die Messung äußerst schwacher Magnetfelder von der Größenordnung 10^{-8} A/cm vom *Josephson-Effekt* Gebrauch gemacht. JOSEPHSON sagte 1962 voraus, daß zwei durch eine sehr dünne Isolationsschicht von etwa 1 nm Dicke getrennte Supraleiter einen Gleichstrom erzeugen müßten. Dieser Effekt ist die Folge einer über die Isolierschicht greifenden schwachen Wechselwirkung, welche die Phasen bestimmter für die Supraleitung verantwortlicher Größen korreliert.

In Abb. 11.35 ist eine Doppeltunnelstrecke schematisch dargestellt, die aus den Supraleitern A und B besteht und die dünnen Isolierschichten X und Y enthält. Neben der Phasenordnung der einzelnen Tunnelstrecken besteht eine

zweite, wonach der die Fläche F durchsetzende magnetische Fluß ein ganzzahliges Vielfaches des *magnetischen Flußquants*

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2\ \mathrm{fVs} \tag{11/43}$$

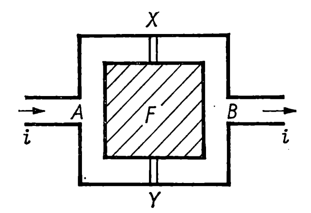


Abb. 11.35 Supraleitendes Flußinterferometer

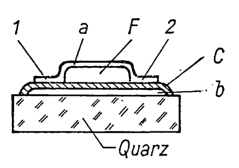


Abb. 11.36 Josephson-Doppeltunnelstrecke: 100 nm *dicke Sn-Filmstreifen a, b; Oxidschicht c; Stromentnahme bei 1 und 2*

sein muß und ein Strom durch A—B auftritt, der ausgeprägte Maxima für jede Änderung des Flusses um Φ_0 aufweist. Für $F = 1\ \mathrm{mm}^2$ treten diese Maxima bei Feldänderungen um $\Delta H \approx 2\ \mathrm{nT}$ auf; ihre Amplituden hängen stark von der Dicke der Isolierschichten und von den Flächen der Kontaktstellen ab; Jaklevic et al. [*11.63*] konnten den Effekt mit der in Abb. 11.36 gezeigten Anordnung nachweisen und erhielten maximale Ströme von der Größenordnung Milliampere.

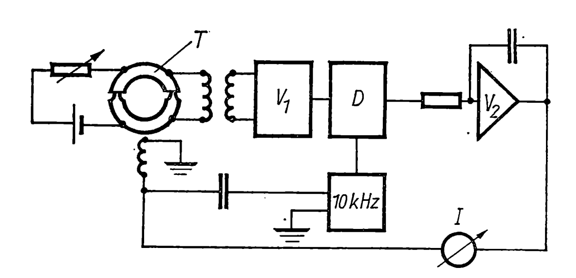


Abb. 11.37 Magnetometer mit supraleitendem Sensor

Von Forgacs und Warnick [*11.44, 11.45*] werden solche supraleitenden *Flußsensoren* benutzt, um kleine Felder oder auch Feldänderungen bei großem Gleichfeld zu messen. Durch besondere Verfahren gelingt es, noch 1/10 eines Flußquants nachzuweisen. In Abb. 11.37 ist das Blockschaltbild eines solchen *Lock-on-Magnetometers* gezeigt. Die Doppeltunnelstrecke T kann mit einem Ruhestrom betrieben werden; die periodischen Stromänderungen bei veränderlichem Magnetfeld werden in V_1 verstärkt und dem phasenempfindlichen Detektor D zugeführt. Das Gleichspannungssignal wird im Operationsver-

stärker V_2 integriert und im Anzeigeinstrument I gemessen. In ähnlicher Weise läßt sich auch eine Digitalanzeige der Fluß- bzw. Feldänderungen erreichen. Die Nachweisgrenze des Geräts beträgt 10 pT in einem Feld von 0,3 T, was einer Genauigkeit von $3 \cdot 10^{-11}$ entspricht (vgl. auch § 2.336).

11.7 Magnetfeldmessung durch galvanomagnetische Effekte

11.71 Hall-Effekt und Widerstandsänderung

Nach § 9.24 steigt der Widerstand von Metallen in schwachen Feldern quadratisch, in stärkeren linear an. In Halbleitern wird meist ein quadratischer Zusammenhang zwischen ϱ und B gefunden. In Abb. 11.38 ist die Meßanordnung für eine Halbleitersonde erläutert. Schickt man den Strom i durch ein

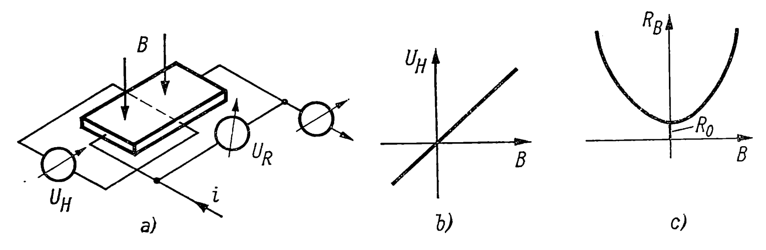


Abb. 11.38 Messung von Hall-Effekt und Widerstandsänderung: Meßanordnung (a), Hall-Spannung (b), Widerstandsänderung (c)

dünnes Plättchen, das vom Feld B senkrecht durchsetzt wird, so wird als Longitudinaleffekt eine Änderung des ursprünglichen Widerstandes R_0 gefunden, der durch die Beziehung

$$R_B = R_0[1 + f(|B|)] \tag{11/44}$$

beschrieben werden kann und nur vom Betrag des Feldes abhängt.

Ferner wird die Quer- oder Hall-Spannung U_H beobachtet, die nach Abb. 11.38b linear mit B zusammenhängt und durch die Formel

$$U_H = \frac{R_H}{d} iB \tag{11/45}$$

gegeben ist, wenn d die Plättchendicke ist. Der *Hall-Koeffizient* R_H ist eine charakteristische Materialkonstante, die vom Feld B und von der Temperatur abhängt.

Beide Effekte werden in der experimentellen Technik und für praktische Messungen der magnetischen Feldstärke angewandt.

11.72 Widerstandsänderung von Metallen im Magnetfeld

Wie aus dem Kohler-Diagramm in Abb. 9.9 zu entnehmen ist, kommen zum Zwecke der Magnetfeldmessung lediglich Bi für kleinere Feldstärken, für starke Felder auch andere Metalle in Betracht. Für alle Metalle nimmt der Wider-

standseffekt $\Delta \varrho_H/\varrho_0$ mit sinkender Temperatur zu. In *Tabelle 11.2* ist für einige Metalle nach Messungen von KAPITZA die relative Widerstandserhöhung in einem Feld von 300 kA/cm angegeben.

Tabelle 11.2 Widerstandsänderungen $\Delta \varrho_H/\varrho_0$ von Metallen bei H = 300 kA/cm und $B \perp i$

Metall	273 K	78 K	4,2 K
Li		0,15	
Na		0,07	
Cu		0,47	2,0 (3,4 T)
Ag		0,38	
Au		0,28	
Be	0,65	2,3	
Mg	0,17	2,84	
Zn	0,06	0,915	
Cd		1,00	
Al		0,73	
As	1,1	29	
Sb	3,5	40	
Bi	3,7	1360	

Nach Untersuchungen von LUBELL et al. [*11.81*] über die Widerstandsänderung von reinem Cu im Transversalfeld ist diese bei sehr reinem Cu um den Faktor 3 größer als im normalen Leitungskupfer. Ferner setzt bei der reineren Probe bereits bei einer sehr viel kleineren Feldstärke (1,5 T) der lineare Anstieg ein. Für kleinere Felder nimmt der Widerstand quadratisch zu.

Für die Messung kleinerer magnetischer Felder ist Bi wegen der großen Widerstandszunahme gut geeignet [*11.15*, *11.21*]. Für technische Messungen, wie das Ausmessen von Feldern in elektrischen Maschinen, ist die Meßprobe als flache Spirale auf eine Isolierunterlage gekittet. Eingehende Untersuchungen von LUBELL [*11.81*] bei 4,2 K ergaben wie im Cu einen quadratischen Widerstandsanstieg, der bei $H > 2{,}3$ T in eine Gerade übergeht. Bei duktilen Bi-Drähten, die mit Durchmessern zwischen 0,08 und 0,3 mm käuflich sind, ist bei zyklischer Temperatur- und Feldbeanspruchung eine Reproduzierbarkeit von 1% zu erreichen. Von Vorteil ist die aus Abb. 11.39 ersichtliche Tatsache, daß der Transversaleffekt bei 1 T um den Faktor 7 größer als der longitudinale ist.

Zum Ausmessen inhomogener Felder kann die von SHIFFMAN [*11.117*] beschriebene Mikrosonde benutzt werden, die in Abb. 11.40 dargestellt ist. Das Bi-Drähtchen *Bi*, das mit Hilfe der V-förmig gebogenen Cu-Drähte D_1 und D_2 von 20 µm Durchmesser aus der Schmelze gezogen und an diesen befestigt wird, ist nur 20 µm stark und etwa ebenso lang, so daß in einem Volumen von 10^{-8} cm³ Feldmessungen durchgeführt werden können. Für Felder bis 0,08 T wird die quadratische Funktion $\Delta R/R_0 = \alpha H^2$ auf einige Prozent genau erfüllt, wobei der Koeffizient α bei 78 K $(2\cdots3)\cdot 10^2\ \mathrm{T}^{-2}$, bei 4,2 K $(10\cdots15)\cdot 10^2\ \mathrm{T}^{-2}$ beträgt.

Von Dowley [*11.31*] wird die Verwendung dünner Bi-Drähtchen in Feldern bis zu 9 T und bei Temperaturen von 300, 78, 4,2 ... 1,3 K untersucht und ein linearer Zusammenhang von R und B oberhalb von 0,25 T gefunden. Brandt et al. [*11.12*] geben Meßwerte von Bi bis 45 T wieder.

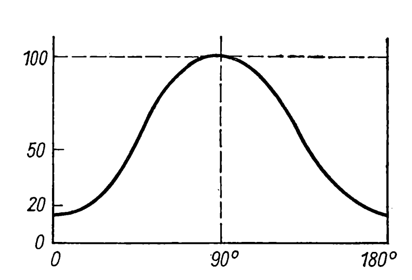


Abb. 11.39 Winkelabhängigkeit der magnetischen Widerstandserhöhung von Bi bei 1 T und 4,2 K *aus* [*11.81*]

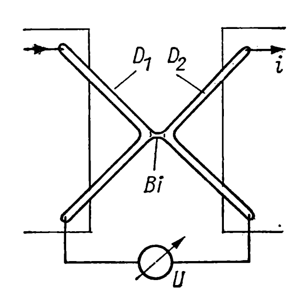


Abb. 11.40 Mikrofeldmeßsonde aus Bi

11.73 Magnetische Widerstandsänderung von Halbleitern (s. a. § 9.242)

Die Verwendung von Halbleitersonden für die Ausmessung magnetischer Felder ist seit der Entdeckung der III—V-Verbindungen (s. § 4.2) durch Welker [*11.135*] möglich geworden. Dies gilt insbesondere für die Herstellung von Hallsonden und -generatoren.

Trotz der hohen Elektronenbeweglichkeit (vgl. Tabelle 4.4), die im InSb den Wert 78000 cm²/Vs erreicht, erhöht sich für p-leitendes InSb im Feld

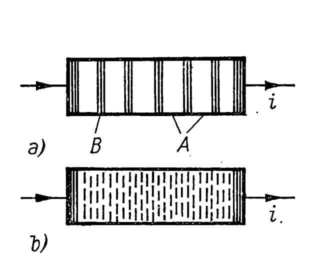


Abb. 11.41 Feldmeßsonden

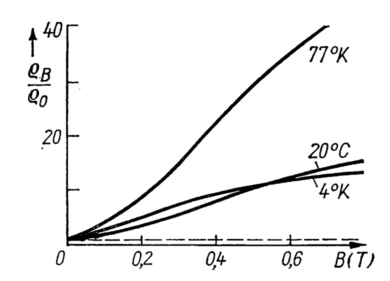


Abb. 11.42 Widerstandsänderung von InSb mit NiSb-Nadeln

von 1 T der Widerstand höchstens um 160% und nimmt mit wachsender Elektronenkonzentration weiter ab. Wesentlich größere Werte der Widerstandsänderung erhält man, wenn man nach Abb. 11.41 auf dem länglichen Halbleiterstreifen A metallisch leitende Stege B quer zur Stromrichtung anbringt, die den Hall-Effekt kurzschließen. Da die Strombahnen im Magnetfeld um den Hall-Winkel gedreht und dadurch verlängert werden, erhöht sich der Widerstand beträchtlich, im Fall des InSb bei 1 T um den Faktor 10···15.

Nach WEISS [*11.134*] läßt sich dieser Effekt noch vergrößern, wenn man im InSb quer zur Stromrichtung ausgerichtete leitende Nadeln aus NiSb erzeugt, wie das schematisch in Abb. 11.41 b angedeutet ist. Die Nadeln sind im Mittel 50 µm lang und 1 µm dick, stellen Einkristalle dar und besitzen gegenüber dem InSb eine um zwei Größenordnungen höhere elektrische Leitfähigkeit. In Abb. 11.42 ist das Verhältnis ϱ_B/ϱ_0 in Abhängigkeit vom Feld B für verschiedene Temperaturen dargestellt.

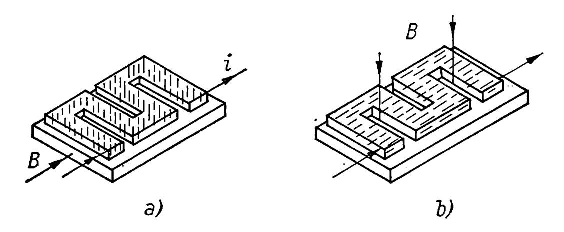


Abb. 11.43 Aufbau von Feldplatten zur Messung von Längs- und Querfeldern

Den Aufbau von Feldmeßsonden nach diesem Prinzip zeigt Abb. 11.43. Auf einen Keramikträger der Größe $1 \times 2{,}5 \times 0{,}5$ mm³ wird die Halbleiterschicht aufgebracht, in der die NiSb-Nadeln bei (*a*) senkrecht auf der Schicht, in (*b*) parallel zu dieser liegen. Da der Widerstand der Sonde (*a*) für ein Magnetfeld in der Ebene der Trägerschicht zunimmt, ist sie besonders zur Messung in Magnetspulen und Bohrungen geeignet. Mit der Sonde (*b*) lassen sich Felder

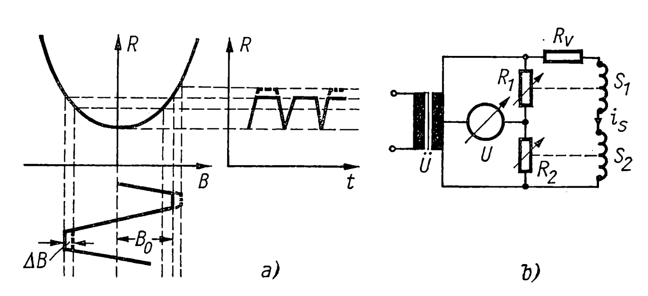


Abb. 11.44 Feldstärkemessung mit Feldplatten: Prinzip (a), Schaltung (b)

senkrecht zur Plättchenebene messen. Diese Sonden, die nur ein Volumen 0,02 mm³ umfassen, sind bis zu den tiefsten Temperaturen verwendbar [*11.78, 11.132*].

Zur Messung kleiner Magnetfelder wird die Sonde in ein magnetisches Wechselfeld gebracht [*11.9*] und ihr Widerstand wegen der quadratischen Kennlinie (Abb. 11.44 a) symmetrisch moduliert. Eine zusätzliche kleine Feldänderung ΔB erzeugt in aufeinanderfolgenden Halbperioden eine entsprechende Widerstandsmodulation, deren Größe von der Vormagnetisierung B_0 abhängt. Zum Nachweis kann die in Abb. 11.44 b skizzierte Brückenschaltung benutzt werden, in der zwei Feldplatten R_1 und R_2 durch den Transformator $\ddot{U}$

symmetrisch mit Strom i_R versorgt werden. Gleichzeitig werden die Spulen S_1 und S_2 für die Vormagnetisierung mit 50 Hz erregt, wobei wegen des großen Vorwiderstandes R_V Spulenstrom i_s und der Strom i_R in Phase sind. Das am Voltmeter U angezeigte Brückensignal ist der zu messenden Feldstärke ΔB proportional. Die erzielbare Empfindlichkeit liegt bei 2 mV/μT; der Temperatureinfluß ist zu vernachlässigen.

Von PIKUS et al. [*11.102*] wird ein äußerst empfindliches Nachweisverfahren angegeben, mit dem über die magnetische Widerstandsänderung eines Halbleiters noch Felder von $10^{-5} \cdots 5 \cdot 10^{-3}$ A/cm gemessen werden können.

11.74 Feldmessungen mit Hall-Sonden [*11.74*]

Wie in § 11.71 gezeigt, tritt beim stromdurchflossenen Leiter in einem magnetischen Transversalfeld nach Gl. (11/45) eine Querspannung U_H auf, die dem Hall-Koeffizienten R_H proportional ist. In § 4.4 sind die grundsätzlichen Eigenschaften solcher Hall-Generatoren beschrieben; in *Tabelle 4.12* sind für einige Metalle und Legierungen der Hall-Koeffizient R_H sowie der spezifische Widerstand angegeben.

Für die Ausmessung räumlich begrenzter Felder werden dünne aufgedampfte Filme aus InAs und InSb bevorzugt, deren Hall-Koeffizient $R_H = 100$ bzw. 400 cm³/As beträgt. Von WEISS [*11.131*] werden an InAs die Nachweisgrenzen untersucht; er findet, daß sie durch das thermische Rauschen des Innenwiderstandes des Halbleiters bestimmt sind und daß R_H bis 1 T nicht von B abhängt.

Zum Nachweis der Hall-Spannung gibt es eine große Anzahl von Meß- und Registriermethoden; im einfachsten Fall mißt man bei bekanntem Meßstrom i mit dem Kompensationsapparat oder einem hochohmigen Gleichspannungs-

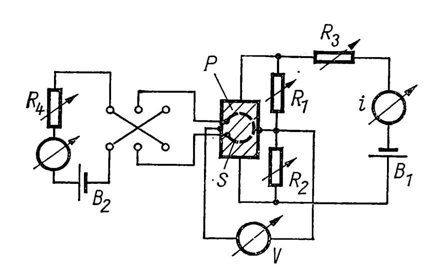


Abb. 11.45 Hall-Generator mit Gleichspannungsanzeige

verstärker unmittelbar die Größe U_H. Von ODENOV et al. [*11.92*] wird eine Hall-Sonde aus HgSe auf eine Glimmerunterlage aufgedampft und die Hall-Spannung mit der in Abb. 11.45 gezeigten Schaltung bei 4,2 K gemessen. Die Meßfläche der Probe P beträgt nur $0{,}5 \times 0{,}5$ mm², der Widerstand 120 Ω bei 4,2 K. Der Meßstrom i wird der Batterie B entnommen und durch die veränderlichen Widerstände R_1 und R_2 die Hall-Spannung im feldfreien Zustand auf Null abgeglichen. Mit einer kleinen Feldspule S, die über einen Widerstand R_4

von der Batterie B_2 gespeist wird, kann die Sonde geeicht werden. Als Spannungsmesser V dient ein Mikrovoltmeter mit Fotozellenverstärkung (s. § 2.282). Bei einem Probenstrom $i = 15$ mA erzeugt ein Feld von 1 A/cm eine Hall-Spannung $U_H \approx 2\,\mu$V.

Über weitere Meßschaltungen siehe [*11.36, 11.57, 11.137*].

Eine *Wechselstrommethode* zum Nachweis kleiner Hall-Spannungen ist in Abb. 11.46 wiedergegeben [*11.58*]. Der Hall-Generator P wird mit 400-Hz-Strom aus dem Transformator $Ü_1$ versorgt, der gleichzeitig die Kompensations-

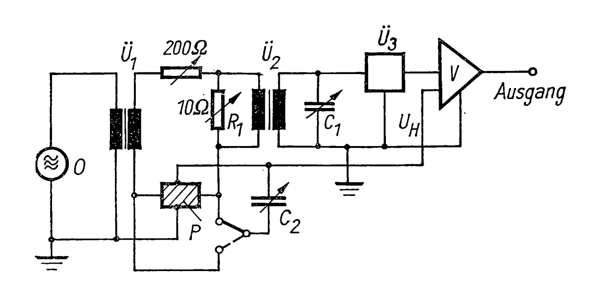


Abb. 11.46 Hall-Generator mit Wechselstrommeßkreis

spannung am Widerstand R_1 (10 Ω) erzeugt. Mit dieser Differentialschaltung lassen sich Meßfehler durch Schwankungen des Meßstroms vermeiden. Die an R_1 liegende Spannung wird über den Trenntransformator $Ü_2$ an einen weiteren Transformator $Ü_3$ mit konstantem Übersetzungsverhältnis gelegt und dessen Ausgangsspannung zusammen mit der Hall-Spannung U_H dem Differentialverstärker V zugeführt. Die Hall-Spannung wird mit einem Röhrenvoltmeter am Ausgang von V abgelesen. Die Nachweisempfindlichkeit dieser Meßanordnung beträgt etwa 0,5 A/cm und ist durch das Rauschen des Hall-Generators begrenzt; der Meßbereich reicht bis 3 T. Weitere Wechselstromverfahren siehe [*11.3*].

Da der Temperatureinfluß meist klein oder reproduzierbar ist, werden Hall-Sonden auch für Messungen bei sehr tiefen Temperaturen benutzt. Voigt [*11.128*] beschreibt die Verwendung einer Hall-Sonde von 0,2 mm² Fläche für Magnetisierungsmessungen an Typ-II-Supraleitern; weitere Anwendungen siehe [*11.59*].

Von Simpkins [*11.118*] wird die Herstellung von *Mikro-Hall-Sonden* aus InAs und InSb beschrieben, deren Meßfläche $25 \times 25\,\mu m^2$ und deren Dicke 0,5···1 µm beträgt. In Abb. 11.47 ist vergrößert die Ansicht einer solchen Sonde wiedergegeben. Mit sehr reinen Ausgangsmaterialien und in einem Vakuum von 1 nTorr werden die Hall-Sonden nacheinander mit geeigneten Masken auf ein Substrat bei 300 °C aufgedampft. Der Hall-Koeffizient von InAs hängt von der Donatorenkonzentration ab und liegt zwischen 20 und 50 cm³/As. Die Hall-Spannung wird mit einem nV-Meter und nachgeschaltetem X, Y-Schreiber gemessen, wobei die *Gleichstromquelle* von 100 mA auf 10^{-4} stabilisiert ist. Mit einem Meßstrom von 10 mA entsteht bei InAs in einem

Feld von 50 kA/cm eine Hall-Spannung von 185 mV bei 4,2 K bzw. 165 mV bei 300 K. Die kleinste noch meßbare Feldstärke beträgt 1 A/cm.

Über weitere Mikro-Hall-Sonden siehe [*11.109*, *11.55*, *11.111*, *11.17*].

Für Messungen von Erdfeldschwankungen wird von OWSTON [*11.95*] eine Hall-Sonde H zwischen den Polschuhen P_1 und P_2 eines aus Mu-Metall bestehenden „Konzentrators" (Abb. 11.48) verwendet. Der Meßstrom wird von

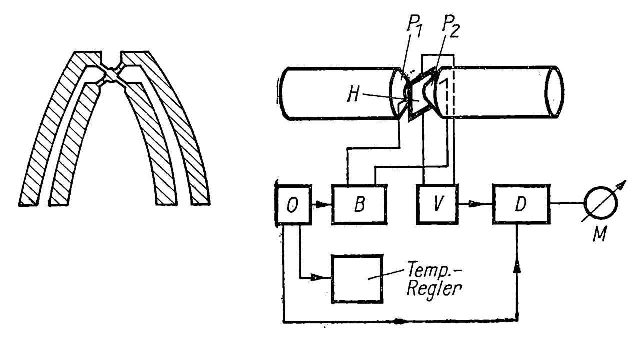


Abb. 11.47 Mikro-Hall-Sonde *Abb. 11.48 Erdfeldmagnetometer mit Hall-Sonde*

einer mit dem Oszillator O erzeugten Wechselkomponente mit 550 Hz moduliert. Die Hall-Spannung wird über den Selektivverstärker V und den Gleichrichter D am Instrument M gemessen. Bei einer Länge der Mu-Metallstäbe von je 30 cm und 12 mm Durchmesser kann eine Meßempfindlichkeit von $5 \cdot 10^{-5}$ A/cm erzielt werden.

11.8 Weitere Feldmeßmethoden

Neben den angeführten Methoden werden für spezielle Meßprobleme rein physikalische Verfahren benutzt, die auf dem magnetooptischen Effekt, der Ablenkung von Elektronenstrahlen im Magnetfeld oder dem Zeeman-Effekt beruhen. Der Nachweis innerer Felder in ferro- oder ferrimagnetischen Substanzen mit Hilfe von kernphysikalischen Methoden, z. B. mit dem Mößbauer-Effekt, wird in Bd. V behandelt.

11.81 Magnetooptische Feldmessung

Für die magnetooptische Feldmessung läßt sich der *Faraday-Effekt* anwenden, der eine Drehung der Polarisationsebene eines in Feldrichtung in einem Medium verlaufenden Lichtstrahls hervorruft. Die Winkeldrehung ist entsprechend der Beziehung

$$\alpha = KL|\boldsymbol{H}| \qquad (11/46)$$

der Verdetschen Konstanten K, der vom Lichtstrahl durchsetzten Länge L und der magnetischen Feldstärke $\boldsymbol{H}$ proportional. In *Tabelle 11.3* ist die Verdetsche Konstante für einige feste und flüssige Stoffe angegeben.

Tabelle 11.3 Verdet-Konstante (in Winkelminuten) *einiger Stoffe*

Substanz	K
Bleisilikatglas	0,0566
Quarz	0,0166
Steinsalz	0,0372
Monobromnaphthalin	0,0819
Schwefelkohlenstoff	0,0421
Benzol	0,0302
Nitrobenzol	0,0216
Wasser	0,0130

Da $\alpha \sim |\boldsymbol{H}|$, hängt der Drehsinn von der Feldrichtung ab; er stimmt mit der Richtung überein, in der der Strom in einer Spule sein Magnetfeld umkreist. Bei einer Mehrfachreflexion summieren sich die Einzeldrehwinkel.

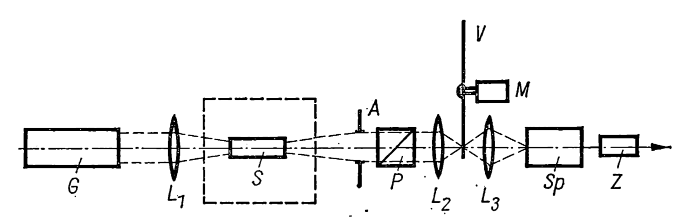


Abb. 11.49 Magnetooptische Feldmessung

Ein Beispiel für die Anwendung dieses Effekts auf Plasmauntersuchungen wird von McCartan et al. [*11.85*] beschrieben; es ist vereinfacht in Abb. 11.49 dargestellt. Als Meßprobe S wird ein zylindrischer Glasstab mit polierten Endflächen zum Ausmessen des Magnetfeldes in Achsenrichtung benutzt. Durch die Linse L_1 wird das aus dem Gaslaser G polarisiert austretende Lichtbündel auf die Endfläche von S abgebildet. Der Polarisator P ist so gedreht, daß die durchtretende Lichtintensität ihren kleinsten Wert hat. Die Linsen L_2, L_3 und die Lichtsirene V dienen zur Eichung der Anordnung. Als Nachweissystem wird ein Monochromator Sp oder ein Fabry-Pérot-Interferenzfilter mit dem Fotomultiplier Z benutzt. Die ankommende Intensität berechnet sich aus

$$I_T = I_0 + \frac{1}{2} I_1 [1 - \cos(2KLB)], \tag{11/47}$$

wenn I_0 die Intensität für $B = 0$ ist und K die Verdet-Konstante bedeutet. Durch Mehrfachreflexion kann die wirksame Länge L um eine Größenordnung die geometrische Länge von S übertreffen. Die Methode ist nur für hohe Feldstärken anwendbar; sie hat jedoch den Vorteil, daß das Feld ungestört bleibt

und wegen der sehr kleinen Relaxationszeit des Faraday-Effektes auch Feldänderungen innerhalb von einigen Nanosekunden beobachtet werden können.

Nach HOCK [*11.60*] ist das Verfahren auch für sehr inhomogene und örtlich begrenzte Felder anwendbar, wenn man den Faraday-Effekt magnetisierter durchsichtiger ferromagnetischer Schichten anwendet, der eine Winkeldrehung

$$\alpha' = K' d M \tag{11/48}$$

hervorruft. Darin bedeutet K' die *Kundtsche Konstante*, d die Schichtdicke und M die Magnetisierung. Für magnetisch gesättigtes *Eisen* wird $K' = 382\,500$ °/cm, woraus für eine Schichtdicke von 0,1 μm ein Winkel $\alpha = 3{,}8°$ folgt. Weitere Angaben siehe [*11.83, 11.99*].

Neuerdings ist von KIRCHNER [*11.70*] dieses Verfahren dadurch verbessert worden, daß anstelle einer ferromagnetischen Schicht dielektrische Verbindungen mit *Seltenen Erden*, wie EuO, EuS und EuSe, verwendet werden, die auf die zu untersuchende Substanz oder einen Probenträger im Vakuum aufgedampft werden. Mit einer EuS–EuF_2-Schicht von 0,1 μm Filmdicke konnte mit hohem Auflösungsvermögen der Zwischenzustand einer supraleitenden Scheibe sichtbar gemacht werden. Die Verdet-Konstante dieser Schichten ist der Temperatur T umgekehrt proportional. Das bekannte Cer-Phosphatglas ist viel weniger empfindlich und benötigt daher Schichtdicken von einigen Millimetern.

11.82 Magnetron-Magnetometer [11.53]

Bringt man ein ungeschlitztes *Magnetronsystem* in ein axiales Magnetfeld B, so wird nach Gl. (8/51) die Winkelgeschwindigkeit der aus der Katode austretendem Elektronen der Larmor-Frequenz $\omega = eB/2m$ entsprechen. Bei bekanntem Innendurchmesser r des Anodenzylinders ist die Anodenspannung U_a, bei der der Anodenstrom steil ansteigt, ein Maß für das Feld B; es gilt:

$$B \sim \frac{\sqrt{U_a}}{r_a}.$$

Nach FULOP [*11.48*] lassen sich mit gewöhnlichen Miniaturdioden mit einer Genauigkeit von besser als 1% mit $U_a = 5\cdots20$ V Feldstärken zwischen 0,05 und 0,28 T messen.

11.83 Elektronenstrahl-Magnetometer

Nach CRAGG [*11.23*] können mit einem scharf gebündelten Elektronenstrahl konstanter Geschwindigkeit schwache magnetische Felder von 10^{-4} bis 10 A/cm gemessen werden. Die mit einem Multiplier gemessene Strahlablenkung erzeugt eine Kompensationsspannung, welche die magnetische Ablenkung elektrisch kompensiert. Das Verfahren ist im Frequenzbereich 0⋯10 kHz brauchbar.

Über eine elektronenoptische Schattenmethode zur Aufzeichnnng magnetischer Felder siehe [*11.84*].

11.84 Sichtbarmachen magnetischer Felder

Für Übersichtsbilder von komplizierten Magnetfeldern und das Sichtbarmachen der magnetischen Struktur von Supraleitern im „Zwischenzustand" sind eine Reihe von Verfahren in Gebrauch, welche auch feine Strukturen noch auflösen können.

Nach SUCHOW [*11.122*] können hierzu kleine plattenförmige α-Fe_2O_3-Kristalle von etwa 10 μm Durchmesser verwendet werden, die durch Abschrecken einer Fe_2O_3-Borax-Schmelze erhalten werden. Werden diese Kriställchen in Wasser oder einer organischen Flüssigkeit suspendiert und in ein Magnetfeld gebracht, so stellen sie sich mit ihrer Plattenebene in Feldrichtung ein und können durch geeignete Beleuchtung sichtbar gemacht werden.

Weitere Verfahren siehe [*11.4, 11.24, 11.27, 11.35*].

Zur Sichtbarmachung von supraleitenden Phasengrenzen werden Nb- oder Sn-Pulver benutzt, die wegen ihres diamagnetischen Verhaltens von den normalleitenden Bereichen abgestoßen werden und sich an den supraleitenden Bereichen ansammeln.

11.85 Magnetometer mittels Barkhausen-Effekts

Von KHARITONOV [*11.69*] wird ein empfindliches Feldstärkenmeßgerät beschrieben, das auf der Anwendung des Barkhausen-Effekts beruht und mit dem Feldänderungen von 10^{-5} A/cm bei konstantem Außenfeld nachgewiesen werden können.

§ 12 EIGENSCHAFTEN MAGNETISCHER STOFFE

Die magnetischen Stoffe lassen sich auf Grund ihrer Eigenschaften in drei Hauptklassen einteilen: *Diamagnetika, Paramagnetika* und *Ferromagnetika.* Jede dieser drei Klassen läßt sich wieder in einzelne Untergruppen unterteilen, wie unten gezeigt wird.

Zu den *Diamagnetika* gehören die Edelgase, eine Reihe von Metallen (Zn, Au, Hg u. a.), Nichtmetalle (Si, P, S u. a.) und viele organische Verbindungen. Die Suszeptibilität χ ist *negativ* und ihr absoluter Betrag von der Größenordnung 10^{-6}; sie hängt praktisch nicht von der Temperatur ab.

Zu den *anomalen Diamagnetika* zählen Bi, Ga, Sb, Graphit, J, Tl, die γ-Phase von Legierungen des Typs Cu—Zn u. a. Die atomare Suszeptibilität dieser Substanzen ist um 10···100 größer als die der „klassischen" Diamagnetika und temperaturabhängig.

Diamagnetisches Verhalten zeigen ferner die *Supraleiter* für $T \leqq T_c$, wenngleich dies lediglich die Folge von Abschirmströmen ist.

Die zweite Hauptgruppe der *Paramagnetika* mit einer Suszeptibilität $\chi > 0$ umfaßt freie Atome, Ionen und Moleküle, die ein von Null verschiedenes magnetisches Moment besitzen. Typische Vertreter sind z. B. O_2, NO, Pt, Pd, die Seltenen Erden, Fe-, Ni- und Co-Salze, ferner Ferromagnetika oberhalb der Curie-Temperatur. Außerdem gibt es *paramagnetische Metalle,* deren Suszeptibilität temperaturunabhängig ist; hierher gehören die Alkalimetalle. *Antiferromagnetische Stoffe* sind die Übergangselemente, deren chemische Verbindungen und Legierungen. Oberhalb einer kritischen Temperatur T_c, die man Néel-Temperatur nennt, verhalten sich diese Substanzen wie gewöhnliche Ferromagnetika, unterhalb von T_c verschwindet χ für $T = 0$. Zu dieser Stoffgruppe gehören MnO, MnS, NiCr, CrS, Cr_2O_3, VO_2, FeS_2, FeS u. a.

Die dritte Hauptgruppe der technisch wichtigen *Ferromagnetika* zeichnet sich durch Magnetisierungskurven, Sättigungsinduktion und Hysteresisschleifen aus; die Suszeptibilität hängt von H ab und erreicht in bestimmten Legierungen sehr hohe Werte. Schließlich gibt es den *Ferrimagnetismus* in Verbindungen des Typs $MOFe_2O_3$ (M = zweiwertige Ionen von Mn, Co, Ni, Cu, Mg, Zn, Cd, Fe), die man *Ferrite* nennt und die bei HF-Anwendungen wegen ihres hohen spezifischen Widerstandes eine Rolle spielen (s. a. § 8.76). Zusammenfassende Literatur siehe [*12.27, 12.38, 12.171, 12.207, 12.213, 12.216, 12.12*].

12.1 Allgemeines über Meßverfahren an dia- und paramagnetischen Substanzen

12.11 Grundlagen

Das dielektrische und magnetische Verhalten der Materie hat vieles gemeinsam: es gibt permanente elektrische und magnetische *Dipole,* induzierte elektrische und magnetische Polarisation und spontane Magnetisierung in Analogie

zu den Ferroelektrika (s. § 10.7). Der grundlegende Unterschied zwischen beiden Phänomenen ist die Tatsache, daß es elektrische Ladungen *eines* Vorzeichens gibt (*Monopole*), die magnetischen Erscheinungen dagegen von magnetischen *Dipolen* hervorgerufen werden.

In den Maxwell-Gleichungen werden die *magnetische Induktion* $\boldsymbol{B}$ und die *magnetische Feldstärke* $\boldsymbol{H}$ durch die Beziehung

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{12/1}$$

verknüpft, in der die magnetische *Permeabilität* μ für viele Stoffe eine Konstante ist. Da $\boldsymbol{B}$ im SI-System in Tesla ($\mathrm{Wb/m^2}$) und $\boldsymbol{H}$ in A/m gemessen werden, erhält die Größe μ die Einheit [Vs/Am] = [H/m].

Durch Anwendung des Durchflutungsgesetzes (11/12b) und des Induktionsgesetzes (11/10) kann die Permeabilität einer Substanz mit der in Abb. 12.1

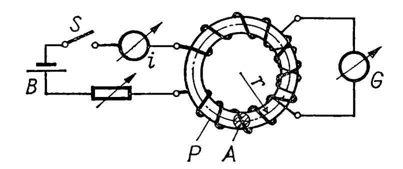


Abb. 12.1 B-H-Messung

gezeigten Meßanordnung bestimmt werden. Der zu untersuchende Stoff in Form eines Toroids P ist gleichmäßig mit N_1 Windungen bewickelt, die von der Batterie B mit dem Strom i versorgt werden. Die Sekundärwicklung mit N_2 Windungen ist an das ballistische Galvanometer G angeschlossen. Durch Schließen des Schalters S entsteht in P ein magnetischer Fluß, dessen zeitliche Änderung im Sekundärkreis einen Spannungsstoß $\int u\,\mathrm{d}t$ hervorruft. Bezeichnet man mit r den mittleren Radius und mit A den (konstanten) Querschnitt des Toroids, so entsteht nach Gl. (11/12b) die Feldstärke

$$H = \frac{iN_1}{2\pi r}. \tag{12/2}$$

Der mit der Sekundärwicklung verkettete Fluß beträgt dann

$$\Psi = \mu H A N_2. \tag{12/3}$$

Schaltet man den Strom i ein, so entsteht der Stromstoß $u\,\mathrm{d}t/R = \mathrm{d}\Psi/R$, der durch das ballistische Galvanometer integriert wird und den Maximalausschlag $\varphi_{\max} = S_i{}'_b \int i\,\mathrm{d}t$ liefert (s. Gl. 2/65), wenn mit R der gesamte Schließungswiderstand bezeichnet wird. Setzt man den Ausdruck für H aus Gl. (12/2) in Gl. (12/3) ein, so findet man die Größe μ aus der Beziehung

$$\mu = \frac{2\pi r R}{N_1 N_2 A i}\,\frac{\varphi_{\max}}{S'_{ib}}, \tag{12/4}$$

wenn S'_{ib} die ballistische Stromstoßkonstante von G ist.

Für den leeren Raum ergibt sich die *magnetische Feldkonstante* oder *Induktionskonstante* μ_0, die nach Gl. (11/14) den Wert

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9}\ \mathrm{H/cm} \tag{11/14}$$

besitzt.

Die durch Gl. (11/13) definierte *relative Permeabilität* μ_r ist eine dimensionslose Meßzahl in Analogie zur relativen Dielektrizitätskonstanten ε_r. Man kann die magnetische Induktion auch durch die *Magnetisierung* $\boldsymbol{M}$ beschreiben und analog zu Gl. (10/14)

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \boldsymbol{M} = \mu_r \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{12/5}$$

ansetzen. Schließlich läßt sich die *magnetische Suszeptibilität*

$$\chi = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{H}} \tag{12/6}$$

definieren, woraus durch Vergleich mit Gl. (12/5) die Beziehung

$$\chi = \mu_r - 1 \tag{12/7}$$

folgt.

Zur Umrechnung der CGS-Einheiten in die des praktischen Maßsystems ist *Tabelle 12.1* zusammengestellt.

Tabelle 12.1 Umrechnung magnetischer Größen

Größe	SI-Einheit	CGS-Einheit	Umrechnungsfaktor
Magn. Induktion $\boldsymbol{B}$	Tesla T = Wb/m²	Gauß (G)	1 T $\triangleq$ 10^4 G
Magn. Feldstärke $\boldsymbol{H}$	A/m	Oersted (Oe)	1A/m $\triangleq$ $4\pi \cdot 10^{-3}$ Oe
Magn. Fluß Φ	Weber Wb = Vs	Maxwell (Mx)	1 Mx $\triangleq$ 10^{-8} Wb
Magnetische Feldkonstante μ_0	H/m = Vs/Am	1	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m

12.12 *Suszeptibilitätsmessung durch Kraftwirkung*

Weit verbreitet sind die Meßverfahren, bei denen die auf die zu untersuchende magnetische Substanz in einem bekannten inhomogenen Magnetfeld ausgeübten Kräfte gemessen werden. Betrachtet man in Abb. 12.2 die Meßprobe P mit dem Volumen V und der gesuchten Permeabilität μ_2 in einem Magnetfeld $\boldsymbol{H}$, so ändert sich die potentielle Energie gegenüber dem Zustand ohne Probe um

$$\Delta W = -(\mu_2 - \mu_1)\mu_0 \boldsymbol{H}^2 V/2, \tag{12/8}$$

wenn μ_1 die relative Permeabilität im Feldraum ist. Die auf P ausgeübte

Kraft ergibt sich aus der Beziehung

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{2}\,\mu_0 H^2 V\right) = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2}\,\mu_0\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(H^2)\,V$$

$$= (\chi_2 - \chi_1)\left(H_x \frac{\mathrm{d}H_x}{\mathrm{d}x} + H_y \frac{\mathrm{d}H_y}{\mathrm{d}x} + H_z \frac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}x}\right)\mu_0 V, \qquad (12/9)$$

wenn $\mu_1 = 1 + \chi_1$ und $\mu_2 = 1 + \chi_2$ gesetzt wird und H_x, H_y und H_z die Komponenten von $\boldsymbol{H}$ sind. Analoge Gleichungen gelten für die Komponenten F_y und F_z. Ist $\chi_2 - \chi_1 > 0$, so wird der Körper in Richtung zunehmender

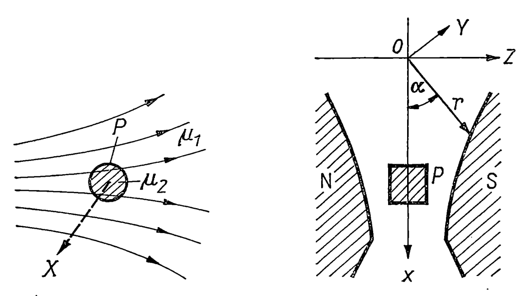


Abb. 12.2 Kräfte im inhomogenen Magnetfeld *Abb. 12.3 Polschuhform*

Feldstärke gezogen; diamagnetische Proben werden aus dem Feld herausgedrängt.

Faraday-Methode. Dieses Verfahren stellt die direkte Anwendung der Gl. (12/9) dar, wobei durch eine einfache Feldkonfiguration meist zwei der Kraftkomponenten eliminiert werden können. Für $\mathrm{d}H_x/\mathrm{d}x = \mathrm{d}H_y/\mathrm{d}x = 0$ vereinfacht sich Gl. (12/9) zu

$$F_x = (\chi_2 - \chi_1) H_z \frac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}x}\,\mu_0 V. \qquad (12/9\text{a})$$

Das experimentelle Problem besteht darin, über ein relativ großes Volumen V die Größe $H_z\,\mathrm{d}H_z/\mathrm{d}x$ konstant zu halten. Gewöhnlich wird ein starker Elektromagnet mit konischen Polschuhen verwendet und der Feldstärkeverlauf in der Symmetrieebene mit den in § 11 beschriebenen Verfahren ausgemessen. Zur Kraftmessung werden Balkenwaagen oder elektrische Feinwaagen mit Kompensation (s. Bd. I, §§ 4.3; 4.4) verwendet, welche unmittelbar die Kraft anzeigen und den Meßort der Probe festhalten.

Bei der von Soule et al. [*12.195*] angegebenen hochempfindlichen Faraday-Apparatur ist der Elektromagnet mit Polschuhen nach Abb. 12.3 versehen, deren Kontur der Beziehung $r^{2/3} \sin(3\alpha/2) = \text{const}$ gehorcht, wobei der Ursprung in der X, Y-Ebene symmetrisch zu den Polschuhen liegt und sich die Meßprobe bei P befindet. Der Querschnitt der Polschuhe ist zylindrisch, d. h., es ist $H_y = 0$, und die Größe $H_z\,\mathrm{d}H_z/\mathrm{d}x$ ändert sich bei Abweichungen des Probenorts von der Symmetrieebene nur wenig. Zur Kraftmessung wird

eine Quarzfadenmikrowaage mit elektromagnetischer Kompensation benutzt. Die Probe hängt an einem dünnen Quarzfaden am Waagebalken in einem evakuierten Rohr, das Teil eines Kryostaten ist und Messungen zwischen 80 und 700 K erlaubt. Die Genauigkeit dieser Methode wird mit $< 1\%$, die Nachweisempfindlichkeit mit $\pm 10^{-8}$ angegeben.

Die von RICHARDSON et al. [*12.179*] beschriebene automatische Meßanordnung ist vereinfacht in Abb. 12.4 dargestellt. Die Vakuumtorsionswaage W

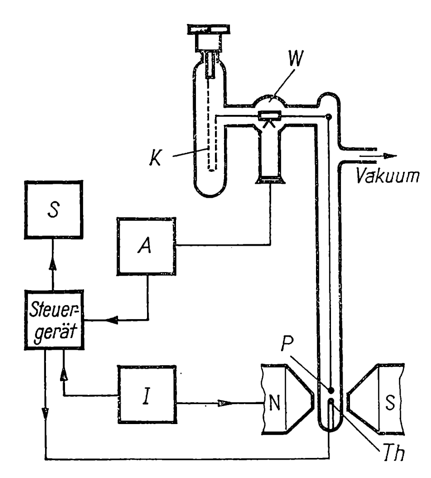


Abb. 12.4 Automatische Suszeptibilitätswaage

wird elektromagnetisch kompensiert; das Gewicht der Probe P wird durch eine feingliedrige Kette K am anderen Waagebalkenende ausgeglichen. Die symmetrisch abgeschrägten Polschuhe $N-S$ des Elektromagneten liefern bei einem kleinsten axialen Abstand von 4,0 cm in 2···3 cm Höhe oberhalb der Magnetachse für $H_z \, \mathrm{d}H_z/\mathrm{d}x$ den Wert $2 \cdot 10^6 \, \mathrm{A}^2/\mathrm{cm}^3$. In Probennähe wird die Temperatur mit einem Thermoelement Th gemessen; für Tieftemperaturmessungen ist ein Kryostateneinsatz vorhanden. Durch eine stabilisierte Stromquelle I wird der Magnetstrom auf 10^{-4} konstant gehalten. Der Ausgang der elektronischen Kompensationsschaltung A für die Waage liegt am Registrierinstrument S. Bei einem Meßbereich von 78···800 K wird die Suszeptibilität der Meßprobe als Funktion der Meßtemperatur selbsttätig registriert, wobei eine Genauigkeit von 0,5% erreicht wird. Weitere Ausführungsformen siehe [*12.43, 12.172, 12.131, 12.170*]. Die Anwendung einer Torsionswaage mit elektrostatischer Kraftmessung beschreibt VILIM [*12.205*].

Gouy-Verfahren. Das bereits 1889 angegebene Verfahren beruht ebenfalls auf der Messung von Kräften im inhomogenen Magnetfeld mit einer Probe in Form eines dünnen langgestreckten Zylinders. Wie bei der Faraday-Methode wird sie an einem dünnen Faden in der Symmetrieebene des Magneten $N-S$ aufgehängt, wobei das Feld am unteren Probenende H, am oberen aus dem Feld herausragenden Ende H_0 ist (Abb. 12.5). Bezeichnet man mit A den

Probenquerschnitt, so findet man nach Gl. (12/9a) die auf die Probe wirkende Kraft zu

$$F_x = \frac{1}{2}(\chi_2 - \chi_1)\mu_0 A \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_z^2 \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}(\chi_2 - \chi_1)\mu_0 A (H^2 - H_0^2). \qquad (12/10)$$

Da gewöhnlich H von der Größenordnung 10^4 A/cm und $H_0 \approx 200$ A/cm ist, kann H_0^2 gegen H^2 vernachlässigt werden. Das Verfahren ist besonders für Flüssigkeiten oder Pulverproben geeignet, die in ein zylindrisches Glasröhrchen

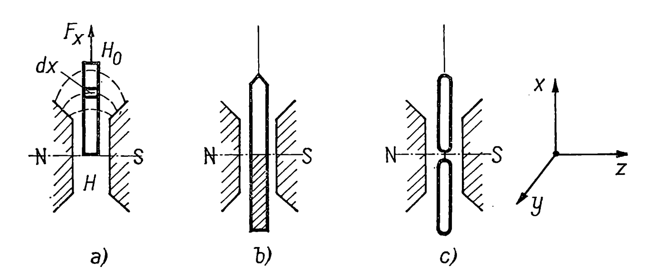


Abb. 12.5 Gouy-Methode

eingefüllt werden können. In Abb. 12.5b hängt die zu untersuchende diamagnetische Probe unterhalb der Polschuhe und liefert ebenfalls wie im Fall (*a*) einer paramagnetischen Probe eine Kraft nach unten. Schließlich sind in Abb. 12.5c zwei gleiche Röhrchen am Gehänge befestigt, die mit zwei zu vergleichenden Substanzen gefüllt sind. Bei Relativmessungen kann eine Genauigkeit von 1 ‰ erreicht werden.

Für die Kraftmessung werden die gleichen Ausschlags- bzw. elektrischen Kompensationsverfahren wie oben angewandt. Setzt man in Gl. (12/10) $\chi_2 = 10^{-5}$, $\chi_1 = 0$, $A = 0{,}1$ cm², $H = 10^4$ A/cm und $H_0 \approx 0$ ein, so findet man eine Kraft $F_x = 6{,}4 \cdot 10^{-3}$ p. Von Butera [*12.34*] wird eine selbsttätig abgleichende elektromagnetische Waage für diese Zwecke beschrieben, die einen Differentialtransformator als Abgleichselement benutzt. Durch einen nachgeschalteten Verstärker mit starker Gegenkopplung wird trotz großen Meßbereichs eine hohe Empfindlichkeit von 0,02 mg erzielt. Gersonde [*12.79*] mißt die Kraft F_x, die auf die Probe im Luftspalt eines 2.3-T-Magneten ausgeübt wird, mit einem Cartesischen Taucher. Dieser besteht aus einem kleinen, mit einer feinen Öffnung versehenen Glaskölbchen, das in einem mit Flüssigkeit gefüllten senkrechten Rohr oben schwimmt und unten mit der Meßprobe belastet ist. Die Kraft F_x wird dadurch kompensiert, daß der Gasdruck im Schwimmerrohr entsprechend reguliert wird, wodurch sich der Auftrieb des Tauchers meßbar verändert.

Nach einem modifizierten Gouy-Verfahren wird von Rocker und Kohlhaas [*12.182*] das paramagnetische Verhalten von Fe–Si-Legierungen gemessen, wobei Proben von 30···200 g benutzt und Temperaturen bis zu 1900 °C

angewandt werden können. Zur Kraftmessung dient ein elektrodynamisches Lautsprechersystem und zur Nullanzeige eine Doppelfotodiode, deren Ausgangssignal der Probenverschiebung proportional ist. Weitere Ausführungsformen siehe [*12.35*, *12.37*, *12.109*].

Curie-Torsionswaage. Die von CURIE zuerst angegebene und in Abb. 12.6 dargestellte Methode beruht ebenfalls auf der Anwendung der Gl. (12/9a). Zur Messung der Kraft F_x wird anstelle einer Balkenwaage oder einer der oben besprochenen Meßvorrichtungen eine Torsionswaage benutzt, an deren Wägearm A die Probe P befestigt ist. Das Gehänge ist an einem Quarzfaden F befestigt; der Drehwinkel wird mit einem Lichtzeiger, der am Spiegel S reflektiert wird, gemessen. Die höhere Meßempfindlichkeit der Torsionswaage

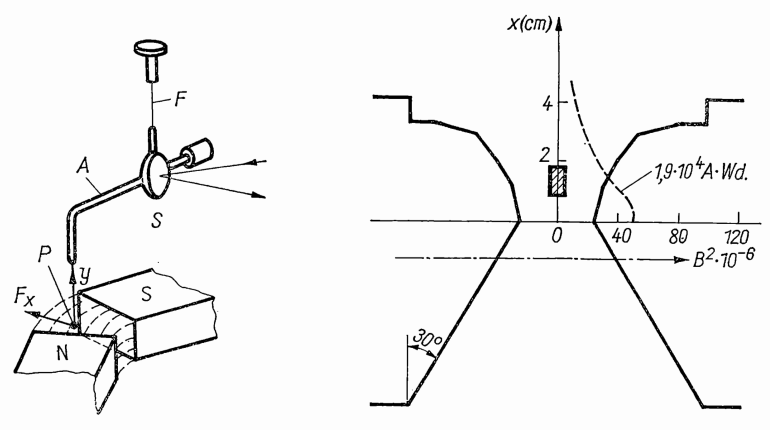


Abb. 12.6 Magnetische Waage nach CURIE

Abb. 12.7 Polschuhform für magnetische Waage

(vgl. Bd. I, § 4.24) liefert nicht unbedingt eine höhere Meßgenauigkeit, da die Meßprobe einen zusätzlichen Freiheitsgrad gegenüber der Faraday-Methode erhält und seitliche Auslenkungen in Z-Richtung möglich sind. Die Größe $H_z\, \mathrm{d}H_z/\mathrm{d}x$ soll über einen bestimmten Bereich konstant sein, damit Fehler beim Justieren nicht die Absolutgenauigkeit beeinflussen.

Geeignete Polschuhe hierzu sind von FEREDAY [*12.67*] angegeben; die Größe $H_z\, \mathrm{d}H_z/\mathrm{d}x$ ist von der Größenordnung 10^6 A² cm³ über eine Entfernung von 1,5 cm. Von HEYDING et al. [*12.99*] ist die in Abb. 12.7 angegebene Polschuhform untersucht worden, die auf einen Polschuhdurchmesser von 10 cm abgestimmt ist. Die Polschuhkontur ist abschnittsweise entsprechend der Gleichung $z^2 = 25/(11 - 3x)$ hergestellt; die Lage der Probe P ist durch die schraffierte Fläche in der Abbildung gekennzeichnet. Bei einem engsten Abstand von 2,6 cm wird bei einer Durchflutung von $4 \cdot 10^4$ A-Windungen ein Wert von 0,24 T²/cm für $B\, \mathrm{d}B/\mathrm{d}x$ erreicht.

Die Curie-Waage von NAKAGOME und WHITMORE [*12.151*] ist für einen sehr weiten Temperaturbereich (4,2···300 K) ausgelegt und mit einer Fotokompensationsvorrichtung ausgerüstet, so daß sich die Probe immer am selben Ort befindet. Die Nachweisgrenze liegt bei 1 μg; es können kleine Suszeptibili-

täten von $10^{-4} \cdots 10^{-7}$ gemessen werden. Das Gegendrehmoment an der Torsionswaage wird elektrodynamisch erzeugt.

Magnetische Waage nach FÖEX *und* FORRER [*12.71, 12.162*]. Die Abwandlung der Faraday-Methode mit waagerechter Probenauslenkung besteht, wie aus Abb. 12.8 zu ersehen ist, aus den Polschuhen N, S zur Erzeugung des inhomogenen Magnetfeldes, der unmagnetischen Achse A, die durch 4 Fäden F

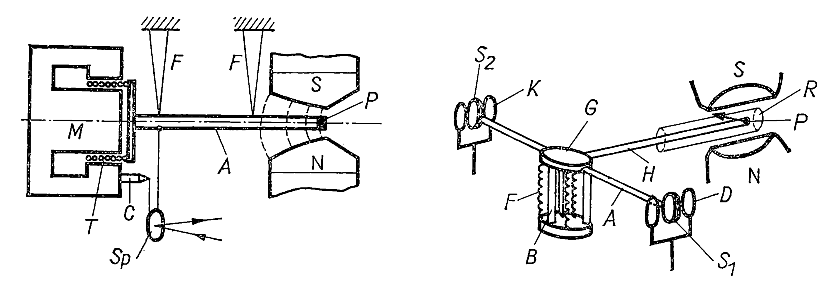


Abb. 12.8 Magnetische Waage nach FÖEX *und* FORRER

Abb. 12.9 Magnetische Waage nach ELLENKAMP

horizontal geführt wird und an den Enden die Probe P bzw. die Tauchspule T trägt. Die Tauchspule T im Luftspalt des Permanentmagneten M dient zur Kompensation der Auslenkung von P, wobei als Weggeber der am Stift C und an A befestigte Spiegel Sp dient, mit dem ein Lichtstrahl auf eine Differentialfotozelle gerichtet wird.

Eine *Torsionswaage* für weniger empfindliche Messungen wird von ELLENKAMP [*12.58*] beschrieben und vor allem für magnetische Untersuchungen bei hohen Temperaturen verwendet (Abb. 12.9). Sie besteht aus einem federnden Gelenk G mit drei Phosphorbronzefedern B, das an einem leichten Hebel H die Meßprobe P trägt und durch Federn F unter Spannung gehalten wird. Der Querbalken A besitzt an seinen Enden die Spulen S_1 und S_2 zwischen den feststehenden Spulenpaaren D und K. D und S_1 bilden einen Differentialtransformator zur Winkelmessung, während K und S_2 die Auslenkung elektrodynamisch kompensieren. Die Probe im inhomogenen Magnetfeld der Polschuhe N, S ist für Hochtemperaturmessungen mit einem kleinen elektrischen Röhrenofen R umgeben.

Schwebemagnetometer. Nach einem Vorschlag von GORDON [*12.82*] kann man in einem speziellen inhomogenen Magnetfeld kleine paramagnetische oder diamagnetische Proben in Schwebe halten und aus der hierzu benötigten magnetischen Induktion B die Suszeptibilität berechnen. In einem Magnetfeld nach Abb. 12.10, das durch das Skalarpotential

$$U = -aH \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \cos\left(\frac{y}{a}\right)$$

gegeben ist, findet man die Kraft in der Y-Richtung zu

$$F_y = -m\chi\mu_0 H_0^2 \left(\sin\frac{2y}{a}\right) \cdot \frac{1}{2a}, \qquad (12/11)$$

wenn H_0 die Feldstärke im Ursprung und a ein Maßstabfaktor ist, aus dem die Polschuhform abgeleitet wird. Für $\chi > 0$ ist F_y im zweidimensionalen Feld der Abb. 12.10 im Bereich $-\pi a/2 < y < 0$ nach oben gerichtet und erreicht bei $-\pi a/4$ ihr Maximum. Im Bereich $-\pi a/4 < y < 0$ wird ein paramagnetisches Teilchen daher schweben. Diese Bedingung ist durch die Beziehung

$$mg = \pm m\chi\mu_0 H_0^2/2a \tag{12/12}$$

gegeben; das positive Vorzeichen gilt für paramagnetische, das negative für diamagnetische Substanzen, die im Bereich $\pi a/4 > y > 0$ schweben. Es ist also *nicht* der Ort der Probe festzustellen; auch ist F_y nicht von x oder z abhängig. Die Probe wird von oben in ein senkrechtes Glasröhrchen, das in

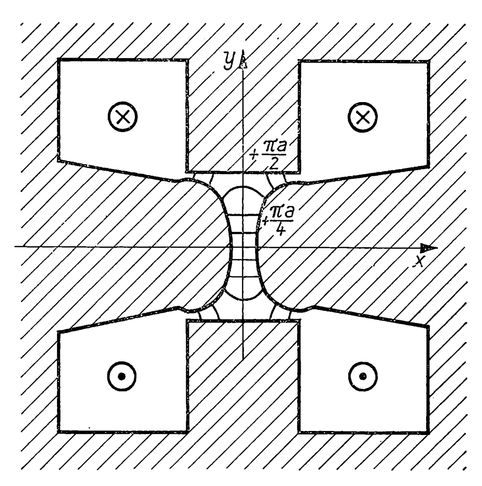




Abb. 12.10 Schwebemagnetometer

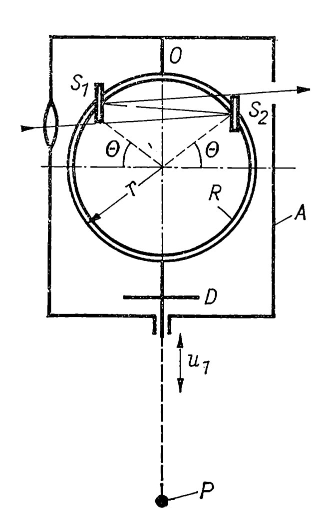


Abb. 12.11 Sucksmith-Waage

leichte Querschwingungen versetzt wird und innen halbversilbert ist, in den Magnetraum eingeführt und dabei der Erregerstrom so lange verringert, bis das Teilchen nach unten fällt. Für diamagnetische Proben mit kleinem χ kann man die Vorrichtung neigen oder die Größe a verringern.

Sucksmith-Ringwaage. Für schnelle Suszeptibilitätsmessungen mit der Ringwaage nach Sucksmith [*12.200*] wird die magnetische Kraft F_x wie bei der Faraday-Methode mit einem elastischen Ring aus Phosphorbronze gemessen, dessen Dicke, Breite und Durchmesser vom Meßbereich abhängen. Die elastische Deformation des Rings R (s. Abb. 12.11), der bei O befestigt und am unteren Ende mit der Probe P belastet ist, wird mit Hilfe der Spiegel S_1 und S_2 gemessen, die durch die Ringaufweitung bei Belastung verdreht werden und eine Ablenkung des an ihnen reflektierten Lichtstrahls hervorrufen. Um äußere Störungen zu unterbinden, ist der Ring in einem flachen geschlossenen Gehäuse A untergebracht; zur Dämpfung dient eine leichte Scheibe D aus Glimmer.

Bezeichnet man mit I das Widerstandsmoment des Ringquerschnitts und mit E den Elastizitätsmodul des Materials, so beträgt die Verschiebung der Probe P unter der Kraft F_x

$$u_1 = \frac{F_x r^3}{2EI}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi}\right] = \frac{0{,}298 F_x r^3}{2EI}, \qquad (12/13)$$

wenn r der Radius des Rings ist. Eine maximale Winkelauslenkung der beiden gegenüber der X-Achse symmetrisch an R befestigten Spiegel wird für $\Theta = 49°$ gefunden. Der an S_1 und S_2 reflektierte Lichtstrahl wird an der in der Entfernung D aufgestellten Skala um

$$a_1 = \frac{0{,}561\,(4D + 2d) F_x r^2}{4EI} \qquad (12/14)$$

abgelenkt, wenn $2d$ der Spiegelabstand ist. Dividiert man Gl. (12/14) durch Gl. (12/13), so erhält man die *Empfindlichkeit* der Ringwaage zu

$$\frac{a_1}{u_1} = \frac{0{,}943\,(4D + 2d)}{r}, \qquad (12/15)$$

die dem Ringradius r umgekehrt proportional ist. Für $r = 2{,}5$ cm, $D = 100$ cm wird a_1/u_1 über 150.

Nach Pepper und Smith [*12.168*] läßt sich die Empfindlichkeit der Ringwaage dadurch erhöhen, daß symmetrisch zu den Spiegeln in Abb. 12.11 zwei weitere angebracht oder S_1 und S_2 zweimal durchlaufen werden und ein Hohlspiegel den Lichtweg umkehrt. Als Genauigkeit der Sucksmith-Waage wird 1 ‰ angegeben.

Der elastische Ring kann auch als Kraftmeßelement mit vier *Dehnungsstreifen* in Brückenschaltung (s. Bd. I, § 10.52) versehen und seine Deformation elektrisch angezeigt werden. Weiteres siehe [*12.47*].

Rankine-Methode [*12.173*]. Dieses Meßverfahren stellt die Umkehrung der Faraday-Methode dar und benützt die von der Meßprobe auf einen beweglichen Magneten ausgeübte Kraft als Meßgröße. Der in Abb. 12.12 dargestellte Apparat besitzt ein Gehänge G an einem Torsionsfaden F, das einen dünnen Stabmagneten M bzw. auf der anderen Seite zum Massenausgleich ein Messingstäbchen K trägt. Bringt man in die Nähe von M eine schwach magnetische Probe, so wird auf beide Pole eine Kraft ausgeübt und ein Ausschlag erzeugt, der über den Spiegel S abgelesen wird. In der Abbildung sind zwei dünnwandige Glaszylinder Z eingezeichnet, die mit den zu untersuchenden Substanzen gefüllt werden. Der untere Pol von M ist zur Bewegungsdämpfung von einem Cu-Röhrchen C umgeben.

Da das auf G ausgeübte Moment nicht genau berechnet werden kann, wird die magnetische Waage mit Eichsubstanzen geeicht. Bockris und Parsons [*12.22*] haben das Instrument dadurch verbessert, daß als Aufhängung ein nachwirkungsfreier W-Faden und Alcomax-Magnete verwendet werden. Zur Kompensation des Drehmoments wird quer zum unteren Pol der Draht D geführt, der von einem veränderlichen Strom durchflossen wird. Die Kompensation kann auch mit bekannten Mitteln selbsttätig durchgeführt werden.

Die Rankine-Waage ist sehr empfindlich, doch ist es sehr schwierig, *Eisen*verunreinigungen in den einzelnen Teilen zu vermeiden. Weitere Ausführungsformen siehe [*12.1*; *12.64*]. Über eine Torsionswaage mit einem 0,5-μm-Quarzfaden für sehr kleine Proben siehe [*12.220*].

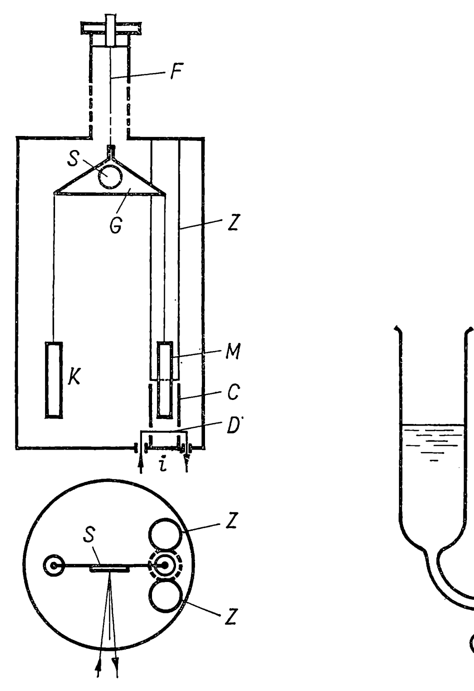


Abb. 12.12 Magnetische Waage nach Rankine

Abb. 12.13 Steighöhenmethode nach Quinke

Quinke-Methode. Diese einfach auszuführende Methode, deren Prinzip in Abb. 12.13 erläutert wird, ist für Flüssigkeiten anzuwenden. Die zu untersuchende Flüssigkeit wird in ein U-Rohr gefüllt, dessen einer Schenkel einen kleinen konstanten Querschnitt A besitzt, während der zweite weiter ist. Der enge Schenkel befindet sich im homogenen Feld des Elektromagneten E; die Flüssigkeit wird bis zur Mittellinie aufgefüllt. Im Feld H steigt die paramagnetische Flüssigkeit um die Höhe h und es gilt analog zur Gouy-Methode

$$\frac{\chi_2 - \chi_1}{2} \mu_0 A H^2 = (\varrho_2 - \varrho_1) g h A, \tag{12/16}$$

wenn sich die Indizes 1 und 2 auf die beiden Substanzen beziehen und ϱ_1, ϱ_2 die Dichten der Flüssigkeiten bedeuten, die übereinander geschichtet sein können. Im allgemeinen können ϱ_1 und χ_1 von Luft vernachlässigt werden, so

daß sich die gesuchte Suszeptibilität aus

$$\chi = \frac{2\varrho g}{\mu_0 H^2} h \qquad (12/17)$$

berechnen läßt. Durch Neigen des engeren Schenkels kann die Empfindlichkeit um den Faktor 10 gesteigert werden.

Die Steighöhe h wird vielfach mit Kompensationsverfahren gemessen und durch einen bekannten Gegendruck ausgeglichen; für sehr genaue Messungen empfehlen sich die Ablesemethoden für Fein- und Mikromanometer in Bd. I, § 7.83.

12.13 Dynamische Methoden

Grundsätzlich ist es möglich, die auf schwach magnetische Proben in inhomogenen periodischen Magnetfeldern ausgeübten Kräfte mit Resonanzmethoden zu messen. Von KESSLER und MOORE [*12.117*] wird zum Nachweis der fotomagnetischen Suszeptibilität in Halbleitern ein sehr empfindliches Verfahren angegeben, mit dem noch Suszeptibilitäten von 10^{-10} nachgewiesen werden können. Nach Abb. 12.14 wird die zu untersuchende Probe P mit

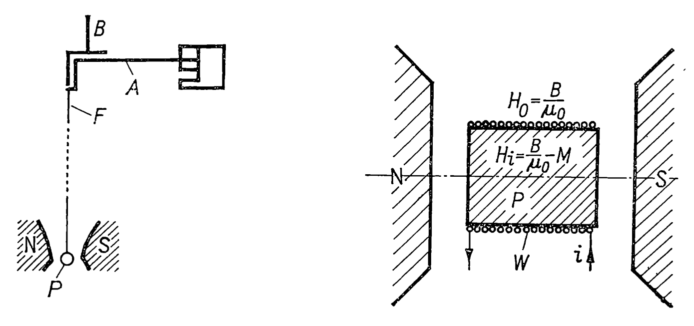


Abb. 12.14 Schwingungsmethode nach [12.117]   *Abb. 12.15 Kompensation der Feldstörung*

einem dünnen Quarzfaden F an einer federnden Zunge A aus Phosphorbronze aufgehängt und mit der Gegenelektrode B die Schwingungsamplitude gemessen, wenn entweder das Hauptfeld periodisch moduliert wird oder sich die Suszeptibilität periodisch ändert. Die resultierenden Änderungen der Eigenfrequenz ($f_0 = 16$ Hz) werden mit Hilfe einer empfindlichen Phasenmeßvorrichtung gemessen.

Die Grundlagen zu diesem Verfahren stammen von YOUSEF [*12.219*], der außerdem ein elektrostatisches Kompensationsverfahren für erzwungene Schwingungen vorschlägt. Periodische Kräfte von 10 μp können noch mit einer Genauigkeit von 1% nachgewiesen werden.

Ein interessantes Meßprinzip besteht darin, die durch die (als Zylinder angenommene) Probe P (Abb. 12.15) verursachte Störung eines homogenen Magnetfeldes zu kompensieren [*12.5*]. Dies geschieht durch Bewickeln der Probe mit einer dünndrähtigen Wicklung W, durch die der Strom i geschickt

wird. Da das Feld außerhalb der Probe $H_0 = B/\mu_0$ und innerhalb $H_i = (B/\mu_0) - M$ ist, verschwindet die Feldverzerrung, wenn durch die Spule mit N Windungen/cm ein Strom i der Stärke

$$Ni = H_0 - H_i = M = \chi H_0 \tag{12/18}$$

geschickt wird. Für diesen Wert i wird das Feld inner- und außerhalb der Probe gleichförmig und die Wirkung erzielt, als ob die Probe Teil eines langen Zylinders zwischen den Polschuhen wäre. Zum Nachweis der Kompensation wird die Probe axial periodisch zwischen zwei feststehenden Induktionsspulen bewegt.

12.14 Anisotropiemessungen

In paramagnetischen und diamagnetischen Kristallen nichtkubischer Struktur können sich die Suszeptibilitäten in den verschiedenen Kristallachsen unterscheiden. Betragen sie χ_1, χ_2 und χ_3 in den Hauptachsen, so liefern *Pulvermessungen* den Mittelwert $\bar{\chi} = (\chi_1 + \chi_2 + \chi_3)/3$. Beim Schwebemagnetometer der Abb. 12.10 können sich die Probeteilchen frei einstellen, bis die stabile Lage erreicht ist. Ist χ_1 am größten, so wird sich die Probe mit der χ_1-Richtung in Feldrichtung einstellen und nach dem Kriterium der Gl. (12/12) auch gemessen.

Die klassische Methode, anisotrope Suszeptibilitäten zu messen, benutzt eine empfindliche Torsionswaage und mißt das Drehmoment, das auf das Probekriställchen im *homogenen* Magnetfeld ausgeübt wird. Dieses Drehmoment berechnet sich aus der Beziehung

$$T_m = \frac{mH^2 \Delta\chi}{2M} \mu_0 \sin 2\Theta, \tag{12/19}$$

wenn m und M Masse und Molekulargewicht der Probe sind und Θ der Winkel zwischen einer Kristallachse und einer Orientierung des Kristalls ist, in der auf ihn kein Moment ausgeübt wird.

Von FLEISCHMANN et al. [*12.70*] wird hierzu eine Torsionswaage mit einem exakten Torsionskopf benutzt, an dem als Probenträger ein Quarzfaden von 5⋯30 μm Durchmesser befestigt ist. Gemessen wird die Verdrehung des Kristalls als Funktion der Stellung des Torsionskopfes und des magnetischen Feldes.

12.15 Impulsmessungen

Sehr hohe Magnetfelder bis 30 T und mehr lassen sich kurzzeitig durch die Entladung einer Kondensatorbatterie oder durch Kurzschließen eines Generators herstellen (s. § 13.6). Unter diesen Umständen erreicht die Größe $H_z \mathrm{d}H_z/\mathrm{d}x$ in Gl. (12/9a) Werte von 10^{10} A²/cm³ und mehr, und die an schwach magnetischen Proben auftretenden Kräfte sind von der Größe 10 p. Da diese Felder gewöhnlich nur von der Dauer 1⋯10 ms sind, werden diese Kräfte *ballistisch* mit einer Waage von kurzer Schwingungsdauer, hoher Empfindlichkeit und kleiner Trägheit gemessen. Eine von KAPITZA [*12.114*] angegebene

Konstruktion benutzt als Kraftmeßelement eine Metallmembran, an der die Meßprobe befestigt ist und oberhalb ein halbkugeliges Volumen abschließt. Dieses ist mit Öl gefüllt und bewirkt eine große Federkonstante. Der Ausschlag wird indirekt mit einem kleinen Drehspiegel gemessen.

Mit modernen Hilfsmitteln kann die kurzwirkende Kraft mit piezoelektrischen oder anderen Druckmeßdosen (Transducern) gemessen werden. Als Beispiel ist in Abb. 12.16 die von STEVENSON [*12.198*] angegebene Apparatur vereinfacht dargestellt, welche die Gouy-Methode anwendet. Unterhalb einer schweren Eisenplatte D ist die aus Kupfer-Beryllium-Band gewickelte Magnetspule M befestigt, die einen freien Innendurchmesser von 5 mm besitzt. Die Probe P befindet sich am unteren Ende eines dünnwandigen Pyrexglasröhrchens R von etwa 10 cm Länge. Das obere Ende von R ist kugelförmig aus-

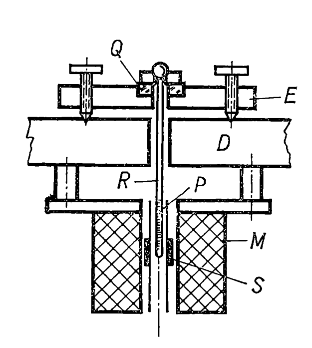


Abb. 12.16 Suszeptibilitätsmessung in Impulsfeldern

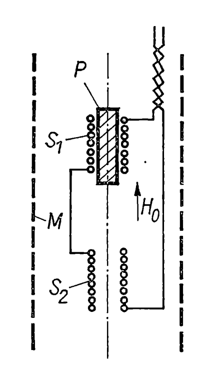


Abb. 12.17 Induktionsmethode I

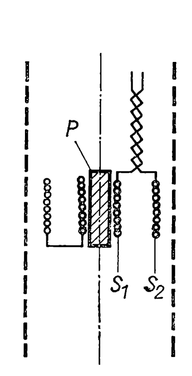


Abb. 12.18 Induktionsmethode II

gebildet und überträgt die magnetische Kraft auf den ringförmigen Piezogeber Q aus Quarz oder Bariumtitanat. Zur Feldmessung ist eine zu P konzentrische Induktionsspule S von nur wenigen Windungen angebracht, deren Signal in einen RC-Integrator integriert wird.

12.16 Fluxmetermethode

Für die Messung an Paramagnetika besonders bei sehr tiefen Temperaturen oder auch der vollkommen diamagnetisch sich verhaltenden *Supraleiter* wird häufig das Induktionsverfahren angewandt (s. § 11.3). Im Prinzip besteht die Methode darin, den magnetischen Fluß in der Meßprobe ballistisch oder mit dem Fluxmeter zu messen. Bei ferromagnetischen Stoffen mit sehr großem μ_r führt dieser Vorschlag zu der in Abb. 12.1 dargestellten B–H-Messung. Für para- und diamagnetische Proben benutzt man die in Abb. 12.17 dargestellte Versuchsanordnung, bei der die zylindrische Probe P des Querschnitts A_p von einer vieldrähtigen Induktionsspule S_1 mit dem mittleren Wicklungsquerschnitt A_s umgeben ist. In einiger Entfernung von S_1 ist eine identische Induktionsspule S_2 koaxial zu S_1 angebracht, die elektrisch der ersten entgegengeschaltet ist und *keine* magnetische Substanz enthält. Das äußere Feld

H_0 wird von einem Elektromagneten oder einer Magnetspule M erzeugt und muß in beiden Fällen über den gesamten Bereich homogen sein.

Der Fluß durch die Probe berechnet sich zu

$$\Phi_p = \mu_0 H_0 [A_s + (\mu_r - 1) A_p] = \mu_0 H_0 (A_s + \chi_p A_p), \qquad (12/20)$$

wenn μ_p und χ_p relative Permeabilität bzw. Suszeptibilität der Probesubstanz sind. Da der Fluß durch die Spule S_2 durch $\Phi_0 = \mu_0 H_0 A_s$ gegeben ist, erhält man beim Ab- oder Einschalten des Außenfeldes H_0 die Induktionsspannung

$$u_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\Phi_p - \Phi_0) N = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mu_0 H_0 \chi A_p N), \qquad (12/21)$$

wenn beide Spulen N Windungen besitzen. Werden die Pick-up-Spulen an ein Fluxmeter (s. § 11.4) angeschlossen, so wird unmittelbar die Magnetisierung der Probe $M = \chi_p H_0$ gemessen.

Die in Abb. 12.18 gezeigte Anordnung benutzt konzentrische Spulen S_1 und S_2, die in gleicher axialer Höhe die Probe umgeben und die Windungszahlen N_1 bzw. N_2 sowie die Wicklungsflächen A_1, A_2 besitzen. Der von den Spulen umfaßte verkettete Fluß beträgt

$$\Psi_1 = \mu_0 H_0 (A_1 N_1 + \chi A_p N_1)$$

bzw.

$$\Psi_2 = \mu_0 H_0 (A_2 N_2 + \chi A_p N_2).$$

Gleicht man die Windungszahlen N_1 und N_2 so ab, daß *ohne* Probe das Signal der entgegengeschalteten Spulen verschwindet, so wird $N_2 = A_1 N_1 / A_2$. Setzt man dies oben ein und subtrahiert Ψ_2 von Ψ_1, so ergibt sich schließlich

$$u_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\Psi_1 - \Psi_2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [\mu_0 H_0 \chi A_p (N_1 - N_2)]. \qquad (12/22)$$

Die zweite Schaltung stellt etwas weniger Ansprüche an die Homogenität des Magnetfeldes.

Eine Probe mit $\chi = 10^{-5}$, $A_p = 0{,}1\ \mathrm{cm}^2$ gibt in einem Feld von 1 T und mit Induktionsspulen mit $N = 10^4$ ein ballistisches Signal von 1 µVs, das mit den empfindlichsten Fluxmetern (§ 11.4) auf 1% genau gemessen werden kann.

Im Falle eines Supraleiters ist $\chi = -1$ und ein großes Induktionssignal zu erwarten.

12.17 Transformatorverfahren

Bei diesem von Myers [*12.150*] angegebenen Verfahren, das besonders für leitende magnetische Flüssigkeiten geeignet ist, werden zwei Lufttransformatoren T_1, T_2 primärseitig an den Oszillator O (40 kHz) angeschlossen (Abb. 12.19). Die konzentrisch gewickelten Sekundärwicklungen von gleicher Windungszahl sind einander entgegengeschaltet, wobei die zweite über eine veränderliche RC-Kombination geshuntet ist. Ohne Meßprobe wird mit R und C

die resultierende Ausgangsspannung U_0 auf Null abgeglichen. Bringt man nun in den Kern des Transformators T_1 die Meßprobe, so vergrößert sich bei $\chi > 0$ bei gleicher Durchflutung der magnetische Fluß und dementsprechend auch das Signal U_1. Infolge der Leitfähigkeit der Probe tritt eine zusätzliche Wirkkomponente auf, die eine Phasenverschiebung bewirkt. Gibt man das Aus-

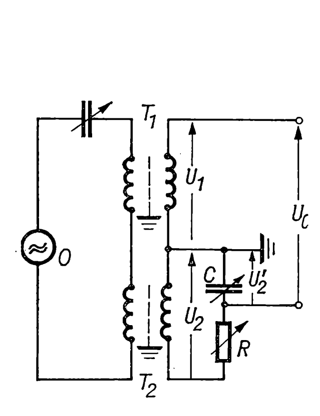



Abb. 12.19 Transformatorverfahren

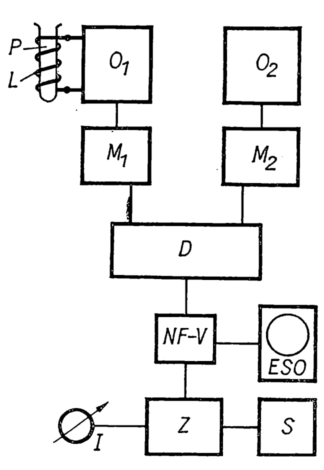


Abb. 12.20 Suszeptibilitätsmessung nach dem Schwebungsverfahren

gangssignal zusammen mit dem Primärstrom auf einen ESO, so kann die Differenzspannung $U_1 - U_2$ nach Phase und Amplitude abgeglichen und aus den Abgleichsbedingungen die gesuchte Permeabilität μ_r der Probesubstanz ermittelt werden. Die Nachweisgrenze dieser Methode für χ liegt bei 10^{-6}.

12.18 HF-Methoden

Zu den Induktionsmethoden der χ-Messung gehören die Gegeninduktivitätsbrücke für kleine Frequenzen und verschiedene HF-Verfahren. In beiden Verfahren wird die Induktivitätsänderung durch eine schwach magnetische Probe als Meßgröße für die Suszeptibilität benutzt, wobei wie bei den Dielektrika (s. § 10.23) die Größe χ für hohe Frequenzen komplex wird.

In Abb. 12.20 ist in einem Beispiel die von Effemy et al. [*12.53*] angegebene Prinzipschaltung wiedergegeben, die speziell zur Untersuchung organischer Flüssigkeiten und zum Nachweis kurzlebiger Radikale entwickelt wurde. Bringt man in eine Induktionsspule L die Meßprobe P, so ist wegen $L = \Psi/i$ und Gl. (12/20) das Verhältnis der Induktivität L_p *mit* Probe zu L_0 ohne Probe gegeben durch die Beziehung

$$\frac{L_p}{L_0} = \frac{A_0 + \chi A_p}{A_0} = 1 + \frac{A_p}{A_0}\chi, \tag{12/23}$$

wenn A_p der Querschnitt der zylindrischen Probe und A_0 die Wicklungsfläche von L ist. Stellt L die Induktivität eines selbsterregten Oszillators dar, so verändert sich *mit* Probe die Eigenfrequenz f_0 um Δf, und es gilt der Zusammenhang

$$\chi = \frac{1}{2} \frac{\Delta f}{f_0} \frac{A_0}{A_p}. \tag{12/24}$$

Bei vorgegebener Suszeptibilität χ wird die Frequenzänderung am größten, wenn $A_0 = A_p$.

Die Meßanordnung der Abb. 12.20 besteht aus dem Meßsender O_1 mit L als Induktivität und einem quarzgesteuerten Oszillator O_2 mit $f_0 = 2{,}5$ MHz, denen die Frequenzübersetzer M_1 und M_2 nachgeschaltet sind. Die Differenzfrequenz $\Delta f = f_1 - f_2$ wird in der Mischstufe D erhalten und nach Verstärkung in V auf den ESO gegeben bzw. dem Frequenzzähler Z zugeführt. Die Schwebungsfrequenz kann entweder am Instrument I abgelesen oder mit dem Schreiber S registriert werden. Für $\chi = 10^{-6}$ und $A_p/A_0 = 1$ ergibt sich bei $f_0 = 2{,}5$ MHz eine Schwebungsfrequenz $\Delta f \approx 16$ Hz.

Von EDER [*12.52*] ist eine sehr einfache Schaltung nach diesem Prinzip angegeben, die aus zwei Colpits-Oszillatoren mit $f_0 = 3$ kHz und einem speziellen Mischkreis besteht, mit dem noch Schwebungsfrequenzen von 0,05 Hz nachgewiesen werden können. Beide NF-Generatoren befinden sich in einem mit Öl gefüllten Cu-Behälter, um einen temperaturbedingten Frequenzgang zu vermeiden. Die Methode ist in erster Linie für magnetische Temperaturmessungen mit einem paramagnetischen Salz (s. Bd. II, § 3.4) bestimmt und wegen der Hysteresisverluste bei höheren Frequenzen für eine niedrige Frequenz ausgelegt. Es zeigt sich, daß f_0 über einen längeren Zeitraum auf 10^{-5} konstant bleibt und die Suszeptibilität bei sehr tiefen Temperaturen genau genug gemessen werden kann.

Von JOUSSOT-DUBIEN et al. [*12.113*] ist zur Messung an diamagnetischen Substanzen ein Schwebungsverfahren mit $f_0 = 5$ MHz angegeben.

12.19 Messung mit Induktivitätsbrücke

Dieses weit verbreitete Verfahren gehört zu den genauesten Meßmethoden einer durch eine schwach magnetische Substanz beeinflußten Induktivität. Einzelheiten über Induktivitätsmeßbrücken s. § 14.5. Hier werden nur einige grundsätzliche Überlegungen über Aufbau und Anwendung der wichtigsten Verfahren zusammengefaßt.

Das klassische Verfahren stellt die *Hartshorn-Brücke* [*12.92*] dar, deren Prinzip in Abb. 12.21 dargestellt ist. Die Primärseite des eisenfreien Übertragers $Ü$, der aus konzentrischen Spulen P und S besteht und in dessen Kern die zu untersuchende Probe A eingeführt wird, liegt am NF-Oszillator O und wird vom Strom i durchflossen. Da die Sekundärspulen S identisch, aber gegensinnig miteinander verbunden sind, ist ohne Probe die Ausgangsspannung Null.

In Wirklichkeit sind auch ohne Probe einige Störeinflüsse zu beseitigen und ist ein Abgleich nur mit zusätzlichen ohmschen und induktiven Widerständen

im Sekundärkreis zu erreichen. Aus diesen Gründen ist die Hartshorn-Brücke nicht als *absolutes* Meßverfahren zu gebrauchen. Von ZAHN [*12.221*] wird eine abgeänderte Brücke beschrieben, die als absolutes Nullverfahren arbeitet und eine hohe Genauigkeit aufweist. Die in Abb. 12.22 dargestellte Schaltung

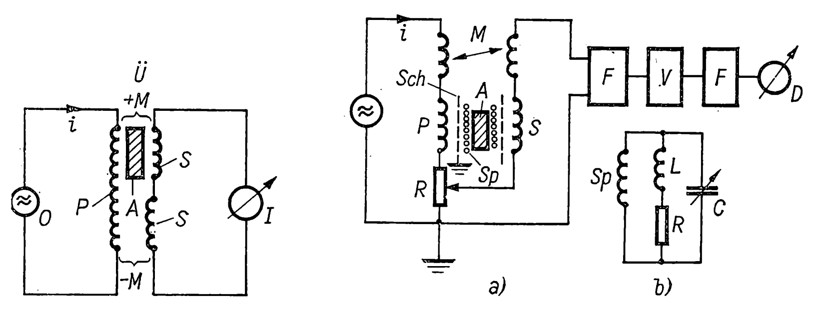


Abb. 12.21 Vereinfachte Suszeptibilitätsbrücke

Abb. 12.22 Absolute Induktivitätsbrücke

zeigt wieder in P und S die Primär- bzw. Sekundärspulen und zusätzlich im Primärkreis die veränderlichen Widerstände M und R zur Kompensation von Imaginär- und Realteil der Sekundärspannung. Die Probe A ist von der Eichspule Sp und von einer geerdeten elektrostatischen Abschirmung Sch umgeben. Der Brückenausgang ist an die Schmalbandfilter F und den Vorverstärker V angeschlossen; die Ausgangsspannung wird mit Hilfe des phasenempfindlichen Detektors D angezeigt. Wie aus Abb. 12.22b hervorgeht, ist die Eichspule Sp über einen LCR-Kreis geschlossen und kann mit der veränderlichen Kapazität C zum Brückenabgleich benutzt werden.

Das Prinzip dieser Methode besteht analog zu Abb. 12.15 darin, daß das magnetische Moment der Probe durch ein vom äußeren Wechselfeld H_1 im Eichkreis induziertes Moment

$$\boldsymbol{m} = -(N_1 A_1)^2 \mathrm{j}\,\omega H_1/\boldsymbol{Z} \tag{12/25}$$

kompensiert wird, wenn die Eichspule mit N_1 Windungen und dem Querschnitt A_1 durch die Impedanz $\boldsymbol{Z}$ belastet wird. Für $\chi > 0$ (Paramagnetika) muß $\boldsymbol{Z}$ kapazitiv sein. Die Induktivität L wird von einer eisengeschlossenen Drosselspule gebildet, der der veränderliche Kondensator parallelgeschaltet ist. Die Brücke wird zunächst ohne Probe über M und R abgeglichen; *mit* Probe muß C um ΔC verändert werden. Aus der Theorie dieser Methode folgt, daß der Realteil der komplexen Suszeptibilität $\chi = \chi' - \mathrm{j}\chi''$

$$\chi' \sim -(N_1 A_1)^2 \omega^2 \Delta C,$$

d. h. der Kapazitätsänderung proportional ist.

Die in der Hartshorn-Brücke enthaltenen astatischen Gegeninduktivitätsdekaden können nach PILLINGER et al. [*12.51*] durch eine feste Gegeninduktivität in Kombination mit einem ohmschen Spannungsteiler und einer Triode ersetzt werden. In der von MAXWELL [*12.141*] angegebenen Schaltung, die in

Abb. 12.23 dargestellt ist, liegt in Serie mit der Primärwicklung P die feste Gegeninduktivität M, die über den Autotransformator T_2 sekundärseitig geschlossen ist. Wegen seiner hohen Impedanz wirkt T_2 für die Sekundärwicklungen S und B des Meßkreises als echter Spannungsteiler. Die Wirkkomponente der Kompensationsspannung wird am Potentiometer R entnommen.

Weitere Ausführungsformen, insbesondere zur Verwendung bei sehr tiefen Temperaturen, siehe [*12.62, 12.145*].

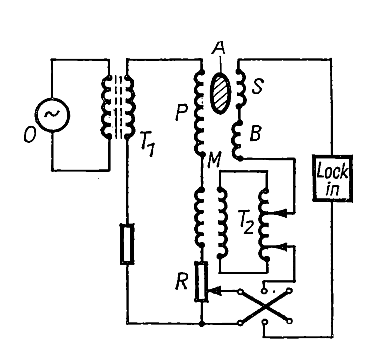


Abb. 12.23 Gegeninduktivitätsbrücke

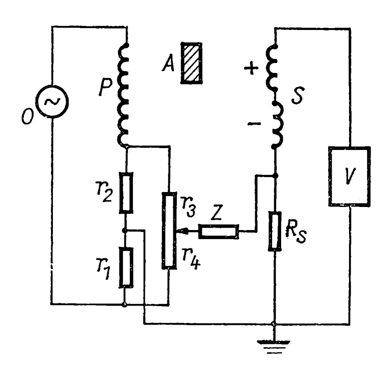


Abb. 12.24 Induktives Potentiometer

Für Messungen der Suszeptibilität unter hohem Druck wird von BROERSMA [*12.31*] die in Abb. 12.24 schematisch dargestellte Schaltung benutzt. Die Primärseite besteht aus der Meßspule P, den zwei Widerständen r_1, r_2 (0,05 Ω) und dem Spannungsteiler r_3, r_4 (5 kΩ). Z stellt einen Festwiderstand von 200 kΩ dar, kann aber auch eine Kapazität von 3000 pF sein. Die beiden Spannungsteiler (r_1, r_2 und r_3, r_4) besitzen 90° Phasenverschiebung und ermöglichen, die im Sekundärkreis S induzierte Spannung zu kompensieren. Das Instrument wird zur Untersuchung der *Piezosuszeptibilität* bis zu 1000 at angewandt.

Über die Messung der statischen paramagnetischen Suszeptibilitäten mit Hilfe eines Kernresonanzspektrometers siehe ADAMS [*12.2*].

12.2 Diamagnetische Eigenschaften [*12.110*]

12.21 Theorie des Diamagnetismus

In *diamagnetischen* Substanzen ist die durch Gl. (12/6) definierte magnetische Suszeptibilität χ *negativ* und $\mu_r < 1$. Mit Ausnahme der Supraleiter, deren Volumensuszeptibilität $\chi = -1$ ist, liegen die Werte für χ bei 10^{-5}.

Die klassische Theorie des Diamagnetismus geht von der Vorstellung der definierten Elektronenbahnen aus, deren Radius unverändert bleibt, wenn sich das äußere Magnetfeld *langsam* ändert. Nach der Lenzschen Regel wird sich dann die Bahngeschwindigkeit der Elektronen und damit das magnetische Moment des Systems ändern. Die von LANGEVIN-PAULI abgeleitete Formel

liefert für die diamagnetische Suszeptibilität den Ausdruck

$$\chi = -\frac{N e^2}{6m} \sum_i \overline{r_i^2}, \qquad (12/26)$$

wenn über alle Radien r_i der Elektronenbahnen summiert wird. Der gleiche Ausdruck wird gefunden, wenn man nach LARMOR von der Präzessionsbewegung der Elektronenbahnen im äußeren Feld ausgeht.

Nach Gl. (12/26) müßte, da $\bar{r}^2$ immer positiv ist, jede Substanz diamagnetisch sein. Da dies für die meisten Stoffe nicht zutrifft, muß angenommen werden, daß der Paramagnetismus in vielen Stoffen wirksamer ist und das diamagnetische Verhalten überdeckt.

Kristalle mit einem *Schichtgitter* zeigen eine ausgeprägte Anisotropie von χ; senkrecht zur Schichtrichtung ist χ viel größer als in der Schichtebene.

12.22 Diamagnetismus der Atome, Ionen und Moleküle

In Abb. 12.25 ist die Atomsuszeptibilität der *Elemente* bei Zimmertemperatur über der Ordnungszahl aufgetragen. Sie wächst gesetzmäßig mit der Ordnungszahl an.

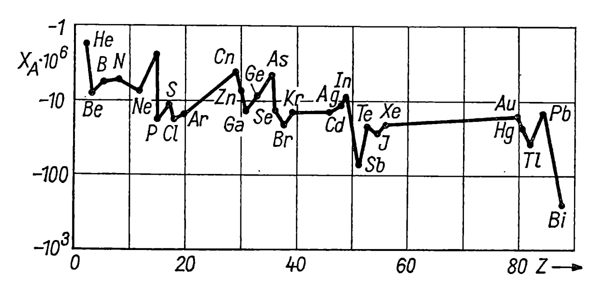


Abb. 12.25 Atomsuszeptibilität der Elemente bei 20 °C *nach* [*12.216*]

Für die Berechnung der diamagnetischen Suszeptibilität von *Ionen* liefert die Theorie die gleichen Formeln wie für Atome. Im Experiment kann man aber nur die molekulare Suszeptibilität, die der Lösung oder des festen Kristalls messen. Der Diamagnetismus vieler *Salze,* z. B. des NaCl, ist darauf zurückzuführen, daß die Ionen eine abgeschlossene Elektronenhülle besitzen, die edelgasähnlich ist.

Die Berechnung der molekularen Suszeptibilität von *Molekülen* macht große Schwierigkeiten; experimentelle Untersuchungen sind daher für die Magnetochemie besonders wichtig.

12.23 Diamagnetismus der Metalle

Die Metalle bilden eine bedeutende Gruppe unter den diamagnetischen Stoffen. In *Tabelle 12.2* ist die Atomsuszeptibilität diamagnetischer Metalle bei 20 °C zusammengestellt.

Tabelle 12.2 Atomsuszeptibilität diamagnetischer Metalle

Metall	χ_A 10^{-6} cm³/g-Atom	Metall	χ_A 10^{-6} cm³/g-Atom
Cu	− 5,46	In	− 12,8
Ag	−20,7	Tl	− 49,5
Au	−28,0	Ge	− 7,69
Be	− 9,02	Pb	− 23,0
Zn	− 9,2	As	− 5,5
Cd	−19,7	Sb	− 98
Hg	−33,5	Bi	−265
B	− 6,7	Se	− 26,5
Ga	−21,6	Te	− 39,5

Aus den experimentellen Ergebnissen kann geschlossen werden, daß der Diamagnetismus fester und flüssiger *Metalle* sowohl von den Metallionen als auch von den Leitungselektronen herrührt und diese den Absolutwert von χ im allgemeinen verkleinern. Die Leitungselektronen besitzen diamagnetischen Charakter, da sie zwischen zwei Stößen im örtlichen Magnetfeld Kreis- oder Spiralbahnen durchlaufen, deren magnetische Wirkung der des Außenfeldes entgegensteht. Gleichzeitig jedoch werden die möglichen räumlichen Einstellungen der mit dem Spin 1/2 versehenen Elektronen in einem Außenfeld im Sinne einer paramagnetischen Wirkung beeinflußt, wobei sich die beiden Zustände um den Energiebetrag

$$\Delta E = -\mu_m \cdot \mu_0 \boldsymbol{H} = -|\mu_z|\mu_0|H| \tag{12/27}$$

unterscheiden. Dabei ist μ_m das magnetische Moment des Elektrons

$$\mu_m = \frac{|e|\, h}{4\pi m} s, \tag{12/28}$$

wenn $s = \pm 1/2$ den Elektronenspin bedeutet und μ_z die Z-Komponente von μ_m ist. Hieraus ergibt sich das gesamte magnetische Moment zu

$$M = \varrho(E_f)\,|\mu_z|_{\text{spin}}\, \mu_0 H, \tag{12/29}$$

wenn $\varrho(E_f)$ die Zustandsdichte an der Fermi-Grenze darstellt. Dieser *temperaturunabhängige* Paramagnetismus der Leitungselektronen ist von der Größe 10^{-5} und etwas größer als der normale Diamagnetismus der gefüllten Elektronenschalen.

Die gesamte Suszeptibilität eines *Normalleiters* (Supraleiter s. § 12.25) im festen Zustand kann schwach diamagnetisch, wird häufiger jedoch paramagnetisch sein.

Über Messungen an Sn und Cu siehe [*12.107*], Cu bei tiefen Temperaturen wurde von Bowers [*12.23*] untersucht, wobei zwischen 300 und 1,5 K ein χ-Abfall von etwa 20% gefunden wurde. Über α-Messing siehe [*12.39*], ferner Cu, Ag und Au [*12.97*].

Von HURD [*12.105*] sind im Temperaturbereich von 4,2···300 K die Suszeptibilitäten von *Quarzglas* ($\chi = -0{,}52 \cdot 10^{-5}$), *Teflon* ($-0{,}48 \cdot 10^{-5}$) und *Pyrexglas* ($-0{,}46 \cdot 10^{-5}$) gemessen worden (Meßwerte für 300 K). Diese Materialien werden häufig für die Konstruktion von Apparaturen zu Suszeptibilitätsmessungen benutzt.

12.24 Diamagnetismus der Halbleiter [*12.33*]

Messungen der Suszeptibilität von *Halbleitern*, insbesondere von Ge und Si, zeigen, daß z. B. an hochreinem Ge die diamagnetische Suszeptibilität mit zunehmender Temperatur abnimmt [*12.197*]. Dies ist dem Einfluß der Trägersuszeptibilität zuzuschreiben, da der Gitteranteil fast temperaturunabhängig ist.

Von BOWERS [*12.24*] ist die magnetische Suszeptibilität von *hochdotiertem* Ge zwischen 300 und 1,3 K nach der Gouy-Methode (s. § 12.12) gemessen worden. Mit zunehmender Donatorkonzentration nimmt χ zu und ist unterhalb von etwa 30 K unabhängig von der Temperatur. Aus den Ergebnissen ist zu folgern, daß die Spinsuszeptibilität der quasigebundenen Elektronen- und Löcherzustände fast temperaturunabhängig ist.

Weitere Messungen an Ge siehe [*12.94, 12.95, 12.106*].

12.25 Magnetisches Verhalten der Supraleiter [*12.188, 12.50, 12.127*]

Von MEISSNER ist 1933 der experimentelle Beweis erbracht worden, daß das Verschwinden des elektrischen Widerstandes bestimmter Elemente, Verbindungen und Legierungen unterhalb des Sprungpunkts T_c mit dem magnetischen Verhalten in einem äußeren Feld zusammenhängt. Bringt man z. B. ein Rota-

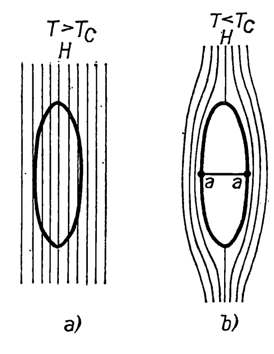


Abb. 12.26 Meissner-Effekt

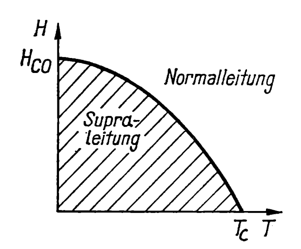


Abb. 12.27 Supraleiter: Phasendiagramm

tionsellipsoid aus einem supraleitenden Material in ein homogenes Magnetfeld, so wird dieses den Supraleiter bei $T > T_c$ ungehindert durchsetzen (Abb. 12.26a). Bei konstant gehaltenem Magnetfeld und sinkender Temperatur wird

für $T = T_c(H)$ plötzlich der magnetische Fluß aus dem Leiterinnern verdrängt (Abb. 12.26b), d. h., $B = 0$, was man als vollkommenen „Diamagnetismus" bezeichnen kann.

Wiederholt man diesen Versuch für verschiedene äußere Feldstärken H, so läßt sich daraus das in Abb. 12.27 dargestellte Phasendiagramm konstruieren, das Parabelform besitzt und auf den Achsen die für einen bestimmten Supraleiter charakteristischen Größen, Sprungpunkt $T_c(H = 0)$ und kritisches Magnetfeld $H_c(T = 0)$, abschneidet. In guter Näherung läßt sich die Phasengrenze durch die Beziehung

$$H_c = H_{c0}\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right] \tag{4/84}$$

ausdrücken; Kurven für verschiedene Supraleiter sind in Abb. 4.55 wiedergegeben. In *Tabelle 12.3* sind für die supraleitenden Elemente Sprungpunkt T_c und kritisches Magnetfeld H_{c0} zusammengestellt.

Tabelle 12.3
Sprungpunkt T_c und kritisches Magnetfeld H_{c0} von supraleitenden Elementen

Metall	T_c (K)		H_{c0} (A/cm)		Θ_D (K)
	kalor.	magnet.	kalor.	magnet.	
Al	1,183	1,196	83	79	420
Cd	0,54	0,56	23	24	300
Ga	1,087	1,091	47,5	41,5	317
Hg(α)		4,153		328	87
In	3,396	3,4035	221	233	109
Ir		0,14		15	
La(α)	5,91	6,3		1280	132
Mo		0,92		78	470
Nb	9,17	9,13	1550	1580	238 Typ II
Os		0,655		52	
Pb	7,23	7,193		640	96,3
Re	1,699	1,698	150	158	210
Ru		0,49		52,5	
Sn	3,722	3,722	241	246	195
Ta	4,39	4,483	622	662	255 Typ II
Tc		8,22			
Th		1,368	104	129	168
Ti		0,39		79,7	
Tl	2,36	2,39		137	88
U(α)		0,68			206
V	5,03	5,30	1044	813	338 Typ II
W	0,012				
Zn	0,852	0,875	41,4	43	309
Zr		0,546		37,4	265

Im Feld $H = 0$ ist der Phasenübergang aus dem normalleitenden in den supraleitenden Zustand von *zweiter Art*, d. h., unstetige Änderung des spezifischen Volumens und latente Umwandlungswärme treten nicht auf. Im Magnet-

feld dagegen ($H \neq 0$) findet ein Phasenübergang *erster Art* mit latenter Umwandlungswärme statt. Vergleicht man die Freie Enthalpie des Supraleiters im normalleitenden Zustand $G_n(T)$ mit der im supraleitenden Zustand $G_s(T)$, so folgt aus thermodynamischen Gründen die Beziehung

$$G_n(T) = G_s(T) + \frac{H_c^2(T)}{2} \mu_0. \tag{12/30}$$

Man bezeichnet die Größe $H_c^2 \mu_0/2$ als *Kondensationsenergie*, die aus der Probe (in Form von magnetischer Energie) „abzuführen" ist, damit die Elektronen in den supraleitenden Grundzustand gelangen können.

Von seiten der Elektrodynamik ist der Supraleiter durch $\boldsymbol{B}_i = 0$, d. h. $\boldsymbol{H}_i = -\boldsymbol{M}_i$, zu beschreiben, wenn $\boldsymbol{M}_i$ die Magnetisierung ist. Formal kann dieser Befund durch die Annahme $\mu_r = 0$ bzw. $\chi = -1$, d. h. durch den vollkommenen Diamagnetismus, beschrieben werden. Die von F. und H. London aufgestellte phänomenologische Theorie erweitert zur Erklärung des magnetischen Verhaltens die Maxwell-Gleichungen durch besondere Eigenschaften des Suprastroms. Zunächst wird angenommen, daß sich der Gesamtstrom aus der Summe

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_n + \boldsymbol{j}_s \tag{12/31}$$

zusammensetzt, wenn $\boldsymbol{j}_n, \boldsymbol{j}_s$ die Stromdichten der normalleitenden bzw. supraleitenden Phase sind. Die Größe $\boldsymbol{j}_n = \sigma \boldsymbol{E}$ gehorcht dem Ohmschen Gesetz; für den Suprastrom gelten die Londonschen Beziehungen

$$\frac{\partial \Lambda \boldsymbol{j}_s}{\partial t} = \boldsymbol{E}; \tag{12/32}$$

$$\operatorname{rot} \Lambda \boldsymbol{j}_s = -\boldsymbol{B}, \tag{12/33}$$

in denen eine für den supraleitenden Zustand charakteristische Größe Λ vorkommt, die sich zu

$$\Lambda = \frac{m}{n_s e^2} \tag{12/34}$$

berechnet, wenn n_s die Dichte der Elektronen im supraleitenden Zustand bedeutet. Berücksichtigt man die Maxwell-Gleichung

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{12/35}$$

und eliminiert aus den Gln. (12/32) und (12/34) die Stromdichte $\boldsymbol{j}$, so gelangt man für stationäre Zustände ($\dot{\boldsymbol{B}} = 0$) zur Differentialgleichung

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{B}}{\lambda^2}, \tag{12/36}$$

deren Lösung für das ebene Problem lautet

$$B(z) = B_0 \mathrm{e}^{-z/\lambda}, \tag{12/37}$$

wobei die Z-Richtung die der Flächennormalen ist. Die neue Größe λ wird *Eindringtiefe* des magnetischen Feldes genannt und berechnet sich aus der

Beziehung

$$\lambda^2 = \frac{1}{\mu_0} \frac{m}{n_s e^2} = \frac{\Lambda}{\mu_0}. \tag{12/38}$$

Die Eindringtiefe ist eine Materialkonstante von der Größe 0,1 μm, die für $T = 0$ am kleinsten ist und bei Annäherung an den Sprungpunkt stark zunimmt.

Wendet man Gl. (12/36) auf Proben makroskopischer Abmessungen an und berechnet den magnetischen Fluß, so verschwindet dieser in der Probe, bis auf eine Randschicht von der Dicke λ. Aus Gl. (12/33) ist zu entnehmen, daß senkrecht zur Richtung von $\boldsymbol{B}$ der Suprastrom $\boldsymbol{j}$ fließt, der ebenfalls nach dem Innern des Supraleiters exponentiell abnimmt und die eigentliche Ursache für das diamagnetische Verhalten darstellt. Das an der Oberfläche des Supraleiters widerstandslos fließende *Abschirmstromsystem* hält den einfach zusammenhängenden Supraleiter *feldfrei*. Die neuere Entwicklung der Theorie der Supraleitung berücksichtigt die Abhängigkeit der Größe n_s von T und B und führt zur Beschreibung einen Ordnungsparameter ω ein, dessen Realteil mit n_s identisch ist, der darüber hinaus noch Phasenbedingungen zu erfüllen hat, deren Anwendung im Flußquanteninterferometer in § 11.55 besprochen ist.

Für die experimentelle Untersuchung der magnetischen Eigenschaften der Supraleiter sind die nachfolgend aufgeführten Verfahren am gebräuchlichsten:

a) Fluxmetrische Methoden (§ 12.16) mit ballistischer Ablesung oder Registrierung der Magnetisierung $\boldsymbol{M}$;

b) Transformatormethode mit Hilfe des supraleitenden Flußtransformators (s. § 11.45), wobei die in der zweiten Spule entstehende magnetische Induktion mit einem an sich beliebigen, jedoch für die speziellen Voraussetzungen gegeeigneten Magnetometer gemessen wird;

c) HF-Verfahren mit breiter Anwendung, da bis zu sehr hohen Frequenzen keine Dispersion von λ zu beobachten ist;

d) Induktivitätsmeßbrücke (§ 12.19).

Trägt man die Magnetisierung $\boldsymbol{M}$ über dem äußeren Feld $\boldsymbol{H}$ auf, so findet man den in Abb. 12.28a angegebenen Verlauf für die meisten supraleitenden Elemente und für eine Probe mit verschwindendem Entmagnetisierungsfaktor. Bis $H \leqq H_c$ gilt $M = -H$; bei $H \geqq H_c$ fällt $-M$ unstetig auf Null, d. h., der magnetische Fluß dringt plötzlich in die Probe ein. Die in Abb. 12.28a gestrichelt eingezeichnete Magnetisierungskurve gilt für eine *kugel-*

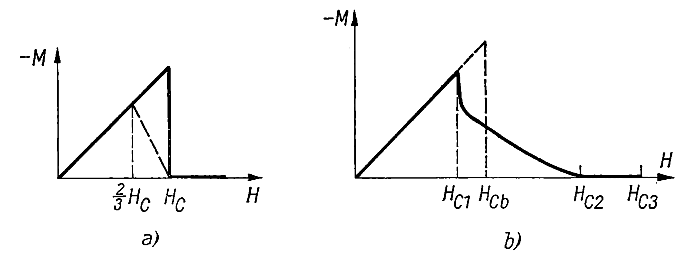


Abb. 12.28 Magnetisierungskurven von Supraleitern: Typ I (a), Typ II (b)

förmige Probe, bei der die kritische Feldstärke H_c am Äquator (s. Abb. 12.26 a⋯b) bereits bei einer Feldstärke $2H_c/3$ erreicht wird und die supraleitende Kugel in den *Zwischenzustand* übergeht. Dieser besteht aus lamellenförmigen Strukturen von abwechselnd normalleitenden und supraleitenden Bereichen, wobei in den ersteren immer $H = H_c$ ist. Der Zerfall in den Zwischenzustand beginnt bei $H = (2/3)H_c$, wo magnetischer Fluß in die Kugel einzudringen beginnt, bis bei H_c der Phasenübergang völlig beendet ist. Im Falle einer *zylindrischen* Probe im Querfeld beginnt der Zwischenzustand bereits bei $H_c/2$.

Neben diesen *Typ-I-Supraleitern* gibt es eine sehr viel größere Anzahl von supraleitenden Verbindungen, Legierungen und auch die Elemente Nb und Ta, deren Magnetisierungskurven den in Abb. 12.28b skizzierten Verlauf haben. Das Eindringen des Flusses beginnt bereits bei der Feldstärke $H_{c1} < H_{cb}$ und ist erst bei einer Feldstärke $H_{c2} > H_{cb}$ beendet; d. h., Supraströme können noch bis zu einem Feld von H_{c2} fließen. Die Größe H_{cb} wird *thermodynamisches Feld* genannt und bestimmt nach Gl. (12/30) die Kondensationsenergie. Im Gegensatz zum Typ-I-Supraleiter dringt bei den Typ-II-Supraleitern für $H > H_{c1}$ der magnetische Fluß in Form von Flußlinien in die Probe ein, die ein magnetisches Flußquant $\varphi_0 = h/2e = 2$ fVs tragen (s. § 11.66) und deren Dichte durch $n = B/\varphi_0$ gegeben ist. Unter bestimmten Umständen sind supraleitende Oberflächenzustände noch bis $H_{c3} = 1{,}69 H_{c2}$ möglich.

Die Bedeutung der Typ-II-Supraleiter liegt darin, daß es unter ihnen Materialien gibt, die im Gegensatz zu den „weichen" Typ-I-Supraleitern bei *sehr hohen* Feldstärken Strom ohne Joulesche Wärme transportieren können. Einige dieser Legierungen spielen eine hervorragende Rolle bei der Konstruktion von supraleitenden Magneten, mit denen, wie in § 13.3 näher gezeigt wird, Magnetfelder von 15 T und großen Ausmaßen erzeugt werden können. In *Tabelle 12.4* sind für eine Reihe „harter" Supraleiter der Sprungpunkt T_c und die kritischen Magnetfelder zusammengestellt.

Tabelle 12.4 Sprungpunkt T_c und kritische Felder H_{c1} und H_{c2} von Typ-II-Supraleitern

Material	T_c K	H_{c1} T	H_{c2} T
Nb	9,25	0,174	~0,32
$Bi_{0,5}Pb_{0,5}$	8,4		~3,0
$Mo_{0,5}Re_{0,5}$	12,6		2,7
Nb_3Sn	~18	0,03	19,0⋯22,0
SiV_3	16,9	0,055	21,0
GaV_3	16,8	0,04	19,6
$AlNb_3$	~18	0,037	
$Nb_{0,73}Ta_{0,02}Tr_{0,25}$			>7,0
$Nb_{0,66}Ti_{0,34}$	9,3		8,2
$Nb_{0,75}Ti_{0,25}$	10,8		7,7
$Ta_{0,7}Ti_{0,3}$	~5,5		>8,0
Nb_3Ge	6,9		

Die schematisch angegebene Magnetisierungskurve in Abb. 12.28b wird in der Praxis nicht reversibel durchlaufen, wenn ein magnetisches Wechselfeld angelegt wird. Bei steigendem Feld werden nämlich die von außen eindringenden Flußlinien durch Gitterfehler und Verunreinigungen behindert, wodurch der Supraleiter auch bei $H = 0$ Remanenz, d. h. eingefrorenen Fluß, zeigt.

12.3 Paramagnetismus [*12.206*, *12.36*, *12.83*]

12.31 Theorie des paramagnetischen Verhaltens

Paramagnetische Substanzen enthalten Atome und Ionen mit *permanenten magnetischen Momenten.* Ohne äußeres Feld sind diese Momente willkürlich orientiert und rufen keine makroskopische Magnetisierung hervor. Im Magnetfeld werden diese Momente etwas ausgerichtet, wobei ihre gegenseitige Wechselwirkung unberücksichtigt bleiben kann, da die thermische Bewegung von größerem Einfluß ist. Dieser Effekt wird *Paramagnetismus* genannt; da die permanenten Momente in Richtung des äußeren Feldes orientiert werden, wird $\chi > 0$.

Bezeichnet man mit μ_m das magnetische Moment des Atoms bzw. Ions und mit α den Winkel zwischen Feld $\boldsymbol{B}$ und μ_m, so wird die potentielle Energie

$$W = -\mu_m B \cos\alpha \approx -\mu_m \mu_0 H \cos\alpha. \qquad (12/39)$$

Infolge der thermischen Bewegung ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl der Dipole $N(\alpha)$ mit H den Winkel α einschließt

$$N(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = 2\pi\, C \sin\alpha\, \mathrm{e}^{(\mu_m \mu_0 H \cos\alpha/kT)}\,\mathrm{d}\alpha, \qquad (12/40)$$

wobei C eine Konstante und k die Boltzmann-Konstante ist. Die in H-Richtung fallende Komponente erhält man durch Multiplikation des Ausdrucks (12/40) mit $\cos\alpha$ zu

$$M = \int_0^{\pi} 2\pi\, C \mu_m \cos\alpha \sin\alpha\, \mathrm{e}^{\mu_m \mu_0 H \cos\alpha/kT}\,\mathrm{d}\alpha. \qquad (12/41)$$

Die Konstante C findet man durch die Normierung $N = \int_0^{\pi} N(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$. Hiermit berechnet sich die gesamte Magnetisierung zu

$$M = N \frac{\int_0^{\pi} \mu_m \cos\alpha \sin\alpha\, \mathrm{e}^{\mu_m \mu_0 H \cos\alpha/kT}\,\mathrm{d}\alpha}{\int_0^{\pi} \sin\alpha\, \mathrm{e}^{\mu_m \mu_0 H \cos\alpha/kT}\,\mathrm{d}\alpha}.$$

Durch Integration ergibt sich schließlich der bekannte Ausdruck

$$M = N \mu_m \left(\coth a - \frac{1}{a}\right), \qquad a = \mu_m \mu_0 H/kT, \qquad (12/42)$$

der sich für kleine Werte von a vereinfacht und analog zur elektrischen Polarisation in Gl. (10/26) die Beziehung liefert

$$\boldsymbol{M} = \frac{N\mu_0\mu_m^2\boldsymbol{H}}{3kT}. \tag{12/43}$$

Damit wird wegen Gl. (12/6) die Suszeptibilität

$$\chi = \frac{N\mu_0\mu_m^2}{3kT} = \frac{C}{T}. \tag{12/44}$$

Die Tatsache, daß χ der Temperatur T umgekehrt proportional ist, wird Curie-Gesetz genannt; es wird bei sehr vielen paramagnetischen Substanzen bestätigt. Abweichungen rühren von dem gleichzeitig auftretenden Diamagnetismus und von starker Wechselwirkung der Dipole untereinander her. In vielen Fällen ist Gl. (12/44) durch das Curie-Weiss-Gesetz

$$\chi = \frac{C'}{T - \Theta} \tag{12/45}$$

zu ersetzen, worin Θ eine positive oder negative Temperatur sein kann.

Die *Ursache* der magnetischen Dipole ist einmal das Bahnmoment der Elektronen von der Größe $\mu_m = evr/2$. Andererseits beträgt der Drehimpuls eines Elektrons in einer Kreisbahn vom Radius r

$$\boldsymbol{L} = m(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}).$$

Durch Vergleich mit dem Bahnmoment ergibt sich

$$\mu_m = -\frac{|e|}{2m}\boldsymbol{L} = -\gamma\boldsymbol{L}, \tag{12/46}$$

mit $\gamma = |e|/2m$ als dem *gyromagnetischen Verhältnis*. Analog zum Kernparamagnetismus (vgl. § 11.611) läßt sich das magnetische Moment eines Elektrons, dessen Drehimpuls ein Vielfaches in $\hbar$ ist, durch das *Bohrsche Magneton*

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9{,}27 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{A/cm^2} \tag{11/33}$$

ausdrücken. Bezeichnet man mit l die Quantenzahl für das gesamte Bahnmoment, so gilt

$$L = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar \qquad l = 0, 1, 2, \ldots \tag{12/47}$$

und mit der magnetischen Quantenzahl m_l für die Komponente in der Z-Richtung

$$L_z = m_l\hbar \qquad m_l = 0, \pm 1; \pm 2; \ldots \tag{12/48}$$

Mit Hilfe der Gln. (12/46), (12/47) und (12/48) findet man

$$\mu_{mb} = \frac{|e|}{2m}\hbar\sqrt{l(l+1)} \tag{12/49}$$

für das Bahnmoment. Desgleichen liefert der Elektronenspin s, der die Werte $\pm 1/2$ annehmen kann, das Spinmoment

$$\mu_{ms} = \frac{|e|\,\hbar}{m}\,s. \tag{12/50}$$

Das magnetische Moment eines Mehrelektronensystems ist die Summe der magnetischen Momente aller Elektronen. Da alle gefüllten Elektronenschalen den Bahnimpuls Null haben, verschwindet auch ihr magnetisches Moment. Das bedeutet, daß Atome und Ionen mit gefüllten Schalen kein permanentes magnetisches Moment und daher auch keinen Paramagnetismus besitzen. Edelgase wie He, Ar, Kr usf. und Ionen wie Na^+ und Cl^- sind diamagnetisch. Bei Molekülen mit gepaarten Elektronen, z. B. bei H_2, tritt nur Diamagnetismus auf. Andere freie Atome mit ungepaarten Elektronenspins sind paramagnetisch. Näheres siehe Bd. V.

12.32 Meßverfahren

Zum Nachweis des Paramagnetismus sind die meisten der in § 12.1 behandelten Meßmethoden brauchbar. Die Gültigkeit des Curie-Gesetzes läßt sich allerdings erst durch Messungen bei sehr tiefen Temperaturen bestätigen. Zur Erzeugung tiefster Temperaturen kann man das paramagnetische Salz selbst verwenden, wenn man die Meßprobe zuerst auf eine tiefe Ausgangstemperatur ($T \approx 1$ K) in einem starken Magnetfeld abkühlt, es thermisch gegen die Umgebung isoliert und dann das Magnetfeld langsam abschaltet. Dieser adiabatische Entmagnetisierungsprozeß liefert Endtemperaturen von 10 mK und tiefer; siehe Bd. II, § 12.4.

Auch die modernen Methoden zur Erzeugung stationärer Temperaturen bis herab zu 0,3 K mit Hilfe von abgepumptem flüssigem ^{3}He oder durch die Verwendung eines ^{3}He–^{4}He-Entmischungsrefrigerators, mit dem einige Millikelvin erreichbar sind, werden für Messungen an paramagnetischen Substanzen vielfach benutzt.

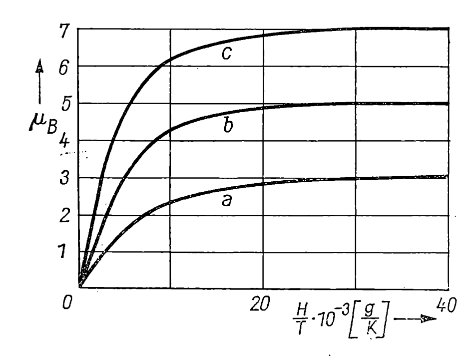


Abb. 12.29 Magnetisches Moment von K—Cr-Alaun (a), Fe-Ammoniumsulfat (b), Gd-Sulfat (c)

Beispiele von Tieftemperaturmeßmethoden siehe [*12.131, 12.86*]. Die Verwendung der HF-Verfahren in § 12.18 wird eingeschränkt durch die bei tiefen Temperaturen zu beobachtende Hysteresis, die von T und dem angelegten Wechselfeld abhängt. Bei sehr tiefen Temperaturen im Gültigkeitsbereich des Curie-Gesetzes oder hohen Feldern bestätigen die Experimente die Gl. (12/42) für die Magnetisierung M. Für große Werte von a oder H/T steigt M zunächst linear an, was einem konstanten χ entspricht, und nähert sich dann einem Sättigungswert, der durch den Ausdruck in Gl. (12/49) gegeben ist. In Abb. 12.29 sind die magnetischen Momente von $KCr(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$, $Fe(NH_4)_2(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$ und $Gd_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$ als Funktion von H/T dargestellt. Bei 1,3 K und einem Feld von 5 T wird 99,5% der Sättigung erreicht.

12.33 Ergebnisse: Metalle

Eine Anzahl metallischer Elemente, z. B. die Alkalimetalle, die Seltenen Erdmetalle und die Übergangselemente, besitzen eine schwach paramagnetische Suszeptibilität, die meist temperaturunabhängig ist. In *Tabelle 12.5* ist die Atomsuszeptibilität paramagnetischer Metalle bei Zimmertemperatur zusammengestellt.

Tabelle 12.5 Atomsuszeptibilität paramagnetischer Metalle

Metall	χ_A 10^{-6} cm³/g-Atom	Metall	χ_A 10^{-6} cm³/g-Atom
Li	25	V	230
Na	15,3	Ta	153
K	20,8		
Rb	19,5	Cr	165
Cs	30,2	Mo	89
Mg	6,3	W	59
Ca	44	U	410
Sr	92	Mn	530
Ba	20,2	Re	68
Al	16,4		
Sc	315	Ru	43,4
Y	191	Rh	111
La	112	Pd	558
		Os	9,9
Ti	153	Ir	25,7
Zr	122	Pt	189,5
Th	132		
Sn (weiß)	3,1		

Die Temperaturabhängigkeit von χ für die Seltenen Erden und Übergangsmetalle kann durch das Curie-Weissche Gesetz beschrieben werden; sonst ist sie nur schwach. Weitere Ergebnisse an Seltenen Erden und paramagnetischen Metallen siehe [*12.17, 12.101, 12.177, 12.181, 12.204*].

12.34 *Ergebnisse: Paramagnetische Salze*

Paramagnetische Salze spielen bei der Erzeugung sehr tiefer Temperaturen und bei ihrer Messung im Bereich der Gültigkeit des Curie-Gesetzes eine bedeutende Rolle. Die Eigenschaften eines paramagnetischen Ions in einem Kristallgitter werden durch die Termstruktur des *freien* Ions, die Stärke und Symmetrie des elektrischen Kristallfeldes sowie von der Dipol-Dipol- und Austauschwechselwirkung mit benachbarten Ionen bestimmt. Im allgemeinen haben Ionen mit einer ungeraden Zahl von ungepaarten Elektronen eine Anzahl von Dubletts innerhalb von $\approx 1\ cm^{-1}$ vom Grundzustand und alle anderen Anregungsniveaus mit viel höherer Energie, die bei tiefen Temperaturen unbesetzt bleiben. Das Curie-Gesetz wird daher bis zu sehr tiefen Temperaturen erfüllt, bis schließlich die zunehmende Wechselwirkung bemerkbar und χ besser durch das Curie-Weiss-Gesetz beschrieben wird.

In *Tabelle 12.6* sind die Molsuszeptibilität, die Curie-Konstante sowie die effektive Zahl der Bohrschen Magnetonen für einige paramagnetische Salze aufgeführt.

Tabelle 12.6 Molsuszeptibilität χ_M, Curie-Konstante C, Weiss-Temperatur θ und Zahl n_{eff} der Bohr-Magnetonen

Substanz	χ_M $10^{-6}\ cm^3/Mol$	C	θ K	n_{eff}
$CeCl_3$	2520	0,787	−23	2,51
CeF_3	2240	0,794	−62	2,52
$Ce(NO_3)_3 \cdot 5H_2O$	2335	0,717	−17	2,39
$Co(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$	9050	2,58	8	4,58
$CoSO_4 \cdot 7H_2O$	9780	2,94	− 9	4,85
$CrK(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$	6320	1,84	0	3,84
$CuSO_4 \cdot 5H_2O$	1570	0,46	− 0,7	1,92
$Dy_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$	∼4500	13,74	− 5	10,5
$Er_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$	36500	11,18	− 6	9,46
$EuCl_2$	26600	7,80	− 1	7,90
$FeCl_2 \cdot 4H_2O$	12060	3,37	12	5,18
$FeSO_4 \cdot 7H_2O$	11930	3,52	− 3	5,30
$Fe(NH_4)_2(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$	14900	4,2	0	5,8
$Gd_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$	27500	8,11	− 2	8,06
$Ho_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$	44300	13,6	− 7	10,43
$MnCl_2$	14500	4,17	3	5,78
$Tb_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$	37500	11,86	−16	9,74

12.35 *Paramagnetische Relaxation* [*12.84, 12.180*]

Die Angaben über die Suszeptibilität beziehen sich im allgemeinen auf den stationären Zustand, d. h. im statischen Magnetfeld. Bei Messungen mit der Induktivitätsmeßbrücke (s. § 12.19) wird experimentell bei steigender Frequenz eine Abnahme von χ und gleichzeitig ein Imaginärteil der Suszeptibilität

gefunden in Analogie zur komplexen Dielektrizitätskonstanten von Dielektrika. Die Theorie dieses Effekts geht davon aus, daß die Gleichgewichtseinstellung im H-Wechselfeld durch die Wechselwirkung der magnetischen Dipole untereinander und mit dem Kristallgitter beeinflußt wird. Es lassen sich *Relaxationszeiten* für diese Wechselwirkungsursachen angeben, die eine Funktion von Temperatur und Feld sind. Bezeichnet man mit χ_0 den statischen Wert der magnetischen Suszeptibilität, so läßt sich für die dynamische Größe der Ansatz

$$\chi = \chi' - \mathrm{j}\chi'' = \frac{CH_c^2\chi_0}{(b + CH_c^2)(1 + \mathrm{j}\omega\tau)} + \frac{b\chi_0}{b + CH_c^2} \qquad (12/51)$$

machen, wo τ die Relaxationszeit bedeutet. Näheres siehe Bd. V.

12.4 Ferromagnetische Eigenschaften [*12.16, 12.25, 12.46, 12.121, 12.123*]

12.41 Theoretische Grundlagen

Substanzen mit einem permanenten magnetischen Moment ohne Einwirkung eines äußeren Magnetfeldes werden *ferromagnetisch* genannt. Wegen der außerordentlich hohen magnetischen Permeabilität dieser Materialien sind die technischen Ferromagnetika von großer praktischer Bedeutung.

Die Ursachen sind zunächst im Zusammenhang von elektronischer und Bandstruktur mit dem Auftreten des Ferromagnetismus zu suchen. Der zweite Aspekt bezieht sich auf die praktische Anwendung der ferromagnetischen Stoffe im äußeren Feld und beschreibt das Verhalten magnetischer *Bereiche*.

Von den Elementen sind nur Fe, Co, Ni, Gd und andere Seltene Erden ferromagnetisch, d. h., Gruppen von Atomen mit einem permanenten magnetischen Moment richten sich durch Wechselwirkung gegenseitig aus. In *Tabelle 12.7* sind die wichtigsten Daten für die ferromagnetischen Elemente zusammengestellt.

Tabelle 12.7 Ferromagnetische Elemente

Element	Zustände des freien Atoms	Struktur	Atom-radius 10^{-8} cm	M T = 0 A/cm	T_c K
Fe	$3d^64s^2$	krz	1,24	$1{,}69 \cdot 10^4$	1043
Co	$3d^74s^2$	hdp	1,25	$1{,}36 \cdot 10^4$	1404
Ni	$3d^84s^2$	kfz	1,25	$0{,}47 \cdot 10^4$	631
Gd	$4f^75d^16s^2$	hdp	1,78	$5{,}66 \cdot 10^4$	289

Die drei Elemente Fe, Ni, Co haben geschlossene Schalen für die 1s-, 2s-, 3s- und 3p-Elektronen, die also nicht am magnetischen Moment beteiligt sind. Die 3d- und 4s-Elektronen sind wegen der Überlappung der Wellenfunktionen in Bänder aufgespalten und füllen die Zustände bis zur Fermi-Energie E_f. Ähnlich wie in paramagnetischen Substanzen findet unter dem Einfluß des äußeren Feldes ein Übergang der Elektronenspins in die energetisch günstigere

Orientierung statt, da unterhalb der Curie-Temperatur T_c die Zahl der besetzbaren Spinzustände parallel zum Außenfeld *größer* als die für antiparallele Einstellung ist. Der Übergang erfolgt *spontan,* d. h., auch die Magnetisierung selbst geht spontan vor sich.

Nach der phänomenologischen Theorie von P. Weiss (1907) kann analog zur paramagnetischen Magnetisierung (vgl. Gl. 12/42) die Magnetisierung einer ferromagnetischen Substanz aus der Beziehung

$$M = M_0 L_J \left(\frac{\mu_m H + \mu_m q M}{k T} \right) = M_0 \cdot L_J(a) \tag{12/52}$$

beschrieben werden, wenn anstelle der Langevin-Funktion die allgemeinere Brillouin-Funktion tritt, die sich mit $J = 1/2$ vereinfacht zu

$$L_{\frac{1}{2}}(a) = 2 \coth 2a - \coth a. \tag{12/53}$$

Die in Gl. (12/52) auftretende Größe qM stellt das *Molekularfeld* dar. Spontane Magnetisierung tritt nach dieser Vorstellung auf, wenn

$$\frac{k T_c}{\mu_m q M_0} < L_J'(0),$$

woraus die Curie-Temperatur T_c folgt:

$$T_c = \frac{\mu_m q M_0}{k} L_J'(0). \tag{12/54}$$

Der Temperaturverlauf der spontanen Magnetisierung ist in Abb. 12.30 dargestellt; die Werte für Fe, Ni und Co passen gut in die theoretische Kurve.

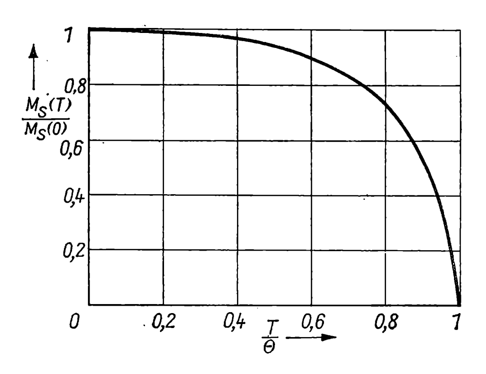


Abb. 12.30 Temperaturverlauf der spontanen Magnetisierung

Technische Magnetisierungskurve [*12.116*]. In Abb. 12.1 ist die grundsätzliche Methode für die experimentelle Aufnahme der Magnetisierungskurve gezeigt. Aus der damit erhaltenen M, H-Kurve (Abb. 12.31a) sind die *Sättigungsmagnetisierung* M_s bei hohen Feldern sowie die *remanente Magnetisierung* M_r

und die *Koerzitivfeldstärke* H_c zu entnehmen. Die B, H-Kurve in Abb. 12.31b ist aus der M, H-Kurve abgeleitet, indem zu $\mu_0 M$ die Größe $\mu_0 H$ addiert wird. Die *Sättigungsinduktion* B_s ergibt sich, wenn das maximale B auf die Gerade $\mu_0 H$ gelotet wird. Aus den B, H-Kurven ist ferner die magnetische *Permeabilität* $\mu_r = \tan\alpha$ zu entnehmen, die von H abhängt und durch Legierungszusätze

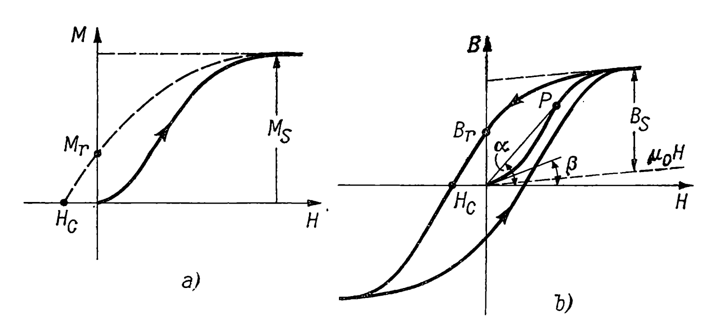


Abb. 12.31 Magnetisierungskurven: M, H-Kurve (a), B, H-Kurve (b)

stark beeinflußt werden kann. Als *Anfangspermeabilität* $\mu_a = \tan\beta$ wird die Tangente an die B, H-Kurve für $H = 0$ bezeichnet. Durchläuft das äußere Feld einen Zyklus, so entsteht die Magnetisierungs- oder *Hysteresiskurve.* Aus ihr ist zu entnehmen, daß der Entmagnetisierungsprozeß hinter der Feldänderung hereilt und die magnetische Energie, die während des Magnetisierungsvorgangs der Probe zugeführt wird, nicht restlos zurückgewonnen wird. Dieser Energieverlust berechnet sich aus

$$W_m = \mu_0 \int_0^{H'} \boldsymbol{M} \mathrm{d}\boldsymbol{H} = \int_0^{H'} \boldsymbol{B}\, \mathrm{d}\boldsymbol{H}, \qquad (12/55)$$

stellt also die von der B, H-Kurve umschlossene Fläche dar.

Als magnetisch *weiche* Stoffe werden solche mit hoher Permeabilität und geringer Hysteresis bezeichnet, z. B. Schmiedeeisen. Magnetisch *harte* Stoffe haben eine ausgeprägte Hysteresis und werden vor allem für die Herstellung von Dauermagneten benutzt (s. § 13.5). Die Magnetisierungsenergie ist eine spezifische Funktion der Kristallorientierung, da in ferromagnetischen Kristallen die magnetische Induktion anisotrop ist und die Permeabilität durch einen *Tensor* beschrieben wird. Zwischen B und H gelten in allgemeiner Form die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_{11} H_x + \mu_{12} H_y + \mu_{13} H_z; \\ B_y &= \mu_{21} H_x + \mu_{22} H_y + \mu_{23} H_z; \\ B_z &= \mu_{31} H_x + \mu_{32} H_y + \mu_{33} H_z. \end{aligned} \qquad (12/56)$$

Es ist nachgewiesen, daß eine ferromagnetische Substanz in Bereiche oder Domänen unterteilt ist, die spontan bis zur Sättigung polarisiert sind. Die Kräfte für die gleichsinnige Ausrichtung der magnetischen Momente sind

Austauschkräfte ähnlich wie beim H_2-Molekül, die eine kleine Reichweite besitzen. Im unmagnetischen Zustand sind die Momente der Bereiche paarweise neutralisiert. Wird ein Feld H angelegt, so vergrößern günstig orientierte Bereiche ihr Volumen auf Kosten der weniger bevorzugten und erzeugen eine makroskopische Magnetisierung. Dies geschieht durch Verschieben der Begrenzungswände der Bereiche; für kleine Feldänderungen ist die Wandverschiebung *reversibel.* Mit weiter zunehmendem Feld treten größere Wandverschiebungen auf, die nicht mehr umkehrbar sind und zum Zusammen-

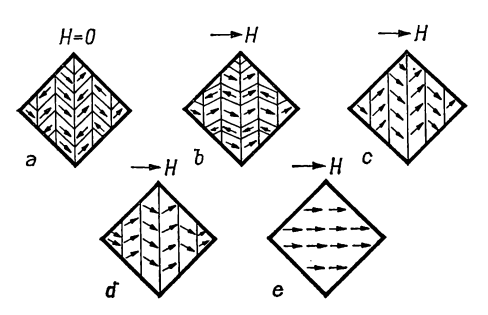


Abb. 12.32 Magnetisierung eines ferromagnetischen Einkristalls

schluß kleiner Bereiche zu größeren mit einheitlicher Magnetisierungsrichtung führen, bis schließlich die Sättigungsmagnetisierung der ganzen Probe erreicht ist. In Abb. 12.32 sind schematisch die einzelnen Phasen dieses Vorganges dargestellt. Über die Beobachtung der Wandverschiebungen siehe § 12.47. In polykristallinen Proben überlagern sich die Effekte der Wandverschiebungen und der willkürlichen Orientierung der einzelnen Metallkristallite.

Magnetostriktion. Beim Magnetisieren der meisten Ferromagnetika treten Längenänderungen auf, deren Größe und Vorzeichen von der Struktur der magnetischen Bereiche abhängen. Über diesbezügliche Meßverfahren siehe § 12.46.

12.42 Entmagnetisierungsfaktor

Wird eine ferromagnetische Probe in ein homogenes Magnetfeld H_0 gebracht, so gilt außerhalb einer langen zylindrischen Probe (s. Abb. 12.33)

$$B_0 = \mu_0 H_0$$

und innerhalb der Probe

$$B_i = \mu_0(H_i + M) \approx \mu_0 H_i. \tag{12/57}$$

Da wegen $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$ $B_i = B$ ist, wird

$$H_i = H_0 - M, \tag{12/58}$$

d. h., das äußere Feld wird durch die Magnetisierung abgeschwächt. Für eine beliebige äußere Form der Probe muß Gl. (12/58) durch Einführung des

Entmagnetisierungsfaktors N erweitert werden; es gilt:

$$H_i = H_0 - NM. \tag{12/59}$$

Für rotationselliptische Proben ist N berechenbar; bezeichnet man mit $k = a/b$ das Verhältnis von Längs- zu Querachse und liegt das Feld in der a-Achse, so gilt die Formel

$$N = \frac{1}{k^2 - 1}\left[\frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} \ln\left(k + \sqrt{k^2 - 1}\right) - 1\right]. \tag{12/60}$$

In *Tabelle 12.8* ist der Entmagnetisierungsfaktor für Rotationsellipsoide berechnet.

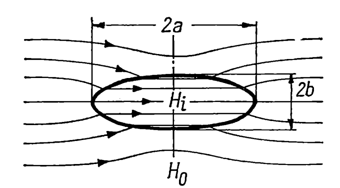


Abb. 12.33 Entmagnetisierungsfaktor

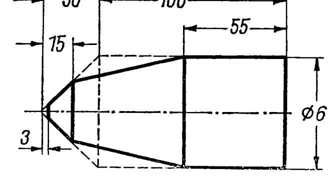


Abb. 12.34 Kegelstab

Tabelle 12.8 Entmagnetisierungsfaktor von Rotationsellipsoiden

k	N	k	N	k	N
0	1	30	0,00344	100	0,000430
1	0,3333	40	0,00212	150	0,000209
2	0,1745	50	0,00144	200	0,000125
5	0,0558	60	0,00105	300	0,000060
10	0,0203	70	0,000803	500	0,0000236
20	0,00675	80	0,000637	1000	0,0000066

Die Feldstärke bei der Aufnahme von B, H-Kurven muß nach Gl. (12/59) korrigiert werden; ersetzt man M durch $B/\mu_0 - H_i$, so ergibt sich für die Umrechnung der äußeren in die „*wahre Feldstärke*" die Beziehung

$$H_i = \frac{H_0 - NB/\mu_0}{1 - N}. \tag{12/61}$$

Die experimentell ermittelte B, H-Kurve muß rechnerisch mit Hilfe dieser Beziehung oder auch zeichnerisch „geschert" werden.

Anstelle des schwer herzustellenden Ellipsoids kann auch der in Abb. 12.34 dargestellte *Kegelstab* benutzt werden, dessen Querabmessungen um den Faktor 10 vergrößert sind. Der Entmagnetisierungsfaktor dieser Probenform ist nur um etwa 1% kleiner als der eines Ellipsoids mit gleichem k-Wert. Über Entmagnetisierungsfaktor von *Stäben* und *Hohlzylindern* siehe [*12.111, 12.158*].

12.43 Aufnahme von Induktionskurven im Gleichfeld

Mit Hilfe der in Abb. 12.1 abgebildeten Versuchsanordnung läßt sich die B, H-Kurve einer toroidförmigen Probe aus ferromagnetischem Material aufnehmen; in guter Näherung ist das Verfahren auch für dünne zylindrische Proben ohne Korrekturen anwendbar. Für rotationselliptische Proben, die sich in einem homogenen Magnetfeld befinden, muß nach § 12.42 das wirksame Innenfeld H_i aus Gl. (12/59) mit Hilfe des Entmagnetisierungsfaktors N berechnet werden.

Das Außenfeld H wird experimentell mit bekannten Feldmeßsonden (s. § 11.5) oder in Luftspulen aus dem Spulenstrom bestimmt. Die magnetische Induktion B kann, wie in Abb. 12.1, aus dem in einer Induktionsspule auftretenden ballistischen Ausschlag *punktweise* für verschiedene Werte von H bestimmt oder mit einem Fluxmeter (vgl. § 11.4) unmittelbar als Funktion von H registriert werden.

Zur Aufnahme der *jungfräulichen* oder *Neukurve* (s. Abb. 12.31 b) muß die Versuchsprobe vor der Messung einem *Abmagnetisierungsprozeß* unterworfen werden. Zu diesem Zweck wird sie in ein magnetisches Wechselfeld von 50 Hz gebracht, das langsam auf Null herabgeregelt wird, oder aus einem Wechselfeld herausgezogen. Für große Proben wird bei kleiner Frequenz ein Gleichfeld abnehmender Amplitude periodisch umgepolt.

12.431 Messung an geschlossenen Proben

In ringförmigen magnetischen Proben tritt wegen des großen Wertes der Permeabilität μ_r keine Streuung auf, so daß die Feldstärke aus

$$H = \frac{i N_1}{L} \tag{12/62}$$

und die ballistisch gemessene magnetische Induktion durch die Beziehung

$$B = \frac{R}{A N_2 S'_{ib}} \varphi_{\max} \tag{12/63}$$

gefunden werden kann. Darin bedeuten N_1 und N_2 die Windungszahlen von Feld- bzw. Induktionsspule, R den Schließungswiderstand des ballistischen Galvanometers mit der Stromstoßkonstanten S'_{ib} sowie A und L Querschnitt und mittleren Umfang der Probe. Da L nur der Mittelwert der Feldlinienlänge ist und H und B an der Innenberandung größer als am äußeren Umfang sind, sollte man die Ringdicke $r_a - r_i < r_a/5$ wählen. Selbstverständlich können auch fluxmetrische Registrierverfahren angewandt werden.

12.432 Jochmethoden

Zur Messung an kurzen Stäben oder Blechstreifen werden diese entweder zu einem quadratischen Eisenweg zusammengesetzt und im Epstein-Apparat gemessen oder in ein *Schlußjoch* gesetzt (s. Abb. 12.35), um die Rückwirkung der Probenenden zu eliminieren. Das Joch J besteht aus einem Eisenrahmen,

der aus Blechen aufgebaut ist, und besitzt einen im Vergleich zur Probe P großen Querschnitt. Das Magnetfeld wird durch die Feldspule F erzeugt und ist längs der Probe homogen. Die Induktionsspule S ist eng um die Probe gewickelt und an das Fluxmeter angeschlossen. Die Feldstärke berechnet sich

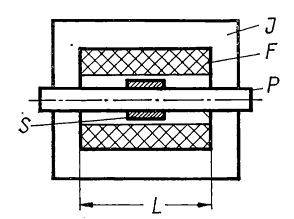


Abb. 12.35 Jochmethode

nach Gl. (12/62), wobei L die freie Probenlänge bedeutet. Der Werkstoff des Joches soll geringe Koerzitivkraft, hohe Anfangspermeabilität, keine magnetische Nachwirkung und hohen elektrischen Widerstand besitzen. Diese Forderungen werden weitgehend durch Weicheisen mit 5% Si oder einer 50%igen Fe–Ni-Legierung erfüllt. Trotz genau gearbeiteter Einspannstellen mit großen Berührungsflächen tritt im magnetischen Kreis ein magnetischer Widerstand auf, der bei genauen Messungen zu berücksichtigen ist (*Jochscherung*).

Durch *Differentialverfahren*, bei denen die Meßprobe X und eine Vergleichsprobe N mit bekannten magnetischen Eigenschaften entweder parallel oder in Serie in ein gemeinsames Joch eingespannt werden, sind höhere Genauigkeiten erzielbar. Bei der in Abb. 12.36 gezeigten Anordnung sind die Eisenwege der Proben X und N getrennt, endigen aber in einem gemeinsamen Joch; die wirksame Feldstärke ist daher für beide Stäbe dieselbe, wenn die Feldspulen F_x und F_n gleiche Abmessungen besitzen und vom gleichen Strom durchflossen werden. Die beiden Induktionsspulen S_x und S_n sind mit entgegengesetztem Wicklungssinn an das ballistische Galvanometer G gelegt. Die Vorwiderstände R_x und R_n werden so lange verändert, bis beim Kommutieren des Feldstromes i_h an G kein Ausschlag entsteht. Sind gleiche Induktionsspulen vorhanden, so gilt im Abgleichsfall die Beziehung

$$\frac{B_x}{B_n} = \frac{R_x}{R_n}.$$

Im anderen Fall sind Prüfling X und Normalprobe N magnetisch in Serie geschaltet und werden vom gleichen magnetischen Fluß durchflossen. Bei gleichen Abmessungen der Stäbe X und N wird der magnetische Kreis durch zwei Verbindungsstücke aus Weicheisen von großem Querschnitt geschlossen und im übrigen die Schaltung der Abb. 12.36 benutzt. Durch Hilfsspulen kann der magnetische Widerstand an den Klemmstellen eliminiert werden.

Bei dem in Abb. 12.37 dargestellten Magnetisierungsapparat nach KÖPSEL-KATH, der für Weicheisen und einfache Dauermagnetlegierungen geeignet ist,

wird die magnetische Induktion durch ein Drehspulmeßwerk D gemessen. Zu diesem Zweck ist das Joch J aufgetrennt und mit einer zylindrischen Bohrung mit Innenkern K versehen. Die Probe P von 6 mm Durchmesser und 270 mm Länge wird durch Klemmschrauben befestigt und durch die Feldspule F magnetisiert. Durch das Drehspulmeßwerk fließt ein Hilfsstrom i_h,

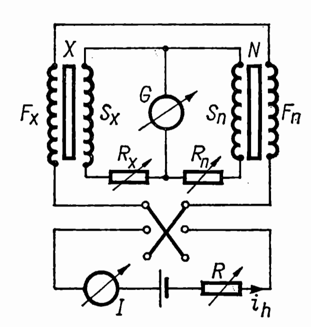


Abb. 12.36 Differentialmethode

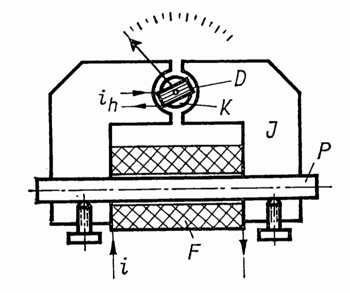


Abb. 12.37 Magnetisierungsapparat nach KÖPSEL-KATH

der dem Probenquerschnitt umgekehrt proportional ist. Die für den Luftspalt aufzubringende Durchflutung wird von einer Hilfsspule erzeugt. Die an der Probe wirkende Feldstärke errechnet sich aus dem Feldstrom i; die magnetische Induktion B wird direkt an der Skala abgelesen.

12.433 Jochverfahren mit direkter Feldstärkemessung

Die durch Luftspalte im magnetischen Meßkreis hervorgerufenen Meßfehler lassen sich eliminieren, wenn die Feldstärke an der Probenoberfläche direkt gemessen wird. Hierzu ist die in Abb. 12.38 skizzierte Meßanordnung brauchbar, bei der die magnetische Probe P in das Weicheisenjoch J eingespannt ist und die Feldstärke ballistisch mit Hilfe des magnetischen Spannungsmessers S (s. § 11.14) zwischen den Punkten a und b gemessen wird. Der magnetische Fluß wird durch die Feldspule F erzeugt und in der Probe ebenfalls ballistisch durch die Induktionsspule I gemessen. Auch andere in § 11 behandelte Methoden der Feldstärkemessung können anstelle von S benutzt werden.

Solche Geräte werden auch kommerziell hergestellt und sind für die Registrierung der Magnetisierungskurven geeignet. Das in Abb. 12.39 dargestellte Beispiel stellt den „Permagraph-Magnetprüfer" dar, bei dem sich die Probe P in einem Joch J befindet, das von den Feldspulen F erregt wird. Die magnetische Feldstärke H zwischen den Polschuhen wird mit der Hall-Sonde H (s. § 11.74) gemessen; zur Messung der Induktion B bzw. der Magnetisierung $M = B/\mu_0 - H$ dienen zwei in einen der Polschuhe eingelassene gleiche Induktionsspulen S_b und S_m, die gegeneinander geschaltet und an den Schalter U gelegt sind. In der rechten Schalterstellung wird im Fluxmeter I_b die Induk-

tion B, in der linken Stellung die Magnetisierung gemessen, wenn die magnetische Durchflutung langsam verändert wird. Sind Feldstärkemeßgerät I_h und I_b mit einem Potentiometerausgang versehen, so läßt sich die Magnetisierungskurve $B = f(H)$ bzw. $M = f(H)$ direkt mit einem X, Y-Schreiber R aufzeichnen. Weitere Ausführungen siehe [*12.63*].

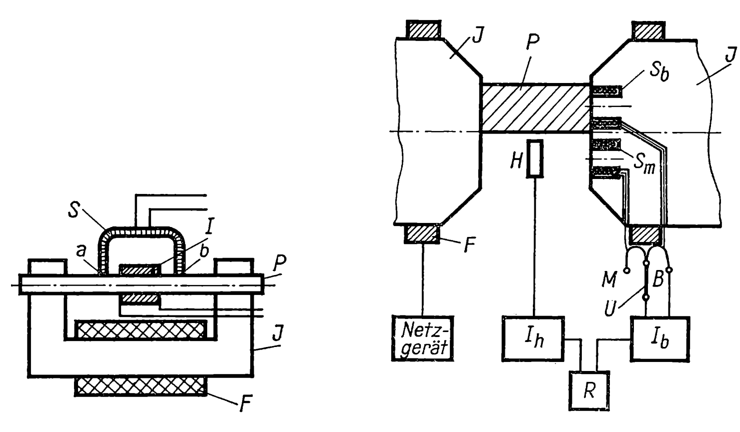


Abb. 12.38 Jochmethode mit direkter Feldstärkemessung *Abb. 12.39 „Permagraph"*

12.434 Magnetisierungsmessungen an Proben mit freien Enden

In vielen Fällen kann der magnetische Fluß nicht durch ein Joch geschlossen werden, wie z. B. bei sehr kleinen Abmessungen, Rotationsellipsoiden oder für Messungen bei sehr tiefen oder hohen Temperaturen.

In diesen Fällen wird die meist zylindrische oder besser rotationselliptische Probe in ein homogenes Magnetfeld H_0 gebracht und die Induktion B als Funktion des inneren Feldes $H_i = H_0 - NM$ ballistisch oder fluxmetrisch gemessen, wobei nach Gl. (12/59) die Größe N den Entmagnetisierungsfaktor angibt. Nach dieser Methode ist die Magnetisierung von Ferromagnetika bei tiefen Temperaturen von Weiss und Forrer [*12.210*] zwischen den Polen eines Elektromagneten gemessen worden.

Bei den *magnetometrischen* Verfahren wird die Probe in einer stromdurchflossenen Spule mit homogener Feldstärke angeordnet und das magnetische Moment mit einem Magnetometer, das neben der Probe angebracht ist, gemessen. Bei dem von Kühne [*12.126*] vorgeschlagenen neuen Verfahren werden zur Feldmessung magnetische Sonden — ähnlich der in § 11.5 beschriebenen — benutzt. Geissler und Rocker [*12.76*] geben ein sehr empfindliches statisches *Kompensationsmagnetometer* an, dessen Meßsystem zwei stromdurchflossene Spulen im Abstand der Probenenden enthält und bei dem das vom Streufeld ausgeübte Drehmoment fotoelektrisch kompensiert wird. Eine ähnliche Konstruktion wird von Hermann et al. [*12.98*] vorgeschlagen; weitere Anordnungen siehe [*12.55, 12.192, 12.218*].

12.435 Magnetische Waage

Auch aus der in § 12.12 erläuterten Kraftwirkung, die auf magnetische Proben im inhomogenen Magnetfeld ausgeübt wird, kann die Magnetisierung ferromagnetischer Materialien bestimmt werden. Von HOFER et al. [*12.102*] wird eine magnetische Waage angegeben, die Messungen an kleinen Proben zwischen 90 und 1070 K bei einem Maximalfeld von 10 kA/cm erlaubt. Weitere Ausführungen siehe [*12.100*].

12.436 Aufzeichnung von Hysteresiskurven

Die im vorigen Abschnitt aufgeführten Verfahren zur Messung von B bzw. M als Funktion des außen angelegten Feldes H sind selbstverständlich auch zur Aufnahme der Hsyteresiskurven (vgl. Abb. 12.31) geeignet, wenngleich dies bei den meisten punktweise geschehen muß. Im Gegensatz hierzu gibt es eine ganze Anzahl von ***Registriermethoden,*** bei denen das Außenfeld sinus- oder dreieckförmig geändert und die entsprechende Größe B oder M aufgezeichnet wird.

Das von BROCKMAN und STENECK [*12.30*] benutzte Verfahren entspricht der *Jochmethode* nach Abb. 12.39, bei der die Größen H und B durch integrierende Fluxmeter gemessen und in einem X, Y-Schreiber aufgezeichnet werden. Die Dauer für die Aufzeichnung der ganzen Hysteresisschleife hängt von den Integrationseinheiten ab und beträgt bei mechanischen Fluxmetern einige Sekunden.

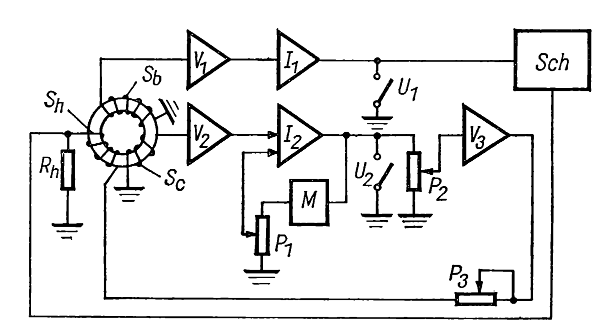


Abb. 12.40 Hysteresisschreiber nach MAZZETTI *und* SOARDO

Zur Aufnahme von Hysteresiskurven kleiner Toroide wird von GROVER [*12.89*] eine Anordnung beschrieben, bei der ein 60-Hz-Wechselfeld in der Probe erzeugt wird, dessen Amplitude als X-Koordinate auf einem ESO aufgezeichnet wird. Zur Messung der magnetischen Induktion wird die in der Pick-up-Spule induzierte Spannung in einem transistorisierten Integrationsverstärker verstärkt und den Y-Platten des ESO zugeführt. Bei sehr kleinen Probenabmessungen bestehen Magnetisierungsspule und Induktionsspule lediglich aus einem durch das Toroid gesteckten Draht.

Bei dem von MAZZETTI und SOARDO [*12.142*] konstruierten Registriergerät wird die Größe $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ konstant gehalten, wodurch der durch Wirbelströme verursachte Fehler vermieden und auch die Integration erleichtert wird. Die schematisch in Abb. 12.40 dargestellte Schaltung dieser Apparatur enthält die ringförmige Probe P mit den Spulen S_h, S_b und S_c zur Herstellung des Feldes, zur Aufnahme der Flußänderung $\mathring{B}$ und zur Erzeugung eines Steuersignals. Die in S_b induzierte Spannung wird dem Operationsverstärker V_1 und dem Integrator I_1 zugeführt und nach Verstärkung auf der Y-Achse des X, Y-Schreibers *Sch* aufgezeichnet. Der Magnetisierungsstrom wird dem Leistungsverstärker V_3 entnommen, dem der Integrator I_2 vorgeschaltet ist. Der Ausgang von I_2 ist die algebraische Summe der Spannungen, die einmal über den Verstärker V_2 aus der Steuerwicklung S_c geliefert wird, zum anderen der vom Multivibrator M gelieferten Spannung. Ist nur letztere wirksam, so entsteht eine periodische Dreiecksspannung; die in S_c induzierte Spannung bewirkt, daß bei hoher Verstärkung in V_2 der Magnetisierungsstrom proportional zu $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ wird. Auf der X-Achse von *Sch* wird der zu i_h proportionale Spannungsabfall an R_h registriert. Die erreichte Genauigkeit beträgt 0,2% auf der H-Achse und 1% auf der B-Achse.

Ein Hysteresisschreiber mit elektronischer Integration wird von DE MOTT [*12.149*] beschrieben. Das Zeitintegral der in der B-Spule induzierten Spannung wird in einem Spannungs-Frequenz-Konverter (s. § 6.84) in eine Impulsfolge umgewandelt, deren Zahl proportional zu $\int u\,\mathrm{d}t$ ist. Diese Impulse werden in einem Digitalzählwerk gezählt und geben ein Maß für die Flußänderung. Durch einen Digital-Analog-Konverter wird die entsprechende Gleichspannung gewonnen und der Y-Achse eines X,Y-Schreibers zugeführt. Ähnlich wie oben wird auf der X-Achse die magnetische Feldstärke aufgezeichnet. Im Gegensatz zu anderen fluxmetrischen Verfahren ist die Induktionsmessung dieser Anordnung direkt in Voltsekunden eichbar und liefert Absolutwerte, wenn die Windungsfläche der Spule bekannt ist.

Eine ähnliche Versuchsanordnung für zylindrische Permalloyfilme wird von GOLD und GRAY [*12.81*] beschrieben. Weitere Ausführungsformen siehe [*12.45, 12.74, 12.103*]; zur Aufzeichnung von Hysteresisschleifen an Mineralien siehe [*12.133*]. Das von WEIZENMILLER [*12.211*] beschriebene *Elektronenstrahl-Ferroskop* enthält einen Integrator für die Induktionsmessung und bildet die Hysteresisschleife direkt auf dem Schirm des ESO ab.

12.437 Hysteresismessung in Impulsfeldern

Zur Aufnahme von Magnetisierungskurven bei hohen Magnetfeldern, wie sie z. B. durch die Entladung einer Kondensatorbatterie in einer Luftspule erzeugt werden (s. § 13.6), läßt sich die von ELDER und BARTE [*12.56*] angegebene und in Abb. 12.41 vereinfacht dargestellte Meßanordnung verwenden. Die aus 3500 Windungen bestehende Primärspule F wird vom Entladungsstrom der Kondensatorbatterie C (16⋯1500 µF, 0⋯4 kV) erregt und erzeugt ein maximales Feld von 14 kA/cm. Das in der Feldspule S_h induzierte Signal wird im Verstärker V_1 integriert und den X-Platten des ESO zugeführt. Zur Magnetisierungsmessung dienen die identischen Spulen S_m und S_m', die mit

entgegengesetztem Wicklungssinn in Serie geschaltet sind und deren eine die Meßprobe P enthält. Das in V_2 integrierte Signal liefert die Y-Auslenkung am Schirm des ESO. Die Integratoren V_1 und V_2 sind vom Miller-Typ (s. § 5.64) unter Verwendung eines kommerziellen Operationsverstärkers mit dem Verstärkungsfaktor 10^4.

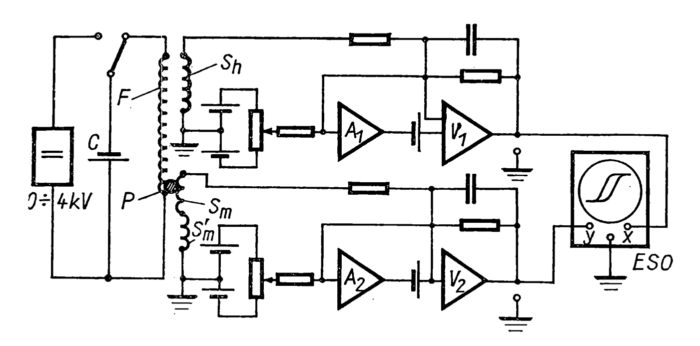


Abb. 12.41 Magnetisierungsmessung im Impulsfeld

Bei unterkritischer Dämpfung des Spulenkreises führt die Feldstärke H eine gedämpfte Schwingung mit etwa 100 Hz aus und werden die Hysteresisschleifen mit abnehmender Amplitude ineinander geschrieben.

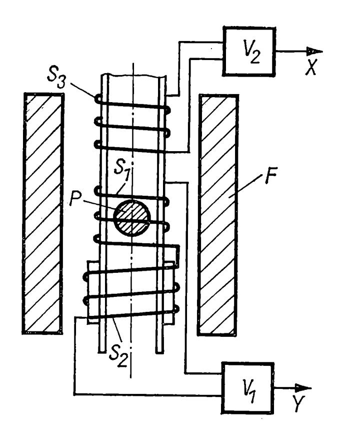


Abb. 12.42 Impulsverfahren

Bei der von Asti und Conti [*12.7*] angegebenen Methode, die bei hohen Impulsfeldern angewandt werden kann, wird die ellipsoidförmige Probe P (s. Abb. 12.42) im Zentrum der gepulsten Luftspule F von der Induktionsspule S_1 umgeben, während eine zweite Spule S_2 in Serie mit S_1, aber entgegengesetzt gewickelt, der Magnetisierungsmessung dient und in axialer Richtung verschoben werden kann. In einem bestimmten Abstand von S_1 ist das von S_1

und S_2 aufgenommene Induktionssignal nach Integration im Operationsverstärker V_1 proportional zum inneren Magnetfeld $H_i = H_a - NM$, wenn N der Entmagnetisierungsfaktor ist. Die dritte Spule S_3 dient mit der Integrationsstufe V_2 zur Registrierung der Feldstärke H_a. Bei dieser Methode sind Probenabmessungen von einigen Millimetern ausreichend.

12.438 Magnetisierungsmessungen in sehr starken Feldern

Die Herstellung sehr hoher Magnetfelder von 5 T und mehr ist heute nicht nur kurzzeitig in gepulsten Luftspulen, sondern stationär in *supraleitenden Spulen* (s. § 13.3) bis herauf zu 14 T möglich. Mit *wassergekühlten Luftspulen* (s. § 13.2) lassen sich sogar stationäre Felder bis zu 25 T bei allerdings hohem Leistungsaufwand erzeugen.

Von Ellenkamp et al. [*12.59*] ist die Anwendung eines dem Smith-Magnetometer (s. § 11.34) ähnlichen Geräts in einer mit flüssigem Stickstoff gekühlten Luftspule mit maximal 7 T beschrieben. Das Verfahren eignet sich ebenso zur Messung der Sättigungsmagnetisierung (s. § 12.5).

12.439 Magnetisierungsmessung mit magnetooptischem Kerr-Effekt

Wie in § 11.81 behandelt, lassen sich Messungen von H mit Hilfe des Faraday-Effektes bis zu sehr hohen Frequenzen durchführen. Von Beck [*12.15*] wird eine Methode angegeben, bei der in einem magnetischen Transversalfeld von maximal 2000 A/cm bei 60 Hz der von einem transparenten magnetischen Film erzeugte Faraday-Effekt mit Fototransistoren als Funktion des äußeren magnetischen Feldes registriert wird.

Green und Thomas [*12.88*] wenden den *transversalen Kerr-Effekt* zur Aufnahme von Hysteresiskurven ferromagnetischer Filme an. Der Effekt beruht auf der Abhängigkeit des Reflexionskoeffizienten für sichtbares Licht an einer ferromagnetischen Oberfläche vom Winkel zwischen dem Magnetisierungsvektor und der Einfallsebene. Als Fotodetektor wird ein Ge-Fototransistor benutzt, der bei 1,55 µm Wellenlänge maximale Empfindlichkeit besitzt. Ähnliche Verfahren zur Sichtbarmachung magnetischer Bereiche bei schnellablaufenden Magnetisierungsvorgängen siehe [*12.163*] und § 12.47.

12.44 Wechselfeldmethoden

12.441 Allgemeines

Bei Wechselmagnetisierung werden die ferromagnetischen Bereiche periodisch ummagnetisiert und treten Verluste auf, die nach

$$P_m = f \oint B \, \mathrm{d}H \qquad (12/64)$$

der Fläche der Hysteresiskurve und der Frequenz f proportional sind. Hinzu kommen infolge des eindringenden Magnetfeldes Wirbel- und Nachwirkungsverluste, die von der elektrischen Leitfähigkeit abhängen. Ferner bewirken die Wirbelströme eine 90°-Phasenverschiebung zwischen Magnetisierungsstrom und -spannung sowie eine verringerte Eindringtiefe infolge des Skin-

effektes. Das bedeutet, daß im Wechselfeld die Hysteresiskurve gegenüber der statischen verdickt ist und von der Frequenz sowie von der Amplitude des Magnetfeldes $H_{\max}$ abhängt. Als *Scheinpermeabilität* μ_s wird das Verhältnis $B_{\max}/H_{\max}$ definiert.

12.442 Aufnahme von Magnetisierungskurven

Hierzu sind die in § 12.431 besprochenen Methoden besonders geeignet, bei denen die Proben aus Ringen bestehen, die aus dem zu untersuchenden Blech gestanzt oder aus streifenförmigen Blechpaketen zusammengesetzt sind. Die wirksame magnetische Feldstärke wird aus dem Magnetisierungsstrom i, der Windungszahl N_1 und der mittleren Länge L der Feldlinien bestimmt. Die magnetische Induktion B findet man aus der Induktionsspannung in einer Spule mit der Windungszahl N_2. Für *größere* Feldstärken wird der Zusammenhang zwischen B und H nichtlinear und macht zur Bestimmung Registrierverfahren erforderlich.

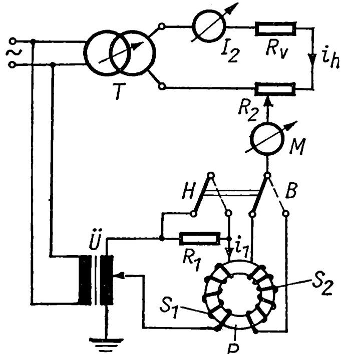




Abb. 12.43 Kompensationsmethode

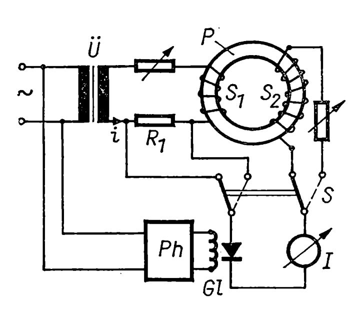


Abb. 12.44 Ferrometer

Bei *kleineren* Induktionen sind Magnetisierungsstrom und Induktionsspannung sinusförmig und können mit Wechselstrombrücken gemessen werden. Bei der in Abb. 12.43 dargestellten *Kompensationsmethode* nach Drysdale wird die Primärwicklung S_1 der Probe P über den Regeltransformator $Ü$ erregt und der Strom i_1 am Serienwiderstand R_1 gemessen. Die magnetische Induktionsspannung an der Sekundärspule S_2 wird ebenso wie der Spannungsabfall $i_1 R_1$ mit Hilfe eines einfachen Wechselspannungskompensators (vgl. § 6.37) bestimmt. Dieser besteht aus dem Hilfsstromkreis R_2, R_v, dem Wechselstrominstrument I_2 und dem Phasenschiebertransformator T. Durch Verändern der Hilfsstromstärke i_h und des Abgriffs an R_2 und mit Hilfe des Nullinstruments M (Vibrationsgalvanometer, ESO) läßt sich der Abgleich nach Amplitude und Phase durchführen.

Im nichtlinearen B, H-Bereich sind Kompensationsverfahren wegen der auftretenden Kurvenformverzerrungen fehlerhaft. An die Stelle des Wechselstrominstruments treten mechanisch oder elektrisch gesteuerte Meßgleich-

richter mit empfindlichen Gleichstrominstrumenten, welche arithmetische Mittelwerte oder Augenblickswerte anzeigen. Das Prinzip solcher Geräte, die auch „Ferrometer“ genannt werden, ist in Abb. 12.44 dargestellt. Die ringförmige Probe P wird durch die Feldspule S_1 über den Transformator $Ü$ erregt und der Magnetisierungsstrom als Spannungsabfall am Serienwiderstand R_1 bestimmt. Die magnetische Induktion wird durch die Spule S_2 gemessen, wobei wahlweise beide Spannungen durch den Umschalter S an das phasengesteuerte Gleichrichterinstrument gelegt werden. Dieses besteht aus dem mechanischen Gleichrichter Gl, dem Strommesser I und dem Phasenschieber Ph. Die Genauigkeit des Verfahrens liegt zwischen 0,1 und 1%. Näheres siehe [*12.21*].

12.443 Messung der Ummagnetisierungsverluste

Als *Ummagnetisierungsverluste* bezeichnet man in der Nachrichten- und Starkstromtechnik die Summe aus Hysterese-, Wirbelstrom- und Nachwirkungsverlusten.

Die Hysteresisverluste sind nach Gl. (12/64) der Frequenz und der Fläche der Hystereseschleife proportional; bei kleiner Induktion ist $\int H\,\mathrm{d}B \sim H^3$. Die *Wirbelstromverluste* sind etwa zu B^2 und f^2 proportional und hängen vom spezifischen Widerstand des Ferromagnetikums ab. Die *Nachwirkungsverluste,* die auf Diffusionsvorgängen im Kristallgitter beruhen, sind proportional zu B^2 und f. Für eine Spule mit Magnetkern, deren Hysteresisverlust $P_h = k_1 f i^3$ für kleine Induktion angesetzt werden kann, läßt sich ein *Hysteresiswiderstand*

$$R_h = k_1 f i \tag{12/65}$$

definieren, wenn $P_h = i^2 R_h$ gesetzt wird. Analog findet man für den *Wirbelstromwiderstand*

$$R_w = k_2 f^2 \tag{12/66}$$

und für den *Nachwirkungswiderstand*

$$R_n = k_3 f. \tag{12/67}$$

Die Summe der drei Widerstände stellt den Verlustwiderstand

$$R_v = k_1 i f + k_2 f^2 + k_3 f \tag{12/68}$$

dar, der zum Gleichstromwiderstand R_0 zu addieren ist, um den *Wirkwiderstand*

$$R = R_0 + R_v \tag{12/69}$$

zu erhalten. Die Materialkonstanten k_i hängen vom Volumen und vom magnetischen Widerstand des Eisenkreises, von der elektrischen Leitfähigkeit und von der Magnetisierungskurve ab.

Zur Messung der Verluste bei kleinen magnetischen Feldstärken wird eine ringförmige Probe mit einer Toroidwicklung benutzt und in einer Wechselstrombrücke der Verlustwiderstand R_v bei verschiedenen Frequenzen gemessen. Wie in Abb. 12.45 dargestellt, wird in der symmetrischen Brücke die zu untersuchende Spule mit der Induktivität L_x und dem Wirkwiderstand R_x

mit der veränderlichen Meßinduktivität L (s. § 14.34) und dem Meßwiderstand R verglichen, wobei als Nullinstrument ein Röhrenvoltmeter oder ein Vibrationsgalvanometer benutzt wird. Brückengleichgewicht herrscht, wenn

$$L_x = L \quad \text{und} \quad R_x = R,$$

da der Vergleichszweig symmetrisch ist. Ist die vom Oszillator erzeugte Brückenspannung $2\,U$, so liegt bei Nullabgleich an der Spule die Spannung U, was einem Spulenstrom

$$i = \frac{U}{\sqrt{R_x^2 + (2\pi f L_x)^2}}$$

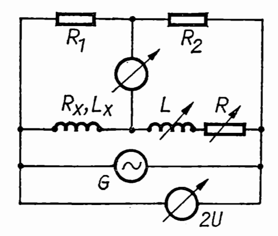
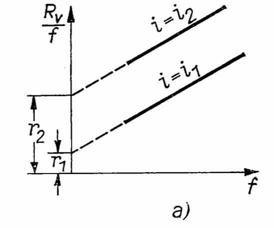


Abb. 12.45 Messung der Verluste mit der Wechselstrombrücke



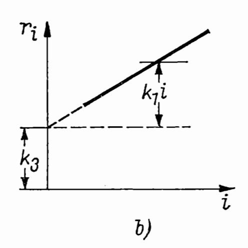


Abb. 12.46 Grafische Ermittlung der Verlustanteile

entspricht. Damit findet man für die Selbstinduktionsspannung

$$U_s = \sqrt{U^2 - (i R_x)^2} = 2\pi f L_x i.$$

Der Scheitelwert der Induktion B_m errechnet sich aus dem Induktionsgesetz zu

$$B_m = \sqrt{2}\,\frac{U}{2\pi A N f}, \tag{12/70}$$

wenn A der Kernquerschnitt und N die Windungszahl der Spule ist. Bezeichnet man mit l den mittleren Eisenweg, so findet man für den Scheitelwert der magnetischen Feldstärke den Wert

$$H_m = \sqrt{2}\,\frac{iN}{l} \tag{12/71}$$

und daraus durch Vergleich die absolute Permeabilität des Kerns zu

$$\mu = \frac{B_m}{H_m} = \frac{l}{A N^2} L_x. \tag{12/72}$$

Zur Ermittlung der einzelnen Verlustanteile nach Gl. (12/68) wird für verschiedene Stromstärken und Frequenzen der Verlustwiderstand $R_v = R_x - R_0$ bestimmt und R_v/f als Funktion von f aufgetragen, wie das aus Abb. 12.46a hervorgeht. Durch Extrapolation auf $f = 0$ findet man die Abschnitte r_1 und r_2 für die Ströme i_1 bzw. i_2 auf der Ordinatenachse. Nun trägt man die

Abschnitte r_i als Funktion von i auf (Abb. 12.46b) und erhält eine Gerade, die den Wert k_3 abschneidet. Die weiteren Konstanten findet man aus den Beziehungen $k_1 = (r - k_3)/i$ und $k_2 = (R_v - k_1 i f - k_3 f)/f^2$.

Für kleine Magnetfelder wächst L_x etwa proportional mit i an, und man kann setzen

$$\mu = \frac{B_m}{H_m} = \mu_a + 2fH_m. \qquad (12/73)$$

Für kleine Ströme besteht die Ersatzschaltung einer Eisenkernspule aus einer Induktivität, die linear mit i anwächst, und einem Widerstand, der einen konstanten Anteil R_0 und einen zweiten R_v enthält, der mit f und i zunimmt.

Über eine Wechselstrombrücke für Verlustmessungen bei hohen Induktionen siehe [*12.44*], weitere Verfahren siehe [*12.40, 12.129*].

Aus der Messung der Induktionsspannung U_s und der Stromstärke i sowie dem Phasenwinkel φ zwischen beiden Größen ergibt sich die Verlustleistung

$$P_v = U_s i \cos\varphi,$$

von der die Gleichstromverluste $i^2 R_0$ abgezogen werden müssen. Man benutzt hierzu die in § 6.4 beschriebenen *Wattmeter*, insbesondere solche mit geringem Eigenverbrauch. Für Betriebsmessungen vergleicht man in einer Differentialschaltung die Verluste mit einem zweiten Kreis, dessen Verluste bekannt sind.

Sehr exakte Messung der Ummagnetisierungsverluste erlauben *kalorimetrische Methoden*, bei denen die ganze Eisenspule — oder besser nur der Eisenkern — thermisch von der Umgebung isoliert durch den Meßstrom aufgeheizt wird und bei bekannter spezifischer Wärme die Verluste aus dem Temperaturanstieg entnommen werden können. Ausführungsformen siehe [*12.28, 12.3*]. Allgemeines über kalorimetrische Verfahren siehe Bd. II, § 5.2.

12.444 Messungen bei hohen Frequenzen

Ferromagnetische Materialien, meist in Form dünnster Bleche mit Blechstärken bis herab zu 0,01 mm oder feiner Pulver in einer isolierenden Matrix, werden im Ton- und HF-Bereich für den Bau von Drosseln und Übertragern verwendet.

Es ist von Vorteil, die *komplexe Permeabilität*

$$\mu = \mu_{LR} + \mathrm{j}\,\mu_{RR} \qquad (12/74)$$

einzuführen, wobei μ_{LR} die *Induktionspermeabilität* und μ_{RR} die *Widerstandspermeabilität* ist. Die beiden Anteile ergeben sich aus den Beziehungen

$$\mu_{LR} = \frac{L}{N^2 A/l}; \quad \mu_{RR} = \frac{R_v}{2\pi f N^2 A/l}, \qquad (12/75)$$

wenn L die Induktivität und R_v den Verlustwiderstand einer Magnetspule mit der Kernlänge l bedeutet. Als *wirksame Permeabilität* wird vielfach das Verhältnis

$$\frac{L_{HF}}{L_0} = \mu_L \qquad (12/76)$$

definiert, wobei L_{HF} die Induktivität *mit* Kern und L_0 die *ohne* Kern ist. Zur Charakterisierung einer Kernspule wird oft der Begriff der *Spulengüte* $Q = 2\pi f L/R$ benutzt.

Zur Messung der HF-Permeabilität werden Wechselstrombrücken (s. § 6.36 und § 7.54) verwendet, insbesondere die Maxwell-Brücke nach Abb. 6.44 mit Wagnerschem Hilfszweig zum Abgleich der Störkapazitäten. Bei höheren Frequenzen werden toroidförmige Proben benutzt, die am Ende einer konzentrischen Meßleitung angeschlossen sind oder als stabförmige Proben einen Teil des Innenleiters bilden. Einzelheiten über Meßverfahren siehe [*12.174*, *12.9*].

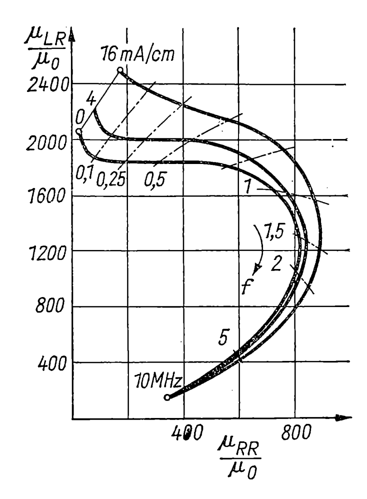


Abb. 12.47 Komplexe Permeabilität von „Siferrit 2000 Tr 7“ nach [12.66]

Bei ferromagnetisch weichen Materialien werden zweckmäßig Ortskurven aufgezeichnet, welche die komplexe Permeabilität nach Gl. (12/74) als Funktion der Frequenz angeben. Aus dem Verlauf solcher Kurven, die als Beispiel in Abb. 12.47 für das Material „Siferrit 2000 Tr 7“ (Siemens) dargestellt sind, lassen sich die Verlustquellen, wie Hysterese, Wirbelströme, Nachwirkung u. a., entnehmen. Parameter ist die angelegte Wechselfeldstärke H_w. Eingezeichnet sind die Kurven für $H_w = 0; 4;$ 16 mA/cm. Über spezielle Verfahren bei Ferriten siehe § 12.8.

12.45 Messung der ferromagnetischen Kenngrößen

In § 12.41 sind die charakteristischen Kenngrößen ferromagnetischer Stoffe angegeben worden und in Abb. 12.31 b dargestellt. Die wichtigsten sind die Anfangspermeabilität μ_a, die Koerzitivkraft oder -feldstärke H_c und die Sättigungsinduktion B_s. Über die Aufnahme der gesamten Magnetisierungskurve sind in § 12.43 Einzelheiten angegeben [*12.201*].

12.451 Anfangspermeabilität

Der Anfangsabschnitt der *Neukurve* eines ferromagnetischen Materials läßt sich in guter Näherung durch die Beziehung

$$B = \mu_a B_0 + b B_0^2 \tag{12/77}$$

beschreiben, wobei $B_0 = \mu_0 H$ und b der *Anstiegsfaktor* ist. Für $H \to 0$ erhält man die *Anfangspermeabilität* μ_a, die bei Schwachstromgeräten eine bedeutende Rolle spielt. Die Messung von μ_a wird meistens in schwachen Gleichfeldern mit den in § 12.43 beschriebenen Verfahren durchgeführt, wobei entweder ringförmige oder langgestreckte Proben verwendet werden. Besondere Vorsicht ist bezüglich äußerer Erschütterungen und magnetischer Fremdfelder geboten; auch die chemische Reinheit des Materials spielt eine große Rolle. So sinkt z. B. in äußerst reinem *Eisen* $\mu_r = 1{,}43 \cdot 10^6$ nach Zugabe von nur 0,004% C bereits auf 16000 ab. Auch durch mechanische Spannungen wird μ_a stark herabgesetzt. Über Messungen von μ_a von α-Eisen bei hohen Temperaturen siehe [*12.4*].

12.452 Reversible Permeabilität

Führt man im Zuge einer Magnetisierung längs der Neukurve *O-P* in Abb. 12.31 an irgendeinem Punkt *P* eine kleine Felderniedrigung um ΔH durch, so fällt die magnetische Induktion um ΔB. Sind die Änderungen genügend klein, so sind sie *reversibel*; das Verhältnis

$$\mu_l = \frac{\Delta B}{\Delta H} \tag{12/78}$$

wird *reversible Permeabilität* genannt und hängt außer vom Material auch von H ab. Dieser bereits 1908 von GANS untersuchte Effekt wird zur Konstruktion

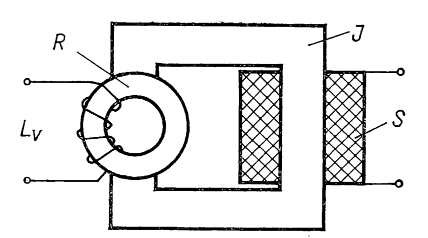


Abb. 12.48 Magnetvariometer

eines *Magnetvariometers* (s. Abb. 12.48) benutzt, das eine von der Vormagnetisierung abhängige und steuerbare Induktivität darstellt. Die eigentliche Induktivität L_v ist auf einen ferromagnetischen Ring R gewickelt, der aus einem Ferrit besteht und im Joch J aus hochpermeablem Material durch die Erreger-

spule S magnetisiert wird. Solche variablen Induktivitäten werden in Wobbelgeneratoren, magnetischen Verstärkern (s. § 15.71) u. a. benutzt.

Die Größe μ_l wird entweder bei der Aufnahme von Magnetisierungskurven gemessen oder mit Wechselstrom aus der Induktivität einer um die Probe gewickelten Spule abhängig von der Induktion bestimmt. Näheres siehe [*12.214*] und § 14.5.

Von NONNENMACHER und SCHWEIZER [*12.155*] wird eine neuartige Methode der Permeabilitätsmessung angegeben, bei der die Größe aus der thermischen *Rauschspannung* einer Kernspule abgeleitet wird. Nach Gl. (4/94) beträgt die Rauschspannung

$$\sqrt{\overline{u_r^2}} = \sqrt{4kTR\,\Delta f},$$

wenn Δf das Frequenzband und R der Wirkwiderstand der Spule ist. Dieser setzt sich aus dem Widerstand R_v infolge der Kernverluste und dem eigentlichen Wicklungswiderstand R_0 zusammen (vgl. Gl. (12/69)). Aus der Größe R_v muß dann die in Gl. (12/74) definierte Widerstandspermeabilität μ_{RR} abgeleitet werden. Soll die Induktivität L, d. h. die Induktionspermeabilität μ_{LR}, aus Rauschmessungen gefunden werden, so muß parallel zur Spule ein verlustfreier (Glimmer-)Kondensator C geschaltet werden. Der Verlauf der gemessenen Rauschspannung als Funktion der Frequenz entspricht der Resonanzkurve des aus L und C bestehenden Schwingungskreises.

12.453 Koerzitivfeldstärke

Die in Abb. 12.31 mit H_c bezeichnete Koerzitivfeldstärke ist als diejenige abmagnetisierende Gleichfeldstärke definiert, bei der die Remanenzinduktion der Probe verschwindet. Zur Feststellung von H_c muß die Probe zur Sättigungsinduktion B_s gebracht sein und im abnehmenden Feld gemessen werden. Nach Erreichen der scheinbaren Remanenzinduktion B_r wird das Magnetfeld umgepolt und so lange vergrößert, bis B verschwindet.

Das genaueste Verfahren — vor allem bei kleinen Proben — bietet die Aufnahme einer Magnetisierungskurve nach den in § 12.43 behandelten speziellen Methoden. Bei sehr genauen Messungen interpoliert man H_c aus benachbarten positiven und negativen Ausschlägen von B und durch Umkehren der Feldrichtung für die ganze Probe. Auch *Drehmomentmethoden*, bei denen das von der magnetisierten Probe in einem Hilfsfeld ausgeübte Drehmoment beobachtet wird, sind gebräuchlich. Über Betriebsgeräte zur schnellen Messung bei verschiedenen Temperaturen siehe [*12.72, 12.161*], für die Untersuchung permanentmagnetischer Werkstoffe siehe [*12.222, 12.134*].

Von ELLENKAMP [*12.57*] wird ein Registriergerät beschrieben, das die Koerzitivfeldstärke H_c in Abhängigkeit von der Temperatur mißt. Die Meßprobe wird wie beim Foner-Magnetometer (s. § 11.33) in der Achse von zwei Pick-up-Spulen hin- und herbewegt. Durch ein äußeres Gegenfeld wird die von der Probe herrührende Magnetisierung kompensiert. Die ganze Meßanordnung befindet sich in einem elektrischen Röhrenofen und kann zur Feststellung der Curie-Temperatur benutzt werden.

12.454 Remanenzinduktion

Die *Remanenzinduktion* B_r ist die im abmagnetisierenden Gleichfeld für $H = 0$ zurückbleibende Induktion des ferromagnetischen Materials. Sie spielt bei Werkstoffen für *Permanentmagnete* (s. § 13.52) eine große Rolle und kann auch ohne die Aufnahme der ganzen B, H-Kurve sowohl bei freien Enden als auch als Toroidprobe nach bereits beschriebenen Methoden gemessen werden.

12.455 Sättigungsinduktion

Mit wachsender Feldstärke H nähert sich die innere Induktion $B_i = B - \mu_0 H$ bei ferromagnetischen Stoffen dem Sättigungswert B_s, der bei Einkristallen vollkommen, in polykristallinen Proben nur asymptotisch erreicht wird. In diesem Fall bestimmt man bei hohen Feldstärken die Quotienten $\varkappa = B_i/\mu_0 H$, trägt diese über B_i auf und extrapoliert bis zum Schnittpunkt mit der B_i-Achse.

Materialien mit hoher Permeabilität, deren Sättigung bereits in Feldern von 10···100 A/cm erreicht wird, können in Zylinderluftspulen untersucht werden. Wegen des großen Wertes von μ_r wird der Entmagnetisierungsfaktor klein und können stabförmige Proben verwendet werden. Die Sättigungsinduktion B_s wird nach bekannten Verfahren fluxmetrisch oder ballistisch ermittelt. Von KLITZING [*12.120*] wird ein ballistisches Verfahren angegeben, bei dem die Probe von zwei kurzen Spulen gleicher Windungszahl, aber verschiedenen Durchmessers umgeben ist und bei der Messung aus dem Luftspalt eines starken Elektromagneten gezogen wird. Die Meßgenauigkeit wird mit 0,3% angegeben. Das Verfahren ist für eine beliebige Probenform anwendbar.

Für Proben, deren Sättigung erst bei hohen Feldstärken erreicht wird, aber auch für allgemeine Verwendung ist die *Isthmusmethode* geeignet, die, ursprünglich von EWING angegeben, nunmehr wesentlich verbessert ist. Das

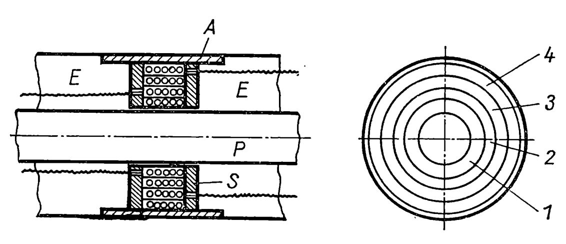


Abb. 12.49 Isthmusmethode

Prinzip des Verfahrens besteht darin, durch geeignete Polschuhe in einem magnetischen Kreis den Fluß auf die meist dünne Probe zu konzentrieren und durch eine Probespule die magnetische Induktion in der Probe sowie außerhalb durch weitere Spulen die Feldstärke zu messen. Hierzu wird die in Abb. 12.49

dargestellte Meßanordnung benutzt. Der zylindrische, mit einer zentralen Bohrung von 6 mm versehene, geteilte Weicheisenkern E ist Teil eines geschlossenen magnetischen Joches, das von einer Wicklung erregt wird. Beide Teile werden durch die Messinghülse A zentriert und sind durch einen Spalt von 12 mm voneinander getrennt. Der zylindrische Probekörper P von 6 mm Durchmesser ist am „Isthmus" vom Spulenkörper S umgeben, der mit 4 Einzelspulen (1⋯4) von je 6 mm axialer Länge bewickelt ist, die aus zwei Lagen von je 20 Windungen dünnen Kupferdrahtes bestehen. Durch Ausschalten oder besser Kommutieren der Erregung wird an der Spule *1* ballistisch oder fluxmetrisch die magnetische Induktion und durch Gegenschalten der Spulenpaare *1—2*, *2—3* und *3—4* der Verlauf des magnetischen Feldes zwischen den Enden von E bestimmt. Durch Extrapolation erhält man die an der Probenoberfläche herrschende magnetische Feldstärke. In ähnlicher Weise lassen sich auch streifenförmige Proben, die zu einem Paket von rechteckigem Querschnitt gebündelt werden, untersuchen.

In sehr hohen Feldern und für Messungen bei sehr tiefen Temperaturen werden rotationselliptische Proben kleiner Abmessungen innerhalb eines Kryostaten benutzt und Feld- und Induktionsmessung mit konzentrischen Spulen um die Probe selbst bestimmt. Der Wert von B_s nimmt für sehr tiefe Temperaturen geringfügig im Vergleich zur Umgebungstemperatur zu.

Zur Messung von B_s an ringförmigen Proben legt man nach GRAHAM [*12.87*] senkrecht zur Ringebene ein Feld, das durch die Primärwicklung etwas modifiziert wird. Aus der in einer zweiten Wicklung beim Umpolen des Primärstromes induzierten Spannung kann B_s berechnet werden. Weitere Verfahren siehe [*12.19*]. Über Ergebnisse siehe [*12.5*].

12.46 Messung der Magnetostriktion [*12.128*]

Wie bei der Polarisation der Dielektrika ändern auch die meisten magnetischen Materialien ihre Länge, wenn sie magnetisiert werden. So zeigt z. B. *Nickel* in Magnetisierungsrichtung bei Sättigung eine Kontraktion von etwa $4 \cdot 10^{-5}$. Obwohl dieser Effekt, den man als *longitudinale Magnetostriktion* λ_s (Joule-Effekt) bezeichnet, sehr klein ist, spielt er eine wichtige Rolle in der Beurteilung der magnetischen Domänen oder Bereiche und praktisch bei der Konstruktion von Transformatoren (s. § 15.4). Die Längenänderungen haben nicht immer das gleiche Vorzeichen; so dehnt sich Eisen in kleinen Feldern aus, während Ni und Co sich zusammenziehen. In hohen Magnetfeldern zeigen alle drei Metalle eine Kontraktion. In Abb. 12.50 ist dieses Verhalten näher dargestellt. Die Größe $\lambda_s = \Delta l/l_0$ ist nicht nur eine Funktion der Feldstärke, sondern hängt in einkristallinen Proben stark von der Kristallorientierung ab. Bei der Magnetisierung ferromagnetischer Stoffe bleibt das Volumen nicht konstant, sondern ändert sich z. B. bei Fe um etwa 10^{-6} für $H = 2500$ A/cm.

Die bei der Magnetostriktion auftretenden Längenänderungen von der Größe 10^{-5} können mit den in Bd. I, § 2 beschriebenen Verfahren gemessen werden. Oft werden optische Interferometer benutzt, wie sie z. B. für den Vergleich von Endmaßen in Bd. I, § 2.32 behandelt sind. Über spezielle Meßverfahren siehe [*12.41, 12.147, 12.196*]. Von WOTRUBA [*12.217*] wird ein

kapazitives Verfahren ähnlich dem in Bd. I, § 2.42 beschriebenen angegeben, mit dem Längenänderungen von 10 nm nachgewiesen werden können.

Die von SOKOLOV [*12.194*] angegebene Methode benutzt zur Messung der Längenänderung einen Differentialkondensator, dessen Kapazität von 2×120 pF in einer 10-kHz-Wechselspannungsbrücke gemessen wird. Da die Meßanordnung speziell für den Temperaturbereich 2···100 K ausgelegt ist,

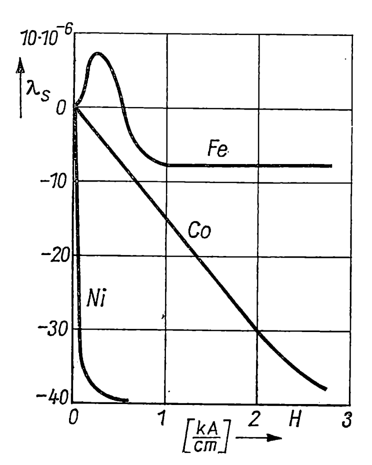


Abb. 12.50 Magnetostriktion von Fe, Ni und Co

schaltet man zwischen Meßprobe und Kondensator ein Quarzglasröhrchen ein, das bekanntlich ein sehr guter thermischer Isolator ist. Das homogene Meßfeld von maximal 30 kA/cm wird von einer supraleitenden Spule (s. § 13.3) erzeugt. Die relative Nachweisempfindlichkeit dieser Anordnung, bei der Längenänderungen in einem X, Y-Schreiber über der Temperatur selbsttätig aufgetragen werden, ist von der Größe 10^{-8}.

Ein von PENN et al. [*12.166*] vorgeschlagenes Verfahren zur Messung der Sättigungsmagnetostriktion λ_{ss} in *ferromagnetischen Filmen* von 10···200 nm Dicke beruht auf dem Zusammenhang zwischen λ_s und der Änderung des Widerstands im Magnetfeld. Einem Gleichfeld H_0 in Filmebene wird ein kleineres Wechselfeld H_w überlagert und die an der von konstantem Strom durchflossenen Probe auftretende Wechselspannungskomponente gemessen. Bei einer weiteren von PENN [*12.165*] beschriebenen Methode wird die auf ein Substrat aufgedampfte Probe in Biegeschwingungen versetzt. Die von zwei Spulen aufgenommenen Änderungen der Induktion B stellen ein Maß für die zu messende Magnetostriktion dar.

Über die Magnetostriktion verschiedener Legierungen siehe [*12.143*, *12.203*], über Legierungen für Permanentmagneten mit kleinem λ_s (82 Co, 12 Fe, 6 Au) siehe [*12.154*].

Wird eine ferromagnetische Probe einem Magnetfeld ausgesetzt, so ändert sich infolge der auf die einzelnen magnetischen Bereiche wirkenden inneren

Spannungen auch der Elastizitätsmodul E; man bezeichnet dies als ΔE-Effekt. Die Größe $(E - E_0)/E_0$ beträgt in Fe bei $B = 0{,}15$ T etwa 0,3% und ist in Ni bei Zimmertemperatur um den Faktor 20 größer.

12.47 Nachweis ferromagnetischer Bezirke

Zum Nachweis der in § 12.41 beschriebenen magnetischen Bereiche, welche in kleinen Feldern bereits spontane Magnetisierung zeigen, sind vor allem drei Methoden gebräuchlich:

1. Der 1919 von Barkhausen entdeckte Effekt liefert den Nachweis, daß im stetig wachsenden Feld die Magnetisierung besonders bei kleinen Feldstärken diskontinuierlich vonstatten geht. Zum Nachweis benutzt man die in Abb. 12.51 dargestellte Meßanordnung. Die drahtförmige Versuchsprobe P befindet sich in einer Magnetspule S, die von

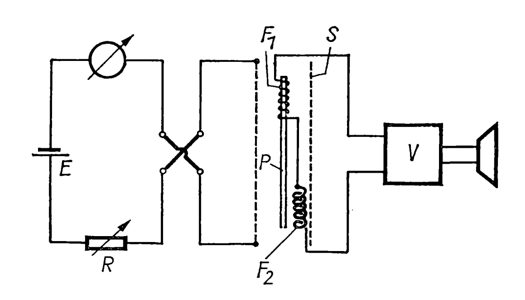


Abb. 12.51 Nachweis des Barkhausen-Effekts

der Batterie E über den stetig regelbaren Widerstand R erregt wird. Zur Induktionsmessung dient eine kurze Pick-up-Spule F_1 von etwa 10000 Windungen, die in Serie mit einer zweiten Spule F_2 außerhalb der Probe und mit umgekehrtem Wicklungssinn geschaltet und an den Eingang des Verstärkers V gelegt ist. Beim Auftreten von Barkhausen-Sprüngen treten im Verstärkerausgang kurze Impulse auf, aus denen die Größe der Barkhausen-Bezirke ($10^{-8} \cdots 10^{-9}$ cm^3) ermittelt werden kann. Über zeitliche Folge und Größenverteilung siehe [*12.112*].
2. Akulow und Bitter wiesen 1931 unabhängig voneinander nach, daß feines ferromagnetisches Pulver beim Absetzen aus einer Suspension auf der polierten Oberfläche eines Einkristalls regelmäßig geformte Streifen, die *Bitter-Streifen,* bildet. Über Herstellung der kolloidalen Lösungen siehe Elmore [*12.61*]. Die Bitter-Streifen geben die Bereichsstruktur an der Probenoberfläche wieder und stimmen auch quantitativ mit den theoretischen Abschätzungen über die Größe der magnetischen Bereiche überein.
3. Daneben wird neuerdings der *magnetooptische Kerr-Effekt* für die Untersuchung magnetischer Bereiche und deren Veränderungen bei schnellablaufenden Magnetisierungsprozessen benutzt [*12.163, 12.176*]. Die hierzu verwendete, in Abb. 12.52 dargestellte Apparatur enthält die an der Oberfläche polierte Probe C in einer Feldspule F, die vom Signalgenerator O (0,01 ··· 1000 Hz) über den Leistungsverstärker V (200 W) erregt wird. Das von der 12-V-Lampe L kommende Lichtbündel wird durch den Polarisator P senkrecht zur Einfallsebene linear polarisiert und an der Oberfläche von C, die zur Kontrasterhöhung mit einer Interferenzschicht bedampft ist, reflektiert. Das reflektierte Lichtbündel gelangt durch den Analysator A, dessen Durchlaßrichtung in der Einfallsebene liegt, auf die Katode des Sekundärelektronenvervielfachers SEV bzw. in

eine Kamera. Die vom SEV gemessene Helligkeit ist der Magnetisierung der abgebildeten Probe direkt proportional und kann nach Verstärkung am ESO als Funktion der Feldstärke registriert werden. Schnellbewegte magnetische Bereiche lassen sich durch eine

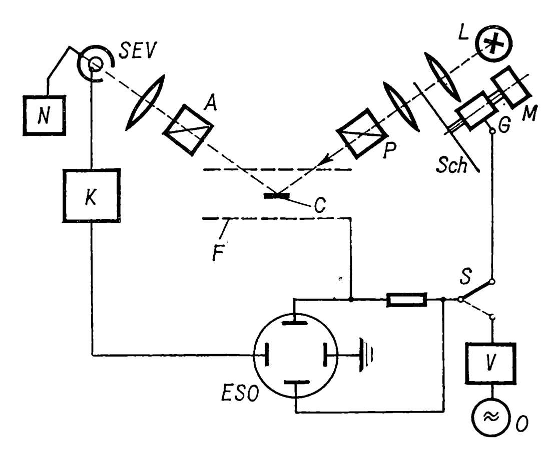


Abb. 12.52 Magnetooptische Magnetisierungsmessung

direkte stroboskopische Beleuchtung beobachten. Hierzu ist die vom Motor M angetriebene Stroboskopscheibe *Sch* vorgesehen, die mit dem Generator G gekoppelt ist und nach Umlegen des Schalters S die Feldspule mit einem Sinusstrom erregen kann. Mit diesem Verfahren können die verschiedenen Phasen der Umwandlung und Bewegung magnetischer Bereiche fotografiert werden.

Über eine Fortentwicklung dieser Methode unter Mithilfe einer Fernsehübertragungsanlage mit Image-Orthikon, die für Wechselfelder bis zu 20 kHz benutzt werden kann, siehe Passon [*12.164*].

12.48 Ferromagnetische Filme

Wie ganz allgemein das Experimentieren mit dünnen, aufgedampften Filmen nicht nur das Verhalten kompakter Proben wiedergibt, sondern darüber hinaus oft zusätzliche Eigenschaften enthüllt, so sind die Untersuchungen dünner ferromagnetischer Filme, die z. B. in Rechenanlagen als Speicherelemente benutzt werden, auch von Interesse für das Verständnis des Ferromagnetismus.

In Abb. 12.53 ist die von Copeland et al. [*12.45*] benutzte Apparatur dargestellt, in der bei UHV-Bedingungen aufgedampfte Filme sofort nach der Herstellung untersucht werden können. Der ausheizbare Glaskolben A enthält einen Rohreinsatz C mit den Zuleitungen der beiden Induktionsspulen S_1 und S_2, die in die Substratplatte B eingelassen sind und zusammen mit dem Heizer H den Abschluß von C bilden. Der zu untersuchende Film F wird durch das Heizöfchen D am unteren Ende von A und die rechteckige Blende N auf B aufgedampft und kann anschließend im 5-kHz-Magnetfeld von 50 A/cm der

Helmholtzspulen E untersucht werden. Die beiden gegensinnig gewickelten Spulen S_1 und S_2 (Abb. 12.53b) liegen in Feldrichtung und nehmen nur den Streufluß des Films auf, der proportional zur Magnetisierung der Probe ist. Magnetisierungssignal und Spulenstrom werden nach Integration bzw. Verstärkung mit einem ESO registriert. Mit Hilfe von H können die Temperaturabhängigkeit der Magnetisierung und die Curie-Temperatur ermittelt werden.

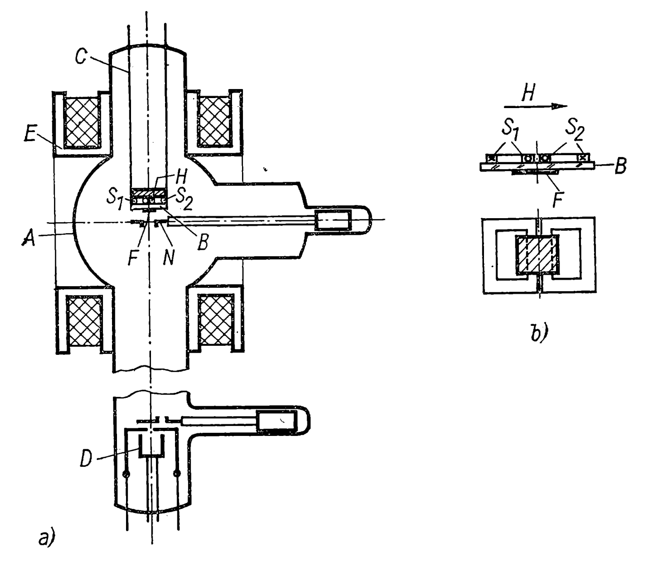


Abb. 12.53 M, H-Messung an Filmen

Von HUMPHREY et al. [*12.104*] wird eine automatische Torsionswaage angegeben, mit der die magnetischen Eigenschaften dünner ferromagnetischer Filme gemessen werden können. Das auf die Probe mit der Magnetisierung $\boldsymbol{M}$ in einem Hilfsfeld $\boldsymbol{H}$ ausgeübte Drehmoment $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H}$ wird über eine fotoelektrische Einrichtung automatisch kompensiert. In Feldern parallel oder senkrecht zur Filmebene können Sättigungsmagnetisierung M_s, remanente Magnetisierung M_r, Koerzitivfeldstärke H_c und Anisotropiekonstante ermittelt werden.

Über weitere Methoden und Ergebnisse an ferromagnetischen Filmen siehe [*12.184*] (Ni), [*12.193, 12.160*] (Permalloy).

Torsionswaagen eignen sich auch zur Messung der magnetischen *Anisotropie*, d. h. der Abhängigkeit der Magnetisierung von der Kristallrichtung. Bei der von GERBER und VILIM [*12.77*] konstruierten Waage, deren Drehmoment wieder automatisch kompensiert wird, befindet sich die Probe in einem Kryostaten und kann bis 4,2 K abgekühlt werden. Der Meßbereich entspricht Drehmomenten zwischen 10^{-2} und 10 pcm. Weitere Ausführungsformen siehe [*12.167*].

Sehr dünne ferromagnetische NiFe-Filme von 0,2···20 nm Dicke sind von Gradmann et al. [*12.85*] zwischen 70 und 400 K untersucht worden; bei den dünnsten Filmen wird die Magnetisierung feldunabhängig.

12.49 Temperatur- und Druckabhängigkeit

Viele der besprochenen Methoden zur Magnetisierungsmessung lassen sich in einem größeren Temperaturbereich anwenden, wobei für die Theorie des Ferromagnetismus die Gebiete in der Nähe des Curie-Punkts und des absoluten Nullpunkts von besonderem Interesse sind. Von Weil [*12.209*] sind die Methoden und Ergebnisse im Tieftemperaturgebiet zusammenfassend behandelt worden. Vielfach wird der direkte Zusammenhang zwischen magnetischer Induktion in der Probe und dem elektrischen Widerstand im Magnetfeld zur Messung herangezogen.

Ausführlich ist der Zusammenhang zwischen mechanischer Spannung bzw. plastischer Deformation und den magnetischen Eigenschaften untersucht worden. Lowrie et al. [*12.137*] untersuchten reinstes Ni in zylindrischen Proben nach plastischer Deformation und Erholung bei verschiedenen Temperaturen. Weitere Methoden siehe [*12.139, 12.90*].

Für die Bestimmung des Curie-Punktes bei hohen Drucken kann eine Druckbombe aus unmagnetischem Material und außenliegenden Induktionsspulen benutzt werden. Von Samara und Giardini [*12.185*] wird ein Verfahren benutzt, bei dem die zylindrische Probe von einer Spule umgeben ist und die gemessene Induktivität als Maß für die Permeabilität μ verwendet wird. Gleichzeitig wird die Probe einer Zug- oder Druckbeanspruchung ausgesetzt und der am Curie-Punkt einsetzende steile Abfall der Induktivität beobachtet.

12.5 Ferromagnetika [*12.11, 12.78, 12.93, 12.122*]

Die ferromagnetischen Werkstoffe spielen in der heutigen Elektrotechnik eine hervorragende Rolle: Sie dienen zur Erzeugung der hohen Magnetfelder in Generatoren, Motoren und Transformatoren, und in der Schwachstromtechnik werden mit hochpermeablen Materialien bei kleinsten Durchflutungen hohe magnetische Induktionen hervorgerufen.

Es sind grundsätzlich *weichmagnetische Werkstoffe* mit schwacher Hysterese und *hartmagnetische Stoffe* zu unterscheiden, mit denen permanentmagnetische Felder hergestellt werden.

12.51 Ferromagnetische Elemente

Die ferromagnetischen Materialien sind in erster Linie durch die Angabe der Sättigungsmagnetisierung (s. § 12.41) gekennzeichnet, die bei stetig steigendem Feld eintritt, wenn (im Einkristall) alle magnetischen Momente ausgerichtet sind. Durch Extrapolation auf 0 K kann das Sättigungsmoment pro Molekül bzw. Atom bestimmt und daraus durch Division mit dem Bohrschen Magneton μ_B die Zahl n_B der Magnetonen erhalten werden. Die Sättigungs-

magnetisierung nimmt mit steigender Temperatur ab und fällt am Curie-Punkt T_C steil auf Null ab.

In *Tabelle 12.9* sind für die *ferromagnetischen Elemente* bei 293 und 0 K Sättigungsmagnetisierung M_s und Zahl der Bohr-Magnetons n_B sowie Curie-Temperatur T_C zusammengestellt.

Tabelle 12.9 Magnetische Eigenschaften ferromagnetischer Elemente

Element	Sättigungsmagnetisierung M_s (A/cm) bei		n_B	T_C (K)
	293 K	0 K		
Fe	17070	17520	2,221	1043
Co	14000	14460	1,716	1404
Ni	4850	5100	0,606	631
Gd	—	—	7,10	289
Tb*	—	—	4,95 } 9,10 }	230
Dy*	—	—	6,84	85
Ho*	—	—	8,54	≈ 20
Er*	—	—	—	≈ 20

* Für $T > T_C$ antiferromagnetisch.

Über neuere Magnetisierungsmessungen an Dy-, Er-, Ho-, Tb- und Gd-Einkristallen bei 4,2 K berichten Rhyne et al. [*12.178*], wobei Magnetfelder bis zu 14 T angewandt wurden. In der *b*-(10$\bar{1}$0)-Achse für Tb und der entsprechenden Achse der anderen Seltenen Erdmetalle wird bereits bei schwachen Feldern die Sättigung erreicht. Längs der *c*-Achsen wächst das magnetische Moment etwa proportional mit H an und erreicht keine Sättigung. Ähnliche Untersuchungen von Belov et al. [*12.18*] an den gleichen Substanzen in gepulsten Feldern von maximal 150 kA/cm bei etwa 100 K liefern vergleichbare Ergebnisse, erstrecken sich aber auch auf die Beobachtung der Magnetostriktion.

Über neuere Messungen der Sättigungsmagnetisierung an Fe und Ni siehe [*12.49*].

12.52 Weichmagnetische Werkstoffe [*12.130, 12.159*]

Weichmagnetische Materialien werden in den Fällen verwendet, wo hohe Permeabilität, kleine Koerzitivfeldstärke und geringe Verluste beim Ummagnetisieren verlangt werden. Im engeren Sinn wird hier zwischen weichmagnetischen Werkstoffen für magnetische Kreise (Magnete, Maschinen), hochpermeablen Materialien für Schwachstromanwendungen (§ 12.53) und Ferromagnetika für Transformatoren und andere Wechselfeldanwendungen (s. § 12.54) unterschieden.

Reines Eisen wird verwendet, wenn hohe Sättigungsinduktion ($B_s = 2{,}15$ T) verlangt wird. Durch sorgfältige thermische und chemische Vorbehandlung

wird eine hohe Maximalpermeabilität μ_{max} erzielt, die $3 \cdot 10^5$ für polykristalline Proben und $1{,}43 \cdot 10^6$ für Einkristalle erreicht. Anwendungen sind wegen des relativ kleinen elektrischen Widerstandes von $\varrho \approx 10\ \mu\Omega$ cm auf Gleichstrom beschränkt, sofern die kleine Streckgrenze aus Festigkeitsgründen nicht stört. Durch Walzen und Ziehen wird μ im ganzen Feldbereich stark reduziert; durch Glühen bei 900 °C oder besser bei 1400 °C in H_2 wird das Material stark verbessert. Großen Einfluß üben hierbei Korngröße und -form auf die Koerzitivfeldstärke aus.

Bei *Eisen- und Nickellegierungen* mit verschiedenen Elementen werden Sättigungsmagnetisierung und die über alle Gitterplätze gemittelte Zahl von Bohrschen Magnetonen geändert.

Ein ähnliches Verhalten ist bei Ni-Legierungen zu beobachten.

Heuslersche Legierungen [*12.158*] bestehen aus nichtferromagnetischen Komponenten; sie bilden das Legierungsdreieck Mn–Cu–Al bzw. Mn–Cu–Sn und sind ferromagnetisch. Maximale Sättigung wird etwa für die Zusammensetzung $MnAlCu_2$, $MnSnCu_2$ und Mn_3SnCu_6 erreicht und ist mit der von Ni vergleichbar. Über ferromagnetische Pt–Mn-Legierungen siehe [*12.8*].

12.53 Hochpermeable Ferromagnetika

Eisen–Nickel-Legierungen weisen im Gebiet schwacher Felder sehr hohe Permeabilität auf. Die Anfangspermeabilität der besten Legierungen dieses Systems (Legierung 1040, Mu-Metall, Supermalloy) reicht von 10^4 bis zu einigen 10^5 gegenüber etwa 100 bei Fe–Si-Legierungen. Die maximale Permeabilität beträgt für Supermalloy $\approx 8 \cdot 10^5$ mit einer Sättigungsmagnetisierung, die erheblich unter der von Fe liegt.

In *Tabelle 12.10* sind für Legierungen mit hoher Permeabilität die Anfangspermeabilität μ_a, Maximalpermeabilität μ_{max}, Koerzitivfeldstärke H_c, Sättigungsinduktion B_s, Sättigungshysteresis W_s und Curie-Temperatur T_C zusammengestellt. Näheres über die in die Tabelle aufgenommenen Ferrite siehe § 12.8. Über Einzeluntersuchungen an *Perminvar* siehe [*12.118, 12.119*] und an *Vicalloy* siehe [*12.65*]. Auf der Basis der Fe–Ni-Legierungen haben Rassmann und Hofmann [*12.175*] ternäre Legierungen mit der zusätzlichen Komponente V, W, Cu, Cr und Mo systematisch auf ihre elektrischen und magnetischen Eigenschaften untersucht.

Tabelle 12.10
Magnetische und elektrische Eigenschaften von Ferromagnetika mit hoher Permeabilität

Bezeichnung Zusammensetzung	μ_a	μ_{max} 10^{-3}	H_c A/cm	B_s T	$W_s\ 10^{-8}$ J/cm³	T_C °C	ϱ µΩ cm
Fe—3 Si kornorientiert	6000	55	0,1	2,0	70	740	47
Fe—4 Si warmgewalzt	1200	7	0,3	1,95	400	730	55
45-Permalloy 45Ni 55Fe	2000	25	0,3	1,6	120	400	45

Tabelle 12.10 (Fortsetzung)

Bezeichnung Zusammensetzung	μ_a	μ_{max} 10^{-3}	H_C A/cm	B_s T	$W_s\,10^{-8}$ J/cm³	T_C °C	ϱ μΩ cm
Hipernik 50 Ni 50 Fe	3200	70	0,05	1,6	22	500	45
Monimax 3 Mo 47 Ni 50 Fe	1600	35	0,1	1,45	80	—	80
78-Permalloy 78,5 Ni 21,5 Fe	6400	100	0,05	1,08	58	600	16
4-79-Permalloy 4 Mo 79 Ni 17 Fe	16000	100	0,05	0,87	20	460	55
Supermalloy 5 Mo 79 Ni 16 Fe	80000	1000	0,002	0,79	0,8	400	60
Mu-Metall 5 Cu 2 Cr 77 Ni 16 Fe	16000	100	0,05	0,65	—	—	62
Permendur 50 Co 50 Fe	640	5	2	2,45	1200	980	7
45-25-Perminvar 25 Co 45 Ni 30 Fe	320	2	1,2	1,55	250	715	19
Alperm 16 Al 84 Fe	2400	55	0,04	0,8	150	400	140
Mn—Zn-Ferrit	1200	2,5	0,2	0,34	10	130	20
Ni—Zn-Ferrit	640	2,5	0,4	0,37	14	140	10
50 Ni—Fe orientiert	800	100	0,12	1,5	39	500	45
16-Alfenol 15,9 Al 84,1 Fe	3100	110	0,015	0,5	6,2	450	153
Fe (kommerz.) 0,2 Verunreinigg.	200	9	0,81	2,16	500	770	10
Fe (reinst) 0,05 Verunreinigg.	8000	200	0,05	2,15	30	770	10

Von großer Bedeutung für reproduzierbare Eigenschaften ist eine stabile magnetische Struktur dieser Werkstoffe, die man durch Abkühlung in einem äußeren Magnetfeld und unter einseitiger mechanischer Zugspannung erreichen kann. Werkstoffe, die einer solchen Behandlung unterworfen werden, erhalten eine ausgeprägte *Textur* und Anisotropie der magnetischen Eigenschaften.

12.54 Magnetische Werkstoffe für Wechselfelder [12.26]

In technischen Maschinen werden magnetische Kreise aus Blechen von 0,1···0,5 mm Stärke hergestellt, wenn es sich um zeitlich veränderliche Flüsse handelt. Die Lamellierung in Flußrichtung verringert die Wirbelstromverluste,

und durch geeignete Eisenlegierungen mit großem spezifischen Widerstand werden diese zusätzlich verkleinert und kleine Hystereseverluste hervorgerufen. In *Tabelle 12.11* sind die magnetischen und elektrischen Eigenschaften verschiedener Fe–Si-Legierungen aufgeführt.

Tabelle 12.11 Eigenschaften von Fe–Si-Legierungen

Verwendung	% Si	Verluste (W/kg) V_1	$V_{1,5}$	μ_{max}	B(T) für μ_{max}	H_c A/cm	ϱ µΩ cm
Armaturen	0,5	2,6	6,1	5800	0,70	0,70	19
Magnetjoche	1,0	2,3	5,5	6150	0,60	0,68	26
Motoren	2,5	2,0	4,7	6100	0,61	0,58	42
Dynamo	3,25	1,6	3,8	5800	0,50	0,50	50
Transformator	4,0	1,4	3,4	6300	0,50	0,40	56
Transformator	4,5	1,1	2,7	8300	0,45	0,25	62
kornorientiert	3,3	0,08	0,18	40000	0,60	0,1	48

In Abb. 12.54 sind im logarithmischen Maßstab Magnetisierungskurven für magnetisch weiche und harte Werkstoffe dargestellt, wobei Linien konstanter Permeabilität eingetragen sind.

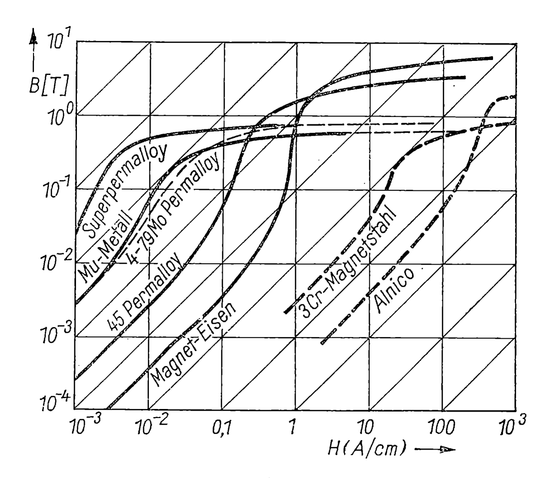


***Abb. 12.54** Magnetisierungskurven in logarithmischer Darstellung für verschiedene Werkstoffe*

Die Hystereseverluste sind bei kleinen Induktionen proportional zu B^3, der Exponent nimmt für $B > 0{,}1$ T auf etwa 1,6 ab. Dies gilt für die meisten Fe-Legierungen. In Abb. 12.55 sind die Hystereseverluste W_h (W/cm^3) pro Zyklus als Funktion von B für verschiedene Materialien aufgetragen.

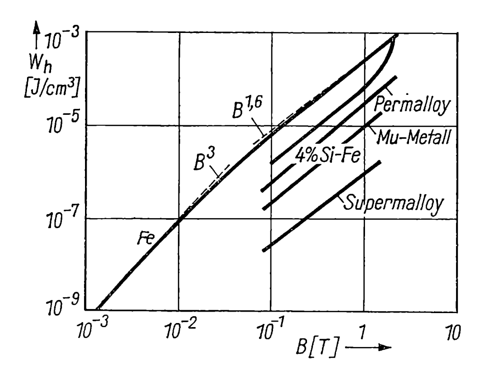


Abb. 12.55 Hysteresisverluste (J/cm³) von ferromagnetischen Werkstoffen

12.55 Magnetisch harte Materialien [*12.68, 12.202*]

Wie in § 13.51 näher gezeigt wird und in § 2.225 am Beispiel des Drehspulmeßsystems angeführt ist, können mit permanentmagnetischen Werkstoffen in einem magnetischen Kreis ein konstanter Magnetfluß und in einem Luftspalt ein magnetisches Feld erzeugt werden. Solche Felder werden u. a. in Meßgeräten, Magnetrons und Lautsprechersystemen gebraucht und sollen bei gleichem wirksamem Magnetvolumen möglichst hoch sein. Wie aus Abb. 2.29b zu entnehmen ist und aus Gl. (2/90) hervorgeht, kommt es bei gegebenen Abmessungen und Luftspaltweite l_0 auf das Produkt BH an. Diese Größe beginnt bei Null, erreicht einen Maximalwert $(BH)_{\max}$ und kehrt für $H = H_c$ wieder nach Null zurück. Der Wert $(BH)_{\max}$ stellt die maximale magnetische Energie dar, die pro Kubikzentimeter des Materials in seiner Umgebung erzeugt werden kann. Nach Scott [*12.187*] ist das Produkt $B_r H_c$ direkt zu $(BH)_{\max}$ proportional und kann als Qualitätsmerkmal verwendet werden, ohne daß man die ganze Magnetisierungskurve kennen muß.

Die moderne Entwicklung der harten magnetischen Werkstoffe begann mit den ternären Fe–Ni–Al-Legierungen von Honda und Mishima (1933); bis dahin waren gehärtete martensitische Stähle benutzt worden. Diese Legierungen sind mechanisch sehr hart und spröde und lassen sich nur im Gießverfahren formen. Die Eigenschaften der Alnico-Legierungen können stark verbessert werden, wenn während des Gusses die Kristallite durch einen Temperaturgradienten oder während der Abkühlphase durch ein Magnetfeld ausgerichtet werden, wodurch eine starke Anisotropie erzeugt wird. Die weiterentwickelten Materialien enthalten Zusätze von Ti, Cu und Co und erreichen für $(BH)_{\max}$ Werte von 50 mWs/cm³ und mehr [*12.132, 12.138, 12.144, 12.48*]. In *Tabelle 12.12* sind die Eigenschaften der wichtigsten Werkstoffe für Permanentmagnete zusammengestellt.

In die *Tabelle 12.12* sind auch zwei Vertreter von *Ferrit-Magneten* aufgenommen, die man auch *keramische Magnete* nennt und die durch Sintern zusammen mit verschiedenen Bindern hergestellt werden. Sie stellen Modifikationen der Verbindungen $BaO \cdot 6\,Fe_2O_3$ dar, wobei an die Stelle von Ba auch Sr treten kann.

Die moderne Entwicklung dieser Werkstoffe [*12.42*] wendet wie bei den Alnico-Magneten eine Kornorientierung im Magnetfeld an und erreicht $(BH)_{max}$-Werte von 28 mWs/cm³.

12.56 Verhalten bei tiefen Temperaturen

Die Koerzitivfeldstärke von sehr reinem Ni-Pulver im Temperaturbereich 2···300 K nimmt bei tiefen Temperaturen stark zu und ist bei 2 K fast um den Faktor 10 höher als bei 300 K. Das gleiche Verhalten wird auch bei Filmen aus reinen ferromagnetischen Metallen gefunden. Über Fe–Si- und Fe–Ni-Legierungen im magnetischen Wechselfeld siehe [*12.80*]; die Hystereseverluste nehmen um 100% bei 4,2 K zu.

Von Matthias et al. [*12.140*] ist die Frage experimentell untersucht worden, ob Ferromagnetismus und Supraleitung gleichzeitig möglich sind. An festen Lösungen von (Ce, Pr)Ru_2 werden Sprungpunkt T_c und Curie-Temperatur T_C als Funktion der Zusammensetzung gemessen, wobei T_c bei etwa 43% Ce verschwindet und auch T_C gegen Null geht. Ein gleichzeitiges Auftreten von Supraleitung und Ferromagnetismus ist also unwahrscheinlich.

12.6 Antiferromagnetismus [*12.156*, *12.215*]

In § 12.41 ist in Gl. (12/52) nach der Weiss-Theorie der Ferromagnetika der Ausdruck für die Magnetisierung M angegeben und auf die Bedeutung der spontanen Magnetisierung hingewiesen worden. Ferromagnetische Stoffe sind durch positive Austauschkräfte charakterisiert, d. h., es ist der energetisch tiefste Zustand erreicht, wenn die magnetischen Bereiche parallel ausgerichtet sind. Negative Austauschkräfte führen zu den in Abb. 12.56 schematisch dargestellten Suszeptibilitätskurven, die oberhalb einer charakteristischen Temperatur T_N, der Néel-Temperatur, paramagnetisches Verhalten zeigen, während für $T < T_N$ die Suszeptibilität χ auf Null für $T = 0$ absinkt. Der Verlauf von χ ist für $T \geq T_N$ durch eine negative Curie-Temperatur in der allgemeinen Beziehung

$$\chi = \frac{C}{T - T_c} \qquad (12/79)$$

Tabelle 12.12 Eigenschaften von Werkstoffen für Permanentmagnete

Bezeichnung Zusammensetzung	H_c A/cm	B_r cT	$(B \cdot H)_{max}$ mWs/cm³	μ_r	Dichte d g/cm³	mechanische Eigenschaften
C-Stahl						
0,9C 1Mn	40	100	1,6	—	7,8	hart
W-Stahl						
0,7C 0,3Mn 5W	56	103	2,4	30	8,1	hart
Co-Stahl						
0,7Co 36Co 4Cr 5W	190	100	8	10	8,2	hart

Tabelle 12.12 (Fortsetzung)

Bezeichnung Zusammen-setzung	H_c A/cm	B_r cT	$(B \cdot H)_{max}$ mWs/cm³	μ_r	Dichte d g/cm³	mechanische Eigenschaften
Alni 10 13Al 26Ni 3Cu	550	65	10	5	6,8	hart, spröde
Alnico 2 12Co 17Ni 10Al 6Cu	430	72	13	6	7,1	hart, spröde
Alnico 5 (Ticonal) 24Co 14Ni 8Al 3Cu	480	125	40	4	7,3	hart, spröde
Alnico 6 24Co 15Ni 8Al 3Cu 1,2Ti	600	101	30	4	7,4	hart, spröde
Alnico 13 11Al 21Ni 12Co 3Cu	400	75	13	5	6,8	hart, spröde
Alnico 32 8Al 14Ni 23Co 3Cu	520	120	32	4	7,3	hart, spröde
Alnico 56 8Al 14Ni 25Co 4Cu	650	130	56	7	7,4	hart, spröde
Alcomax III 24Co 14Ni 8Al 3Cu 4Ti	530	125	40	3,5	7,3	hart, spröde
Oerstit 800 19Co 18Ni 4Cu 4Ti	600	66	15,5	—	7,3	hart, spröde
Vicalloy 2 52Co 14V	410	100	28	5	8,1	duktil
Silmanal 84Ag 9Mn 4Al	440	5,5	0,6	1,1	9,0	duktil
Pt–Co-Legierung	3200	70	80	—	—	—
Ferroxdur 2 $BaFe_{12}O_{19}$	1430	34	20	1,1	4,8	hart, spröde
Maniperm 850 $BaO \cdot 6Fe_2O_3$	1700	35	24	1,2	5	hart, spröde

gekennzeichnet, wobei $T_N = -T_C$ im allgemeinen zwischen 20 und einigen hundert Kelvin liegt.

Parallel hierzu ist bei T_N eine Anomalie der spezifischen Wärme festzustellen, welche auf eine Phasenumwandlung in der magnetischen Struktur hindeutet.

Durch Streuexperimente von monochromatischen schnellen Neutronen an MnO haben SHULL et al. 1949 nachgewiesen, daß im antiferromagnetischen

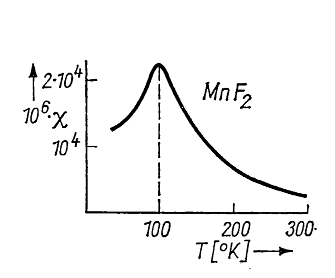


Abb. 12.56 Suszeptibilität einer antiferromagnetischen Substanz

Abb. 12.57 Kristallstruktur von MnO

Zustand die in den kubischen Achsen des Kristalls benachbart liegenden Ionen antiparallelen Spin haben müssen und die übernächsten Ionen ein magnetisches Grundgitter gleicher Spinrichtung bilden, wie aus Abb. 12.57 hervorgeht. Das Gitter ist aus Ebenen mit gleichgerichteter Spinbesetzung aufgebaut, die alle der (111)-Ebene parallel verlaufen und deren Spinrichtung von Ebene zu Ebene wechselt.

Die Methoden zur Messung der *magnetischen* Eigenschaften antiferromagnetischer Substanzen sind mit denen für Paramagnetika (§ 12.32) identisch, da für alle Temperaturen $\chi > 0$ ist. Besonders wichtig ist hierbei die exakte Temperaturmessung, insbesondere die gut wärmeleitende Ankopplung des Temperaturfühlers an die Meßsubstanz.

Über Methoden und Meßergebnisse siehe [*12.13*, *12.14*] (U und U-Legierungen), [*12.146*, *12.10*] (Mn-Verbindungen), [*12.20*] (Co-Verbindungen), [*12.125*] ($CuSO_4$) und [*12.60*] (Er).

Für große negative Werte von T_C in Gl. (12/79) ergibt sich eine praktisch temperaturunabhängige Suszeptibilität, d. h. ein *schwacher Paramagnetismus*, wie er in Cu, Ag und Au auftritt, wenn darin Cr oder Mn gelöst ist.

12.7 Ferrimagnetismus [*12.108*]

In antiferromagnetischen Substanzen wird eine strenge Symmetrie in den Untergittern und die Äquivalenz aller Ionen gefordert. Läßt man diese Forderungen fallen, so sind verschiedene Magnetisierungskurven möglich, die vom Charakter der Ferromagnetika stark abweichen können und sogar eine Umkehr der Magnetisierung bei veränderlicher Temperatur zeigen.

Ferrimagnetismus ist ein asymmetrischer unvollständiger Antiferromagnetismus, der durch folgende Bedingungen gekennzeichnet ist:

a) die Sättigungsmagnetisierung M_s ist viel kleiner, als dies einer vollkommenen Ausrichtung der Elementarmagnete entsprechen würde;
b) die Temperaturabhängigkeit der spontanen Magnetisierung ist von der ferromagnetischer Stoffe verschieden;
c) die Suszeptibilität für $T > T_C$ folgt nicht dem Curie-Weiss-Gesetz.

Der bekannteste Vertreter der ferrimagnetischen Substanzen ist der *Magnetit* Fe_3O_4, der ferromagnetisch ist, aber ein viel kleineres magnetisches Moment besitzt, als es der Zahl der freien Fe-Ionen entspricht. *Ferrite* sind ferrimagnetische Substanzen mit der allgemeinen chemischen Zusammensetzung Fe_2O_3MO, wobei M ein zweiwertiges Metall, wie Cu, Ag, Mg, Pb und Ni, ist. Das Kristallgitter der Ferrite ist vom Spinelltyp, in dem die O-Ionen ein dichtes kubisches Gitter bilden, in deren Zwischenräume die Metallionen passen. Über Sulfide und Oxide siehe [*12.136*].

Über Meßmethoden von Sättigungsmagnetisierung, Druckeinfluß und HF-Verhalten siehe [*12.6, 12.29, 12.32, 12.73, 12.157, 12.199, 12.208*].

In *Tabelle 12.13* sind für einige Ferrite die Sättigungsinduktion B_s, die Zahl der Bohr-Magnetonen n_B pro Molekül und die Curie-Temperatur T_C zusammengestellt.

Tabelle 12.13 Eigenschaften einiger Ferrite

Zusammensetzung	B_s T	n_B/Molekül	T_C °C
$MnFe_2O_4$	0,52	4,4···5,0	300
Fe_3O_4	0,60	4,0···4,1	585
$CoFe_2O_4$	0,50	3,7···3,9	520
$NiFe_2O_4$	0,34	2,2···2,4	585
$CuFe_2O_4$	0,17	1,3···2,3	455
$MgFe_2O_4$	0,14	0,9···1,4	440
$CdFe_2O_4$	—	0	—
$ZnFe_2O_4$	—	0	—

12.8 Ferrite [*12.169, 12.153, 12.190, 12.69, 12.191*]

Wie bereits in § 12.7 erwähnt, sind *Ferrite*, auch *Ferrospinelle* genannt, Verbindungen von der Art $MOFe_2O_3$, wobei in praktischen Anwendungen vor allem Mischkristalle aus mehreren Oxiden, z. B. Ni—Zn, Mn—Zn, Li—Zn, benutzt werden. Die Herstellung erfolgt aus feingemahlenen reinen Metalloxiden nach keramischen Verfahren, wobei Sintertemperaturen von etwa 1400 °C angewandt werden. Das Material ist nach dem Brennen glashart und spröde und kann nicht spanabhebend bearbeitet werden. Die Dichte der Ferrite liegt zwischen 3 und 5 g/cm³; ihr Elastizitätsmodul bei etwa $1{,}5 \cdot 10^6$ kp/cm². Von besonderer Bedeutung ist der hohe elektrische spezifische Widerstand, der zwischen 1 und $10^7\,\Omega$ cm liegt und für sehr kleine Wirbelstromverluste sorgt. Dagegen

ist die Dielektrizitätskonstante groß (10···10^6) und mit einem relativ hohen Verlustwinkel behaftet.

Anfangspermeabilität. Die Anfangspermeabilität μ_a von Ni–Zn- und Mn–Zn-Ferriten kann bis 16000 ansteigen, hängt unterhalb von T_C wenig von der Temperatur ab und fällt dann bei T_C fast unstetig auf Null ab [*12.96*, *12.124*, *12.183*]. Bei hochpermeablen Ferriten (Ferroxcube III A) ist die Koerzitivfeldstärke $H_c \approx 0{,}2$ A/cm bei einer Sättigungsinduktion von 0,31 T bei 20 °C. In Abb. 12.58 ist μ_a für verschiedene Mischferrite in Abhängigkeit von der

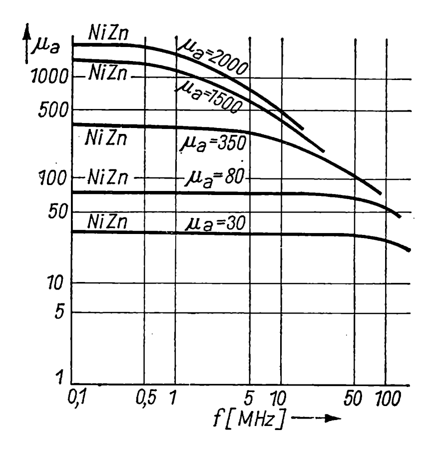


Abb. 12.58 Anfangspermeabilität von Ni–Zn-Ferriten

Frequenz f dargestellt. Es ist zu erkennen, daß μ_a zunächst konstant ist, dann mit wachsendem f abnimmt, und zwar bei um so niedrigerer Frequenz, je größer μ_a für kleine Frequenzen ist. Über Messungen von μ_a und Hystereseverlusten von verschiedenen Ferriten siehe [*12.54*, *12.135*, *12.152*].

Zur Messung der *HF-Eigenschaften* bis zu 30 MHz von Ferriten haben HAAS und KEISALL [*12.91*] ein genaues Verfahren angegeben, bei dem in einer Koaxialleitung eine scheibenförmige Probe auf den Innenleiter geschoben und die dadurch verursachte *L*-Änderung mit einer Brückenanordnung bestimmt wird.

In *Tabelle 12.14* sind für Mn–Zn- und Ni–Zn-Ferrite mit verschiedener Zusammensetzung Remanenzinduktion B_r, Koerzitivfeldstärke H_c, Verlustwinkel tan δ/μ, T_C und μ_a zusammengestellt.

Rechteckferrite. Die Hystereseschleife spezieller Ferrite ist sehr schmal und fast rechteckig und eignet sich zur Informationsspeicherung bei Rechenmaschinen nach dem Binärsystem. Die Speicherkerne besitzen die Form kleiner Toroide, durch deren Bohrung die Drähte für die Informationsaufnahme und das Lesen gefädelt sind [*12.75*, *12.115*]. Die Schaltströme liegen zwischen 0,5 und 1 A, die Schaltzeiten zwischen 0,4 und 5 μs.

Mikrowellenferrite für den Frequenzbereich von 2···15 GHz weisen Zusammensetzungen der Art $MnO \cdot xAl_2O_3(1 - x)Fe_2O_3$ auf oder sind Ni–Zn-

Tabelle 12.14 *Eigenschaften von hochpermeablen Ferriten* (20 °C)

Bezeichnung	Mol-% $ZnFe_2O_4$	μ_a	$B_{H=10\,A/cm}$ T	B_r T	H_c A/cm	$10^6 \cdot \tan\delta/\mu$ bei 100 kHz	ϱ Ω cm	T_C °C
Mn–Zn-Ferrite								
3A1	52	1400	0,365	0,14	0,6	18	20	150
3B	42,5	900	0,345	0,15	0,5	—	20	150
3B3	42,5	900	0,40	—	—	15	120	150
3C	38	900	0,34	0,12	0,3	—	60	150
3C2	38	1100	0,35	0,13	0,5	15	80	150
3D3	33	750	—	—	—	8	150	150
3E1	46	2700	0,35	0,16	0,15	15	30	100
Ni–Zn-Ferrite								
4A	64	600	0,29	0,18	0,4	22	10^5	125
4B	50	250	0,33	0,195	1,0	35	10^5	250
4C	36	125	0,28	0,20	3	105	10^5	350
4D	20	50	0,25	0,15	5	160	10^5	400

Mischferrite mit 20% Zn-Ferritanteil. Der spezifische Widerstand liegt zwischen 0,1 und 30 MΩ cm und die Curie-Temperatur zwischen 150 und 450 °C. Die hochohmigen Typen eignen sich für die in § 8.76 beschriebenen Anwendungen, bei denen Faraday-Rotation und ferromagnetische Resonanz ausgenutzt werden.

Hartmagnetische Ferrite. Die als *Ferroxdure* bezeichneten Ferrite sind Ba-Ferrite der Zusammensetzung $BaO \cdot 6\,Fe_2O_3$ und werden für dauermagnetische Kreise verwendet. Infolge des hohen spezifischen Widerstandes sind sie auch in Anordnungen mit zeitlich veränderlichem Magnetfluß brauchbar. In *Tabelle 12.15* sind einige dieser Ferrite und ihre wichtigsten Eigenschaften aufgeführt.

Tabelle 12.15 *Ferrite vom Ferroxdur-Typ*

Bezeichnung	Zusammensetzung	B_r T	H_c kA/cm	$(BH)_{max}$ mWs/cm³	ϱ Ω cm	T_C °C
FXD100	$BaO \cdot Fe_2O_3$ (isotr.)	0,20	1,36	0,56	10^8	450
FXD300R	$BaO \cdot Fe_2O_3$ (anisotr.)	0,385	1,5	2,0	10^8	450
FXD250K	$BaO \cdot Fe_2O_3$ (anisotr.)	0,34	2,1	1,7	10^8	450

Weitere Angaben über Ferroxdure bzw. über Untersuchungen an ihnen siehe [*12.186, 12.189, 12.42, 12.212*].

Anwendungen. Ferrite werden vielseitig in der HF-Technik angewandt: wegen der Abhängigkeit der Permeabilität von der Vormagnetisierung zur Frequenzmodulation und als Modulatoren im Mikrowellenbereich, als magnetostriktive Schwinger (reines Ni-Ferrit) mit hohem Q-Wert, auch zur Steuerung von Oszillatoren und schließlich in der Rechentechnik als Speicherelemente sowie als Magnettonköpfe mit geringen Verlusten.

§ 13 ERZEUGUNG VON MAGNETFELDERN [*13.105, 13.112, 13.118, 13.123, 13.144, 13.161, 13.211*]

In diesem Abschnitt werden die heute gebräuchlichen Verfahren zur Erzeugung stationärer oder kurzzeitiger Magnetfelder behandelt, wie sie für experimentelle Methoden der Festkörper-, Metall-, Tieftemperatur-, Kern- und Hochenergiephysik benutzt werden. Dabei nimmt die seit einigen Jahren entwickelte Technik der supraleitenden Magnete, mit denen derzeit mit kleiner elektrischer Leistung stationäre Felder von maximal 14 T erzeugt werden können, eine bevorzugte Stellung ein (§ 13.3). Aber auch die besonders in der experimentellen Plasmaphysik benutzten Impulsfelder großer Feldstärke und in großen Feldräumen sind in letzter Zeit weiterentwickelt worden (§ 13.6); spezielle Methoden erlauben kurzzeitig Felder von 1 kT und mehr zu erzeugen. Die vor etwa 40 Jahren begonnene Erforschung der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit in starken Magnetfeldern und speziell im Bereich tiefer Temperaturen wird heute auf die meisten Gebiete der experimentellen und angewandten Physik ausgedehnt, so daß den Methoden zur Herstellung starker Felder besonders große Bedeutung zukommt.

13.1 Magnetische Felder und Kreise [*13.42, 13.159, 13.171*]

13.11 Durchflutungsgesetz

In § 11.14 wird das Durchflutungsgesetz in der Form

$$\oint \boldsymbol{H} \, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \Theta \tag{13/1}$$

abgeleitet, wonach das Linienintegral der magnetischen Feldstärke $\boldsymbol{H}$ über eine geschlossene Bahn der von dieser umschlossenen Stromdurchflutung Θ entspricht. Diese Beziehung gilt auch für zeitlich veränderliche Felder, sofern die Feldabmessungen nicht von der Größenordnung der elektrischen Wellenlänge werden.

In Differentialform lautet das Durchflutungsgesetz

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{G} \tag{13/2}$$

und beschreibt die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{G}$ als *Wirbel* des magnetischen Feldes.

13.12 Grundgleichungen des magnetischen Feldes

Da es keine wahren magnetischen Ladungen gibt, sind die Induktionslinien und im Feld konstanter magnetischer Permeabilität μ_r auch die Feldlinien geschlossen; dies wird durch die Beziehung

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{B} = 0 \tag{13/3}$$

ausgedrückt. Für das quellenfreie Wirbelfeld führt man zweckmäßig das *magnetische Vektorpotential* $\boldsymbol{A}$ nach der Beziehung

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \tag{13/4}$$

ein und erhält dann mit Gl. (13/2) die Poisson-Gleichung

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{A} - \Delta \boldsymbol{A} = \boldsymbol{G},$$

die sich wegen $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$ vereinfacht zu

$$\Delta \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{G}. \tag{13/5}$$

Für die stromfreien Teile des Feldes außerhalb der Leiter ist nach Gl. (13/2) $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0$ und wegen Gl. (13/5) auch

$$\Delta \boldsymbol{A} = 0. \tag{13/5a}$$

In diesem Fall erfüllt das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ die Laplace-Gleichung. Das wirbelfreie Feld des Vektors $\boldsymbol{H}$ kann daher auch aus einem skalaren Potential V nach der Beziehung

$$\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad} V = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \tag{13/6}$$

abgeleitet werden, aus der mit Gl. (13/3) die Potentialgleichung

$$\Delta V = 0 \tag{13/6a}$$

resultiert. Diese Tatsache ist für die Berechnung und Konstruktion magnetischer Felder in Luftspulen (s. § 13.2) von Bedeutung [*13.84*].

13.13 Wirkung ferromagnetischer Medien

Bei den Elektromagneten (s. § 13.4) verläuft der größte Teil des Induktionsflusses in einem Ferromagnetikum, dessen magnetische Permeabilität μ_r feldstärkenabhängig ist. Hierbei gilt zwar Gl. (13/3), jedoch ist $\boldsymbol{H}$ nicht mehr quellenfrei. An der Grenze zweier Medien mit den Relativpermeabilitäten μ_1 und μ_2 tritt eine Brechung der magnetischen Feldlinien ein, deren Berechnung sich aus Abb. 13.1 finden läßt. Da die Normalkomponente von $\boldsymbol{B}$ an der Grenzfläche wegen Gl. (13/3) stetig sein muß, gilt:

$$B_{n1} = B_{n2}. \tag{13/7}$$

Da ferner an der Trennfläche $\boldsymbol{G} = 0$ ist, müssen nach dem Durchflutungsgesetz die Tangentialfeldstärken gleich sein, d. h., es muß gelten:

$$H_{t1} = H_{t2}. \tag{13/8}$$

Ersetzt man Gl. (13/8) durch die Beziehung

$$\frac{B_{t1}}{\mu_1} = \frac{B_{t2}}{\mu_2} \tag{13/8a}$$

und dividiert durch Gl. (13/7), so findet man das *magnetische Brechungsgesetz* in der Form

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \tag{13/9}$$

das in isotropen Stoffen für die Linien von $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{H}$ gültig ist.

Für magnetische Induktionen, die klein gegen den Sättigungswert sind, wird die Permeabilität des ferromagnetischen Stoffes sehr groß gegen die des Luftraums sein; die Feldlinien treten daher fast senkrecht aus den Polschuhen von Elektromagneten aus, wie leicht aus Gl. (13/9) zu entnehmen ist.

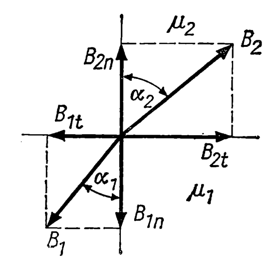


Abb. 13.1 Magnetisches Brechungsgesetz

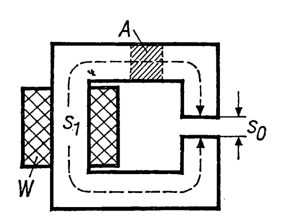


Abb. 13.2 Magnetischer Kreis

Für die Darstellung des Magnetfeldes werden die in § 11.84 besprochenen Methoden angewandt; zweidimensionale Potentialfelder in inhomogenen Medien lassen sich aus dem Widerstandsanalogon mittels dünner leitender Filme untersuchen [*13.166*].

13.14 Berechnung magnetischer Kreise

Der schematisch in Abb. 13.2 dargestellte unverzweigte magnetische Kreis besteht aus dem Eisenjoch von der Länge s_1 und dem Querschnitt A, das von einem Luftspalt der Dicke s_0 unterbrochen ist. Die Wicklung W mit N Windungen, durch die der Strom i fließt, erzeugt die Durchflutung

$$iN = \Theta \tag{13/10}$$

und damit den magnetischen Fluß Φ, der längs des Flußlinienweges konstant ist. Da nach Gl. (11/3) $H = \Phi/\mu A$ ist, folgt aus dem Durchflutungsgesetz Gl. (13/1) die Beziehung

$$\Phi \int \frac{\mathrm{d}s}{\mu A} = iN = \Theta. \tag{13/11}$$

Die Größe

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{\mu A} = R_m \tag{13/12}$$

wird *Widerstand des magnetischen Kreises,* der reziproke Wert $\Lambda = 1/R_m$ *magnetische Leitfähigkeit* genannt. Daraus läßt sich das Ohmsche Gesetz des

magnetischen Kreises in der Form

$$\Theta = \Phi R_m \qquad (13/13)$$

ableiten, das Analogieberechnungen komplizierterer magnetischer Strukturen mit den Methoden der Netzwerktheorie (s. § 3.2) gestattet. Dabei ist zu beachten, daß die Größe R_m eine Funktion von H ist und in Streufeldern auch von überlagerten Feldern abhängt. Formal gelten aber die Formeln für die Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen.

Sind im magnetischen Kreis verschiedene Abschnitte mit individuellen Werten von A_i und μ_i vorhanden, so gelten für die Reihenschaltung die Beziehungen:

$$\oint H \, \mathrm{d}s = H_1 s_1 + H_2 s_2 + H_3 s_3 + \cdots = \sum_i H_i s_i ; \qquad (13/14)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{\mu A} = \frac{s_1}{\mu_1 A_1} + \frac{s_2}{\mu_2 A_2} + \frac{s_3}{\mu_3 A_3} + \cdots = \sum_i \frac{s_i}{\mu_i A_i} . \qquad (13/15)$$

Führt man für die Durchflutung Θ die *magnetische Spannung* U_m ein, so folgt aus Gl. (13/13) mit den Gln. (13/14···15)

$$\Theta = \sum_i U_{mi} = U_{m1} + U_{m2} + U_{m3} + \cdots = \Phi (R_{m1} + R_{m2} + \cdots) \qquad (13/16)$$

und für die magnetische Spannung des i-ten Abschnitts

$$U_{mi} = \Phi R_{mi} = \Phi \frac{s_i}{\mu_i A_i} . \qquad (13/17)$$

Verzweigt sich der magnetische Kreis an einer Stelle, so muß die Summe der magnetischen Teilflüsse dem unverzweigten Fluß entsprechen; es muß also gelten:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \cdots = U_m \Lambda = U_m (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \cdots), \qquad (13/18)$$

wenn die Λ_i die magnetischen Leitwerte der einzelnen Zweige bedeuten und U_m die für alle parallel geschalteten Zweige wirksame magnetische Spannung ist.

Bei einem zusammengesetzten magnetischen Kreis unterteilt sich die Berechnung der erforderlichen Durchflutung für ein gewünschtes Feld H_0 im Luftraum in zwei Einzelschritte:

1. Für einen angenommenen Fluß Φ wird für die einzelnen Abschnitte die Induktion $B_i = \Phi / A_i$ berechnet.

2. Für die so gewonnenen Werte von B_i werden aus den bekannten Magnetisierungskurven (s. Abb. 12.54) die zugehörigen Feldstärken und damit der Durchflutungsbedarf $H_i s_i$ für das i-te Teilstück entnommen.

Die gesamte Durchflutung Θ findet man durch Anwendung der Gl. (13/16); man trägt sie als Funktion des magnetischen Feldes H_0 im Luftspalt auf. Hierbei ist zunächst der Streufluß nicht berücksichtigt.

In ähnlicher Weise kann für *Permanentmagnetkreise* (s. § 13.5) aus den

Magnetisierungskurven des aktiven Materials die Luftspaltinduktion berechnet werden.

In den Abb. 13.3 sind für den praktischen Gebrauch die Magnetisierungskurven der wichtigsten, für den Bau von Elektromagneten häufig benutzten Eisensorten wiedergegeben.

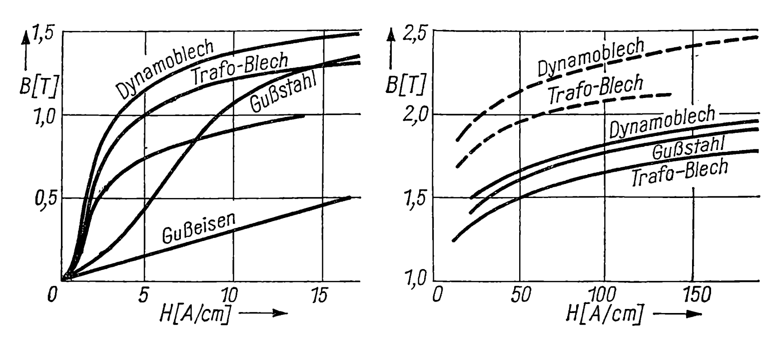


Abb. 13.3 Magnetisierungskurven technischer Eisensorten

13.15 Zylindersymmetrisches magnetisches Feld

Das Feld einer beliebigen Spule, deren Rotationsachse in Z-Richtung liegt, läßt sich aus dem axialen Feld eines kreisförmigen Leiters vom Radius r ableiten, durch den der Strom I fließt. Hat der Aufpunkt auf der Z-Achse von der Leiterebene den Abstand z, so läßt sich aus dem Biot-Savartschen Gesetz die Z-Komponente der Feldstärke zu

$$H_z(z) = \frac{I}{2} \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \tag{13/19}$$

ableiten. Das Feld einer beliebigen Spule, deren Wicklungsquerschnitt (s. Abb. 13.4) durch die Innenkurve $r = r_i(z)$ und durch die Außenkurve $r_a(z)$ begrenzt wird, läßt sich in analoger Weise finden. Beträgt der Strom i_0 und sind homogen über dem Wicklungsquerschnitt N Windungen/cm² vorhanden, so fließt in einem Ring vom Querschnitt $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r$ der Strom

$$\mathrm{d}^2 i = N i_0 \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$$

und erzeugt im Abstand $z - z_0$ auf der Achse das Feld

$$\mathrm{d}^2 H(z) = \frac{N i_0 \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z}{2} \frac{r^2\,\mathrm{d}r}{[r^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}}. \tag{13/20}$$

Integriert man zunächst über einen Ring von der Dicke $\mathrm{d}z$ und den Begrenzungsradien r_a und r_i, dann über z_0, so findet man die allgemeingültige Formel

$$H(z) = \frac{N i_0}{2} \int\limits_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z_0 \int\limits_{r_i(z_0)}^{r_a(z_0)} \frac{r^2 \mathrm{d}r}{[r^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}}, \tag{13/21}$$

die im Fall einer Zylinderspule von sehr großer Länge in den Ausdruck

$$H_z = \frac{N_1 i_0}{L} \tag{13/22}$$

übergeht.

Das Problem kann auch mit Hilfe des Vektorpotentials $\boldsymbol{A}$ gelöst werden, für das aus Gl. (13/5) die Beziehung

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\boldsymbol{G}\,\mathrm{d}v}{r} \tag{13/23}$$

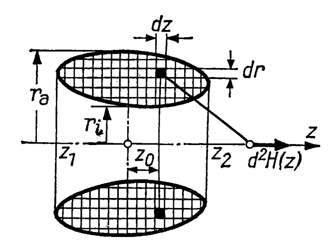


Abb. 13.4 Feldberechnung für Zylindersymmetric

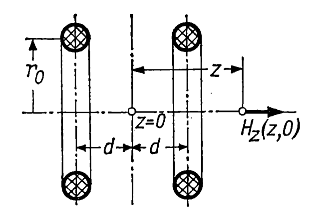


Abb. 13.5 Helmholtz-Spulenpaar

folgt, wenn die Integration über die Volumenelemente dv des Wicklungsraumes ausgeführt wird. Näheres siehe § 13.2.

13.16 Helmholtz-Spulen

Für viele Anwendungen und Meßverfahren werden homogene Felder für relativ große Probenabmessungen verlangt. Eine hierzu geeignete Spulenanordnung, die zuerst von Helmholtz vorgeschlagen wurde, besteht aus zwei Ringspulen vom mittleren Radius r_0, die sich im Abstand $2d$ befinden und vom gleichen Strom gleichsinnig durchflossen werden (Abb. 13.5). Legt man die X, Y-Ebene symmetrisch zwischen beide Spulen, so gilt nach Gl. (13/19) für die Z-Komponente der Feldstärke:

$$H_z(z, 0) = \frac{r_0^2 i}{2(r_0^2 + d^2)^{3/2}} \left[\left(1 + \frac{z(z+2d)}{r_0^2 + d^2}\right)^{-3/2} + \left(1 + \frac{z(z-2d)}{r_0^2 + d^2}\right)^{-3/2}\right]. \tag{13/24}$$

Diesen Ausdruck kann man dem binomischen Satz zufolge in eine Reihe der Form

$$(1+u)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}\,u + \frac{15}{8}\,u^2 - \cdots$$

entwickeln, so daß man die Formel

$$H_z(z, 0) = \frac{r_0^2 i}{2(r_0^2 + d^2)^{3/2}}\,[2 + C_2 z^2 + C_4 z^4 + \cdots] \tag{13/25}$$

mit $C_2 = [15d^2 - 3(r_0^2 + d^2)]/(r_0^2 + d^2)^2$ erhält. Für kleine Werte von z und r läßt sich auch das Feld für achsenfernere Punkte aus der Näherungsbeziehung

$$H_z(z, r) = H_z(z, 0) - \frac{r_0 i}{(r_0^2 + d^2)^{3/2}} C_2 (r/2)^2 \qquad (13/26)$$

berechnen. Der Korrekturterm in Gl. (13/26) verschwindet, wenn die Bedingung

$$C_2 = \frac{15d^2 - 3(r_0^2 + d^2)}{(r_0^2 + d^2)^2} = 0 \qquad (13/27)$$

erfüllt ist, was für

$$r_0 = 2d \qquad (13/27\,a)$$

der Fall ist. Für kleine Werte von r/r_0 und z/r_0 wird dann

$$H_z(z, r) \approx H_z(z, 0).$$

Diese Formeln gelten nur für kleine Werte von a/r_0, wenn a der Radius des Wicklungsquerschnitts ist.

13.17 Energie des magnetischen Feldes

Für die Energie, die im magnetischen Feld gespeichert ist, gilt allgemein der Ausdruck

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{H}\boldsymbol{B}\, \mathrm{d}v = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{H} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}\, \mathrm{d}v, \qquad (13/28)$$

der unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$$

in die Form

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{A} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}\, \mathrm{d}v = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\, \mathrm{d}v \qquad (13/28\,a)$$

übergeführt werden kann, wenn $\boldsymbol{G}$ die Stromdichte bedeutet.

Im Fall einer einzigen Spule oder eines Leiters findet man die bekannte Beziehung

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2, \qquad (13/29)$$

wenn mit L die Induktivität bezeichnet wird.

13.18 Kräfte im magnetischen Feld

In § 12.12 ist auf die magnetischen Kräfte hingewiesen worden, die im inhomogenen Magnetfeld auf magnetische Proben ausgeübt und zur Bestimmung der Suszeptibilität herangezogen werden. Bei der Erzeugung sehr starker Magnetfelder durch supraleitende Spulen (§ 13.3) und durch Kondensatorentladungen (§ 13.6) treten in den Luftspulen große mechanische Kräfte auf,

die bei großen Abmessungen, z. B. bei Blasenkammermagneten, in die Größenordnung 1000 Mp kommen können.

Die in einer Spule auftretenden Kräfte lassen sich aus der Beziehung

$$F_x = \frac{1}{2}\, i^2 \frac{\partial L}{\partial x} \tag{13/30}$$

finden, wenn ∂L die Induktivitätsänderung ist, die bei Variation der geometrischen Abmessungen um ∂x auftritt. Eine lange schlanke zylindrische Spule von der Länge l, dem Querschnitt $A = \pi r^2$ und der Windungszahl N z. B. besitzt die Induktivität $L = N^2 \pi r^2 \mu_0 / l$, woraus sich die Radialkraft, die auf den Wicklungsquerschnitt ausgeübt wird, berechnet zu

$$F_r = \frac{i^2}{2} \frac{\partial L}{\partial r} = \mu_0 i^2 N^2 \pi r / l. \tag{13/31}$$

13.2 Eisenlose Spulen für stationäre Felder [*13.72, 13.79, 13.126*]

Die maximale Feldstärke, die man im Luftspalt großer Elektromagnete erreichen kann, liegt zwischen 35 und 40 kA/cm und ist in einem Volumen von 100 cm³ oder etwas mehr verfügbar. Der Grund für die Begrenzung der erreichbaren Feldstärke liegt in den relativ niedrigen Werten der Sättigungsmagnetisierung ferromagnetischer Stoffe (s. § 12.5). Zur Erzeugung höherer Felder hat man schon frühzeitig auf den Eisenkern verzichtet und zuerst für kurzzeitige Felder (s. § 13.6), dann auch im stationären Betrieb *Luftspulen* konstruiert, die mit Wasser, Öl oder niedrigsiedenden Flüssigkeiten gekühlt werden. In § 13.3 werden Luftspulen mit supraleitender Wicklung und in § 13.8 Solenoide oder andere Spulenstrukturen behandelt, deren Zweck das Erreichen großer Homogenität ist; siehe auch Bd. II, § 12.4.

13.21 Feldberechnung [*13.19, 13.44, 13.89, 13.90*]

Weiter unten wird gezeigt, daß die Herstellung von Magnetfeldern von z. B. 100 kA/cm bei einem Innendurchmesser des Experimentiervolumens von einigen Zentimetern elektrische Leistungen von der Größenordnung Megawatt erforderlich macht und der elektrische und mechanische Aufbau von Luftspulen eng mit einer effektiven Abführung der Jouleschen Wärme verknüpft ist. Die Berechnung des magnetischen Feldes geschieht vielfach durch Näherungsverfahren; die Forderung einer großen Feldhomogenität ist sekundär.

Das Feld einer Zylinderspule mit rechteckigem Wicklungsquerschnitt und den in die Abb. 13.6 eingetragenen Bezeichnungen läßt sich nach der bereits 1898 von FABRY angegebenen Formel berechnen. Diese lautet:

$$H_{00} = \frac{a_1 F(\alpha, \beta)\, i}{A}\ (\mathrm{A/cm}), \tag{13/32}$$

wenn $F(\alpha, \beta)$ der Fabry-Faktor, $\alpha = 2a_2/2a_1$, $\beta = 2b/2a_1$, A der Wicklungsquerschnitt pro Windung und H_{00} die Feldstärke auf der Achse in Spulenmitte

bedeuten. Für den Fabry-Faktor gilt folgende Beziehung:

$$F(\alpha, \beta) = \beta \ln \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}}. \tag{13/33}$$

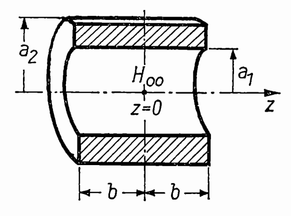


Abb. 13.6 Zylinderspule

Die Gesamtlänge L des Leiters läßt sich aus der Formel

$$L = \frac{2\pi a_1^3(\alpha^2 - 1)}{A} \tag{13/34}$$

berechnen. Die Feldstärke in der Symmetrieebene am Innenrand der Spule H_{0a_1} ist etwas größer als H_{00}, unterscheidet sich aber von H_{00} im ungünstigsten Fall

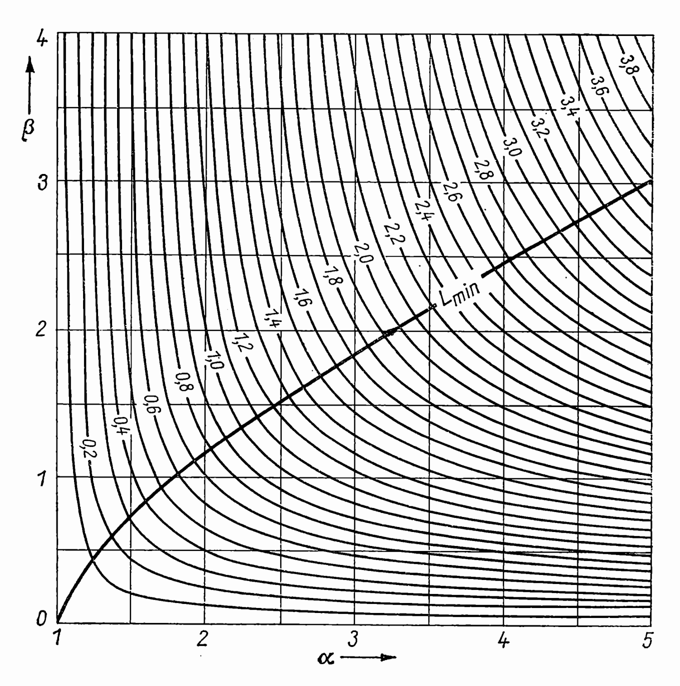


Abb. 13.7 Fabry-Faktor als Funktion von α und β

um etwa 20%. Dies ist nur für supraleitende Solenoide von Bedeutung, für die an dieser Stelle zuerst die kritische Feldstärke erreicht wird. In Abb. 13.7 sind Kurven für $F(\alpha, \beta)$-Werte als Funktion von α und β dargestellt. Ferner ist die Kurve für minimale Leiterlänge $L_{\min}$ in die Darstellung eingetragen.

Die axiale Homogenität dieser Zylinderspule läßt sich aus der Beziehung

$$\frac{H_{0x}}{H_{00}} = \frac{2\pi}{10F(\alpha,\beta)}\left[(\beta - x)\ln\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + (\beta - x)^2}}{1 + \sqrt{1 + (\beta - x)^2}} + (\beta + x)\ln\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + (\beta + x)^2}}{1 + \sqrt{1 + (\beta + x)^2}}\right] \quad (13/35)$$

ermitteln, worin x die auf den Innenradius a_1 bezogene Koordinate ist. Für eine genauere Berechnung der Homogenität und des Feldes außerhalb der X-Achse siehe GARRETT [*13.77*].

Die *Induktivität* der Spule berechnet sich aus der Gleichung

$$L = a_1^5 \left[\frac{\beta(\alpha - 1)}{A}\right]^2 (\alpha + 1)\left[\theta - \lambda\,\frac{\alpha - 1}{\beta}\right] \cdot 10^{-6}\,\mathrm{H}, \quad (13/36)$$

worin θ und λ Funktionen von α und β sind, die in *Tabelle 13.1* zusammengestellt sind.

Tabelle 13.1 Die Größen θ und λ in Gl. (13/36) *als Funktion von α und β*

$\frac{\alpha+1}{\beta}$	θ	$\frac{\beta}{\alpha-1}$	λ
0	0	0,5	0,00871
0,2	0,00379	1,0	0,01022
0,4	0,00727	1,5	0,01091
0,6	0,01047	2,0	0,01132
0,8	0,01343	2,5	0,01159
1,0	0,01617	3,0	0,01179
1,5	0,02216	3,5	0,01193
2,0	0,02720	4,0	0,01205
2,5	0,03152	4,5	0,01214
3,0	0,03527	5,0	0,01222
3,5	0,03858	5,5	0,01229
4,0	0,04152	6,0	0,01234
5,0	0,04660	6,5	0,01239
6,0	0,05087	7,0	0,01243
10,0	0,06551	7,5	0,01247

Für andere Spulenquerschnitte kann Gl. (13/21) angewandt werden, wenn die homogene Stromdichteverteilung in den Spulenleitern gewährleistet ist.

Für überschlägige Berechnungen von *Hochleistungsmagneten* wird die bereits von FABRY angegebene Formel

$$H = G \sqrt{\frac{P\lambda}{\varrho a_1}} \tag{13/37}$$

benutzt, in der der Faktor G meist zwischen 0,15 und 0,2 liegt und von der Spulenform und Stromdichteverteilung abhängt; P stellt die in Megawatt gemessene elektrische Leistung, λ das Verhältnis von Leiter- zu Gesamtvolumen, ϱ den spezifischen Widerstand des Leitermaterials und a_1 den Innenradius der Spule dar.

Über die Verbesserung der *Homogenität* von Spulenanordnungen durch Zusatzspulen siehe [*13.78*, *13.137*, *13.145*], über die Berechnung von Feldern nichtzylindrischer Spulen siehe GRANT und STRANDBERG [*13.85*].

13.22 Konstruktionsprinzipien [*13.188*]

Kleinere Luftspulen lassen sich mit isoliertem Runddraht wickeln, wobei eingelegte Pertinaxstreifen oder Nylonfäden den Kühlmitteldurchfluß verbessern. Durch Wasserkühlung kann dabei die maximale Stromdichte in Cu-Drähten auf 10···15 A/mm² gesteigert werden. Mit solchen Spulen sind Feldstärken von maximal 3···4 kA/cm zu erreichen.

Für höhere Feldstärken werden die abzuführenden Wärmemengen sehr groß und stellen das Hauptproblem bei der Konstruktion von *Hochfeldspulen* dar. Nach Gl. (13/37) findet man mit $\varrho = 2{,}7\ \mu\Omega\text{cm}$, $G = 0{,}2$ und $\lambda = 0{,}8$ die Faustformel

$$H = 100 \sqrt{\frac{P}{a_1}},$$

die für $a_1 = 1$ cm bei einer Leistung von 1 MW ein Maximalfeld von 100 kA/cm ergibt. Diese Leistung muß mit kleiner Temperaturdifferenz durch ein Kühlmedium abgeführt werden. Zu diesem Zweck wird der Leiter mit Kühlnuten, Kühlrippen oder Kanälen versehen, um eine große Wärmeübergangszahl zu erzielen und trotzdem mit den stromführenden Leiterteilen gut wärmeleitend verbunden zu sein. Maximale Wärmeübergangszahl, zulässiger Druckabfall im Kühlkreislauf und spezifische Wärme der Kühlflüssigkeit bestimmen die Übertemperatur der Magnetspule.

Eine zweite Grenze für die maximale Leistung P wird durch die auf das Leitermaterial ausgeübten mechanischen Kräfte nach Gl. (13/30) gezogen. Durch geeignete Formgebung der Spule, Verwendung von elektrisch gut leitendem Material mit großer Zugfestigkeit sowie Aufnahme der Radialkräfte durch unmagnetische Bandagen läßt sich das maximale Feld steigern.

In Abb. 13.8 sind als Funktion des Innendurchmessers a_1 und der Magnetleistung P die erreichbaren magnetischen Feldstärken von *Scheibenspulen* (s. § 13.23) mit 1 mm breiten Kühlkanälen angegeben, wobei eine spezifische Kühlleistung $Q = 1{,}5\ \text{kW/cm}^2$ angenommen ist. Die Größe $Q = \alpha\, \Delta T$ setzt sich aus der Wärmeübergangszahl α (s. Bd. II, § 8.2) zwischen Kühlflüssigkeit und Kühlkanal und der zulässigen Übertemperatur ΔT zusammen, für die

man mit Wasser- oder Ölkühlung 50···100 grd annehmen darf. Die obere Leistungsgrenze wird durch die mechanischen Kräfte gegeben, welche zu einer (bleibenden) Verformung der Spule führen. Durch Verwendung von Cu–Zr-Legierungen anstelle von Leitungskupfer ist eine Steigerung der Maximalfeldstärke möglich. Über die exakte Berechnung der mechanischen Spannungen in Solenoiden siehe DANIELS [*13.53*].

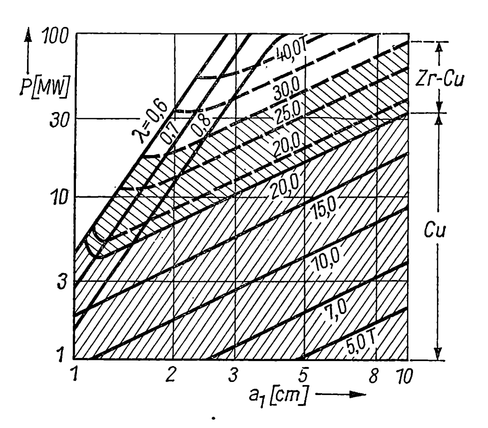


Abb. 13.8 Maximalfeldstärke von Scheibenspulen

Bezieht man die Leistungsabgabe auf das freie Spulenvolumen, setzt man also $Q_1 = AP/a_1^3$, worin A ein Geometriefaktor ist, und setzt diese Größe in Gl. (13/37) ein, so ergibt sich die Beziehung

$$Q_1 \sim \frac{H^2}{a_1^2}, \tag{13/38}$$

d. h., die pro Kubikzentimeter des Leitermaterials abzuführende Wärmemenge nimmt umgekehrt proportional zum freien Spulenquerschnitt zu.

Eine zweite Möglichkeit, nach Gl. (13/37) bei vorgegebener Leistung ein möglichst hohes Feld in normalleitenden Spulen zu erzielen, ist die Verringerung von ϱ durch Kühlung mit flüssigem N_2, Ne, H_2 oder He. Trotz des zusätzlichen Aufwandes für die Erzeugung der Kühlleistung kann der Gewinn an Gesamtleistung bei diesem Prinzip beträchtlich sein. Näheres siehe § 13.26.

In Abb. 13.9 sind die wichtigsten Konstruktionsmerkmale gekühlter Magnetspulen dargestellt und nach der Art des verwendeten Leiters unterteilt. Bei der Spule (a) ist die Drahtwicklung schematisch gezeigt, bei der durch Abstandsstücke oder -streifen Kühlkanäle erzeugt werden. In (b) ist das Prinzip der gekühlten *Hohlleiter* dargestellt, die elektrisch in Serie, hinsichtlich der Kühlung wegen des begrenzten Druckabfalls im Kühlkreislauf parallelgeschaltet werden. Unter (c) sind Ausführungsformen des bekannten Bitter-Magneten gezeigt, deren Wicklung aus wendelförmig aufgebauten Blechplatten aus vergoldetem Cu oder einer Cu-Legierung besteht, die mit axialen oder

radialen Kühlkanälen versehen sind. Schließlich ist unter (*d*) das Schema des aus einem Band gewickelten Magneten dargestellt, dessen Zwischenräume ebenfalls in axialer oder radialer Richtung von der Kühlflüssigkeit durchströmt werden.

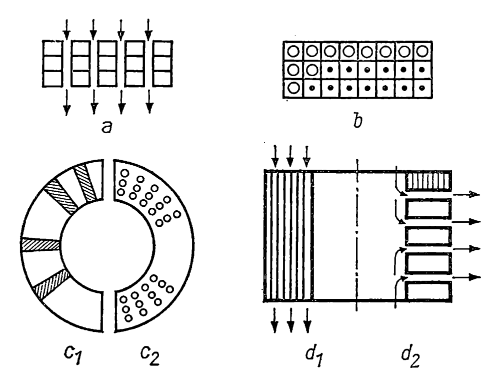


Abb. 13.9 Aufbau flüssigkeitsgekühlter Magnetspulen

13.23 Wasser- oder ölgekühlte Magnete [13.112, 13.118, 13.149]

Das grundsätzliche Problem der Wärmeabfuhr durch Kühlkanäle läßt sich am Beispiel der Abb. 13.10 erläutern, in der unter (*a*) ein Würfel des Leitermaterials von 1 cm³ gezeigt ist, der von N Kühlkanälen mit dem Durchmesser d

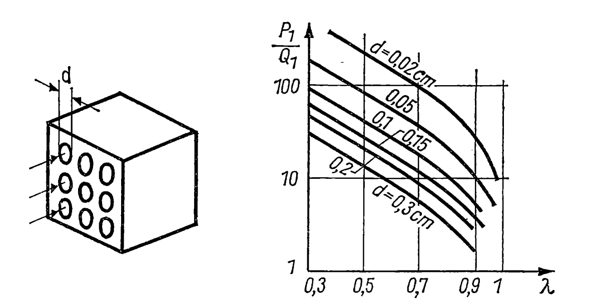


Abb. 13.10 Spulenkühlung durch Kanäle

durchsetzt und von Wasser durchflossen wird. Mit $\lambda = 1 - \pi N d^2/4$ und $P_1 \lambda = N \pi d Q_1$ ergibt sich die Beziehung

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{4}{d}, \qquad (13/39)$$

die in Abb. 13.10b als Funktion von λ dargestellt ist.

Mit einer spezifischen Kühlleistung $Q_1 = 200\ \mathrm{W/cm^2}$, die sich bei einer Strömungsgeschwindigkeit $v = 10\ \mathrm{m/s}$ erreichen läßt, und einer spezifischen

Leistung $P_1 = 1$ kW/cm³ kann mit $d = 0{,}3$ cm ein Füllfaktor nach Gl. (13/39) von $\lambda = 0{,}75$ zugrunde gelegt werden. In neueren Konstruktionen werden viel höhere Werte von $Q_1 = 1{,}5$ kW/cm² in Kanälen von 0,1 cm Durchmesser erreicht, die mit $\lambda = 0{,}8$ relativ hohe spezifische Leistungen von $P_1 = 15$ kW/cm³ ergeben.

Bei der von Bitter angegebenen, in Abb. 13.11 dargestellten Konstruktion besteht die Spule aus Cu-Blechen von 0,3···1 mm Stärke, die mit regelmäßig angeordneten Kühlöffnungen für den axialen Durchfluß des Kühlwassers

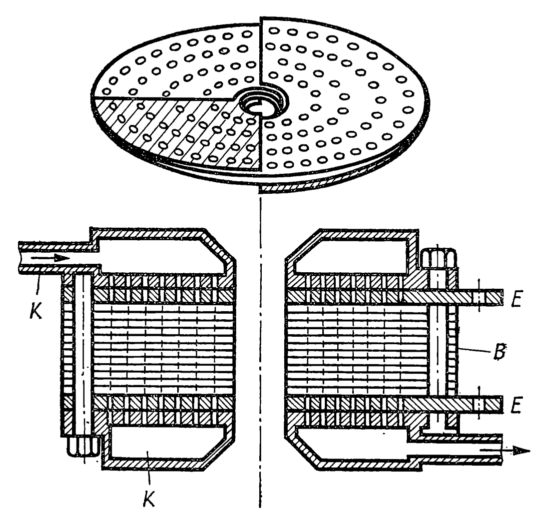


Abb. 13.11 Bitter-Magnet

versehen und mit den folgenden, ebenfalls radial geschlitzten Platten vernietet und verlötet sind. Als isolierende Zwischenlagen dienen Glasfaser- oder Quarzfasergewebe. Die Bohrungen auf dem äußersten Durchmesser dienen zum Durchführen der Zugbolzen B, durch welche der Plattenstapel zwischen den Kühlköpfen K zusammengepreßt wird. Der Erregerstrom wird über die dicken Cu-Platten E, die mit den gleichen Kühlbohrungen versehen sind und an die Enden der Blechwendel gepreßt werden, zugeleitet.

Als Beispiel eines 100-kA/cm-Magneten des Magnetlaboratoriums in Grenoble dienen folgende Angaben: Die Spule besteht aus 230 Cu-Platten von 0,3 mm Stärke mit $a_1 = 3{,}3$ cm, $a_2 = 19{,}2$ cm. Jede Platte ist mit 486 Bohrungen von 1,5 mm Durchmesser versehen und einseitig mit Ausnahme eines Sektors von etwa 20° isoliert. Die einzelnen Platten werden nur durch Druck von etwa 100 kp/cm² elektrisch in Kontakt gebracht und zwischen zwei dicke Bronzeplatten gepreßt. Der Kühlkreislauf besteht aus einer Wasserpumpe, die am Einlauf einen Druck von 9 at und in den Kühlbohrungen eine Strömungsgeschwindigkeit von 10 m/s bei einem gesamten Durchsatz von 20···40 l/s erzeugt. Die maximale Übertemperatur in der Spule beträgt nur 20 grd. Zur

Energieversorgung dient ein Maschinensatz, der 5 kA bei 340 V, d. h. 1,7 MW, liefert. Das Maximalfeld in der Spule mit 5 cm nutzbarem Innendurchmesser beträgt 80 kA/cm.

Weitere ausgeführte Hochleistungsmagnete siehe *Tabelle 13.2*; siehe auch [*13.31*].

Eine andere konstruktive Lösung, die von DESLANDRES und PEROT [*13.56*] bereits 1915 angegeben und mit der ein Feld von 6,4 T erzielt werden konnte, ist im Prinzip in Abb. 13.12 dargestellt. Die Wicklung S dieses Magneten besteht aus einem 0,3 mm starken, trapezförmigen *Silberband* von 20 m Länge,

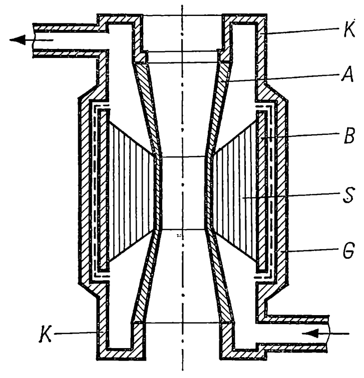




Abb. 13.12 Luftspule mit Konuswicklung

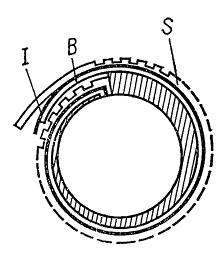


Abb. 13.13 Bandwicklung mit axialen Kühlkanälen

dessen Breite innen 2 und außen 12 cm beträgt. Durch schmale isolierende Zwischenlagen von 0,3 mm Stärke entsteht eine Wicklung mit trapezförmigem Querschnitt, bei der jede Windung trotz zunehmender Länge den gleichen Widerstand besitzt und den gleichen Leistungsverbrauch aufweist. Das Band ist innen an einem Cu-Rohr A von 2 cm Durchmesser und nach außen zunehmender Wandstärke und außen an einem Cu-Ring B, der isoliert in das Gehäuse G eingesetzt ist, befestigt und ist über diese beiden Zuführungen an die Stromquelle gelegt. Der Kühlwasserstrom durchsetzt die Wicklung *axial* und führt wegen des geringeren axialen Strömungswiderstandes am Kernrohr A, wo die größte Leistungsdichte P_1 herrscht, die Wärme am besten ab. Die Spannung zwischen den einzelnen Wicklungen beträgt bei 5 kA nur 1,4 V, so daß keine elektrolytische Zersetzung des Kühlwassers zu befürchten ist.

Diese Bauform wird neuerdings in etwas modifizierter Form von KOLM angewandt, wobei nach Abb. 13.13 als Leiter S ein Cu-Streifen von 0,5 mm Stärke mit axialen Nuten verwendet wird, die 0,2···0,3 mm tief und 1 mm breit sind. Zwischen zwei Windungen liegen eine 50 μm dicke Isolierfolie I und ein Cu-Band B von 0,12 mm Stärke.

Schließlich ist das in Abb. 13.9c dargestellte Kühlprinzip von MONTGOMERY zur Konstruktion eines 5-T-Magnets angewandt worden, dessen Einzelplatten mit radialen Kühlnuten versehen sind und vom Kühlwasser von innen nach

außen durchflossen werden. Die spezifische Kühlleistung Q_1 erreichte Werte von 1 kW/cm².

In *Tabelle 13.2* sind die wichtigsten Daten einiger wasser- bzw. ölgekühlter Luftmagnete zusammengestellt.

Tabelle 13.2 Einspulenluftmagnete, wassergekühlt

Magnettyp nach Abb. 13.9	a_1 cm	B T	P MW	P_1 kW/cm³	Q_1 kW/cm²	λ
c_2 (NML)*	1,9	8,5	1,7	13	1,1	0,4
c_2 ,,	5,9	2,9	1,7	5,1	1,1	0,6
c_2 ,,	3,2	9,0	1,7	1,6	0,2	0,75
d_1 ,,	1,43	12,6	1,88	32,6	0,4	0,65
c_1 ,,	1,9	5,0	0,58	12	0,87	0,65
c_2 (Tohoku Uni.)	3,4	12,0	5,4	—	—	—
a (Leiden)	4,3	8,0	4,0	—	—	—
c_2 (RRE)**	1,6	11,3	2,3	—	—	—

* NML National Magnet Laboratory, Cambridge, Mass.

** RRE Roy. Radar Establishment, Malvern (England)

13.24 Mehrfachspulenmagnete

Mit einer einzigen Spule ist die Grenze von 13 T oder etwas mehr für die maximal erzielbare Feldstärke bald erreicht. Unterteilt man nach dem Vorschlag von BITTER [*13.32*] den Magneten in mehrere konzentrische Spulen, deren Stromdichte passend aufeinander abgestimmt werden muß, so lassen sich höhere G-Faktoren in Gl. (13/37) und in der innersten Spule sehr viel höhere Felder erzielen.

Das zentrale Feld in einer Mehrspulenanordnung errechnet sich analog zu Gl. (13/37) aus der Beziehung

$$H = H_1 + H_2 + \cdots = G_1 \sqrt{\frac{P_1 \lambda}{\varrho a_1}} + G_2 \sqrt{\frac{P_2 \lambda}{\varrho a_2}} + \cdots, \qquad (13/40)$$

wenn man für alle Spulen den gleichen Füllfaktor λ und den gleichen spezifischen Widerstand ϱ voraussetzt. Führt man formal durch die Beziehung

$$H = G \sqrt{\frac{P \lambda}{\varrho a_1}} \qquad (13/40\,\text{a})$$

den Spulenfaktor G für die gesamte Anordnung und P als Gesamtleistung ein, so wird

$$G = G_1 \sqrt{\frac{P_1 a_1}{P a_1}} + G_2 \sqrt{\frac{P_2 a_2}{P a_1}} + \cdots. \qquad (13/41)$$

Den Maximalwert von G erhält man mit den aus Gl. (13/41) resultierenden

Bedingungen zu

$$\left.\begin{aligned}\frac{P_1}{P} &= \frac{G_1^2}{G_1^2 + G_2^2 a_1/a_2 + \cdots}\,;\\ \frac{P_2}{P} &= \frac{G_2^2}{G_1^2 + G_2^2 a_1/a_2 + \cdots}\,.\end{aligned}\right\} \tag{13/41a}$$

Aus diesen Beziehungen erkennt man, daß man optimales G erhält, wenn der größere Teil der Gesamtleistung P in der inneren Spule umgesetzt wird. In einer Zweispulenanordnung für 17,5 T mit $G = 0{,}20$ werden 25% der Gesamtleistung der inneren Spule zugeführt, während es bei $G = 0{,}23$ bereits 75% sind.

Als weitere Folge solcher Überlegungen ergeben sich bei geeigneter Wahl von P_1, P_2 und der geometrischen Abmessungen u. U. sehr viel geringere mechanische Kräfte auf die Spulenwicklungen; siehe auch § 13.25.

Der Zweispulenmagnet des NML für 17,5 T mit 3,2 cm nutzbarem Innendurchmesser besteht aus einer Innenspule von 8 cm Länge mit den Radien $a_1 = 1{,}9$ cm, $a_2 = 5{,}5$ cm und der Leistung $P_1 = 1{,}1$ MW; die Außenspule (ebenfalls Bitter-Spule) ist 21 cm lang; ihre Radien betragen $a_1' = 5{,}8$ cm, $a_2' = 20$ cm, und die umgesetzte Leistung ist $P_2 = 3{,}9$ MW.

Mit einer Dreispulenanordnung für ebenfalls 3,2 cm Nutzdurchmesser, deren Einzelspulen 7,5, 10 und 5 T liefern, kann ein Feld von 22,5 T mit einer Gesamtleistung von 11,0 MW erzeugt werden.

13.25 Höchstfeldspulen, mechanische Kräfte

Die höchsten Magnetfelder, die nach den vorstehend beschriebenen Methoden erzeugt werden können, werden durch die mechanischen Kräfte (vgl. a. § 13.18) begrenzt, die vom Magnetfeld im Spuleninnern auf die Wicklungselemente ausgeübt werden. Die magnetische Energie pro Kubikzentimeter

$$W_m = \frac{1}{2}\,\mu_0 H^2 \tag{13/42}$$

in einer Spule entspricht einem allseitigen Druck, der z. B. für $H = 100$ kA/cm die beträchtliche Höhe von 640 at erreicht. Dieser Druck muß von den Tangential- und Radialspannungen der Wicklung aufgenommen werden, so daß die maximale Feldstärke eine Funktion der Zugfestigkeit σ_m des Spulenmaterials wird. Nach den Überlegungen von IGNATCHENKO und KARPENKO [*13.99*] ist das Maximalfeld H_m gegeben durch die Beziehung

$$H_m \leqq \sqrt{\frac{\sigma_m}{2\mu_0}}\,, \tag{13/43}$$

wenn σ_m in kp/cm² die Zugfestigkeit (oder auch Streckgrenze) des Wicklungsmaterials bedeutet. Mit $\sigma_m = 10^4$ kp/cm² ergibt sich aus dieser Formel $H_m \leqq 630$ kA/cm. Durch eine Aufteilung in konzentrische Einzelspulen mit optimaler Stromdichte läßt sich eine merklich höhere Feldstärke als nach

Gl. (13/43) erreichen, wobei jede Einzelspule die auf sie wirkenden Kräfte und inneren Spannungen aufnehmen muß.

Für den Bitter-Magneten hat CARDEN [*13.45*] die auftretenden Spannungen in den plattenförmigen Leitern, die durch Bolzen mit etwa 100 kp/cm² zusammengepreßt werden, im einzelnen berechnet. Da Cu und Ag auch in hartgezogenem Zustand eine relativ geringe Streckgrenze besitzen, werden für Höchstfeldspulen Cr–Cu- und Zr–Cu-Legierungen verwendet.

13.26 Kryomagnete

Durch eine Erniedrigung des spezifischen Widerstandes ϱ verringert sich nach Gl. (13/37) die für konstante Feldstärke H erforderliche elektrische Leistung P. Dies läßt sich durch Abkühlen der Wicklung auf eine Temperatur $T = 90$ K (mit flüssigem N_2) oder $T = 20$ K (mit flüssigem H_2) erreichen, wobei die Größe $\varrho \sim T/T_0$ ($T_0 = 273$ K) wird. Als Kühlmedien kommen die verflüssigten Gase N_2, Ne, H_2 und He oder auch gasförmiges He in Betracht, die ähnlich wie bei wassergekühlten Magneten die in der Spule erzeugte Wärme bei möglichst kleiner Übertemperatur abführen müssen. Erschwerend kommen die bei der Verdampfung von Flüssiggasen entstehenden großen Dampfvolumina hinzu, die den Mengendurchsatz begrenzen. Dabei wird das Ziel verfolgt, daß die durch die Kühlung erzielte Leistungseinsparung größer als die zusätzlich erforderliche Kälteleistung wird.

Die Praxis hat gezeigt, daß tiefgekühlte Spulen, die auch als *Kryomagnete* bezeichnet werden, hinsichtlich des Gesamtverbrauchs an Energie trotz der zusätzlichen Kühlleistung günstiger sind als solche mit Wasser- oder Ölkühlung. Die durch die mechanischen Kräfte nach Gl. (13/43) gezogene Grenze bleibt jedoch die gleiche. Seit einigen Jahren haben die Kryomagnete merklich an Bedeutung verloren, da man nun auch Felder bis zu maximal 14 T mit *supraleitenden Magneten* (§ 13.3) bei wesentlich kleinerem Energieaufwand erzeugen kann.

Bezeichnet man mit T die Betriebstemperatur der Kryospule und mit W die in der Zeiteinheit erzeugte Stromwärme, so ist für die Erzeugung der entsprechenden Kälteleistung nach dem II. Hauptsatz die Leistung

$$W_0 \geqq P \frac{T_0 - T}{T} \tag{13/44}$$

aufzubringen, wenn T_0 die Umgebungstemperatur bedeutet. Die Gesamtleistung für den Betrieb des Magneten ergibt sich damit aus der Beziehung

$$W_0' = i^2 R(T) \left[1 + \frac{T_0 - T}{\eta T}\right], \tag{13/45}$$

wenn η der Wirkungsgrad der Kältemaschine ist. Für Temperaturen zwischen 20 und 90 K kann nach dem heutigen Stand der Technik $\eta = 0{,}15 \cdots 0{,}30$ eingesetzt werden (vgl. Bd. II, § 10.1). Da mit abnehmender Temperatur der Widerstand R kleiner wird, andererseits nach Gl. (13/45) die erforderliche Gesamtleistung W_0' zunimmt, gibt es für jedes H eine optimale Betriebstem-

peratur. Dies hängt mit dem Einfluß des Magnetfelds auf den Widerstand des Leitermaterials zusammen (§ 9.241), der bei Feldern von z. B. 10 T für verschiedene Metalle beträchtlich sein kann. In Abb. 13.14 ist zum Vergleich für verschiedene Metalle der spezifische Widerstand ϱ_H für $B = 10\ T$ als Funktion des Widerstandes ϱ_0 für $H = 0$ aufgetragen. Es zeigt sich, daß bei diesen

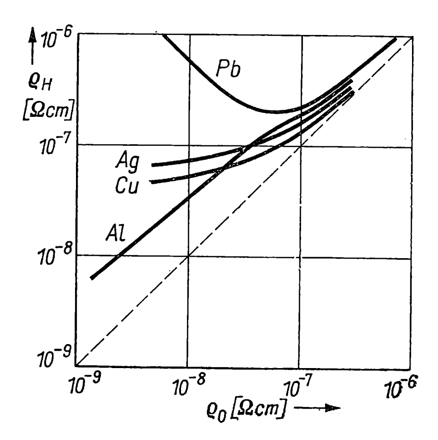


Abb. 13.14 Spezifischer Widerstand von Metallen bei 10 T

hohen Feldern Cu und Ag viel weniger zum Bau von Kryospulen geeignet sind als Al oder auch Na.

In *Tabelle 13.3* sind für Al- und Na-Spulen als Funktion des erzeugten Feldes die optimale Betriebstemperatur und das Verhältnis P/P_0' zusammengestellt.

Tabelle 13.3 Optimale Betriebstemperatur T und Leistungsverhältnis P/W_0' von Al- und Na-Kryomagneten

Material	B T	T K	P/W_0'
Al	0	16	25
	2,0	17	12
	5,0	17	10
	10,0	17	9
Na	0	6	17
	2,0	8	10
	5,0	8	9
	10,0	10	7

In vielen Fällen ist es nicht notwendig, die gesamte Kälteleistung W_0 nach Gl. (13/44) als *Dauerleistung* aufzubringen, da verflüssigte Gase in großen Tanks bevorratet und für kurzdauernde Versuche durch die Spule gepumpt werden können.

Als Beispiel eines mit flüssigem H_2 gekühlten Magneten ist in Abb. 13.15 schematisch der von PURCELL und PAYNE [*13.169*] konstruierte Magnet dargestellt, der ein Feld von 7 T in einer Bohrung von 8 cm Durchmesser erzeugt. Die Spule S besteht aus 14 Einzelspulen, die aus 10 μm dicker und 10 mm breiter Al-Folie mit einer isolierenden Zwischenlage gewickelt sind. Die einzelnen Flachspulen sind in Serie geschaltet und benötigen für ein Feld von 7 T eine elektrische Leistung von nur 7,5 kW (93 A, 81 V). Zwischen die Spulen

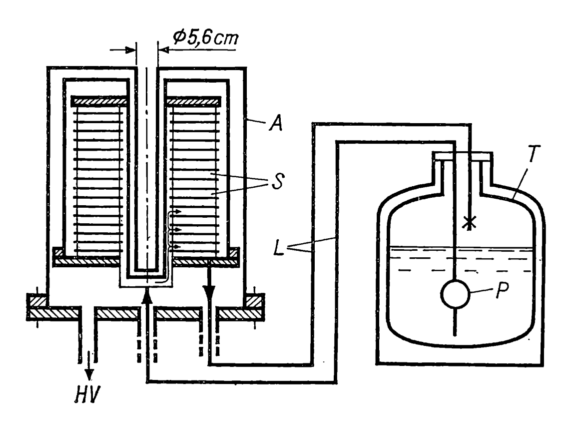


Abb. 13.15 Kryomagnet mit Wasserstoffkühlung

sind sternförmige Mylar-Abstandsplatten gelegt, durch die der im Innenrohr zugeführte flüssige H_2 radial die Zwischenräume durchströmen kann. Der Kühlkreislauf wird durch eine Zentrifugalpumpe P (1,8 kW Antriebsleistung) betrieben, die am Eintritt in das Zentralrohr einen Überdruck von 1,5 at aufrechterhält und den Wasserstoff aus dem 600-l-Tank T ansaugt. Der Magnet ist in einem Metallkryostaten A untergebracht; seine Zentralbohrung von 5,6 cm Durchmesser ist von außen zugänglich. Dauerbetrieb ist möglich, wenn die Verdampfungsverluste durch eine Kältemaschine gedeckt werden. Zur Leistungsversorgung dient ein 7,5-kVA-Transformator mit Si-Gleichrichtern in Graetz-Schaltung (s. § 15.5).

Der von LAQUER und HAMMEL [*13.132*] konstruierte Magnet für eine maximale Induktion von 7 T mit einem Innendurchmesser von 6,5 cm ist aus einem 13 cm breiten, 10···30 μm starken Cu-Band gewickelt, wobei regelmäßig beigelegte Isolierfäden axiale Kühlkanäle zum Durchtritt des flüssigen H_2 freilassen. Der Kühlkreislauf besteht aus einer H_2-Pumpe mit 1 at Überdruck, die aus einem 6000-l-Tank ansaugt und maximal 4 l/s fördert. Mit einer Leistung von 25 kW (12 kA) läßt sich bei 20 K eine Induktion von 8 T erzeugen.

Ähnliche Konstruktionen sind auch für eine Kühlung mit flüssigem *Neon* vorgesehen worden, das gegenüber H_2 den Vorteil der Gefahrlosigkeit und der größeren Verdampfungswärme, jedoch den Nachteil des hohen Preises und einer etwas höheren Siedetemperatur (26 K) besitzt.

Neuerdings werden Al-Spulen in spezieller Anordnung zur Verringerung der mechanischen Kräfte auch für Felder von 18···20 T angewandt, die mit He-

Gas gekühlt und mit einer Leistung von 66 kW bei 6 cm Innendurchmesser betrieben werden. Über einen mit flüssigem N_2 gekühlten Magnet für 5,4 T siehe [*13.2*]; weitere Konstruktionen siehe [*13.14, 13.4, 13.124*].

13.27 Leistungsversorgung

Die Bereitstellung der hohen elektrischen Gleichstromleistung von oft mehreren Megawatt ist hinsichtlich der hohen Investitionen und der zu fordernden geringen Welligkeit des Stromes von großer Bedeutung. Für kleinere und mittlere Leistungen werden entweder Motorgeneratoren oder auch Hg-Dampfgleichrichter benutzt. Die Gleichrichteranlage für den 4-MW-Magnet in Leiden (s. *Tabelle 13.2*) ist schematisch in Abb. 13.16 abgebildet. Sie besteht

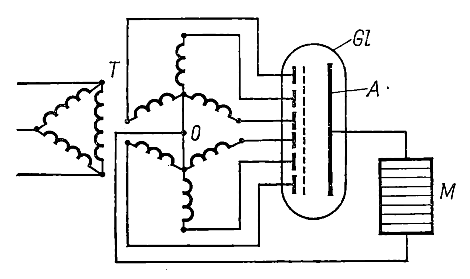


Abb. 13.16 Gleichrichter

aus einem Sechsphasen-Hg-Dampfgleichrichter *Gl* mit Gittersteuerung, der über die Dreiphasentransformatoren *T* mit einer Phasenspannung von 1000 V versorgt wird. Der Luftmagnet *M* ist zwischen Anode *A* und dem gemeinsamen Sternpunkt *O* angeschlossen. Jeder der vier Gleichrichter liefert 1 MW bei 1000 V. Die bei 50 Hz Netzfrequenz auftretende 300-Hz-Oberwelle wird mit einer Kondensatorbatterie von 10^4 μF und einer Drosselspule von 2 mH für den vollen Betriebsstrom unterdrückt.

Für die höchsten Leistungen von 10 MW und mehr werden *Homopolargeneratoren* verwendet, deren Stromwelligkeit nur von mechanischen Unwuchten herrührt und daher äußerst klein ist. Näheres siehe § 15.21.

13.3 Supraleitende Magnete [*13.18, 13.28, 13.47, 13.120, 13.150, 13.164, 13.188*]

Den größten Fortschritt in der Erzeugung hoher Magnetfelder hat die Entwicklung supraleitender Legierungen möglich gemacht, die bei Induktionen von 15 T und mehr mit hohen Stromdichten in Solenoiden betrieben werden können. Die 1962 begonnene Entwicklung ist heute keinesfalls abgeschlossen, hat aber einen so hohen technologischen Stand erreicht, daß bereits an die Realisierung von sehr großen Magneten für z. B. Blasenkammern mit 5 m Durchmesser geschritten werden konnte.

13.31 Typ-III-Supraleiter [*13.114, 12.161, 12.145*]

Die grundlegenden Eigenschaften supraleitender Elemente und Verbindungen sind bezüglich der elektrischen Leitfähigkeit in § 9.82 und im Hinblick auf ihre magnetischen Eigenschaften in § 12.25 sowie in *Tabelle 12.4* erläutert.

Wie aus *Tabelle 12.3* hervorgeht, sind die supraleitenden Elemente, die fast ausschließlich zum Typ I gehören, wegen der niedrigen H_c-Werte nicht zur Konstruktion supraleitender Magnete geeignet. Das schematisch in Abb. 12.28b dargestellte magnetische Verhalten der Typ-II-Supraleiter zeigt dagegen, daß supraleitender Stromtransport oberhalb von H_{c1}, d. h. bei unvollkommenem Meissner-Effekt, möglich ist. Aus *Tabelle 12.4* geht hervor, daß die kritischen Felder H_{c2} bei der „Hochfeldsupraleitung" 200 kA/cm übersteigen können. Für $H > H_{c1}$ dringt der magnetische Fluß in den Supraleiter in Form von Flußlinien ein, die ein magnetisches Flußquant $\Phi_0 = h/2e = 2$ fVs tragen und deren Dichte durch $n = B/\Phi_0$ gegeben ist. In einem Typ-II-Supraleiter hoher chemischer und struktureller Reinheit sind die in Feldrichtung verlaufenden Flußlinien regelmäßig in einem quadratischen, für $H \gg H_{c1}$ in einem regelmäßigen dreieckigen Gittermuster angeordnet, dessen „Gitterkonstante" mit zunehmendem Feld kleiner wird und etwa 100 nm beträgt.

Wird in Anwesenheit eines Magnetfelds B durch eine dünne Platte eines Typ-II-Supraleiters ein Strom geschickt, so wirkt auf die einzelnen Flußlinien die Lorentz-Kraft

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{\Phi}_0 \tag{13/46}$$

und wegen $B = n\Phi_0$ pro Kubikzentimeter die Volumenkraft

$$\alpha = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}, \tag{13/46a}$$

wenn $\boldsymbol{j}$ die Stromdichte ist. Die Kraft $\boldsymbol{F}$ bzw. α stehen, wie aus Abb. 13.17 ersichtlich, senkrecht auf $\boldsymbol{B}$, liegt also in der Leiterebene und bewirkt einen stationären Flußlinienstrom von der Dichte n und einer Driftgeschwindigkeit, die vom Material und den äußeren Parametern abhängt. Es läßt sich nachweisen, daß im Typ-II-Supraleiter nur dann eine endliche Stromdichte $\boldsymbol{j}$

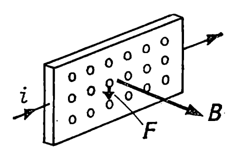


Abb. 13.17 Stromdurchflossener Typ-II-Supraleiter

aufrechterhalten werden kann, wenn die Lorentz-Kraft α durch eine Gegenkraft $\boldsymbol{F}_p$ zumindest teilweise kompensiert wird und im Leiter ein Gradient von n zustande kommt. Die Gegenkraft $\boldsymbol{F}_p$ kann von Strukturfehlern im Material hervorgebracht werden, welche die Querbewegung der Flußlinien behindern oder unmöglich machen. Als solche „Pinning-Zentren" kommen Ausscheidun-

gen, Leerstellen, Korngrenzen, Versetzungen, Bestrahlungsdefekte u. a. in Betracht, wobei ihre Wirkung auf Flußlinien von ihrem Einfluß auf die örtliche Freie Enthalpie des Supraleiters ausgeht.

Man bezeichnet den stark gestörten Typ-II-Supraleiter als einen „harten" oder *Typ-III-Supraleiter*. Im Gegensatz zur Magnetisierungskurve des Typ-II-Supraleiters in Abb. 12.28b zeigt der Typ-III-Supraleiter ein stark irreversibles Verhalten, wie es in Abb. 13.18 angedeutet ist. Dies rührt von der behinderten, durch Relaxationsvorgänge beschreibbaren Gleichgewichtseinstellung bei veränderlichem Magnetfeld H her und liefert im magnetischen Wechselfeld *Hystereseverluste*, die größer als die entsprechenden Gleichstromverluste bei Zimmertemperatur sein können. Auch bei kleinen Feldänderungen zeigen die durchlaufenden „inneren" Magnetisierungskurven Hysterese.

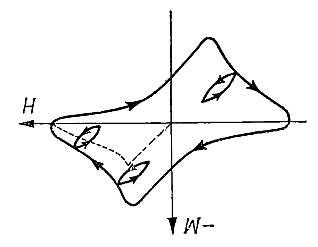


Abb. 13.18 Magnetisierungskurve eines Typ-III-Supraleiters

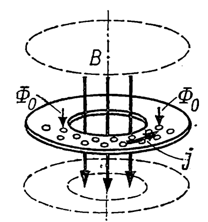


Abb. 13.19 Supraleitende Spule

Die Verhältnisse in einem kurzgeschlossenen flachen Ring als Teil eines supraleitenden Bitter-Magneten (s. § 13.23) lassen sich anhand der Abb. 13.19 erklären. Die Stromdichte $\boldsymbol{j}$ ist eine Funktion von r, wobei für jeden Abstand r gelten muß:

$$\mu_0 \boldsymbol{j} = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial r}. \tag{13/47}$$

Der Strom in der Scheibe ist so gerichtet, daß die Flußlinien auf Grund der Lorentz-Kraft gegen den Innenrand gedrückt werden, während der magnetische Fluß nach Gl. (13/42) auf die Flußlinien einen hohen Druck nach außen ausübt. Gitter- und Strukturfehler im Supraleiter wirken in diesem Kräftegleichgewicht stabilisierend. Die Haft- oder Pinningkräfte $\boldsymbol{F}_p$ sind von der Temperatur und dem Feld abhängig und bestimmen in hohem Maße die maximal mit einem supraleitenden Solenoid erreichbaren Felder. Da bei der Wanderung von Flußlinien, besonders bei der Bewegung von Flußlinienbündeln, Joulesche Wärme entsteht und diese abhängig von der örtlichen Wärmeabfuhr durch das Heliumbad eine Temperaturerhöhung verursacht, kommt es bei der Erregung von Magneten oft zu *Flußsprüngen*. Diese sind als unstetige Flußänderungen erkennbar und lassen sich durch das Entweichen eines bestimmten Flußbetrages aus dem supraleitenden Ring erklären. Die örtlich erhöhte Stromdichte an der Stelle des Flußsprunges kann zum Zusammenbruch des Spulenflusses führen und läßt sich durch *Stabilisierung* mit Normalleitern weitgehend verhindern.

In § 13.32 werden stabilisierte Leiter näher beschrieben. Man bezeichnet die experimentelle Tatsache, daß die kritische Stromdichte eines Typ-III-Supraleiters in einer Magnetspule nur zum Teil erreicht wird, als *Degradationseffekt.*

13.32 Technische Supraleiter [*13.29, 13.168*]

HAAS und VOOGD entdeckten bereits 1929, daß einige Pb–Bi-Legierungen bis zu 2 T supraleitend bleiben. Wegen der kleinen anzuwendenden Stromdichte dieses Materials war es für die Anwendung in supraleitenden Spulen uninteressant. Erst YNTEMA [*13.210*] benutzte 1955 für einen supraleitenden Elektromagnet eine Nb-Wicklung bei einer Stromdichte von $j = 740$ A/mm².

Für den praktischen Gebrauch werden heute folgende Legierungen und Verbindungen benutzt:

1. *Nb–Zr-Legierungen* mit 25 und 33% Zr-Gehalt,
2. *Nb–Ti-Legierungen* mit bis zu 80% Ti,
3. *Nb_3Sn-Verbindung* in Form von Bändern,
4. *Ternäre Nb–Zr–Ti-Legierungen.*

Zur Charakterisierung der einzelnen Materialien wird die kritische Stromdichte j_c als Funktion eines transversalen Magnetfeldes H für eine kurze Drahtprobe angegeben. Solche Messungen werden meist in der zylindrischen Bohrung von Luft- oder Kryomagneten mit haarnadelförmigen Proben ausgeführt. Da die kritische Stromdichte von der Richtung des Magnetfelds abhängt und im Transversalfeld am kleinsten ist, bricht bei dieser Probenform der Strom zuerst im gebogenen Teil der Probe zusammen. Von BELLAU [*13.24*] wird ein elektronisches System beschrieben, das automatisch die kritische Stromstärke in der zu untersuchenden Probe einregelt und als Funktion des anliegenden Magnetfelds registriert.

In Abb. 13.20 ist nach [*13.168*] für die heute verfügbaren technischen supraleitenden Legierungen und Verbindungen verschiedener Herkunft die kritische Stromdichte als Funktion des äußeren Magnetfeldes dargestellt. Die Kurven *1* und *2* gelten für die bekannten Nb–Zr-Legierungen mit 25 und 33% Zr-Gehalt; Kurve *3* betrifft eine 25%ige Nb–Zr-Legierung mit spezieller Wärmebehandlung und sehr guten Eigenschaften bei kleinen H-Werten. Die nächste Gruppe umfaßt die Nb–Ti-Legierungen mit 60 (4), 64 (5) und 80 (6) % Ti-Gehalt. Aus Abb. 13.20 geht die Überlegenheit der Nb–Ti-Legierungen sowohl hinsichtlich der j_c-Werte als auch bezüglich der höchsten erreichbaren Felder hervor. Im Gegensatz zu diesen Ergebnissen an „Kurzdrahtproben" zeigten die ersten Nb–Ti-Magnete eine geringe Stabilität und mußten mit kleineren Stromdichten betrieben werden. Heute sind jedoch die meisten von verschiedenen Herstellern vertriebenen Nb–Ti-Drähte von dieser Einschränkung frei.

Im Gegensatz zu den duktilen, zu dünnen Drähten verarbeitbaren Nb-Legierungen sind die Nb_3Sn-Leiter, die zum spröden β-W-Typ gehören, nur in dünnen, auf eine mechanisch feste Unterlage aufgebrachten Schichten zur

Spulenherstellung verwendbar. In Abb. 13.20 sind unter 7 bis 10 die j_c-B-Eigenschaften von Nb_3Sn-Bändern verschiedener Herkunft dargestellt. Dieses Material zeichnet sich durch hohe Stromdichten und maximale Induktionen von mehr als 18 T aus.

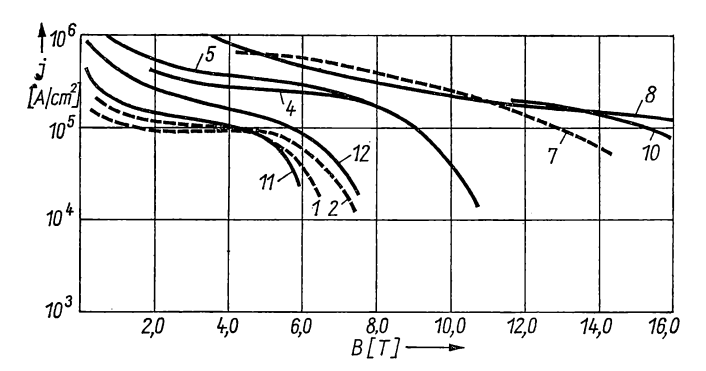


Abb. 13.20 Kritische Stromdichte verschiedener Supraleiter

Nb–Zr-Legierungen werden in Drahtform zwischen 0,12 und 1 mm Kerndurchmesser durch Kaltziehen hergestellt und zur Verbesserung der Stabilisierungseigenschaften elektrolytisch mit einem Cu-Mantel überzogen.

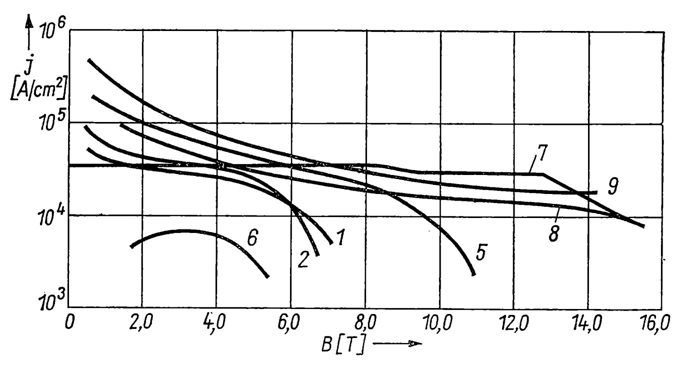


Abb. 13.21 Kritische Stromdichten supraleitender Materialien

Nb–Ti-Legierungen werden bereits in einem frühen Fabrikationsstadium mit Cu ummantelt und gemeinsam heruntergezogen, so daß ein ausgezeichneter elektrischer und mechanischer Kontakt zwischen beiden Materialien entsteht. Ein weiterer Vorteil des Nb–Ti-Materials ist seine leichtere Herstellung. Um hohe kritische Stromdichten zu erzielen, muß man beide Legierungen stark kaltverformen, was bei Nb—Ti von einem Anfangsquerschnitt von 20 mm² an möglich ist.

Nb_3Sn-Material von RCA (*7*) besteht aus einem Hastelloy-Band, auf das eine Nb_3Sn-Schicht durch H_2-Reduktion der gemischten Nb- und Sn-Chloride bei etwa 1000°C im Vakuum niedergeschlagen wird. Das 12 mm breite GE-Band (*10*) wird durch Diffusion einer Sn-Schicht hergestellt, die auf ein 10 μm starkes Nb-Band aufgebracht wird. Beide Seiten werden durch Cu-Folien abgedeckt. In ähnlicher Weise wird das „Niostan"-Band (*8*) und das CSF-Band (*9*) hergestellt, wobei die Cu-Schicht durch Elektrolyse aufgebracht wird.

Im Vergleich zu den in Abb. 13.20 wiedergegebenen Meßergebnissen an kurzen Probenenden sind in Abb. 13.21 die kritischen Stromdichten derselben Materialien dargestellt, wie sie in praktisch gewickelten Magnetspulen einschließlich der Isolationsabstände erreicht werden können. Es sind dabei die von verschiedenen Herstellern für Magnetspulen von etwa 2,5 cm Bohrung und 7⋯14 cm Außendurchmesser gemachten Angaben zugrunde gelegt worden. Für größere Magnete sind die j_c-Werte in dieser Darstellung zu hoch, da zusätzliches Stabilisierungsmaterial einzubauen ist.

Über den Aufbau von Nb–Sn-Diffusionsschichten und ihre kritischen Stromdichten in Feldern von 9 T siehe [*13.173, 13.174, 13.175*]. Die Herstellung stabilisierter Nb_3Sn-Schichten wird von GAVALER et al. [*13.80*] und die von Nb_3Sn-Gasphasenschichten in [*13.35, 13.142*] beschrieben. Die beim Wickeln von Spulen und durch die Stromkräfte entstehenden Zugspannungen setzen die kritische Stromdichte herab [*13.154*]. Von BODE und WOHLLEBEN [*13.36*] ist die Zunahme von j_c bei Bestrahlung der Nb_3Sn-Schicht mit energiereichen Protonen nachgewiesen worden.

Von weiteren β-W-Materialien sind Herstellungsmethoden für V–Ga- und

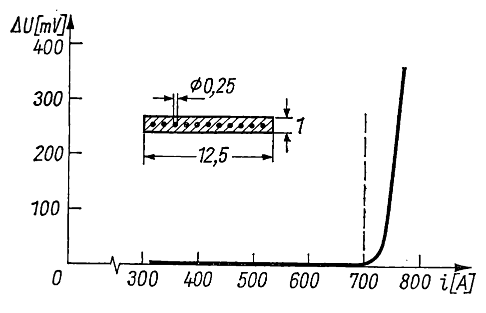


Abb. 13.22 Stabilisierter Supraleiter

V–Si-Diffusionsschichten [*13.153, 13.115*] sowie für Nb–Al-Schichten [*13.170*] und deren kritische Stromdichte bekannt. Obwohl diese Schichten vielfach bessere Eigenschaften als solche aus Nb_3Sn aufweisen, wird derzeit wegen der leichteren Herstellung letzteres anderen Nb-Verbindungen vorgezogen.

Stabilisierte Supraleiter sind mit Al, Ag oder Cu in gutem mechanischem und elektrischem Kontakt ummantelt und können, wie in Abb. 13.22 gezeigt, stabil bis zum Übergang in die Normalleitung betrieben werden. Dieser Vorschlag

geht auf KANTROWITZ und STEKLY [*13.103*] zurück, die in ein Cu-Band von $12 \times 1\ \text{mm}^2$ Querschnitt neun Nb–Zr-Drähte von 0,25 mm Durchmesser einwalzten und mit diesem kombinierten Leiter eine Spule wickelten. Ist die Spule ganz von flüssigem He umspült, so läßt sich der Leiter mit etwa 700 A belasten, ehe Normalleitung einsetzt. Wegen des kleinen Widerstandes des zum Supraleiter parallelgeschalteten Cu-Bandes übernimmt dieses beim Eintritt der Normalleitung ohne merkliche Temperaturerhöhung den gesamten Strom.

KEILIN et al. [*13.109*] haben den stabilisierten Supraleiter theoretisch behandelt und den von KANTROWITZ und STEKLY eingeführten Stabilisierungsfaktor α abgeleitet. Es zeigt sich, daß volle Stabilisierung nur dann erreicht wird, wenn

$$\alpha = \frac{\varrho_n i_c^2}{hPA(T_c - T)} \leqq 1; \tag{13/48}$$

dabei bedeuten ϱ_n den spezifischen Widerstand des normalleitenden Materials, i_c den kritischen Strom, P und A Umfang und Querschnitt des Normalleiters, h die Wärmeübergangszahl zwischen Leiteroberfläche und Heliumbad sowie T_c und T Sprungtemperatur des Supraleiters bzw. Heliumbadtemperatur. Wie aus Gl. (13/48) hervorgeht, soll der Normalleiter möglichst große Oberfläche und kleinen Restwiderstand besitzen und eine gute Wärmeabfuhr an das Kühlbad gewährleisten.

Stabilisierte Leiter werden heute als kupferüberzogene *Runddrähte* mit einem oder vielen supraleitenden Seelen oder als Cu- oder Al-*Bänder* mit vielen Nb–Ti-Drähten hergestellt, wobei die Supraleiter bei den verschiedenen Fabrikationsgängen mitgewalzt oder gezogen werden. In Abb. 13.23 sind einige solcher stabilisierter Leiter im Querschnitt dargestellt, wobei der kritische Strom für

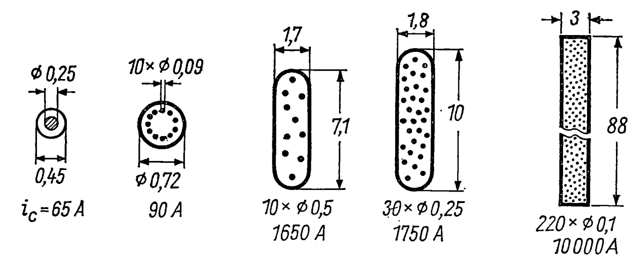


Abb. 13.23 Stabilisierte Supraleiter

ein Feld von 5 T gilt. Zur Aufnahme von Zugspannungen werden die stabilisierten Leiter besonders für große Magnete mit eingewalzten V2A-Drähten versehen. Daneben gibt es verseilte supraleitende *Kabel*, die aus vielen verkupferten Einzelleitern bestehen und mit Sn oder In verlötet sind.

Von STRAUSS und ROSE [*13.195*] sind zusammengesetzte Nb–Cu-Leiter zum Studium des Proximity-Effekts untersucht worden; IHARA und KAIHO [*13.100*] behandeln maximal stabilisierende Supraleiter.

13.33 Berechnung supraleitender Magnete [13.54, 13.209]

Zur Berechnung des Magnetfelds in einer supraleitenden Spule können die Formeln des § 13.21 benutzt werden; insbesondere gilt auch der Fabry-Faktor nach Gl. (13/33) und die Kurvenschar der Abb. 13.7. Der Einfluß der Magnetisierung des Spulenleiters ist bei der Nennfeldstärke des Magnets vernachlässigbar (s. Abb. 12.28b). In Abb. 13.7 ist noch die Kurve für die bei vorgegebener Maximalfeldstärke erforderliche minimale Drahtlänge eingetragen, die durch die Beziehung

$$5\beta = 3\alpha + 1 - \frac{4}{\alpha^2}$$

mit den Bezeichnungen des § 13.21 gegeben ist.

Da die kritische Stromdichte — wie aus den Abbildungen 13.20 und 13.21 zu ersehen ist — stark vom wirksamen Feld abhängt, kann supraleitendes Material gespart werden, wenn man j_c mit wachsendem Radius ansteigen läßt. Dies kann man mit verschiedenen Drahtstärken und Bandbreiten oder durch radiale Unterteilung in Einzelspulen mit getrennter Stromversorgung erreichen. Als Beispiel für die Optimierung eines großen Magneten nach diesem Schema siehe [*13.185*]. Williams [*13.205*] gibt ein anderes Verfahren für die Berechnung einer optimalen Stromdichteverteilung in supraleitenden Spulen an, wobei das lokale Feld zugrunde gelegt wird.

Für das Zentralfeld von *geteilten Spulen* gilt analog zu Gl. (13/32) die Beziehung

$$H_{00} = j\lambda a_1[F(\alpha, \beta_1) - F(\alpha, \beta_2)], \tag{13/49}$$

wenn die Größe $i a_1/A$ durch Stromdichte j und Füllfaktor λ ausgedrückt wird, wenn ferner $\beta_1 = L/2a_1$, $\beta_2 = L/2a_2$ ist und L die Gesamtlänge der Spulen einschließlich ihres Abstandes g bezeichnet.

Für das magnetische Feld auf der Achse eines gleichmäßig gewickelten Solenoids gilt die Beziehung:

$$H(x, 0) = \frac{1}{2} j\lambda a_1 \left[\gamma_1 \sinh^{-1}\frac{\alpha}{\gamma_1} - \gamma_1 \sinh^{-1}\frac{1}{\gamma_1} + \gamma_2 \sinh^{-1}\frac{\alpha}{\gamma_2} - \gamma_2 \sinh^{-1}\frac{1}{\gamma_2}\right], \tag{13/50}$$

wenn $\gamma_1 = (b + x)/a_1$, $\gamma_2 = (b - x)/a_1$ und $\alpha = a_2/a_1$.

Die Kosten für den supraleitenden Draht lassen sich durch Gl. (13/34) mit bekanntem Meterpreis ($\approx$ 1 DM/m, 10 mil-Draht) berechnen. Im Bereich von 4···8 T betragen die Kosten eines supraleitenden Magneten nur etwa 25···30% der eines Elektromagneten bzw. eines wassergekühlten Luftmagneten einschließlich der Stromversorgung.

Für Magnete großen Durchmessers ist die Aufnahme der großen mechanischen Kräfte durch armierte stabilisierte Leiter und die geeignete Konstruktion der Stützen und Behälter von erstrangiger Bedeutung. Für eine Spule mit endlicher Länge tritt die maximale Schubspannung auf das Leitermaterial

in Spulenmitte an der Innenbohrung auf und beträgt

$$\tau_m = K W_m \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}, \tag{13/51}$$

wenn W_m durch Gl. (13/42) und K durch die Beziehung

$$K = \frac{\alpha - 1}{F(\alpha, \beta)} \tag{13/51a}$$

gegeben ist. Es ist daraus zu ersehen, daß mit wachsendem a_1, d. h. abnehmendem α, die Schubbelastung stark zunimmt. In Spulen, die kurz gegen den Außendurchmesser $2a_2$ sind, können höhere als in Gl. (13/51) angegebene Spannungen auftreten, da das Feld an der Innenseite der Spule größer als das Zentralfeld ist.

13.34 Konstruktion von supraleitenden Spulen

Kleinere supraleitende Spulen werden auf einen Spulenkörper aus Al, Cu, V2A oder Micarta gewickelt, der mit starken Flanschen versehen ist und die nötige Festigkeit besitzen muß. Um eine hohe Durchbruchsfestigkeit zwischen aufeinander folgenden Lagen zu erhalten, wird jede gewickelte Lage mit einem Mylarfilm von 50 μm Stärke abgedeckt. An den Flanschen werden die letzten

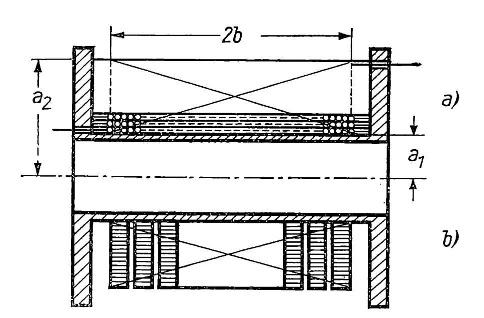


Abb. 13.24 Supraleitende Spulen

5···10 mm nicht bewickelt und durch ein gleich breites Klebeband (Tesafilm) ausgefüllt. In Abb. 13.24 ist in der oberen Hälfte der Querschnitt einer solchen Spule dargestellt und gezeigt, wie die Drahtenden isoliert durch die Flansche des Spulenkörpers geführt werden. Dabei sind scharfe Knicke zu vermeiden und Drahtverbindungen oder Zuleitungen so weit von der Spule zu entfernen, daß weniger als 50% der Maximalfeldstärke wirksam sein können.

Supraleitende Nb–Zr- und Nb–Ti-Drähte mit dem üblichen Kerndurchmesser von 0,25 mm (Gesamtdurchmesser 0,35···0,45 mm) werden in Längen von mindestens 3000 m hergestellt, so daß sich in kleineren Spulen Verbindungsstellen erübrigen. Sollen supraleitende Drähte miteinander oder mit der

Cu-Zuleitung verbunden werden, so werden die Drahtenden nach Entfernen der Außenisolation entweder weich verlötet oder die blanken Enden (ohne Cu-Überzug) mit einem Ultraschallötkolben verzinnt und zwischen verzinnte Cu-Blöckchen stark gepreßt. Nb–Ti-Legierungen lassen sich nach dem Abschmirgeln ohne Schwierigkeit punktschweißen.

Nb_3Sn-Bänder werden in Breiten von 2,3 und 4,5 mm hergestellt und besitzen eine Dicke von 0,11 mm. Die Spule wird ähnlich wie bei der Drahtwicklung auf einer Wickelmaschine mit konstantem Drahtzug hergestellt, der etwa 1 kp bei mittleren Spulen und 1,5 kp bei Spulen für Felder oberhalb von 5 T betragen soll. Der Vorschub der Wickelmaschine soll 10% größer als die Bandbreite sein, damit sich die Windungen nicht berühren. Wie bei der Drahtwicklung wird jede Lage mit einer Mylarfolie abgedeckt und die Randschicht frei gelassen.

Eine zweite bei Nb_3Sn-Band anwendbare Wickelmethode ist in Abb. 13.24b dargestellt und benutzt einzelne Scheibenspulen, die innen und außen mit Flanschen zur elektrischen Verbindung der Einzelspulen versehen sein können. Einige Fabrikate von Nb_3Sn-Bändern sind mit einer Mylarisolierung versehen. Der Füllfaktor einer mit Band gewickelten Spule hängt von der Banddicke, der Wickelvorspannung und der Dicke der Zwischenisolation ab. Die Bandenden lassen sich durch Weichlötungen mit 60-40-Lötzinn verbinden. Der elektrische Widerstand zwischen überlappenden Lötungen von 2,5 cm Länge ist kleiner als 0,1 $\mu\Omega$. Auch Preßkontakte sind bei Nb_3Sn-Bändern anwendbar.

13.35 Beispiele von supraleitenden Spulen

Drahtgewickelte supraleitende Magnetspulen sind für Induktionen bis zu 8 T und mit Innendurchmessern von 1,5⋯5 cm kommerziell erhältlich. Für besondere Anforderungen an Homogenität werden Magnete mit zusätzlichen Korrekturspulen hergestellt, bei denen das Feld bei 5 T Nennfeldstärke innerhalb eines Kugelvolumens von 1 cm Durchmesser auf $10^{-6}\cdots10^{-5}$ konstant ist. Auch geteilte Spulen für Untersuchungen in Transversalrichtung bis 5 T im Zentrum sind heute von verschiedenen Herstellern zu beziehen.

Von Gugan [*13.86*] wird eine kleine supraleitende Spule von 2,5 cm Innendurchmesser und 7,5 cm Länge beschrieben, die für ein Feld von nur 10 kA/cm ausgelegt und mit Kompensationsspulen zur Homogenisierung ausgerüstet ist.

Von Goncharv [*13.83*] ist die in Abb. 13.25 dargestellte supraleitende Doppelspule konstruiert, mit der 8,5 T erzeugt werden können. Die innere Spule S_2 besitzt 2 cm Innendurchmesser und im Mittelteil eine separate Wicklung S_1, die gesondert mit Strom versorgt wird und allein 1,7 T erzeugt. Die unterteilten Außenspulen S_3 und S_4 werden mit kleinerem Strom betrieben und liefern zusammen ein Feld von etwa 3,5 T. Als Spulendraht ist eine Nb–Zr-Legierung mit 75% Zr und Cu-Ummantelung verwendet. die bei 6 T eine kritische Stromdichte von 700 A/mm² besitzt. Wie aus Abb. 13.25 ersichtlich ist, sind beide Spulenpaare mit einem supraleitenden Nebenschluß versehen, der die supraleitenden Schalter B mit den Heizern H enthält und beim Erregen des Magneten durch Einschalten von H normalleitend gemacht wird. In die

Magnetbohrung können zylindrische Polschuhe P aus Permendur eingesetzt werden.

Bei dem von MONTGOMERY und RINDERER [*13.152*] konstruierten 7,2-T-Magneten von 3,6 cm Innendurchmesser und 13,4 cm Länge, der ebenfalls aus zwei Einzelspulen besteht, wird Nb–Ti-Draht von 0,25 mm Durchmesser mit einer gemeinsam heruntergezogenen Cu-Ummantelung von 0,40 mm Außendurchmesser benutzt, der bei 5 T mit etwa 50 A belastet werden kann. Die Spule ist auf einen V2A-Spulenkörper mit Mycarta-Endflanschen ohne besondere Kühlkanäle für das flüssige He gewickelt.

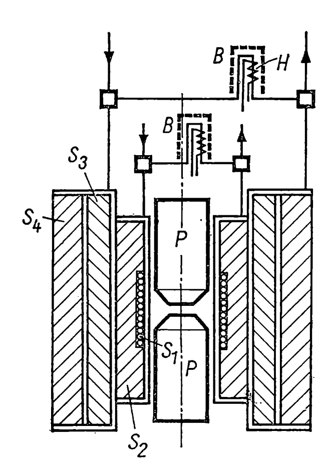


Abb. 13.25 Supraleitender Magnet für 8,5 T

Magnete von größeren Abmessungen werden mit Profildraht (s. Abb. 13.23) oder mit *Litzendraht* gewickelt und erfordern Erregerströme von 200···1000 A bei mittleren Abmessungen. Das von LAVERICK und LOBELL [*13.133*] beschriebene Magnetsystem für eine kleine He-Blasenkammer besteht aus drei ineinandergesetzten Spulen von etwa 30 cm Länge und Innendurchmessern von 17,8; 28 und 45,7 cm. Als Spulendraht werden verseilte Kabel aus Nb–Ti- und Cu-Drähten mit Nylonisolation benutzt, deren mittlere Stromdichte beim Nennfeld zwischen 5 und 9 kA/cm² liegt. Die maximalen Induktionen der Einzelspulen betragen 6,7, 4,2 und 1,7 T; das gesamte Magnetsystem erzeugt ein Feld von knapp 7 T.

Für höhere Feldstärken sind nur die Nb_3Sn-Bänder als Leiter für die Innenspulen von geteilten Magneten geeignet. Für die äußeren Spulen wird Nb–Ti- bzw. Nb–Zr-Draht mit Cu-Ummantelung benutzt. Das höchste heute mit solchen Spulen erreichte Feld beträgt etwa 14 T.

Für Nb_3Sn-Band eignet sich besonders die in Abb. 13.26 gezeigte Wicklung aus flachen Scheibenspulen, die beiderseits der Blechscheiben S von innen nach außen gewickelt und auf das Kernrohr R aufgereiht werden. Die mit Bohrungen oder Radialschlitzen versehenen kreisförmigen Scheiben S haben am inneren Rand Aussparungen, damit das supraleitende Band von der einen auf die

andere Seite der Scheibe gezogen werden kann. Da alle Anschlüsse außen zu liegen kommen, sind die einzelnen Spulen leicht in Serie zu schalten. Die radial wirkenden Stromkräfte werden in Hochfeldspulen von Ringen K aus V2A-Stahl aufgenommen. Abstandsstücke zwischen den Einzelspulen erleichtern die He-Zirkulation. Nach dieser Methode lassen sich 10-T-Spulen herstellen.

Von SAMPSON [*13.181*] ist eine Spule aus dem RCA-Band (Nb_3Sn auf V2A-Band) in vier konzentrischen Abschnitten gebaut worden. Bei einer Innenbohrung von 3,2 cm, 12,7 cm Außendurchmesser und 6,4 cm Länge können 11,2 T erzeugt werden, wofür 2600 m Band erforderlich sind.

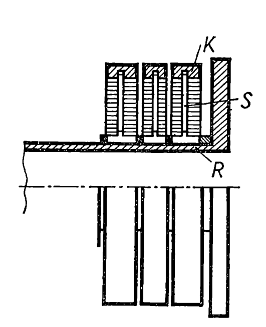


Abb. 13.26 Supraleitende Spule mit Scheibenwicklung

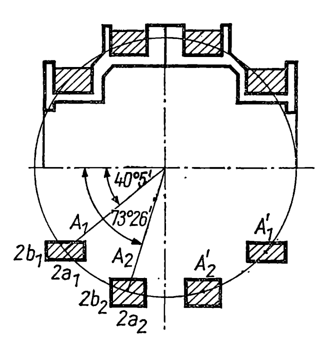


Abb. 13.27 Doppel-Helmholtz-Spule ($2a_1 = 1{,}65$; $2b_1 = 0{,}54$; $2a_2 = 1{,}62$; $2b_2 = 0{,}80$ cm)

Weitere für die Plasmaforschung besonders konstruierte Bauformen mit zwei Einzelspulen, die eine „magnetische Flasche" bilden und deren Felder entgegengesetzt gerichtet sind, siehe [*13.178*]. Die größten heute in Bau befindlichen Magnete werden für Blasenkammern konzipiert und besitzen einen freien Durchmesser von fast 5 m, in dem ein Magnetfeld von 35 kA/cm erzeugt wird. Die voll stabilisierten Einzelleiter tragen Ströme von etwa 10 kA und müssen durch Stahleinlagen gegen die großen mechanischen Kräfte geschützt werden. Die gespeicherte magnetische Energie liegt in der Größe von 1000 MJ.

Durch die Verwendung von Helmholtz-Spulen erreicht man eine für viele Untersuchungen geforderte hohe Feldhomogenität in einem relativ großen Volumenbereich, wie in § 13.16 gezeigt ist. MÄNTYSALO und LAIHO [*13.141*] geben die Konstruktion eines *Doppelspulenpaares* an, wobei die Mittelpunkte der einzelnen Wicklungsquerschnitte — wie in Abb. 13.27 gezeigt ist — auf einem Kreis von 4,6 cm Radius liegen und die anderen Abstände so gewählt sind, daß maximale Homogenität erreicht wird. Die Spulen sind mit Nb–25Zr-Draht von 0,25 mm Durchmesser gewickelt und erzeugen ein Feld von etwa 7 kA/cm, wobei innerhalb einer Kugel von 1 cm Durchmesser das Feld auf 10^{-4} konstant ist.

Eine mit Nb_3Sn-Band gewickelte geteilte supraleitende Spule mit großem Homogenitätsbereich und einem Maximalfeld von 50 kA/cm wird von SAMPSON

und KRUGER [*13.182*] beschrieben. Werden beide Spulen in entgegengesetzter Stromrichtung geschaltet, so wird ein Feldgradient von 24 kA/cm² erzielt.

Von DOI et al. [*13.57*] wird ein in Japan konstruierter sattelförmiger Magnet für 41 kA/cm und 38 cm Innendurchmesser beschrieben, der für einen magnetohydrodynamischen (MHD-)Generator bestimmt ist. Die Wicklungen bestehen aus einem Band aus Reinstkupfer von 4×1 mm² Querschnitt mit eingewalzten Nb–Ti-Drähten und einem Betriebsstrom von etwa 400 A.

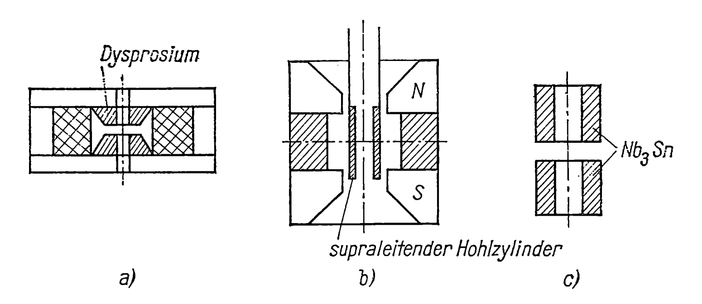


Abb. 13.28 Supraleitende magnetische Linsen

In letzter Zeit haben supraleitende Magnete auch Bedeutung für den Aufbau von *magnetischen Linsen* in der Elektronenmikroskopie gewonnen (s. [*13.172*]). In Abb. 13.28 sind einige Beispiele von supraleitenden Linsen dargestellt, die meist eisengeschlossen sind und neben ihrer hohen „Brechkraft" den großen Vorteil aufweisen, daß sie im kurzgeschlossenen Zustand ein zeitlich konstantes Feld erzeugen.

Für Raumfahrtuntersuchungen sind supraleitende Ringspulen von 2 m Durchmesser für ein Feld von etwa 1 kA/cm im Spulenzentrum konstruiert worden, die als Dipolfeld Elektronen abschirmen sollen und im Dauerstrombetrieb einige Tage lang mit *einer* He-Füllung in Funktion bleiben können.

Der derzeit stärkste Magnet aus supraleitendem Material ist eine mit RCA-Nb_3Sn-Band bewickelte Spule von 15 cm Innendurchmesser, 35 cm Länge und einem Gewicht von 600 kg, die ein Feld von 14 T (114 kA/cm) erzeugt.

13.36 Kryostate und Stromzuleitung

Kleine supraleitende Spulen werden meist in Glas-Dewargefäßen oder konventionellen Metallkryostaten benutzt. Der Verbrauch an flüssigem He kann bei größeren Spulen beträchtlich sein und hängt von folgenden Faktoren ab:

1. Strahlungsverluste durch die Kryostatenwände;
2. thermische Leitung durch die Magnethalterung;
3. Wärmezuleitung durch die Stromzuführungen;
4. Wärmezufuhr und -erzeugung durch die Joulesche Wärme in den Stromzuleitungen.

Wird die Spule bei konstantem Feld im Kurzschlußfall betrieben, so fallen die unter 4. genannten Verluste fort und auch die unter 3., wenn die Stromzuleitungen von der Spule abgetrennt werden. Bei drahtgewickelten Spulen mit Betriebsströmen um 50 A umgeht man diese Lösung und nimmt die im stromlosen Zustand relativ kleinen Zuleitungsverluste in Kauf. Bei höheren Spulenströmen werden die Stromzuführungen mit dem verdampfenden He-Gas gekühlt oder die Spulen mit einer *Flußpumpe* erregt (s. § 13.37).

Bei Metallkryostaten aus V2A-Stahl und mit N_2-Kühlung hat man überschlägig mit einem Wärmezustrom von etwa $1\,\mu W/cm^2$ zu rechnen. Die

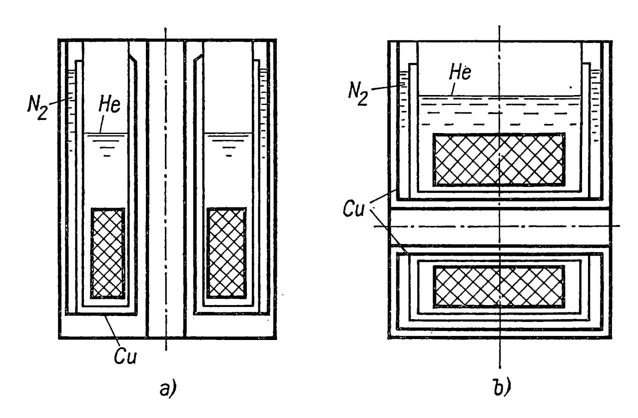


Abb. 13.29 Metallkryostaten für supraleitende Spulen und warme Arbeitsvolumina

supraleitende Spule wird am Deckelflansch an dünnwandigen V2A-Rohren aufgehängt, die oft gleichzeitig als He-Abdampfleitungen dienen. Soll das Magnetfeld bei Umgebungstemperatur zugänglich sein, so muß die Spulenbohrung durch ein vakuumisoliertes Strahlungsschild, das mit flüssigem N_2 gekühlt ist, abgeschirmt werden. In Abb. 13.29 sind zwei Beispiele für die Konstruktion von Metallkryostaten angegeben, bei denen die Spulenachse senkrecht (*a*) bzw. waagerecht (*b*) gerichtet ist. Die nicht vom flüssigen N_2 bespülten Abschirmbleche bestehen der besseren Wärmeleitung wegen aus Cu; alle anderen Teile sind aus dünnwandigem V2A gefertigt.

Ein ähnlicher Aufbau wird von Fradkov [*13.71*] sowie von Endig und Lange [*13.61*] beschrieben, wobei für größere Einheiten durch besondere konstruktive Maßnahmen der Wärmeinhalt des flüssigen He möglichst gut ausgenützt wird.

Größere supraleitende Solenoide, die nicht dauernd benutzt werden, läßt man auf He-Temperatur, wenn die zum Abkühlen von 77 K (fl. N_2) auf 4,2 K erforderliche He-Menge größer ist als die stationären Verdampfungsverluste des Kryostaten. Montgomery und Iwasa [*13.151*] haben quantitativ gezeigt, daß sich eine Spule von 10 kg Gewicht und einem Wärmezustrom von 200 mW von 4,2 K auf 30 K in 2,7 h, auf 50 K in 20 h aufwärmen würde. Um diesen Magnet wieder auf 4,2 K abzukühlen, werden 600 cm^3 flüssiges He benötigt,

während zum Aufrechterhalten von 4,2 K stündlich 280 cm³, d. h. in 20 Stunden 5,6 l flüssiges He verdampfen würden.

Stromzuleitungen. Wie oben aufgeführt, wird durch die Stromzuleitungen Wärme von außen an das He-Bad geführt und flüssiges He verdampft. Durch optimale Abmessungen der Zuleitungen und geschickte Materialauswahl können diese Verluste stark reduziert werden, vor allem, wenn das abdampfende He zur Kühlung der Stromzuleitungen benutzt wird. Das Problem der Optimierung von Zuleitungen ist von vielen theoretisch und experimentell behandelt worden; siehe [*13.55*, *13.143*, *13.147*, *13.167*, *13.204*].

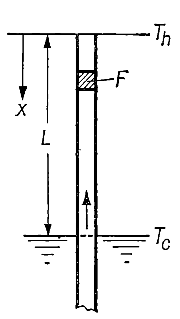


Abb. 13.30 Gasgekühlte Stromzuleitung

Die theoretische Behandlung des Problems geht von der in Abb. 13.30 gezeigten Zuleitung vom Querschnitt F und der Länge L aus, die bei der Temperatur T_c in das He-Bad taucht, bei T_h die Wärme aufnimmt und vom Strom I durchflossen wird. Im Gegenstrom wird die in der Stromzuführung erzeugte Joulesche Wärme durch die verdampfte Badflüssigkeit bzw. den He-Dampf abgeführt, wobei durch große und effektive Austauschflächen die örtliche Temperatur $T(x)$ des Leiters und die des Gases übereinstimmen sollen. Bezeichnet man mit $\dot{m}$ die verdampfende He-Menge, mit λ die thermische Leitfähigkeit der Zuführung, mit c_p die spezifische Wärme des He-Gases und mit r die Verdampfungswärme des flüssigen He, so lautet im stationären Zustand die Differentialgleichung für die Temperatur:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{m} c_p}{\lambda F} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{I^2 \alpha}{F^2 \lambda} T = 0, \qquad (13/52)$$

wenn durch α die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes ϱ entsprechend der Beziehung

$$\alpha = \frac{2 \int\limits_{T_c}^{T_h} \varrho(T)\,\mathrm{d}T}{(T_h - T_c)^2} \qquad (13/53)$$

ausgedrückt wird. Die an der Badoberfläche bei $x = L$ zugeführte Wärmemenge ist dem Temperaturgradienten $(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)_{x=L}$ proportional, d. h., es muß

gelten

$$\lambda F \left(\frac{\partial T}{\partial x_x}\right)_{x=L} = \dot{m} r. \qquad (13/54)$$

Gleichung (13/52) besitzt die allgemeine Lösung

$$T(x) = (T_h - T_c) \frac{\sin\left[\frac{1}{2}(1 - x/L)\sqrt{B^2 - A^2}\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}\sqrt{B^2 - A^2}\right]} \mathrm{e}^{-Ax/2L}, \qquad (13/55)$$

worin die Größen $A = \dot{m} c_p L/\lambda F$ und $B = 2IL(\alpha/\lambda)^{1/2}/F$ die Parameter für die Gasströmung und den Strom sind. Differenziert man Gl. (13/55) nach x und berücksichtigt Gl. (13/54), so findet man den Ausdruck

$$C = \frac{\sqrt{B^2 - A^2}}{2A} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-A/2}}{\sin\left[\frac{1}{2}\sqrt{B^2 - A^2}\right]} \qquad (13/56)$$

mit $C = r/c_p(T_h - T_c)$. Die Größen A, B und C sind drei dimensionslose Parameter, deren gegenseitige Abhängigkeit in Abb. 13.31 dargestellt ist.

Sind Strom und Temperaturdifferenz vorgegeben, erhält man minimale Verdampfungsverluste, indem man die Größe A in Gl. (13.56) zu einem Minimum macht, d. h.,

$$\sqrt{B^2 - A^2} = -A \tan\left[\frac{1}{2}\sqrt{B^2 - A^2}\right]. \qquad (13/57)$$

Eliminiert man den Parameter A aus den Gln. (13/56) und (13/57), so erhält man eine Funktion, die für minimale Verdampfungsrate den Stromparameter B

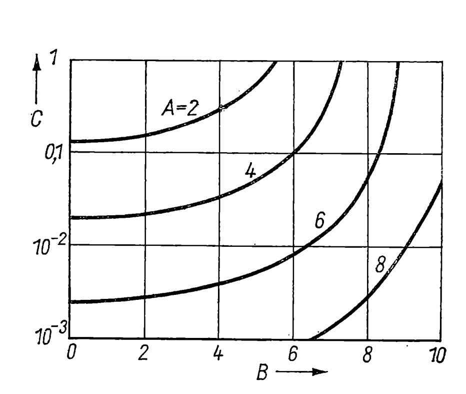


Abb. 13.31 Zur Theorie optimaler Stromzuleitungen

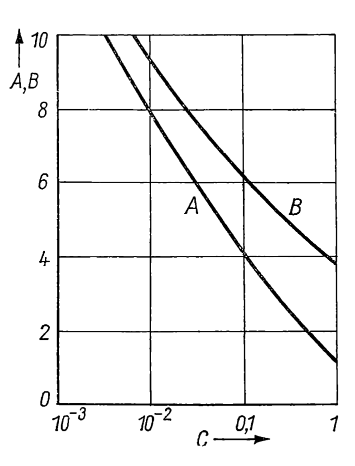


Abb. 13.32 Optimalwerte von A und B als Funktion von C

in Abhängigkeit von der Größe C angibt. Dies geht aus Abb. 13.32 hervor, in der B und der entsprechende Parameter A als Funktion von C aufgetragen sind.

Für einen He-Kryostaten mit vorgegebener Temperatur T_h ist die Größe C bekannt und liefert unmittelbar aus Abb. 13.32 den Optimalwert für B. Durch Einsetzen der Werte von I, α und λ findet man das Verhältnis L/F. Setzt man diesen Wert in die Definitionsgleichung für A ein, so erhält man die verdampfende He-Menge $\dot{m}$. Man kann die optimale Verdampfungsrate auch unmittelbar durch einen neuen Parameter $\dot{M}$ erhalten, wenn man setzt:

$$\dot{M} = \frac{A}{B} = \frac{\dot{m}}{I} \frac{c_p}{2\sqrt{\alpha\lambda}}, \tag{13/58}$$

das in Abb. 13.33 als Funktion von C aufgetragen ist. Bei der Berechnung des Temperaturverlaufs $T(x)$ kann zwischen T_h und T_c ein Teil der Zuleitung wärmer als T_h werden. Ferner ist zu berücksichtigen, daß die thermische Leitfähigkeit λ stark von der Temperatur abhängt und das obige Verfahren zweckmäßig in einigen Schritten durchzuführen ist.

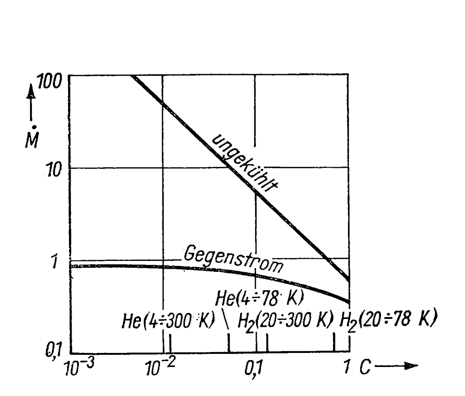


Abb. 13.33 Abhängigkeit von $\dot{M}$ und C

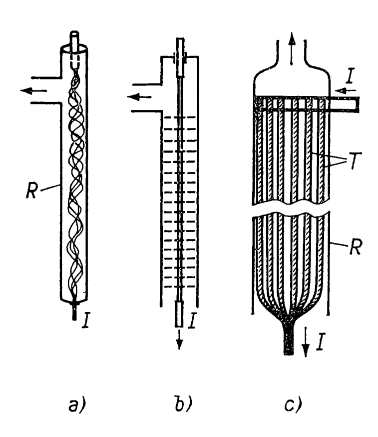


Abb. 13.34 Verschiedene Zuleitungen

Praktische Ausführungsbeispiele von Zuführungen zu supraleitenden Magneten sind in Abb. 13.34 dargestellt, wobei in jedem Fall der Abgasstrom durch ein dünnwandiges V2A-Rohr oder ein Isolierrohr R geleitet wird. Im einfachsten Fall (a) werden dünne Cu-Drähte von 0,05 mm Durchmesser oder 20 µm starke Ag-Bänder benutzt, die lose verseilt und vom Rohr R umgeben sind. Wirkungsvoller ist die in (b) dargestellte Methode, bei der die kompakte Zuleitung, die abschnittsweise verschiedene Werte von L/F besitzen kann, durch angelötete dünne Lochbleche aus Cu gekühlt wird. Bei der von EFFERSON vorgeschlagenen Konstruktion für mehrere Kiloampere (c) werden als Zuleitungen T dünne, gewebte Cu-Drahtschläuche benutzt, die vom Rohr R

umgeben und am warmen Ende in einen mit entsprechenden Bohrungen versehenen Zuleitungsflansch eingelötet sind.

Von Vorteil kann es sein, das kalte Ende der Stromzuführung mit einem Supraleiter (z. B. Lötzinn, Nb) zu überziehen; dadurch wird der Temperaturgradient an der Badoberfläche und damit die Verdampfungsrate verkleinert.

Nach Messungen von MATTHEWS et al. [*13.143*] betragen die Verdampfungsverluste durch *zwei* Cu-Leitungen optimalen Querschnitts und von 50 cm Länge zwischen 78 und 4,2 K und die entsprechenden optimalen Querschnitte:

für I =	5	10	15	20	25	30 A
F =	0,25	0,37	0,50	0,55	0,60	0,75 mm²
$\dot{m} \cdot r$ =	30	40	63	75	100	140 mW

Diese Werte decken sich mit denen von WILLIAMS [*13.204*]. Weitere experimentelle Untersuchungen im Bereich kleiner Ströme von 0···1 A siehe [*13.192*].

13.37 Stromversorgung von supraleitenden Magneten

Zur Stromversorgung von supraleitenden Spulen können einfache Gleichrichtergeräte mit geringer Welligkeit benutzt werden. Da in vielen Fällen die Supraspule eine große Induktivität besitzt und die zeitliche Stromänderung von der Größe 0,1 A/s ist, reichen 6 V als Betriebsspannung meist aus. Geeignete Stromversorgungsgeräte besitzen einen motorischen oder elektronischen Regler, mit dem der Stromanstieg dI/dt und der gewünschte Maximalstrom vorgegeben werden können. Ist letzterer erreicht, so wird selbsttätig ein supraleitender Nebenschluß ein- und die Stromzuleitung abgeschaltet. Ferner ist ein empfindliches Spannungsrelais vorhanden, das beim Auftreten einer sehr kleinen Spannung an den Spulenklemmen den Strom abschaltet.

Kommerzielle Gleichrichtergeräte für Ströme bis zu 30 bzw. 250 A besitzen eine Stromkonstanz von $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ und stellen den Sollwert des Spulenstromes wahlweise in 5, 10 oder 20 min auf den vorgewählten Wert ein.

Der unmittelbar an die Klemmen des Solenoids geschaltete Nebenschluß für den Dauerstrombetrieb besteht aus 20···100 cm des Spulendrahtes, die sich, aufgewickelt und mit einem elektrischen Heizer versehen, in einer isolierenden Hülle befinden. Der Widerstand im normalleitenden Zustand ist von der Größe 1 Ω; zur Heizung werden etwa 100 mW gebraucht. Die Impedanz des Nebenschlusses muß auf jeden Fall größer als diejenige sein, die sich aus dem Stromanstieg an der Spuleninduktivität L berechnet.

Der von ATHERTON [*13.17*] für große supraleitende Spulen benutzte *mechanische Nebenschluß* besteht aus einem kegelförmigen Metallkontakt, der zwischen zwei feste Elektroden gepreßt wird. Mit einem Nb-Kontakt, der mit Sn überzogen ist, wird mit einer Spule von 230 μH eine Zeitkonstante von etwa 2000 s erreicht.

Von großer Bedeutung für den Schutz großer Spulen ist die Methode, mit der die große magnetische Energie während des Abschaltens nach außen dissipiert wird. Nach DOWLEY [*13.58*] lassen sich drei Verfahren unterscheiden:

1. ohmscher Parallelwiderstand, der im Falle eines unerwünschten Übergangs zur Normalleitung eingeschaltet wird;

2. beim Zusammenbruch der Supraleitung wird der Spulenstrom über einen Gleichrichter einer großen Kapazität zugeführt, der bei $i = 0$ abschaltet;

3. über die supraleitende Spule ist eine zweite, normalleitende gewickelt; sie ist außen über einen Widerstand kurzgeschlossen und verhindert im überkritischen Zustand das Auftreten hoher Induktionsspannungen.

Für das Auferregen großer supraleitender Spulen wird von Buchhold [*4.14*] (s. a. § 4.52) ein supraleitender Gleichrichter angegeben, bei dem ein dünnes Nb-Band durch ein magnetisches Wechselfeld abwechselnd normal- und supraleitend gemacht wird. Es lassen sich bis zu 1 kA Spulenstrom nach dieser Methode erzeugen, wobei der Gesamtverlust des Gleichrichters bei 10 Hz nur 200 mW beträgt.

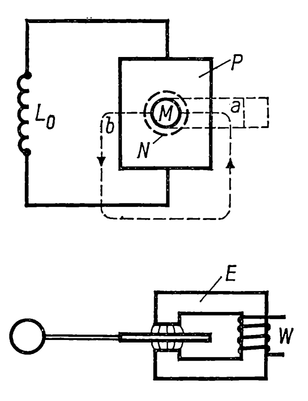


Abb. 13.35 Prinzip der Flußpumpe

Flußpumpen [*13.22*] wenden ein neuartiges Prinzip für die Erregung supraleitender Kreise, speziell Magnetspulen, an. Dieses besteht, wie in Abb. 13.35 gezeigt ist, darin, daß magnetischer Fluß durch eine Hilfsvorrichtung einem geschlossenen supraleitenden Kreis zugeführt wird. Dieser Kreis besteht aus der aufzuerregenden Spule mit der Induktivität L_0 und einer dünnen supraleitenden Platte P z. B. aus Nb. Über P wird der Luftspaltfluß des Elektromagneten M in der Richtung a—b bewegt, wobei die magnetische Induktion im Spalt von M größer als das H_c der Platte P sein soll. Dadurch wird ein normalleitender Bereich N erzeugt, der den magnetischen Fluß Φ enthält und sich mit dem Magneten bewegt. Entfernt man den Fluß Φ aus dem Kreis, ohne an irgendeiner Stelle die Supraleitung aufzuheben, so entsteht in diesem der Dauerstrom

$$\Delta I_1 = \frac{\Phi}{L}, \tag{13/59}$$

wenn L die Gesamtinduktivität des Kreises bedeutet. Voigt [*13.199*] hat rechnerisch gezeigt und Weber [*13.202*] experimentell nachgewiesen, daß nach

z Umläufen des Magneten der Dauerstrom nicht $z\Delta I_1$ und die mittlere Klemmenspannung bei f Umläufen je Sekunde nicht

$$\overline{U} = f\Phi L_0/(L_0 + L_p)$$

beträgt, sondern zusätzliche Verluste auftreten, die den maximalen Strom begrenzen. Nach VOIGT ergibt sich die *mittlere Klemmenspannung* der Flußpumpe aus der Beziehung

$$\overline{U} = qf\left[\Phi - 2IL_p - f\Phi\frac{L_p}{R}\right], \tag{13/60}$$

wenn L_p die Induktivität der Platte und R der Restwiderstand des normalleitenden Flecks ist. Die Größe q gibt den Teil des in N fließenden Stromes an, der während der Magnetbewegung außerhalb von N wieder erscheint. Der zweite Term in Gl. (13/60) zeigt, daß während der Bewegung des Normalbereiches durch die Platte ein Teil des darin fließenden Gesamtstromes abgebaut und eine Gegenspannung hervorgerufen wird. Der Sättigungsstrom der Flußpumpe ergibt sich damit zu

$$I_\infty = \frac{\Phi}{2L_p}\left(1 - f\frac{L_p}{R}\right). \tag{13/61}$$

Eine supraleitende Magnetspule konstanter Induktivität L_0 erreicht nach z Arbeitszyklen den Strom

$$I_z = I_\infty\left[1 - \exp\left\{-\frac{2zL_p}{L_0 + L_p}\right\}\right]; \tag{13/62}$$

beim Aberregen (entgegengesetzter Drehsinn) wird z negativ.

Bei der konstruktiven Durchbildung der Flußpumpen wird die Platte P in Abb. 13.35 meistens auf einen Zylinderumfang gewickelt und der normalleitende Fleck durch Drehung eines Magnetpols über die Platte hinweggeführt [*13.16*]. Anstelle des bewegten Magneten kann auch ein magnetisches Wanderfeld treten, das mit niedriger Frequenz die Platte überstreicht [*13.208*]. WIPF [*13.208*] beschreibt eine 10-W-Pumpe, die aus zwei supraleitenden Spulen für die Erregung des rotierenden Magneten besteht und anstelle der Platte Schleifen aus Nb-Draht enthält. Weitere Ausführungsbeispiele siehe [*13.96*].

Der elektrische Wirkungsgrad der Flußpumpen hängt vom Restwiderstand der Platte P (Pb- oder Nb-Folie), von der Geschwindigkeit des Magnets M und vom Aufbau des magnetischen Kreises ab. Bei den heute bekannten Konstruktionsbeispielen beträgt er weniger als 35%. Flußpumpen können von Vorteil sein, wenn supraleitende Magnetspulen durch hohe Ströme erregt werden müssen und Stromzuführungsverluste klein gehalten werden sollen.

13.4 Elektromagnete [*13.101, 13.177, 13.165*]

Die Bedeutung des klassischen Elektromagneten für experimentelle Untersuchungen ist in letzter Zeit stark zurückgegangen, da für sehr viele Anwendungsfälle mit *supraleitenden Magneten* (§ 13.3) sehr viel stärkere Felder mit größerer zeitlicher und räumlicher Konstanz erzeugt werden können.

13.41 Bauformen [*13.130, 13.203, 13.110*]

Trotz des Wandels in der äußeren Form bestehen auch die modernen Elektromagneten aus den vier Komponenten *Polschuh, Polkern, Wicklung* und *Joch.*

Der *Polschuh* hat die Aufgabe, den magnetischen Fluß des Luftspaltes in den Polkern zu leiten. In Abb. 13.36 sind die heute gebräuchlichen Konstruktionsformen schematisch dargestellt. Man sieht, daß die Polschuhform vom Magnettyp weitgehend unabhängig ist und die Eigenschaften des Luftspaltfeldes in erster Linie vom Material und der Gestalt der Polschuhe abhängen.

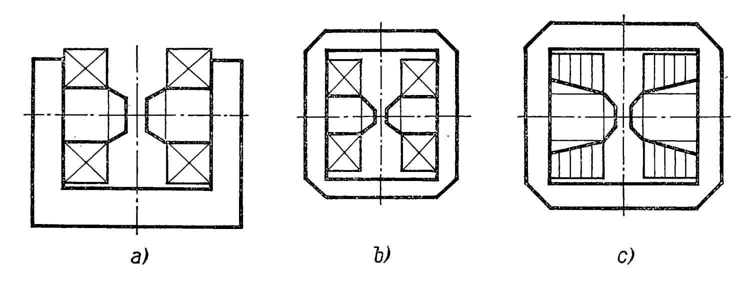


Abb. 13.36 Konstruktionsformen von Elektromagneten: Einfachjoch (a), Doppeljoch (b), Topfmagnet (c)

Einzelheiten über die Berechnung des Luftspaltfeldes für einige Polschuhformen sind in § 13.42 angegeben. In jedem Fall erweitert sich der Querschnitt des Polschuhs so stark, daß die magnetische Induktion nur im engsten Querschnitt den Sättigungswert erreicht.

Der *Polkern* ist Träger der Erregerspulen und leitet den magnetischen Fluß von den Polschuhen ins Joch. Der Polkern darf nicht magnetisch gesättigt sein und muß den Streufluß bei Maximalerregung aufnehmen können. Für höchste Felder sind kurze Polkerne nach Abb. 13.36c mit etwa 45° Kegelwinkel am besten geeignet, da der Streufluß in ihnen keine hohe magnetische Induktion erzeugt. Bei einfacheren Laboratoriumsmagneten werden zylindrische Polkerne aus Weicheisen, für höhere Felder auch aus Fe–Co-Legierungen verwendet.

Die *Erregerspulen* sind auf die Polkerne gewickelt, ihr Wickelquerschnitt hängt von der Polkernform, der erforderlichen Durchflutung (s. § 13.14), der anwendbaren Stromdichte und der Wicklungsart ab. Die Stromdichte ist von der Art der Spulenkühlung abhängig und wird durch Kühlung auf tiefe Temperaturen stark erhöht. Moderne Magnete größerer Leistung werden fast ausschließlich mit Wasserkühlung ausgeführt.

Das *Joch* hat die Aufgabe, den magnetischen Fluß vom Luftspalt über die Polschuhe und Polkerne mit kleinem magnetischem Widerstand zu schließen. Dazu ist ein ausreichender Jochquerschnitt erforderlich, der etwa um den Faktor 1,5 größer als der Querschnitt der Polkernbasis sein sollte. Da die Erfahrung zeigt, daß die Feldstärke im Luftspalt bei gleichen geometrischen Abmessungen des Eisenweges um so größer wird, je näher die Spulen an den

Luftspalt heranrücken, wird auch bei kleineren Magneten die Bauform nach Abb. 13.36b bevorzugt.

Die gebräuchlichste Form der heute benutzten *Labormagnete* ist in Abb. 13.37 dargestellt, sie ist für waage- und senkrechte Feldrichtung geeignet. Auf der Grundplatte P sind die senkrechten Jochteile J aufgesetzt und gemeinsam zur Aufnahme der Jochkerne K durchbohrt. Durch Spindeln S können die Polkerne mit den angesetzten Polschuhen meßbar verschoben werden, so daß

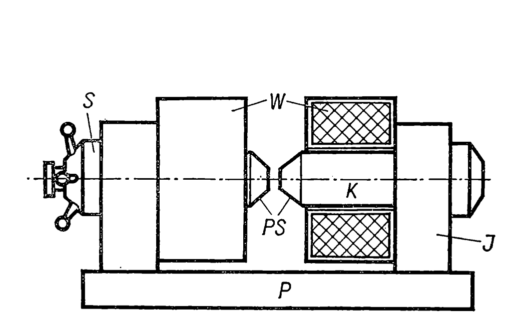


Abb. 13.37 Laboratoriumsmagnet mit offenem Joch

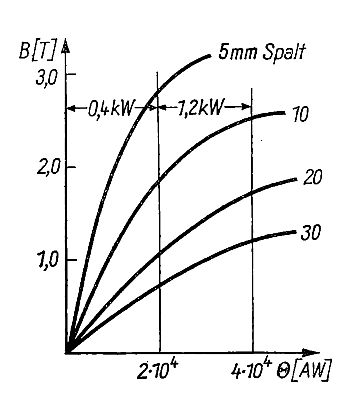


Abb. 13.38 Luftspaltinduktion eines Laboratoriumsmagnets

der engste Luftspalt zwischen 0,5 und z. B. 5 cm einstellbar ist. Die Spulen W sind an J befestigt und belasten durch ihr Gewicht nicht die Polkerne. Durch Unterteilung des Wicklungsquerschnittes lassen sich ausreichende Strömungsquerschnitte für den Wasserdurchfluß schaffen. In Abb. 13.38 ist für einen gebräuchlichen Magnet (Fa. Bruker) der Bauform nach Abb. 13.37 die Luftspaltinduktion für verschiedene Luftspalte und Polschuhdurchmesser als Funktion der Durchflutung Θ dargestellt. Wegen der Polschuhsättigung wird bei etwa 3,3 T für den engsten Polschuhabstand der Maximalwert erreicht. Durch die Verwendung von Fe—Co für Polschuhe läßt sich eine maximale Luftspaltinduktion von über 4 T erzielen.

13.42 Berechnung des magnetischen Kreises

Bei Kenntnis der Magnetisierungskurven der in einem magnetischen Kreis benutzten Ferromagnetika (vgl. Abb. 13.3) kann man den Durchflutungsbedarf nach dem Berechnungsschema des § 13.14 in guter Näherung ermitteln. Nicht berücksichtigt bleiben die Streuflüsse, die besonders bei großem magnetischen Fluß, d. h. hoher Luftspaltinduktion, einen zusätzlichen Durchflutungsanteil fordern.

Feld im Luftspalt. Zur Berechnung der Luftspaltinduktion zwischen zwei gleichen und koaxialen Polschuhen beliebiger Form geht man von Abb. 13.39 aus. Jedes Oberflächenelement erzeugt ein Feld, das aus der effektiven Polstärke berechnet werden kann. Bezeichnet man mit σ die Volumenmagnetisie-

rung und wird die Ringfläche $\mathrm{d}A = 2\pi r\,\mathrm{d}r$ senkrecht zur Magnetisierungsrichtung gerechnet, so ergibt sich der von zwei zylindrischen Ringen vom Radius r und der Dicke $\mathrm{d}r$ herrührende Feldanteil aus

$$\mathrm{d}H = \frac{M\,\mathrm{d}A}{2z^2\pi}\cos\beta = \frac{M}{2\pi}\,\frac{2\pi r\,\mathrm{d}r}{r^2}\sin^2\beta\cos\beta, \tag{13/63}$$

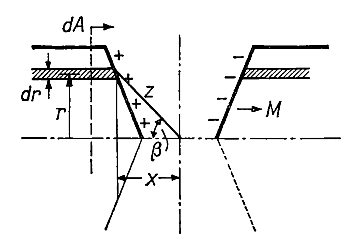


Abb. 13.39 Zur Berechnung des Luftspaltfeldes

wenn M die Magnetisierung und $\cos\beta = x/z$ bedeutet. Durch Integration über die Oberfläche der Polschuhe findet man die Feldverteilung im Luftspalt [*13.148*].

Zylindrische ebene Polschuhe nach Abb. 13.40a erzeugen das Feld

$$H = Mx\int\limits_0^{r_1}\frac{r\,\mathrm{d}r}{(x^2+r^2)^{3/2}} = M(1-\cos\beta). \tag{13/64}$$

Für *Kegelstumpfpole* (nach Abb. 13.40b) gilt die Beziehung

$$H = M\left[1-\cos\beta+\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{r\cot\beta r\,\mathrm{d}r}{r^3(\cot^2\beta+1)}\right] = M\left(1-\cos\beta+\cos\beta\sin^2\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right). \tag{13/65}$$

Differenziert man in Gl. (13/64) den Ausdruck $Mx/(r^2+x^2)^{3/2}$ nach x, so findet man den Maximalwert für $\tan\beta = \sqrt{2}$, d. h., $\beta = 54°44'$. Sind die

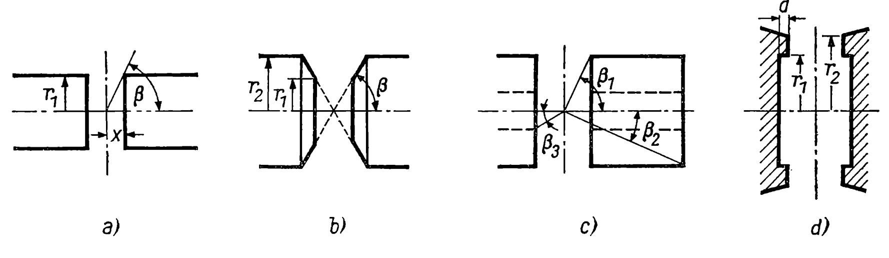


Abb. 13.40 Verschiedene Polschuhformen

Polschuhe nicht vollkommen gesättigt, so wird man β etwas größer, z. B. 60°, wählen. Der erste Term in Gl. (13/65) entspricht den flachen Polschuhflächen; der zweite Ausdruck ist der von den Kegelflächen herrührende Beitrag.

Flache, durchbohrte Polschuhe nach Abb. 13.40c. Führt man die drei Winkel β_1, β_2 und β_3 ein, so gilt für das Feld die Beziehung

$$\begin{aligned} H &= M[(1 - \cos\beta_1) - (1 - \cos\beta_2) - (1 - \cos\beta_3)] \\ &= M(\cos\beta_2 + \cos\beta_3 - \cos\beta_1 - 1). \end{aligned} \tag{13/66}$$

Von WATKINS [*13.201*] ist die Feldverteilung in einem gestuften Luftspalt berechnet worden. Von BJORKEN und BITTER [*13.33*] werden Feldverteilung und Homogenitätsbereich zwischen ebenen Polschuhflächen angegeben, die nach Abb. 13.40d am Außenrand in axialer Richtung verdickt sind. Bei passender Wahl von r_2/r_1 und d läßt sich der homogene Feldbereich gegenüber flachen Polschuhen stark vergrößern (s. a. [*13.10*]).

Durch ungleichförmige Struktur des Polschuhmaterials werden im Luftspaltfeld kleine Inhomogenitäten erzeugt, die z. B. bei Kern- oder Elektronenresonanzexperimenten störend sind und die Resonanzlinien verbreitern. Von BROWN und BITTER [*13.41*] sind mit einer winzigen schwenkbaren Induktionsspule (0,8 mm Innen-, 2 mm Außendurchmesser, 1 mm Länge, 900 Windungen) solche Inhomogenitäten mit einer Nachweisempfindlichkeit von 10^{-2} A/cm nachgewiesen worden.

13.43 Leistungsbedarf

Die nach § 13.14 zu berechnende Durchflutung eines Elektromagneten muß von den Amperewindungen der beiden Wicklungen aufgebracht werden. Das Äquivalent ist die im Luftspalt erzeugte magnetische Energie $\mu_0 H_0^2 v/2$, wenn v das Volumen des Luftspalts ist. Andererseits ist für die Erzeugung des magnetischen Induktionsflusses Φ ein bestimmtes Volumen des magnetischen Kreises und für die Durchflutung ein von den Kühlbedingungen abhängiges Wicklungsvolumen erforderlich, deren Summe mit V bezeichnet wird.

Vergleicht man Elektromagneten gleicher Bauform, jedoch verschiedener Größe, so läßt sich das bereits 1872 von Lord KELVIN ausgesprochene Theorem anwenden, wonach sich die Feldstärke in korrespondierenden Punkten im Luftspalt nicht ändert, wenn man alle Dimensionen einschließlich der Durchflutung $\Theta = iN$ um denselben Faktor vergrößert oder verkleinert. Im Fall von Kegelstumpfpolschuhen (Abb. 13.40b) kommt nach Gl. (13/65) im Ausdruck für das Feld gegenüber Gl. (13/64) ein Term $\ln(r_2/r_1)$ hinzu, der auch durch $1/3 \ln(r_2/r_1)^3$ ausgedrückt werden kann. Setzt man $r_1{}^3$ proportional zu v, $r_2{}^3$ proportional zu V an, so sollte H als Funktion von $\log(V/v)$ eine Gerade ergeben.

Für nicht korrespondierende Doppelkegelpolschuhe ist v von r_1 sowie dem Luftspalt d abhängig, und H muß entsprechend korrigiert werden. KLERK und GORTER [*13.113*] haben für eine Reihe von Elektromagneten verschiedener Bauform die im Luftspalt maximal erreichte Feldstärke H' (korrigierter Wert)

in Abhängigkeit von log (V/v) aufgetragen (Abb. 13.41) und innerhalb eines Streubereiches von etwa 1 T den linearen Zusammenhang gefunden. Das Diagramm läßt sich als nützliches Hilfsmittel bei der Konstruktion neuer Magnete benutzen. Aus ihm geht hervor, daß größere Magnete leichter mit

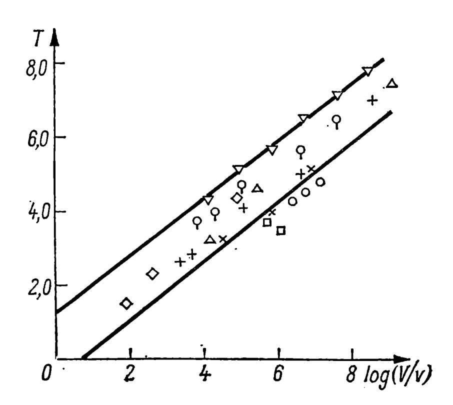


Abb. 13.41 Maximale Feldstärken von Elektromagneten

einem größeren Wirkungsgrad als kleine zu konstruieren sind. Dies ist nach dem Kelvin-Theorem auch verständlich, da bei einer linearen Vergrößerung um den Faktor p die Amperewindungszahl auch um p größer, aber wegen des um p^2 größeren Wicklungsquerschnitts die Stromdichte um den Faktor $1/p$ kleiner wird. Das bedeutet bessere Kühlmöglichkeiten und kleineren Leistungsbedarf.

Grundsätzlich lassen sich die in den §§ 13.2 und 13.3 behandelten effektiveren Spulenformen und Kühlmethoden auch für Elektromagneten anwenden, sofern das gegenüber eisenlosen Spulen überhaupt einen Vorteil bringt. Von besonderer Bedeutung ist neuerdings die Anwendung von *supraleitenden* Erregerspulen geworden, deren elektrischer Leistungsbedarf sehr klein ist und die im Dauerstrombetrieb arbeiten können. In den meisten Fällen wird die notwendige kryotechnische Ausrüstung (thermisch isolierte Spulen, supraleitender Draht, He-Bedarf) voll aufgewogen durch die betrieblichen Vorteile und den Fortfall des Stromversorgungsgerätes für einen wassergekühlten Elektromagneten (s. a. § 13.44).

Über die Stromversorgung für große zeitliche Konstanz des Feldes siehe § 13.8.

13.44 Beispiele von Elektromagneten

Kommerziell verfügbare Elektromagnete sind meist nach Art des Weiss-Magneten (Abb. 13.37) mit offenem Joch oder mit symmetrischem Joch nach Abb. 13.36b konstruiert, vielfach um die Feldachse schwenkbar und mit auswechselbaren Polschuhen ausgerüstet. Der Leistungsbedarf von *Labormagneten* liegt zwischen 0,5 und 50 kW, die maximalen Luftinduktionen erreichen 4,5 T. Die Beschreibung eines universell verwendbaren Elektromagneten geben

SUCKSMITH und ANDERSON [*13.196*]. Der von STACEY [*13.194*] konstruierte Magnet ist mit Ölkühlung ausgerüstet, die im geschlossenen Pumpenkreislauf die Erregerleistung von 10 kW an einen Wasserkühler abführt.

KOHLHAAS und LANGE [*13.116*] beschreiben einen 50-kW-Topfmagneten mit geschlossenem Joch, 29 cm Polschuhbasis und Kegelstumpfpolschuhen aus Fe–Co, der bei 4 cm Luftspalt und 7 cm Durchmesser der Polschuhfläche eine Luftspaltinduktion von 3,5 T liefert. Die Spulen bestehen aus je 8 Einzelflachspulen (Cu-Band $25 \times 1{,}4\ \text{mm}^2$), wiegen zusammen 1,07 t und werden durch eine 70-kW-Gleichstrommaschine mit Fremderregung versorgt. Die Joulesche Wärme wird mittels einer Ölkühlung abgeführt. Das Gesamtgewicht beträgt ca. 10 t. Weitere Ausführungsformen siehe [*13.135*]; über den in Upsala aufgestellten Magneten nach dem Prinzip der Abb. 13.36c siehe DREYFUS [*13.59*].

Durch Kühlung der Spulen mit flüssigem N_2 läßt sich analog zu den eisenlosen Magneten in § 13.26 die Erregerleistung verringern, zumal sich die Spulen nur in einem schwachen Streufeld befinden und keine magnetische Widerstandserhöhung auftritt.

Einen echten Gewinn liefern supraleitende Erregerwicklungen sowohl hinsichtlich des Leistungsaufwandes als auch der Konstanz des Feldes im Dauerstrombetrieb der Spulen. KARASIK et al. [*13.106*, *13.107*] verwenden als Wicklung Nb-Ringe in einem Joch aus Armco-Eisen und erzielen eine Luftspaltinduktion von 2 T. Von LANGE [*13.129*] wird ein kleiner Elektromagnet beschrieben, der eine mit flüssigem N_2 gekühlte Spule enthält, die zwei Polkerne in einem He-Bad umgibt und im Luftspalt von 0,5 mm ein Maximalfeld von 7 T liefert. In Abb. 13.42 ist als Beispiel der von FAST et al. [*13.66*] konstruierte

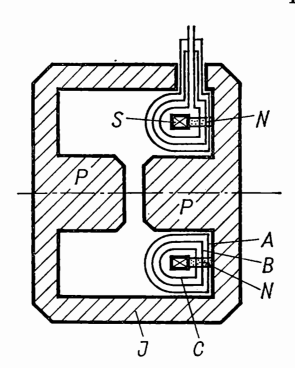




Abb. 13.42 Magnet mit supraleitender Wicklung

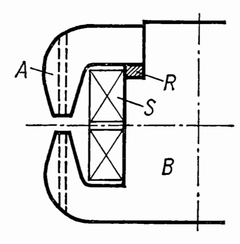


Abb. 13.43 Ringmagnet

Elektromagnet mit supraleitender Wicklung schematisch dargestellt. Es handelt sich um das Modell eines großen Ablenkmagneten, der in einem Volumen von 18 m³ ein Feld von 2 T erzeugen soll. Der Modellmagnet besitzt zwei Eisenpole *P* von etwa 20 cm Durchmesser und 20 cm Länge, die über ein vierteiliges Joch *J* geschlossen sind. Die ringförmige He-Kammer *C* ist im Vakuumbehälter *A* untergebracht und von einem auf etwa 80 K gekühlten Strahlungsschutz *B* umgeben. Die Wicklung *S* besteht aus 14 Einzelscheibenspulen, die

aus Nb_3Sn-Band gewickelt und mit Kühlschlitzen versehen sind. Innen- und Außendurchmesser der Spule betragen 34 bzw. 55 cm; die axiale Länge mißt 5,5 cm. Sie besitzt etwa 5000 Windungen, 100 A Maximalstrom und eine Induktivität (im Eisenkreis) von 17 H. Die von der Spule auf das Joch ausgeübte Axialkraft beträgt 18 Mp und wird durch je 6 Nylonstützen N auf die Polkernbasis übertragen. Die bei 100 A Erregerstrom im Luftspalt von 11 cm erzeugte magnetische Induktion beträgt 1,5 T.

13.45 Spezielle Elektromagnete

In der experimentellen Kernphysik werden häufig Elektromagnete zur Erzeugung räumlich ausgedehnter Felder angewandt, wie z. B. bei großen Ringbeschleunigern, Synchron-Zyklotrons und Betatrons (s. Bd. V). Bei dem in Abb. 13.43 vereinfacht dargestellten Ablenkmagneten von Cockroft [*13.50*] wird ein ringförmiges homogenes Magnetfeld von 80 cm mittlerem Durchmesser in einem Querschnitt von 5×1 cm² für Untersuchungen an α-Teilchen mit einem Topfmagneten erzeugt. Der Oberteil A wird über den Topfmagneten B gestülpt und mit Hilfe des Paßrings R sorgfältig justiert. Die Magnetwicklungen S erzeugen bei 2,2 kW aufgenommener Leistung in einem Luftspalt von 1 cm eine Induktion von 1,8 T mit einer Homogenität von 10^{-3} in radialer und zirkularer Richtung.

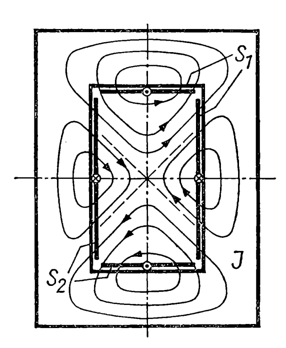


Abb. 13.44 Quadrupolmagnet

Quadrupolmagnete für die Strahlführung polarisierter Teilchen bestehen aus vier Einzelpolen mit getrennter Wicklung und meist großer axialer Abmessung, wobei die Feldsymmetrie durch geeignete Polschuhform erreicht wird. Bei der von Hand und Panofsky [*13.87*] angegebenen Konstruktion (Abb. 13.44) besitzt die Öffnung für den Strahldurchtritt rechteckigen Querschnitt. Der Magnet besteht aus dem Fe-Joch J und Flachwicklungen S_1 und S_2, deren Stromdichte über die Innenberandung des Jochs konstant ist. Die Spulen erzeugen ein Zentralfeld von 1,1 T bei einer Quadrupollänge von 100 cm und einem freien Strahlquerschnitt von 10×70 cm².

Über die Dimensionierung des Eisenkreises magnetischer Elektronenlinsen siehe [*13.95*], ferner Bd. IV.

13.5 Dauermagnetsysteme [*13.97*, *13.163*]

Für die Erzeugung zeitlich konstanter Magnetfelder bis 0,5 T von kleinen Abmessungen sind *Dauermagnete* vorteilhaft. Häufige Anwendung finden sie im Aufbau von Drehspulmeßsystemen (vgl. § 2.225), permanentdynamischen Lautsprechern (s. Bd. I, § 18.43) u. a.

13.51 Dauermagnetischer Kreis [*13.186*]

Die wesentlichen Berechnungsunterlagen für die Dimensionierung eines dauermagnetischen Kreises sind in § 2.225 zusammengestellt. Hierzu werden die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten des ferromagnetischen Kreises (s. § 13.14) auf Dauermagnetwerkstoffe angewandt, deren Eigenschaften aus *Tabelle 12.12*

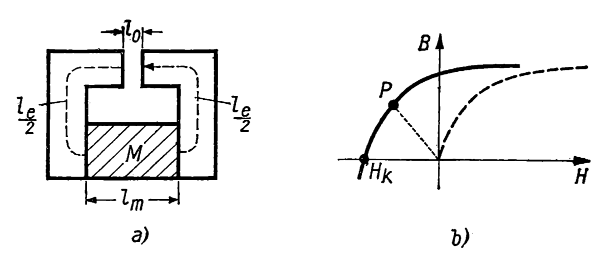


Abb. 13.45 Dauermagnetischer Kreis

bzw. aus Abb. 12.54 entnommen werden können. Betrachtet man den in Abb. 13.45a dargestellten magnetischen Kreis, der aus dem Luftspalt l_0, dem Eisenweg l_e und der Länge l_m des Permanentmagneten besteht, so wird sich eine bestimmte, durch den Punkt P in Abb. 13.45b charakterisierte Induktion einstellen, für welche die innere Durchflutung von M gerade den Durchflutungsbedarf des Kreises deckt. Denkt man sich auf M zwei Wicklungen aufgebracht, die vom gleichen Strom, aber in entgegengesetzter Richtung durchflossen werden, und von der *eine* gerade die innere Durchflutung

$$\Theta_k = H_k \cdot l_m \tag{13/67}$$

des Magnets aufhebt, so ändert sich nichts im magnetischen Kreis. Die Magnetisierungskurve verschiebt sich jedoch — wie aus Abb. 13.45b ersichtlich — um den Betrag H_k nach rechts und hat den Verlauf eines Ferromagnetikums ohne Remanenz. Man kann sich also den Permanentmagneten durch einen Abschnitt aus weichem Eisen ersetzt denken, dessen Magnetisierungskurve durch Verschiebung durch den Nullpunkt hervorgeht, und durch eine Wicklung, die eine Durchflutung Θ_k nach Gl. (13/67) erzeugt.

Aus Gl. (2/90) folgt für die Luftspaltinduktion die Beziehung

$$B_0 = \sqrt{\eta \frac{V_m}{V_0} \mu_0 B_m H_m}; \tag{13/68}$$

die größte Luftspaltinduktion wird erreicht, wenn $B_m H_m$ ihren Maximalwert besitzen (s. Abb. 2.29b, sowie *Tabelle 12.12*). Mit Hilfe von Gl. (2/87) findet man aus Gl. (13/68) den günstigsten Magnetquerschnitt A_m zu

$$A_m = \sqrt{\frac{\mu_0 H_m V_m A_0}{B_m l_0 \eta}}. \tag{13/69}$$

Über die Berechnung und experimentelle Bestimmung des Streuflusses und des Streufaktors von Dauermagnetkreisen siehe [*13.191*].

13.52 Dauermagnetische Werkstoffe [*13.117*]

Die magnetisch harten Materialien sind ausführlich in § 12.55 behandelt. Über Legierungen mit sehr hohen $(BH)_m$-Werten und ihre Anwendung siehe [*13.140, 13.162*]. Die Bedeutung der pulvermetallurgisch hergestellten Dauermagnete wird dargestellt in [*13.46, 13.65*]. Bei höheren Temperaturen nehmen B_s und H_k etwas ab; über stabile Legierungssysteme siehe [*13.49, 13.176*]. Die Alterungsvorgänge an Dauermagneten, die für die Meßgenauigkeit von Drehspulinstrumenten eine große Rolle spielen, werden von Kronenberg [*13.122*] untersucht. In sehr kleinen Luftspalten machen sich Mikroinhomogenitäten des Magnetstahls bemerkbar, wenn keine Weicheisenpolschuhe aufgesetzt sind [*13.146*].

13.53 Permanentmagnete

Große Anwendung finden dauermagnetische Kreise beim Bau von Drehspulinstrumenten (s. § 2.22), wobei heute vor allem *Kernmagnetsysteme* [*13.102*] verwendet werden. Kernmagnete sind zylindrische, diametral magnetisierte Dauermagnete, die konzentrisch von einem Weicheisenzylinder umgeben sind. Der große Vorteil dieser Systeme ist das geringe Streufeld und die Unempfindlichkeit auf Störfelder (s. a. Abb. 2.30). Mit neuen Legierungen, wie AlNiCo 400K oder R, lassen sich Luftspaltinduktionen von 0,5···0,7 T erreichen. Weitere Angaben über Dauermagnetsysteme siehe [*13.212*].

Permanentkreise werden auch für magnetische Linsen in elektronenoptischen Geräten [*13.82*], für Massenspektrometer und Höchstfrequenzoszillatoren (§ 8.35) benutzt.

Größere Dauermagnete werden bei Messungen der paramagnetischen und diamagnetischen Suszeptibilität angewandt, wobei die zeitliche Konstanz der Felder gewährleistet sein muß. Lange und Kohlhaas [*13.130*] beschreiben einen permanenten Topfmagneten mit 10 cm Polkerndurchmesser aus Magnetstahl, der durch eine Hilfswicklung für die gewünschte Luftspaltinduktion aufmagnetisiert werden kann. Bei 2,5 mm Luftspalt und Fe–Co-Polschuhen von 8 mm Stirnflächendurchmesser sind maximal 2,7 T erreichbar.

Von Boltzar [*13.37*] wird ein großer Magnet beschrieben, der in einem Kernresonanzspektrometer benutzt wird und in einem Luftspalt von 3,5 cm eine Induktion von 1,2 T liefert. Wie in Abb. 13.46 dargestellt ist, bestehen die Polkerne aus Kreisscheibensegmenten M des stark anisotropen Magnet-

materials *Columax* mit einem Durchmesser von 42 cm und einer Gesamthöhe von 33 cm. Die Einzelstücke jeder Scheibe sind mit Schwefel in das Bronzegehäuse A eingegossen, das am Joch befestigt ist. Die Polschuhe von 11 cm Dicke bestehen aus der Stahlplatte S, den Weicheisenpolschuhen P mit polierter Oberfläche und einer Justiervorrichtung für den Spalt zwischen P und S mit einstellbaren Keilen. Die Ebenheit der Polflächen wird interferometrisch

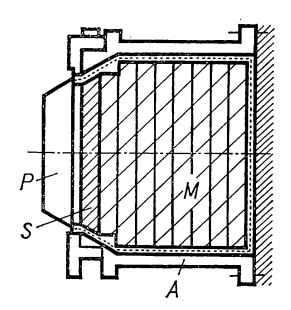


Abb. 13.46 Großer Permanentmagnet

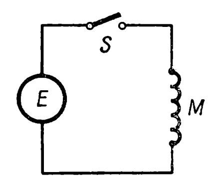


Abb. 13.47 Erzeugung eines Impulsfeldes

geprüft. Der Magnetpol wird mit einer Hochstromwicklung durch kurze Impulse aufmagnetisiert. Beide Pole sind in einem schweren Eisenjoch befestigt; das Gesamtgewicht des Magneten beträgt 4 t.

13.6 Kurzzeitige Magnetfelder [*13.52, 13.134*]

Die höchsten heute erreichbaren Magnetfelder von 0,5 kT und mehr lassen sich nur für einige Millisekunden erzeugen, indem gespeicherte elektrische Energie kurzzeitig über eine Magnetspule entladen wird. Durch besondere Anordnungen kann der magnetische Fluß auf kleine Volumina komprimiert werden, wobei die magnetische Feldstärke im umgekehrten Maße ansteigt. Die experimentelle Technik auf diesem Gebiet hat sich in den letzten Jahren stark fortentwickelt und ist besonders in der Plasmaphysik erfolgreich eingesetzt worden.

13.61 Grundsätzliches

Kurzdauernde Magnetfelder werden nach dem Prinzip der Abb. 13.47 dadurch erzeugt, daß ein Energiespeicher E über den Schalter S durch die Magnetspule M entladen wird, wobei eine gedämpfte oder meist aperiodische Schwingung zustande kommt. Die besonders wichtige Anstiegszeit des Stromes wird durch die Impedanz der Magnetspule und den Innenwiderstand des Speichers E gestimmt.

Als Energiespeicher kommen in Betracht:

1. Kapazität. Es kommen große Hochspannungskondensatoren in Parallelschaltung in Frage, wie sie als Phasenschieber in der Starkstromtechnik ver-

wendet werden. Da die gespeicherte elektrische Energie

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 \tag{13/70}$$

quadratisch mit der Durchschlagsspannung der Isolation anwächst, werden hochwertige Dielektrika, z. B. Glimmer oder Spezialöl, bevorzugt. Dabei können Spannungen bis zu 50 kV benutzt werden.

2. Induktivität. Als Induktivitäten, in denen die magnetische Energie

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{\mu_0}{2} B H V \tag{13/71}$$

(V freies Innenvolumen) gespeichert werden kann, kommen nur supraleitende Spulen in Frage, in denen die Energie beliebig lange gespeichert werden kann und deren Aufladezeit theoretisch unbegrenzt ist. Die Spule soll den Großteil von W_m in die Magnetspule liefern, d. h., ihre Zeitkonstante muß wesentlich größer als die Entladungszeit sein.

3. Generator. Bereits KAPITZA [*13.104*] hat 1927 für Experimente in Feldern von 250 kA/cm für die Dauer einer Halbwelle einen Wechselstromgenerator über die Magnetspule kurzgeschlossen und die kinetische Energie des Ankers zur Energieumsetzung ausgenutzt. Diese Methode wird heute für die stärksten Felder verwendet, wobei vorteilhaft unkonventionelle Maschinen, z. B. *Homopolargeneratoren* (s. § 13.63) und Wechselstrommaschinen mit großen Schwungrädern, benutzt werden. Solche für Impulsbetrieb vorgesehenen Generatoren können kurzzeitig das Vierfache ihrer Dauerleistung abgeben, wenn die Magnetspule thermisch überlastbar ist.

4. Batterie. Akkumulatoren (s. § 16.1) lassen sich bequem für die Erzeugung nicht zu starker Felder benutzen, doch ist die Maximalstromstärke durch ihren Innenwiderstand begrenzt und die Anschaffung im Vergleich zu anderen Energiespeichern teuer.

Stromverteilung [*13.73*]. Die bei der Erzeugung starker Impulsfelder auftretenden Vorgänge lassen sich mit Hilfe der hydromagnetischen Gleichungen erklären, wobei vereinfacht zwei Fälle unterschieden werden können: 1. Spulenleiter mit unendlich hoher Leitfähigkeit und von plastischem, inkompressiblem Verhalten; 2. endliche Leitfähigkeit und starre Form.

Für den Fall 1 ist die Inkompressibilitätsgleichung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{13/72}$$

anzuwenden; die Verallgemeinerung des Ohmschen Gesetzes liefert

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} (\varrho \operatorname{rot} \boldsymbol{B}) + \operatorname{rot} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}), \tag{13/73}$$

wobei ϱ der spezifische elektrische Widerstand des Leitermaterials ist. Die durch die Joulesche Wärme hervorgerufene Aufheizung der Spule wird durch

die Gleichung

$$\frac{\partial(C_v T)}{\partial t} = \mathrm{div}\,(\lambda \,\mathrm{grad}\, T) + \frac{\varrho}{\mu_0{}^2}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B})^2 \tag{13/74}$$

beschrieben, worin C_v die spezifische Wärme pro Kubikzentimeter und λ die thermische Leitfähigkeit des Leiters ist.

Außerhalb der Wicklung ergibt sich aus Gl. (13/73) der Feldverlauf

$$\Delta \boldsymbol{B} = 0 \tag{13/75}$$

mit der Randbedingung $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ an der Leiteroberfläche.

Für ein starres System (Fall 2) vereinfachen sich die Gleichungen (13/73) und (13/74) für das ebene Problem (Oberfläche X-Richtung) zu:

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\varrho}{\mu_0}\,\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}; \tag{13/73a}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{C_v}\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\varrho}{\mu_0{}^2 C_v}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)^2. \tag{13/74a}$$

Für die Anfangsbedingungen $B_z, T = 0$ bei $t = 0$ und $B_z = B_{z0}(\omega t)$, $\partial T/\partial x = 0$ bei $x = 0$ und mit einer neuen Koordinate $s = x(\mu_0 \omega/\varrho)$ ergeben sich die Beziehungen

$$\frac{\partial B_z}{\partial(\omega t)} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 B_z}{\partial s^2}; \tag{13/73b}$$

$$\frac{\partial T}{\partial(\omega t)} = \frac{1}{2\mu_0 C_v}\left(\frac{\partial B_z}{\partial s}\right)^2. \tag{13/74b}$$

Die Lösung von Gl. (13/73b) entspricht der von thermischen Diffusionsproblemen; aus Gl. (13/74b) findet man die Temperaturerhöhung während einer Halbperiode zu

$$\Delta T = \frac{\pi B_z{}^2}{2\mu_0 C_v}. \tag{13/76}$$

Die „Eindringtiefe“ eines Stromimpulses wird für $s = 1$ gefunden und beträgt also $x = (\varrho/\mu_0\omega)^{1/2}$.

Energieverteilung. Für den Fall 1 folgt aus Gl. (13/73), daß der von einem geschlossenen Leiter umhüllte magnetische Fluß *konstant* bleibt. Um den Fluß zu verändern, muß die Leiterbahn aufgetrennt und durch die Spannungsquelle E geschlossen werden. Nach dem Induktionsgesetz und der bekannten Beziehung

$$Li = \Phi \tag{13/77}$$

berechnet sich die gesamte zugeführte elektrische Energie aus

$$W_t = \int_0^{t_1} i\,\frac{\mathrm{d}(Li)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,i^2 L\Big|_0^{t_1} + \frac{1}{2}\int_0^{t_1} i^2\,\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t. \tag{13/78}$$

Der 1. Term auf der rechten Seite stellt die gespeicherte magnetische Energie, der 2. Term die am nichtstarren Leiter geleistete Arbeit dar.

Im ersten Fall des starren widerstandslosen Leiters ergibt sich mit $i = 0$ bei $t = 0$ die einfache Beziehung

$$W_t = \frac{\Phi^2}{2L}, \tag{13/79}$$

wonach vom energetischen Standpunkt aus die Magnetspule möglichst große Induktivität besitzen sollte.

Im Falle des nichtstarren Leiters soll sich die anfängliche Induktivität L_0 um den Betrag $\varDelta L$ ändern. Bis zum Erreichen des Strommaximums soll der Anteil w der zugeführten Energie W_t in kinetische Energie des Leiters verwandelt werden; dieser beträgt

$$w \leqq \frac{\varDelta L}{L_2 + 2\varDelta L}, \tag{13/80}$$

d. h., sogar für große Werte von $\varDelta L$ geht immer weniger als 50% der zugeführten Energie in kinetische über. Wenn aber der Strom sehr schnell seinen Endwert erreicht hat und das System sofort kurzgeschlossen wird, so folgt aus Gl. (13/78) die Beziehung

$$w = \frac{\varDelta L}{L + \varDelta L}, \tag{13/81}$$

d. h., für große $\varDelta L$ kann die ganze zugeführte Energie in eine beschleunigte Bewegung umgesetzt werden.

Wird wie beim Verfahren nach Fowler (s. § 13.67) die Induktivität durch eine *Implosion* verringert, d. h., $\varDelta L < 0$, so wird die ursprünglich vom Leiter eingeschlossene magnetische Energie um den Faktor

$$A = \frac{L_0}{L_0 + \varDelta L} \tag{13/82}$$

verstärkt.

Für den zweiten Fall der starren Spule mit endlicher Leitfähigkeit läßt sich die Wirkung des Skineffekts (vgl. § 9.14) zweckmäßiger durch die magnetischen Flüsse im Vakuum Φ_0 und in der Leiteroberfläche Φ_1 ausdrücken. Die angelegte Spannung setzt sich damit entsprechend

$$U = \frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} \tag{13/83}$$

zusammen, worin Φ_1 durch die Beziehung $i\,\varDelta L = \Phi_1$ definiert werden kann. Setzt man dies in Gl. (13/83) ein, so folgt daraus die Beziehung

$$U = L_0 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i\,\varDelta L) \tag{13/84}$$

und analog zu Gl. (13/78) die zugeführte Energie

$$W_t = \frac{1}{2}\, i^2 L_0 + \frac{1}{2}\, i^2 \Delta L + \frac{1}{2}\int_0^t i^2 \frac{\mathrm{d}\Delta L}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t. \tag{13/85}$$

Der Anteil w von W_t, der nicht in magnetische Energie umgesetzt wird, ergibt sich in diesem Fall zu

$$w = \frac{\Delta L + \Delta L_r}{L_0 + \Delta L + \Delta L_r}, \tag{13/86}$$

worin

$$\Delta L_r = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} i^2 \frac{\mathrm{d}\Delta L}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t. \tag{13/87}$$

Die Größe ΔL_r entspricht den ohmschen Verlusten und der gespeicherten magnetischen Energie in der *Leiterskinschicht*; letztere berechnet sich zu

$$W_{m1} = \frac{A}{\mu_0}\int_0^{\infty} B_z^2\,\mathrm{d}x, \tag{13/88}$$

wenn A die Spulenoberfläche bedeutet. Die ohmschen Verluste findet man aus der Beziehung

$$W_r \geqq \frac{1}{2}\, i^2 \Delta L_r. \tag{13/89}$$

Bei steil ansteigendem Spulenstrom i und anschließendem Kurzschluß der Spule wird $W_r \geqq W_{m1}$, d. h. mindestens die Hälfte der dem Leiter zugeführten Energie in der Skintiefe in ohmsche Wärme umgesetzt.

Die Konsequenzen, die sich aus diesen Überlegungen für die Erzeugung magnetischer Höchstfelder ergeben, sind die folgenden:

1. Im Fall 1 läßt sich der Energieverlust durch die Änderung von L_0 ausdrücken; maximales Feld ergibt sich durch kleine Werte von ΔL oder noch besser $\Delta L < 0$.
2. Im Fall der starren Spule wird W_m minimal, wenn die Spuleninduktivität ein Maximum erreicht.
3. Ohne zusätzliche mechanische Energie entspricht der Verlust an magnetischer Energie dem ohmschen Verlust oder der kinetischen Energie des Spulenleiters.

13.62 Entladung einer Kapazität [13.52]

Durch Entladung einer starken, auf hohe Spannung geladenen Kondensatorbatterie lassen sich — wie bereits in § 13.61 ausgeführt — hohe Magnetfelder für eine kurze Zeitdauer erzeugen. Die hierbei benutzte Schaltung ist in Abb. 13.48 wiedergegeben; sie besteht aus der Kondensatorbatterie C, die vom Ladegerät B geladen wird und sich über den Schalter S in die Magnetspule

L entlädt. Zur stromabhängigen oder zeitbezogenen Steuerung des Einschaltzeitpunktes dient das Steuergerät J. Die ohmschen Verluste in der Magnetspule sind durch den Serienwiderstand R dargestellt.

Bei geschlossenem Schalter fließt in der Magnetspule der Strom

$$I(t) = \frac{U}{\omega L} \, e^{-tR/2L} \sin \omega t, \tag{13/90}$$

wobei die Eigenfrequenz des Entladungskreises

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \tag{13/91}$$

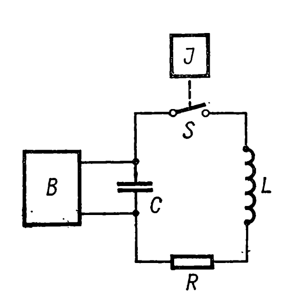


Abb. 13.48 Kondensatorentladung

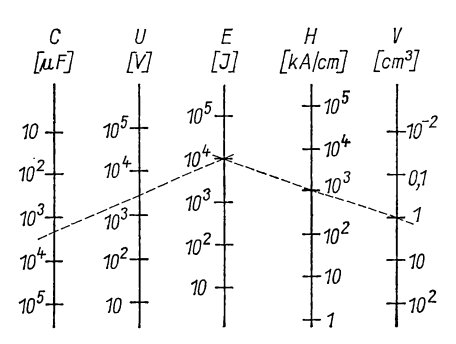


Abb. 13.49 Nomogramm nach COTTI [*13.52*]

ist. Diese Beziehung gilt sowohl für reelle als auch für imaginäre Werte von ω und geht im aperiodischen Grenzfall mit $\omega \to 0$ in den Ausdruck über:

$$I(t) = \frac{U}{L} \, t e^{-tR/2L}. \tag{13/92}$$

Nach dem in § 13.61 Gesagten geht von der in C gespeicherten Energie $CU^2/2$ im günstigsten Fall die Hälfte in die magnetische Energie

$$W_m = \frac{\mu_0}{2} H_m^2 V \tag{13/71}$$

über, wobei H_m die maximale Feldstärke und V das Innenvolumen der Spule bedeutet. In Abb. 13.49 ist ein von COTTI [*13.52*] entworfenes Nomogramm wiedergegeben, das ohne Berücksichtigung des Wirkungsgrades der Umsetzung von W_e nach Gl. (13/70) in W_m die Zusammenhänge der Größen C, U, W_e, H_m und V darstellt. Führt man den Wirkungsgrad η ein, so folgt aus dem Vergleich von (13/70) und (13/71) die Beziehung

$$H_m = \eta \, U \sqrt{\frac{C}{V \mu_0}}, \tag{13/93}$$

wobei sich η aufspalten läßt in die Faktoren J und S entsprechend

$$\eta = JS \begin{Bmatrix} 0 < J < 1 \\ 0 < S < 1 \end{Bmatrix}. \tag{13/94}$$

Die Größe J als Folge der ohmschen Verluste wird durch den Quotienten

$$J = \frac{I_m}{I_{m(R=0)}} \tag{13/95}$$

definiert. Der Faktor S berücksichtigt, daß das Magnetfeld in den Spulenleiter eindringt. In *Tabelle 13.4* sind die Werte von S nach CHAMPION aufgeführt, wobei für die Größen α und β die in § 13.21 eingeführten Bezeichnungen gelten.

Tabelle 13.4 Faktor S als Funktion von α und β

$\beta \diagdown \alpha$	1,1	1,5	2	4	8
0,5	0,60	0,50	0,40	0,23	0,12
1	0,82	0,70	0,57	0,32	0,17
2	0,96	0,83	0,70	0,41	0,21
4	0,98	0,88	0,75	0,47	0,26
8	0,99	0,88	0,75	0,48	0,28

Nach Gl. (13/76) erwärmt sich die Magnetspule während des Entladungsimpulses um so mehr, je größer der spezifische Widerstand des Leiters und je kleiner seine spezifische Wärme ist. Durch Kühlung mit flüssigem N_2 oder Helium läßt sich die maximale Temperaturerhöhung stark verringern.

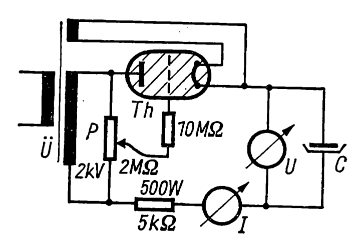


Abb. 13.50 Ladegerät der Hochfeldapparatur

Die Hochfeldanlage von COTTI [*13.52*] enthält eine Kondensatorbatterie aus 80 Elektrolytkondensatoren zu je 550 μF Kapazität und 500 V Nennspannung. Das in Abb. 13.50 dargestellte Aufladegerät liefert einen Ladestrom zwischen 0,1 und 0,5 A und erlaubt eine Vorwahl der Ladespannung. Durch Einstellen des Potentiometers *P* wird der Zündzeitpunkt des Thyratrons *Th* (TQ2) über die Gitterspannung beeinflußt. Die Ladespannung kann zwischen 0 und der Maximalspannung des Transformators *Ü* kontinuierlich eingestellt werden.

Als Hochstromschalter, mit dem 1···10 kA innerhalb von wenigen Mikrosekunden eingeschaltet werden können, kommen *Thyratrons* (s. § 4.35) oder *Ignitrons* (s. § 4.36) in Betracht, die außerdem durch ihre Gleichrichterwirkung eine schädliche negative Aufladung der Elkos verhindern. Mit dem Ignitron Pl 5555 kann ein Strom von 10 kA während 0,15 s geschaltet werden. In *Tabelle 13.5* sind die von COTTI benutzten Spulendaten und die damit erzielten Magnetfelder zusammengestellt.

Tabelle 13.5 Kleine Hochfeldspulen (nach COTTI) *für* $U = 2$ kV, $C = 2$ mF

Nr.	a_1 cm	a_2 cm	$2b$ cm	N	H_m kA/cm	L mH	T ms
1	0,25	0,90	2,06	231	325	0,18	0,7
2	0,66	2,54	7,55	7500	82	420	30
3	0,2	0,85	7,65	1085	186	10,8	2

Die Spulen sind außen mit relativ dicken Glasfaserschichten verstärkt, welche die mechanischen Kräfte aufnehmen können. Nach OLSEN [*13.160*] lassen sich mit ähnlichen Spulen im He-Bad Felder von 200 kA/cm erzeugen.

Die von FURTH und WANIEK [*13.76*] konstruierten Magnetspulen bestehen wie die Bitter-Magnete (s. Abb. 13.11) aus geschlitzten Cu-Scheiben, die durch überlappende Sektoren leitend miteinander verbunden, sonst aber durch Isolierfolien getrennt und mit hohem Druck zusammengepreßt werden. Als Isolierfolien kommen Mylar, Teflon und Mica (Glimmer) in Betracht. Für die

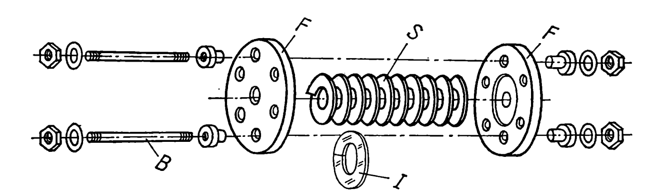


Abb. 13.51 Hochfeldspule

Scheiben wird Cu bis 300 kA/cm und Cu–Be-Legierung bis zu 600 kA/cm verwendet; durch Abkühlen auf tiefe Temperaturen werden die Festigkeitseigenschaften noch verbessert. Die Druckflansche aus Dural oder Bronze dienen gleichzeitig zur Stromzufuhr. Der freie Innendurchmesser der Spule beträgt 0,5 cm, die Spulenhöhe etwa 1 cm. Mit einer Kondensatorbatterie von 8 kJ gespeicherter Energie konnte ein Feld von 550 kA/cm für einige ms erzeugt werden. Mit solchen Einzelspulen kann auch ein Helmholtz-Spulenpaar aufgebaut werden [*13.74, 13.75, 13.20*].

Zur Erzeugung hoher Felder in größeren Volumina nach dieser Methode kann nach FONER und FISHER [*13.68*] eine Wendel aus einem flachen Leiter benutzt werden, die großen mechanischen Kräften standhält. Die in Abb. 13.51 im zerlegten Zustand gezeigte Spule S besteht aus einer Cu–Be-Legierung

und wird aus dem Vollen auf der Drehbank geschnitten. Zwischen die Windungen werden Glimmerscheiben I zur Isolation eingelegt. Die ganze Spule wird axial zwischen die Flansche F mit sechs Bolzen B gepreßt und außen mit keramischem Material oder glasfaserverstärktem Teflon umgeben. In einer Spule von 0,5 cm Innen-, 2,5 cm Außendurchmesser und 2 cm Gesamtlänge kann mit einer Kondensatorbatterie von 1800 μF Kapazität und 3 kV Ladespannung ein Magnetfeld von 700 kA/cm während 120 μs erzeugt werden.

Allain et al. [*13.7*] haben diese Spulentechnik weiterentwickelt und aus Cu—Be (2% Be) eine Spulenwendel mit 1,8 cm Innendurchmesser, 4,0 cm Außendurchmesser, 1,5 mm axialer Windungsstärke und 45 Windungen hergestellt, die mit 0,2 mm starkem Mylar isoliert waren. Mit einer Kondensatorbatterie von 6600 μF und 6 kV Entladespannung, die in vier Gruppen über Ignitrons auf die Spule geschaltet werden, läßt sich ein Feld von 450 kA/cm und 0,34 ms Dauer erzeugen. Die an der Spuleninnenseite dabei auftretenden Drücke liegen bei 16 Mp/cm².

Über die Konstruktion anderer Hochfeldspulen siehe [*13.69, 13.81, 13.157*]. Heywood und Bodin [*10.74*] benutzen Niederspannungskondensatorbatterien mit Transistorschaltern, um eine willkürliche örtliche Feldverteilung bei vorgegebenem zeitlichem Ablauf herzustellen.

Eine neue Methode zur Erzeugung kurzzeitig konstanter starker Magnetfelder wird von Durand et al. [*13.60*] vorgeschlagen, wobei eine auf die Spannung U_0 aufgeladene verlustfreie Doppelleitung über ihren reellen Wellenwiderstand

$$Z = \sqrt{\frac{L_g}{C_g}} \tag{13/96}$$

entladen wird (vgl. §§ 3.7 und 8.1). Darin stellen L_g und C_g Induktivität und Kapazität der gesamten Leitung dar. Die Dauer des Impulses ergibt sich zu

$$T_0 = 2\sqrt{L_g C_g} \tag{13/97}$$

und seine Höhe aus der Beziehung

$$I_0 = \frac{U_0}{2Z}. \tag{13/98}$$

Die Doppelleitung läßt sich durch eine Kette von m *Tiefpaßfiltern* (vgl. § 3.6) ersetzen, die aus den Einzelinduktivitäten L und den Einzelkapazitäten C bestehen. Anstelle von Gl. (13/97) gilt dann für die Entladungsdauer: $T_0 = 2m\sqrt{LC}$. Für die Magnetspule mit der Induktivität L_s muß die Bedingung $L_s \leqq L/2$ gelten, woraus eine schlechte Energieausnützung resultiert. Diese Schwierigkeit kann vermieden werden, wenn man zu L_s eine Kapazität C' parallelschaltet, wobei $C' < C$. Die entsprechende Schaltung (Abb. 13.52) enthält die Schalter S_1 und S_2, die aus Ignitrons oder Thyratrons bestehen. Zuerst ist S_2 geschlossen und wird C' auf die Spannung U_0' aufgeladen. Nach Schließen von S_1 entlädt sich der Schwingkreiskondensator C' als schwach gedämpfte Schwingung durch die Feldspule, wobei die Stromstärke im ersten

Maximum

$$I_0' \approx \frac{U_0'}{\sqrt{L_s/C'}}$$

beträgt. Während des 1. Strommaximums wird S_2 geschlossen. Die Doppelleitung wird so dimensioniert und aufgeladen, daß der von ihr gelieferte Strom dem

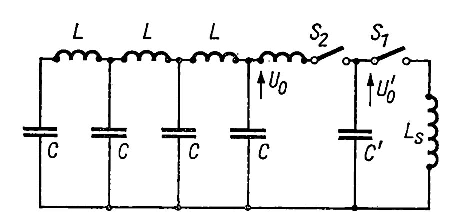


Abb. 13.52 Erzeugung kurzzeitig konstanter hoher Magnetfelder

des 1. Strommaximums im Schwingkreis entspricht. Da zu diesem Zeitpunkt $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = 0$ ist, „sieht" die Doppelleitung nicht die Induktivität, sondern nur den Widerstand R der Feldspule. Nach dieser Methode kann in einem Volumen von 30 cm³ während 2 ms ein konstantes Feld von etwa 50 kA/cm aufrechterhalten werden.

Eine ähnliche Wirkung wird durch die Verwendung von „crowbars", d. h. parallelgeschalteten Kreisen mit Schalter und Eigeninduktivität, erzielt.

13.63 Kurzschluß eines Generators

Wie in § 13.61 aufgeführt, können hohe Stromimpulse durch Kurzschluß eines Generators erzeugt werden. Im kurzzeitigen Betrieb sind diese Maschinen vierfach überlastbar. Wesentlich für die Erzeugung kurzer Stromimpulse ist eine kleine Eigenimpedanz, die bei vorgegebener Gesamtleistung nur bei kleiner Betriebsspannung erreichbar ist.

Hierfür eignet sich vor allem der *Homopolargenerator*, eine Gleichstrom liefernde Unipolarmaschine, die in Abb. 15.16 dargestellt ist. Der Läufer A besteht wie der Magnetkreis S aus Eisen oder Stahl und besitzt zur Stromentnahme an der Wellenlagerung und symmetrisch im Stator die Bürsten C_1 und C_2. Diese können aus Metallkohle, für hohe Ströme besser aus mit Hg oder Na betriebenen Flüssigkeitskontakten bestehen. Die erzeugte Spannung berechnet sich aus der Beziehung

$$U = Bvl, \tag{13/99}$$

wenn B die Luftspaltinduktion, v die Umfangsgeschwindigkeit und l die halbe (aktive) Rotorbreite bedeuten. Der Rotor ist mit einem Cu- oder Cu–Be-Mantel mit hoher elektrischer Leitfähigkeit umgeben, so daß der Innenwiderstand der Maschine klein ist. Die Feldwicklung W ist meist wassergekühlt und erzeugt eine Induktion von etwa 1 T. Mit Hg-Kontakten lassen sich Stromdichten von 5 kA/cm² bei 150 m/s Umfangsgeschwindigkeit erzielen. Der

bekannte *Canberra*-Generator mit NaK-Kontaktdüsen liefert bei 800 V einen Maximalstrom von 1,6 MA während 2 s Dauer.

LANGE und SYMIETZ [*13.131*] beschreiben Spulen für die Erzeugung längerer Feldimpulse, die mit flüssigem N_2 gekühlt sind und ferromagnetische Polkerne enthalten. Zur Energieversorgung wird ein *Leonard-Satz* (s. § 15.26) von 170 kW bei 500 V Maximalspannung verwendet, der kurzzeitig um 100% überlastet werden kann. Bei einem Spuleninnendurchmesser von 5,5 cm lassen sich Feldstärken von 130 kA/cm für etwa 1 s Dauer erzeugen.

Von ROTHWARF et al. [*13.179*] wird ein Hochleistungs-Si-Gleichrichter für die Erzeugung kurzzeitiger Entladungen bei sehr hohen Strömen beschrieben, der mit Si-Thyristoren ausgerüstet ist.

13.64 Supraleitende Energiespeicher

Um die in einer Induktivität gespeicherte magnetische Energie $L_1 i^2/2$ auf die Hochfeldspule zu übertragen, muß der Strom i_1 in der Speicherspule unterbrochen werden. Damit keine hohen Spannungen auftreten, wird parallel zur Feldspule L_2 (s. Abb. 13.53) eine Übertragungsimpedanz eingeschaltet, die aus

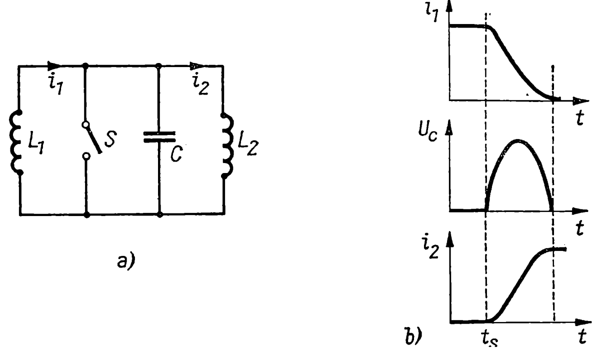


Abb. 13.53 Induktiver Energiespeicher

einem Widerstand oder besser einer Kapazität besteht. Soll die ganze in L_1 gespeicherte Energie übertragen werden, so muß die Kapazität wenigstens die Hälfte von W_m aufnehmen können. Die Impulsdauer hängt von der Schaltgeschwindigkeit des Schalters S ab, der den Dauerstrom i_1 in L_1 unterbrechen muß. In Abb. 13.53 ist außerdem der zeitliche Verlauf von i_1, U_C und i_2 eingetragen. Durch spezielle Schaltungen lassen sich 75% der Energie von L_1 übertragen, wenn C nur 15% von W_m aufnehmen kann.

Nach LUCAS et al. [*13.139*] sind supraleitende Induktivitäten zur Impulserzeugung besonders geeignet und bieten große Vorteile gegenüber der kapazitiven Speicherung. Durch Verwendung eines *supraleitenden* Schalters für S ist eine verlustlose Speicherung möglich; im geöffneten Zustand muß bei großer Durchschlagsfestigkeit sein Widerstand groß gegen $L_2\, \mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t$ sein. Ein schnell arbeitender supraleitender Leistungsschalter wird z. B. von AMEEN und WIDDERHOLD [*13.9*] beschrieben.

13.65 Flußkonzentration durch stationäre Leiter [*13.111*]

Bringt man nach dem Schema der Abb. 13.54 in die Nähe oder in das Innere der Feldspule L_1 eines Entladungskreises mit dem Kondensator C eine zweite geschlossene Spule L_2, so gelten für den zeitlichen Ablauf der Ströme i_1 und i_2 die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + R_1 i_1 + \frac{1}{C}\int_0^t i_1\,\mathrm{d}t = 0, \\ L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + R_2 i_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{13/100}$$

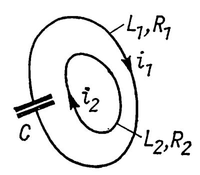


Abb. 13.54 Induktiv gekoppelte Kreise

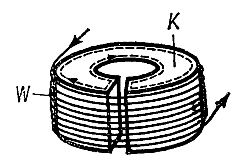


Abb. 13.55 Schema des Flußkonzentrators

wenn R_1, R_2 die Verlustwiderstände und M die Gegeninduktivität der beiden Kreise bedeuten. Führt man für den Primärkreis die Variable $\Theta = \omega_0 t$ mit $\omega_0 = (L_1 C)^{-1/2}$, ferner die Dämpfungsfaktoren

$$D_1 = \frac{R_1}{\omega_0 L_1} \quad \text{und} \quad D_2 = \frac{R_2}{\omega_0 L_2} \tag{13/101}$$

ein, so lassen sich damit die Gleichungen (13/100) zusammenfassen in die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}^3 i_1}{\mathrm{d}\Theta^3} + \mu(D_1 + D_2)\frac{\mathrm{d}^2 i_1}{\mathrm{d}\Theta^2} + \mu(1 + D_1 D_2)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}\Theta} + \mu D_2 i_1 = 0. \tag{13/102}$$

Dabei stellt die Größe

$$\mu = \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right)^{-1} \geqq 1 \tag{13/103}$$

eine Art Kopplungsfaktor zwischen L_1 und L_2 dar, der für lose Kopplung den Wert 1 annimmt und für starke Kopplung gegen Unendlich geht.

Die Ströme i_1 und i_2 lassen sich aus Gl. (13/103) als Funktion der Kenngrößen beider Kreise berechnen. Die daraus resultierenden qualitativen Ergebnisse sind folgende: 1. Frequenz und Amplitude von i_1 nehmen annähernd mit $\sqrt{\mu}$ zu; 2. der Sekundärstrom i_2 führt eine gegen i_1 phasenverschobene gedämpfte Schwingung aus, deren Amplitude um den Faktor M/L_2 größer als i_1 ist. Die Anwendung dieser Erkenntnisse für die Herstellung starker

magnetischer Felder geschieht im *induktiven Flußkonzentrator*, wie er schematisch in Abb. 13.55 dargestellt ist. Er besteht aus der Primärwicklung W und dem Massivring K aus elektrisch gut leitendem Material, der an einer Stelle radial geschlitzt ist. Der auf der äußeren Fläche von K induzierte Strom fließt wegen des Skineffekts nur in einer dünnen Oberflächenschicht und gelangt durch den Schlitz in die innere Bohrung. Da der in der Oberflächenschicht der Innenbohrung fließende Strom identisch ist mit dem auf der Außenfläche

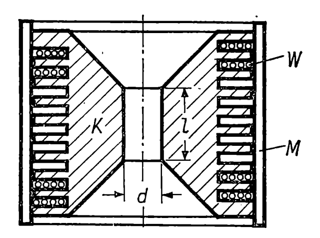


Abb. 13.56 Flußkonzentrator

induzierten, erzeugt er im Innenraum von K ein wesentlich höheres Impulsfeld. Der ideale Energieumsatz zwischen W und K wird durch Joulesche und induktive Verluste in und zwischen beiden Leitern verhindert, doch lassen sich durch geeignete Konstruktion und Wahl der Werkstoffe große Verstärkungsfaktoren erzielen.

Wilson und Srivastava [*13.207*] konstruierten den in Abb. 13.56 im Schnitt dargestellten Flußkonzentrator K aus *Dural* ($\varrho = 5{,}3\ \mu\Omega$cm], der in einer eingestochenen Gewindenut die Primärwicklung W (4 parallelgeschaltete Cu-Kabel) enthält. Bei einem Innendurchmesser $d = 2$ cm und $l = 3{,}5$ cm erreicht man durch Entladung einer Kondensatorbatterie von 440 μF Kapazität und mit 27 kJ gespeicherter Energie während einer Entladungsdauer von 0,12 ms ein Maximalfeld von etwa 30 T. Zur Aufnahme der großen mechanischen Kräfte ist der Konzentrator mit einem geschlitzten Dural-Mantel umgeben.

Weitere Beispiele von ausgeführten Konzentratoren siehe [*13.136*, *13.38*].

13.66 Hochfeldimpulse durch Z-Pinch-Kompression

Von Alikhanov et al. [*13.6*] ist ein neues Verfahren zur Erzeugung von Feldern im MG-Bereich angegeben worden, bei dem zur Flußkompression ein von starkem Strom durchflossenes dünnwandiges Cu-Rohr benutzt wird. Die in Abb. 13.57 angegebene Versuchsanordnung besteht aus dem einseitig verschlossenen Stahlhohlzylinder A, dem massiven Innenzylinder B und dem dünnwandigen Cu-Rohr R, das zwischen A und B eingespannt ist. Die Teile A und B der koaxialen Leitung sind durch I elektrisch voneinander isoliert und mit der Kondensatorbatterie C verbunden. Durch die Impulsspule S wird ein Primärfeld von 3···5 T während 40 ms Dauer erzeugt. Durch die beim Entladen von C über die Funkenstrecke F entstehenden Stromkräfte werden R

und der von R eingeschlossene magnetische Fluß komprimiert. Mit einer in C gespeicherten Energie von 500 kJ können maximale Feldstärken von 3 MA/cm kurzzeitig erreicht werden.

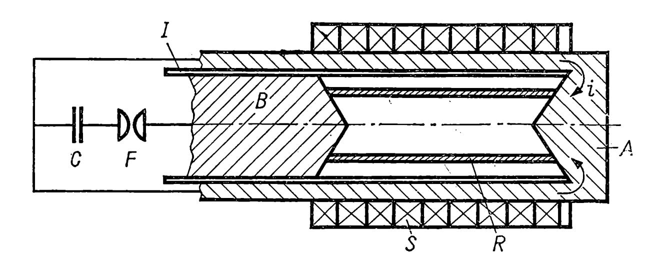


Abb. 13.57 Flußkompression nach [13.6]

13.67 Flußkonzentration durch Implosion [13.93]

Noch wirkungsvoller als durch Stromkräfte kann der in einem gut leitenden Rohr eingeschlossene magnetische Fluß durch Anwendung von *Explosivladungen* komprimiert werden. Diese zuerst von FOWLER et al. [*13.70*] angegebene und experimentell entwickelte Methode liefert für die Dauer einiger Mikrosekunden magnetische Felder von derzeit 1,8 kT. Die beiden Stufen des

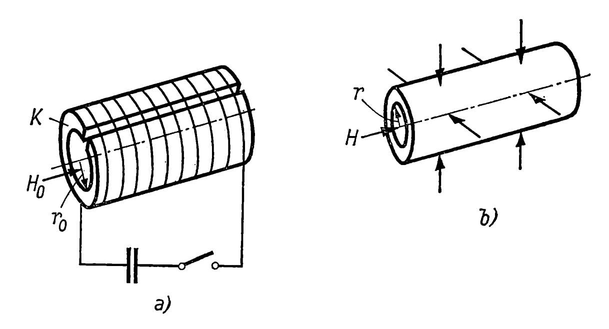


Abb. 13.58 Höchstfelder durch Implosion

Verfahrens sind schematisch in Abb. 13.58 angedeutet. Bei (*a*) wird durch einen Flußkonzentrator nach der in § 13.66 beschriebenen Methode ein Ausgangsfeld H_0 von 5···10 T in einem geschlitzten Metallzylinder vom Radius r_0 erzeugt. In der zweiten Phase (*b*) wird ein Ring von Explosivladungen um den Zylinder K gezündet, wodurch zuerst die Ränder des Schlitzes leitend verschweißt werden und dann der nun kompakte Hohlzylinder auf den sehr viel kleineren Radius r komprimiert wird. Das resultierende Feld beträgt annähernd

$$H = H_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 . \qquad (13/104)$$

Die Explosionsenergie wird dabei mit maximal 10% Wirkungsgrad in magnetische Energie umgesetzt. Näheres über die experimentelle Technik und die erzielten Resultate siehe [*13.94, 13.189*].

13.7 Magnetische Wechselfelder

Für verschiedene Untersuchungen werden zeitlich oder örtlich periodische Magnetfelder benötigt, die man je nach ihrer Größe mit Hilfe einzelner in den vorhergegangenen Abschnitten besprochener Verfahren herstellen kann.

13.71 Zeitlich linear veränderliches Feld

Zeitlich linear ansteigende Magnetfelder werden vielfach für die Messung der Magnetisierung ferromagnetischer oder supraleitender Substanzen benötigt. Im einfachsten Fall wird hierzu die Spannung oder der Strom des Netzteils bzw. des Motorgenerators als Funktion der Zeit über geeignete Verstärker geregelt. Für die Stromversorgung von *supraleitenden Magnetspulen* (s. § 13.3) wird die Spannung des Netzgeräts oder besser der gelieferte Strom mit einem Vergleichspotentiometer oder einem geeigneten Röhrenkreis hochgeregelt [*13.98*]. Zur Vermeidung von *Flußsprüngen* müssen unstetige Stromänderungen vermieden werden. Die Größe $L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, die zu relativ hohen Spannungen führen kann, beeinflußt die Wicklungsisolation und legt andererseits die erforderliche Quellenspannung fest.

13.72 Periodische Magnetfelder

Hierzu gilt im wesentlichen das oben Gesagte über die Höhe der angelegten Spannung. Von BARTON et al. [*13.21*] wird eine Anordnung beschrieben, die periodische Felder zwischen 1 und 15 kA/cm mit der Frequenz 1 Hz zu erzeugen gestattet. Über einen Wechselfeldelektromagneten zur automatischen Aufzeichnung von Hysteresiskurven s. [*13.138*].

Bei der Verwendung supraleitender Wicklungen für die Erzeugung hoher Wechselfelder sind die *Magnetisierungsverluste* im supraleitenden Material zu berücksichtigen, die von der Feldstärke und der Frequenz abhängen. Über Wechselstromverluste bei höheren Frequenzen siehe [*13.11*]. Die Verluste bei technischen Frequenzen sind ausführlich von HEINZEL [*13.91*] und VOIGT [*13.198*] untersucht worden.

13.73 Örtlich veränderliches Magnetfeld

Für die Messung der elektrischen Leitfähigkeit z. B. lassen sich magnetische Drehfelder benutzen, wobei das auf die Meßprobe ausgeübte Drehmoment ein direktes Maß für die gesuchte Meßgröße darstellt. Magnetische Drehfelder können durch die Rotation von Magnetspulen oder durch Drei- oder Mehrphasenwicklungen erzeugt werden, wie sie z. B. in Drehstrommotoren (s. § 15.17) angewandt werden.

13.8 Zeitlich konstante und homogene Magnetfelder [*13.43*]

Homogene magnetische Felder sind die Voraussetzung für die Messung der magnetischen Eigenschaften größerer Proben; sie werden auch in der Kernphysik in Blasenkammern oder in Beschleunigungsgeräten vielseitig und mit hohen Anforderungen benötigt.

13.81 Zylinderspulen mit Endkorrektur [*13.72, 13.26, 13.137, 13.145*]

Wie bereits in § 13.21 erwähnt, hängt der axiale Verlauf der magnetischen Feldstärke von den Abmessungen der Spule, d. h. von den Größen α und β, nach Gl. (13/35) ab. Allgemein gelten nach GARRETT [*13.78*] für rotationssymmetrische Quellensysteme (s. Abb. 13.59) folgende Beziehungen:

$$H_x^0 = \frac{i}{2 r_0} \sum_{n=1}^{\infty} q_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} P_{n-1} (\cos \Theta); \qquad (13/105\text{a})$$

$$H_x^{m-1} = \frac{i}{2 r_0^m} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n-m)!} q_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-m} P_{n-m} (\cos \Theta); \qquad (13/105\text{b})$$

$$H_y = \frac{i}{2 r_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} q_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} \sin \Theta \, P'_{n-1} (\cos \Theta). \qquad (13/105\text{c})$$

In diesen Formeln bedeuten r_0 den Abstand des Ursprungs von der nächstliegenden Feldquelle, q_n eine nur vom Quellensystem abhängige Konstante,

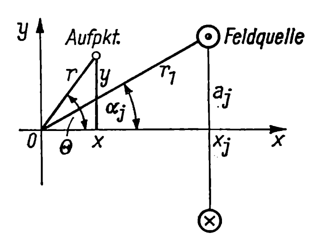


Abb. 13.59 Magnetfeld rotationssymmetrischer Spulensysteme

P_n die Kugelfunktion der Ordnung n und P'_n ihre Ableitung nach dem Argument. Die Gln. (13/105) konvergieren nur innerhalb einer Kugel, die keine Feldquellen enthält. Für ein *Stromfilament* berechnet sich mit den Bezeichnungen der Abb. 13.59 die Größe q_n zu:

$$q_n (f) = N_j \sin^2 \alpha_j \left(\frac{r_0}{r_j}\right)^n P'_n (\cos \alpha_j), \qquad (13/106)$$

wenn N_j die Anzahl der Windungen ist, die zu einem Filament zusammengefaßt sind.

Für das *einlagige Solenoid* (Abb. 13.60a) ergibt die Integration von Gl. (13/106) die Werte:

$$q_1(s) = r_0 \sum_{k=1}^{2} N_k \cos \alpha_k;$$

$$q_{n+1}(s) = -\frac{r_0}{n} \sum_{k=1}^{2} N_k \sin^2 \alpha_k \left(\frac{r_0}{r_k}\right)^n P_n'(\cos \alpha_k), \qquad (13/107)$$

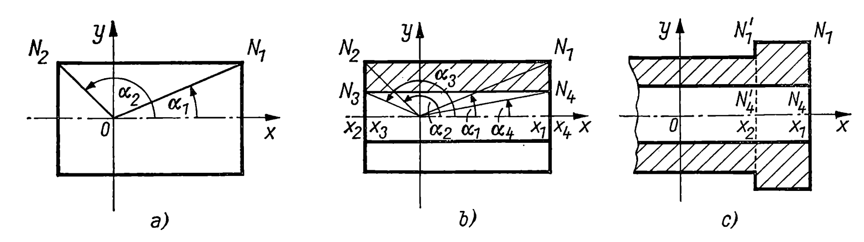


Abb. 13.60 Zur Berechnung von Solenoiden; einlagige Spule (a), dicke Spule (b), Spule mit Endkorrektur (c)

worin N_k die Windungszahl pro Zentimeter bedeutet.

Für *dicke Spulen* (s. Abb. 13.60b) findet man durch zweifache Integration über Gl. (13/106) die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} q_1(c) &= r_0 \sum_{l=1}^{4} N_1 x_1 l_n \frac{1+\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1}; \\ q_2(c) &= r_0^2 \sum_{l=1}^{4} N_1 \left(\sin\alpha_1 - l_n \frac{1+\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1}\right); \\ q_{n+2}(c) &= \frac{r_0^2}{n(n+1)} \sum_{l=1}^{4} N_1 \left(\frac{r_0}{x_1}\right)^n s_{n+2}(\cos\alpha_1) \quad \text{für } n > 0, \end{aligned}\right\} \qquad (13/108)$$

worin

$$s_{n+2}(\cos\alpha_1) = 1 - \sin^3\alpha_1 \sum \cos\alpha_1^{m-1} P_m'(\cos\alpha_1).$$

Es gilt ganz allgemein, daß das von einer Spule erzeugte Feld um so homogener wird, je mehr auf q_1 folgende q-Terme durch besondere Geometrie der Quelle zu Null gemacht werden können. Im allgemeinen wird der Ursprung in die Symmetrieebene des Systems gelegt.

Besonders große Homogenität läßt sich mit *Endspulen* nach Abb. 13.60c erzielen, für die $q_3 = q_5 = 0$ gilt.

Für höhere Ansprüche an Homogenität werden nach HANSON und PIPKIN [*13.88*] drei konzentrische Korrekturspulen angebracht, wodurch in einem relativ großen Feldraum eine Homogenität von 10^{-5} erzielt wird. Weitere Berechnungsmethoden und Beispiele siehe [*13.19, 13.183, 13.197*].

Das Herstellen sehr homogener Felder in einer symmetrisch geteilten Spule, wie sie z. B. für die Beobachtung von Bitter-Streifen erforderlich sind, wird von MURRMANN und SCHWINK [*13.156*] behandelt. Der Feldabfall im Spalt

zwischen den Spulenhälften läßt sich kompensieren durch Zusatzwindungen in der Nähe des Spalts mit gleicher Feldrichtung wie in den Hauptspulen oder durch kurze Zusatzspulen auf den Hauptspulen, aber mit entgegengesetzter Feldrichtung.

13.82 Helmholtz-Spulenpaare

Für homogene Magnetfelder in größeren Volumina eignen sich Helmholtz-Spulen, deren Wicklungsdurchmesser klein gegen den Spulendurchmesser $2r_0$ und deren gegenseitiger Abstand $d = r_0$ ist. Genaueres über die Feldverteilung siehe § 13.16. Durch eine doppelte Helmholtz-Spule nach Abb. 13.27 läßt sich in optimaler Geometrie der Homogenitätsbereich stark vergrößern. Nach Berechnungen von RUDD und CRAIG [*13.180*] liegt der optimale Spulenabstand für quadratischen oder runden Wicklungsquerschnitt etwa bei $1{,}025r_0$. Von

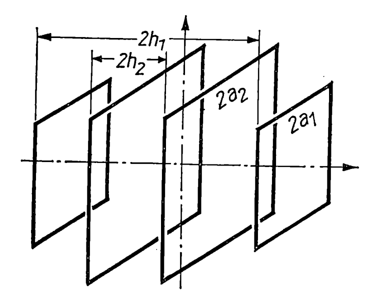


Abb. 13.61 Rechteckiges Doppelspulenpaar

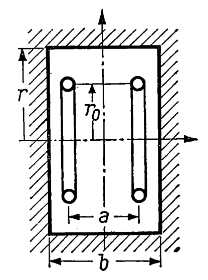


Abb. 13.62 Helmholtz-Spulenpaar mit Abschirmung

FIRESTER [*13.67*] sind *quadratische* Helmholtz-Spulenpaare rechnerisch untersucht worden, die gegenüber den Kreisspulen den Vorteil der leichteren Herstellung, der größeren Zugänglichkeit und der einfacheren Feldberechnung aufweisen. Für diese Art von Spulen mit der Seitenlänge L findet man den optimalen Spulenabstand zu $0{,}5445\,L$.

ALLDRED und SCOLLAR [*13.8*] haben die günstigsten Spulenabstände für ein rechteckiges Doppelspulenpaar nach Abb. 13.61 berechnet und die Homogenitätsbereiche für verschieden gewählte Spulenparameter angegeben.

Ein anderer Weg zur Vergrößerung des Homogenitätsbereiches wird von SCHLOSSER [*13.184*] angegeben und ist in Abb. 13.62 angedeutet. Das Helmholtz-Spulenpaar vom Radius r_0 und dem Abstand a ist von einem zylindrischen Abschirmbecher vom Radius r und der Höhe b aus weichmagnetischem, hochpermeablem Material umgeben. Bei optimalen Abmessungen ergeben Rechnung und Experiment eine merkliche Vergrößerung der Homogenität im Zentralbereich.

Von HELLER [*13.92*] wird das Feld großer Rechteckspulen in optimalem Abstand berechnet und mit dem der üblichen Kreisspulenanordnung verglichen.

13.83 Kugel- oder Ellipsoidspulen

Durch mehrere Helmholtz-Spulenpaare kann der Homogenitätsbereich fast beliebig vergrößert werden. CLARK [*13.48*] hat eine Anordnung von 24 Einzelspulen untersucht, deren Wicklungen eine Kugel umhüllten. In einem Bereich vom halben Kugeldurchmesser wird das Magnetfeld auf 1% homogen.

Für sehr große Homogenitätsansprüche werden Helmholtz-Anordnungen sehr groß; um in einem Bereich von 10 cm Durchmesser ein auf 10^{-4} konstantes Feld zu erzeugen, sind Spulen von mindestens 100 cm Durchmesser erforderlich. EVERETT und OSEMEIKHIAN [*13.63*] berechnen die *Kugelspule* nach Abb. 13.63 vom Durchmesser a, die mit einer sehr großen Anzahl von Windungen derart bewickelt ist, daß längs der Z-Achse die Stromdichte gleichförmig verteilt ist. Bezeichnet man mit j die Stromstärke pro Zentimeter längs der Z-Achse, so wird die Stromdichte an der Kugeloberfläche $j \sin \Theta$. Die magnetostatischen Potentiale Φ_1, Φ_2 innerhalb und außerhalb der Kugelfläche müssen wegen der Symmetrie bezüglich der Z-Koordinate die Laplace-Gleichung erfüllen und können durch Legendre-Polynome in der folgenden Form ausgedrückt werden:

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \Theta); \qquad (13/109)$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n+1} P_n(\cos \Theta). \qquad (13/109\text{a})$$

Die Größe Φ_1 bleibt endlich, wenn r gegen Null geht; Φ_2 jedoch wird Null, wenn $r \to \infty$. Wegen der Grenzbedingungen

$$\frac{\partial(\Phi_1 - \Phi_2)}{\partial r} = 0 \quad \text{für } r = a$$

und

$$\frac{\partial(\Phi_1 - \Phi_2)}{r\,\partial \Phi} = j \sin \Theta$$

findet man das Potential innerhalb der Kugel zu:

$$\Phi_1 = -\frac{2jr\cos\Theta}{3} = -\frac{2jz}{3} \qquad (13/110)$$

und daraus wegen $\boldsymbol{H} = -\text{grad}\,\Phi$ die Feldkomponenten

$$H_x = H_y = 0;$$

$$H_z = \frac{2j}{3}. \qquad (13/111)$$

In der Praxis wird jede Kugelfläche mit N Windungen versehen, deren gegenseitiger Abstand längs der Z-Achse b beträgt. Es empfiehlt sich, den Draht in dreieckige Nuten zu wickeln und beim Einstechen dieser Nuten zu berücksichtigen, daß die *Drahtachse* auf eine Kugelfläche zu liegen kommt. In

Tabelle 13.6 sind die Abweichungen $\delta(z) = (H_z - H_0)/H_0$ als Funktion von z/a auf Grund genauer Berechnungen zusammengestellt.

Tabelle 13.6 Axialfeld einer Kugelspule

z/a	$10^8\,\delta(z)$	z/a	$10^4\,\delta(z)$
0	0	0,4	0,03
0,02	0,27	0,5	0,09
0,05	1,7	0,6	0,34
0,1	7,3	0,7	1,6
0,2	35	0,8	10
0,3	110	0,9	110

Man erhält demnach eine auf 10^{-4} genaue Homogenität innerhalb einer Kugel vom Durchmesser $a/2$.

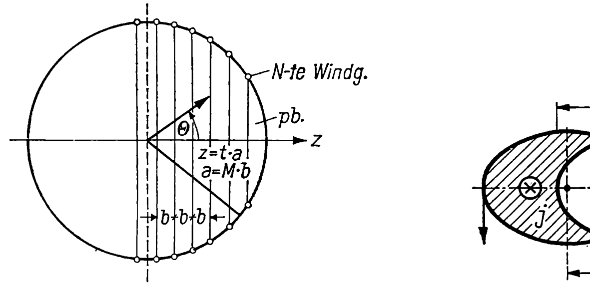


Abb. 13.63 Kugelspule

Abb. 13.64 Dipolspule

Analoge Berechnungen gelten auch für Spulen, deren Oberfläche ein Rotationsellipsoid bilden. Durch Verwendung von supraleitenden Drähten läßt sich eine Stromdichte $j \approx 1000$ A/cm erreichen, was nach Gl. (13/111) bei einer einlagigen Spule einem Feld von 666 A/cm entspricht.

Zweidimensionale, homogene Transversalfelder können nach WILSON [*13.206*] durch Wicklungsquerschnitte nach Abb. 13.64 hergestellt werden, die sich durch überlappende Kreise oder Ellipsen ergeben und in denen die Stromdichte konstant ist. Bezeichnet man die Stromdichte mit j und die Verschiebung der Kreis- bzw. Ellipsenmittelpunkte mit s, so ergibt sich das homogene Feld zu

$$H_y = j s \frac{b}{a + b}, \qquad (13/112)$$

wenn a die große und b die kleine Ellipsenachse ist. Durch Verwendung supraleitender Wicklungen, mit denen für mittlere Felder eine Stromdichte $j = 30$ kA/cm^2 erzielt werden kann, hat diese Anordnung für Ablenkmagnete in der Kernphysik und für magnetohydrodynamische Generatoren Bedeutung erhalten.

13.84 Kompensation von Feldgradienten durch Permanentmagnete

Für optische Pumpexperimente werden kleine, jedoch sehr homogene Magnetfelder von der Größe des Erdfeldes benötigt. Durch genügend große Helmholtz-Spulen oder ähnliche Anordnungen können solche Felder zwar hergestellt werden, doch treten Inhomogenitäten auf, wenn sich magnetisches Material in der Nähe befindet. LAMBERT und WRIGHT [*13.127*] behandeln die Kompensation der neun magnetischen Feldgradienten $\partial H_j/\partial i$ ($i = x, y, z$; $j = x, y, z$) durch geeignetes Anbringen von Permanentmagnetpaaren aus Alnico II, die sich einzeln höchstens um 1% in ihrer Magnetisierung unterscheiden,

13.85 Korrektur von Feldern zwischen Polschuhen

Zur Messung der Linienbreite von Kernresonanzsignalen (vgl. § 11.6) sind sehr homogene Magnetfelder zwischen den meist ausgedehnten Polschuhen des Elektromagneten erforderlich. Ähnlich hohe Anforderungen sind für das

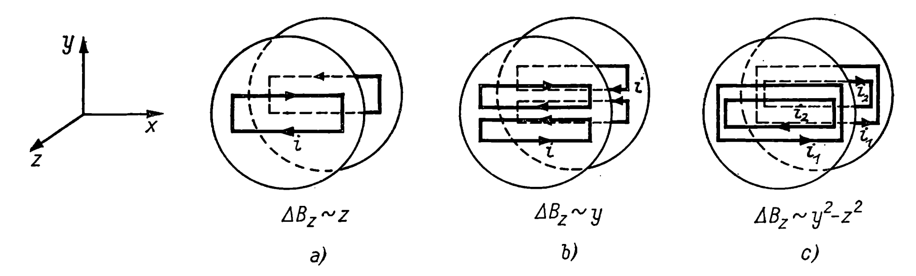


Abb. 13.65 Rechteckige Korrekturspulen

Ablenkfeld von Zyklotrons u. a. zu erfüllen. Zur örtlichen Korrektur solcher Felder können dünne kreisförmige Spulen [*13.13*] für die radiale Komponente auf die Polflächen aufgebracht werden. ANDERSON [*13.10*] benutzt kreisförmige und rechteckige Flachspulen zur Korrektur des ursprünglichen Feldes und behandelt besondere Stromverteilungen zur Kompensation von Feldgradienten 1. bis 4. Ordnung. In Abb. 13.65 sind drei Beispiele für die Korrektur bestimmter Feldkomponenten dargestellt.

13.86 Homogenitätsmessung

Zur Nachprüfung der Feldhomogenität können empfindliche Hall-Magnetometer oder Induktionsspulen in Verbindung mit einem Fluxmeter benutzt werden. Für sehr hohe Ansprüche, die bei Kernresonanzexperimenten für Probenabmessungen von 0,1···1 cm³ $2 \cdot 10^{-9}$ betragen können, werden *Kernresonanzmagnetometer* (§ 11.6) angewandt. LANCASTER und SMALLMAN [*13.128*] benutzen hierzu einen Protonenresonanzoszillator, der bei 39 MHz mit 60 kHz frequenzmoduliert wird und Eichmarken bei 9 und 14 A/cm Feldabweichung liefert. Die Nachweisempfindlichkeit liegt bei 0,2 A/cm.

Ausführlich wird das Problem der Inhomogenitätsmessung von Ernst [*13.62*] im Zusammenhang mit der Kernspinspektroskopie behandelt. Es wird dabei nachgewiesen, daß die Feldstruktur befriedigend aus Höhe, Lage, Linienform und -inhalt des Resonanzsignals abgeleitet werden kann. Es werden daraus die Anweisungen für geeignetes Anbringen der Korrekturspulen (*Shims*) entnommen.

13.87 Stromstabilisator

Die zeitliche Konstanz der von Elektromagneten oder Luftspulen erzeugten Magnetfelder erzielt man durch Stabilisierung des Erregerstroms, sofern sich die Abmessungen des Magneten zeitlich nicht ändern. Ausführlich wird dieses auch für andere Anwendungen wichtige Regelungsproblem in § 16.2 behandelt.

Die im Prinzip einfachste Methode hierfür wird von Ewald [*13.64*] für die Stabilisierung eines kleineren Elektromagneten benutzt; sie ist schematisch in Abb. 13.66 dargestellt. In Serie mit dem aus der Akku-Batterie B gespeisten Magnet M liegt der Normalwiderstand R (z. B. 1 Ω), dessen Spannungsabfall $i_m R$ im Kompensationsapparat K (s. § 2.34) gegen die EMK eines Normalelements abgeglichen wird. Bei einer Abweichung vom eingestellten „Sollstrom" beleuchtet der Lichtzeiger des Nullgalvanometers G die Differentialfotozelle F unsymmetrisch und erzeugt im angeschlossenen Verstärkerkreis mit der Elektronenröhre E einen zusätzlichen Anodenstrom, der den ursprünglichen Wert von i_m wiederherstellt. Die erreichbare Konstanz liegt bei $2 \cdot 10^{-6}$ des Sollwerts.

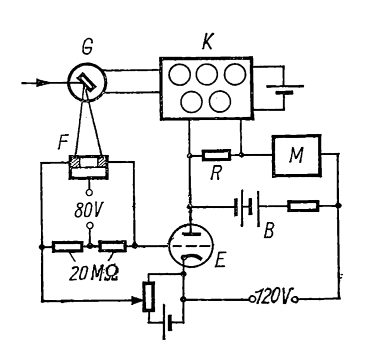



Abb. 13.66 Stromkonstanthaltung

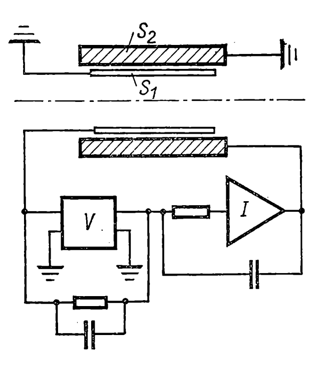


Abb. 13.67 Flußstabilisator

Eine ähnliche Vorrichtung wird von Naumann [*13.158*] für die Eichung und Justierung erdmagnetischer Meßgeräte benutzt. Der Regelkreis gestattet die Erzeugung eines Horizontalfeldes von einigen Ampere pro Zentimeter sowie die Kompensation von Störfeldern, so daß das Erdfeld auf 10^{-4} A/cm konstant gehalten wird.

Für die Steuerung größerer Erregerströme werden Motorgeneratoren benutzt, deren Erregerkreise über Thyristoren geregelt werden. Als Referenzgröße dient

entweder eine Normalspannungsquelle oder das Ausgangssignal einer empfindlichen Feldmeßvorrichtung. Über Stromstabilisatoren für kleinere und mittlere Leistungen siehe [*13.3, 13.15, 13.27, 13.51, 13.193*].

Über die Feldstabilisierung eines 50-MeV-Elektronenbeschleunigers, dessen Magnete 100 kW aufnehmen und auf $2 \cdot 10^{-5}$ genau geregelt werden müssen, siehe [*13.30*]. Shukow und Semaschko [*13.190*] verwenden als Meßwertgeber eine Elektronenstrahlröhre, die im Streufeld des zu regelnden Magneten so angebracht ist, daß der Strahl maximal abgelenkt wird. Durch ein zweites einstellbares Feld einer magnetischen Ablenkspule wird der erste Ausschlag kompensiert. Der Elektronenstrahl trifft einen der zwei streifenförmigen Auffänger, wenn das Feld vom eingestellten Sollwert abweicht, und betätigt einen angeschlossenen Regelkreis. Die erreichbare Konstanz liegt bei $5 \cdot 10^{-5}$.

Eine zweite, grundsätzlich andere Methode stellt der *Flußstabilisator* dar, dessen Prinzip von Kummer [*13.125*] beschrieben und in Abb. 13.67 erläutert ist. Im magnetischen Feld der Spule S_2 befindet sich die Induktionsspule S_1, die bei Feldänderungen ein Signal $U_i = N\,\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ erzeugt. Diese Spannung wird zuerst mit einem Galvanometerverstärker oder empfindlichen Gleichspannungsröhrenvoltmeter V verstärkt und dem Integrator I zugeleitet. Der Integratorausgang steuert unmittelbar die Feldspule S_2 oder übernimmt nur eine Teildurchflutung des Magneten. Die Regelgenauigkeit hängt von der fluxmetrischen Messung der Flußänderung ab und läßt sich auf besser als 10^{-4} steigern.

Das dritte Verfahren zur Konstanthaltung von Magnetfeldern benutzt als Meßfühler den Ausgang eines Kernresonanz-Magnetometers (vgl. § 11.6), das direkt im Meßfeld oder auch im Streufeld des zu regelnden Magneten angebracht ist. Das Prinzipschaltbild einer solchen Stabilisierungsanordnung nach

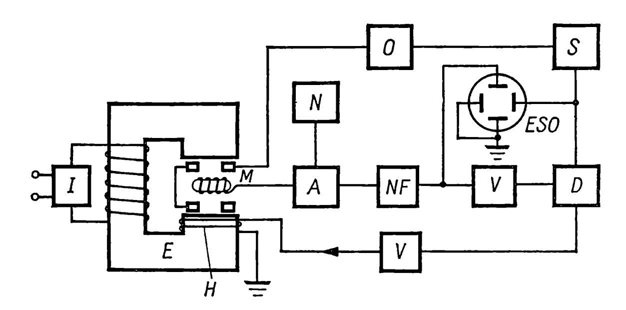


Abb. 13.68 Magnetfeldregelung mit ¹H-Kernresonanzen

Müller-Warmuth [*13.155*] entspricht dem einer Kernresonanzmessung und ist in Abb. 13.68 dargestellt. Die Erregerwicklung des Magneten E wird vom Stromstabilisator I versorgt. Zur Feldmessung werden Protonenresonanzen im Bereich von 4···22 MHz eingestellt und mit dem Autodyndetektor A nachgewiesen. Die Abweichungen vom eingestellten Feldwert werden nach Verstärkung im NF-Verstärker NF, Schmalbandverstärker SV und phasenempfindlichen Detektor D dem Leistungsverstärker V zugeführt, dessen Ausgangs-

strom mittels der Hilfsspule H das Hauptfeld im gewünschten Sinn korrigiert. Der Sollwert wird durch die im Normalfrequenzoszillator N eingestellte Frequenz vorgegeben. Die erzielbare Feldstabilität ist besser als 10^{-6}. Da das gyromagnetische Verhältnis γ von ^{7}Li etwa um den Faktor 3 kleiner als das von ^{1}H ist (vgl. *Tabelle 11.1*), läßt sich mit einer ^{1}H–^{7}Li-Probe und einem Normaloszillator mit dem Frequenzumfang 1:4 ein Feldstärkenbereich von 1:10 erfassen und konstant halten.

Verschiedene Ausführungsbeispiele und Schaltungen siehe [*13.1*, *13.12*, *13.39*, *13.119*].

13.9 Sehr kleine Magnetfelder; magnetische Abschirmung

Für viele Experimentaluntersuchungen wirken das magnetische Erdfeld sowie Streufelder von magnetischen Kreisen oder von vagabundierenden Strömen durchflossene Kabel, Installationsrohre oder tragende Elemente eines Bauwerks überaus störend. Dies gilt vor allem für empfindliche magnetische Messungen und besonders für Experimente an Supraleitern mit niedrigem Sprungpunkt oder in unmittelbarer Nähe von T_c.

13.91 Kompensation des magnetischen Erdfelds

Das magnetische Erdfeld läßt sich durch zwei Helmholtz-Spulenpaare in einem zu den Spulenradien entsprechenden Arbeitsvolumen kompensieren, wenn man die Vertikalkomponente durch das senkrechte Spulenpaar und die Horizontalkomponente durch Drehen des zweiten Paares um die Hochachse eliminiert, wobei die Spulenströme getrennt einzustellen sind (s. Abb. 13.69).

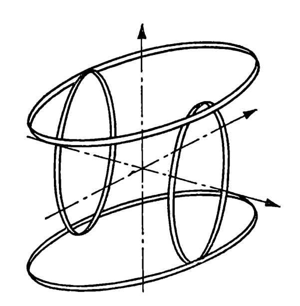


Abb. 13.69 Kompensation des Erdfeldes

Am bequemsten läßt sich die Kompensation durchführen, wenn das Magnetometer am Meßort eine starke Richtungsabhängigkeit besitzt und damit die Wirkung jedes Spulenpaares getrennt verfolgt werden kann. Besonders geeignet hierzu sind die Förster-Sonden (s. § 11.5), deren Nachweisgrenze bei 10 μA/cm liegt und die auch zur selbsttätigen Nachregelung benutzt werden können.

Von Bloom et al. [*13.34*] ist ein System von zwei achteckigen Helmholtz-Spulenpaaren hinsichtlich seiner Kompensationswirkung eingehend untersucht worden. Weitere Ausführungen siehe [*13.121*].

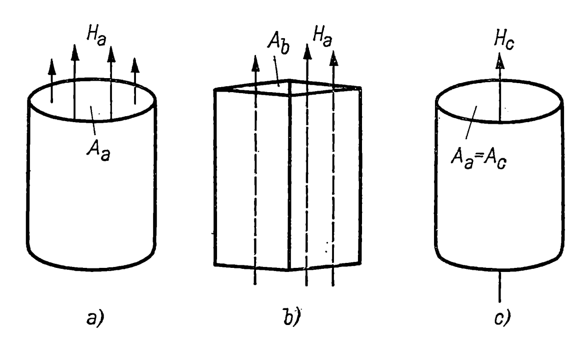


Abb. 13.70 Magnetfeldverdünnung

13.92 *Magnetische Abschirmung durch Supraleiter*

Die Wirkung von supraleitenden Hohlzylindern oder ähnlichen Strukturen beruht darauf, daß der von einem mehrfach zusammenhängenden Supraleiter umfaßte magnetische Fluß so lange von äußeren Magnetfeldern unbeeinflußt bleibt, bis an *einer* Stelle die zur Temperatur T gehörige kritische magnetische Feldstärke H_c überschritten wird. Das bedeutet, daß ein im magnetischen Erdfeld unterhalb von T_c abgekühlter supraleitender Hohlzylinder den entsprechenden Fluß konserviert und äußere Streufelder wirkungsvoll abschirmen kann. Von BENAROYA und MOGENSEN [*13.25*] sind die Abschirmeigenschaften von Nb_3Sn-Platten, die durch Sintern hergestellt sind, bis zu Feldern von 20 kA/cm untersucht worden. Analoge Messungen an Nb–Ti–Zr-Hohlzylindern siehe KAWABE und DOI [*13.108*].

13.93 *Erzeugung sehr kleiner Magnetfelder durch Supraleiter*

Wegen der Flußerhaltung in einem geschlossenen Supraleiter läßt sich mit einem dünnwandigen faltbaren Hohlzylinder, z. B. aus Pb, eine Vorrichtung zum „Verdünnen" des magnetischen Feldes schaffen (s. Abb. 13.70). Bei (*a*) wird oberhalb von T_c der dünne Pb-Zylinder von einem axialen Feld H_a durchsetzt. Faltet man den Zylinder eng zusammen, so verringert sich der ursprüngliche magnetische Fluß Φ_a entsprechend dem Verhältnis der Querschnitte auf $\Phi_b = \Phi_a A_b/A_a$. Kühlt man nun die Pb-Hülle auf $T < T_c$ ab und weitet den Zylinder wieder auf den ursprünglichen Querschnitt A_a auf, so verringert sich das vom Pb-Zylinder umschlossene Feld auf $H_c = H_a A_b/A_a$. Mit dieser einstufigen Anordnung lassen sich Felder von 10^{-3} A/cm herstellen und aufrechterhalten. Man kann in der Phase (*c*) einen zweiten, etwas kleineren, dünnwandigen Hohlzylinder in den äußeren bringen und ihn oberhalb von T_c im gefalteten Zustand vom Feld H_c durchsetzen lassen. Nach dem Aufweiten wird das von ihm eingeschlossene Feld im selben Maße wie im Außenzylinder verdünnt. Auf diese Weise können beliebig kleine Magnetfelder hergestellt werden. Details solcher Vorrichtungen sind von BROWN [*13.40*] beschrieben, der Felder unterhalb von 10^{-8} A/cm erreichte.

13.94 Abschirmung durch weichmagnetische Materialien

Magnetische Streufelder und das Erdfeld werden vielfach durch dünnwandige Hohlzylinder aus hochpermeablen Ferromagnetika (s. § 12.53) abgeschirmt. Das physikalische Problem geht aus Abb. 13.71 hervor, wo ein Hohlzylinder unendlicher Länge mit den Radien a und b einer homogenen Induktion B_0 ausgesetzt ist. Da keine Ströme außerdem vorhanden sind, kann die Feldstärke nach § 13.83 aus dem skalaren Potential Φ entsprechend $\boldsymbol{H} = -\text{grad}\,\Phi_m$ berechnet werden. Da $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ ($\mu = \mu_0 \mu_r$) ist, wird aus der Beziehung $\text{div}\,\boldsymbol{B} = 0$ auch $\text{div}\,\boldsymbol{H} = 0$. Das Potential Φ_m erfüllt somit überall die Laplace-Gleichung. Berücksichtigt man ferner, daß an den Grenzflächen die Normalkomponenten von $\boldsymbol{B}$ stetig sein müssen, so gelten für die einzelnen Bereiche folgende Beziehungen:

$$\Phi_m = -B_0 r \cos\Theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\Theta); \qquad r > b \qquad (13/113\text{a})$$

$$\Phi_m = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\beta_l r^l + \gamma_l \frac{1}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\Theta); \qquad a < r < b \qquad (13/113\text{b})$$

$$\Phi_m = \sum_{l=0}^{\infty} \delta_l r^l P_l(\cos\Theta), \quad r < a, \qquad (13/113\text{c})$$

wobei P_l die Legendre-Polynome l-ter Ordnung, B_0 die magnetische Induktion für $r \to \infty$ und die Größen α, β, γ und δ Konstanten sind, die aus den Rand-

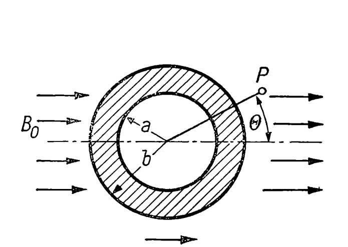


Abb. 13.71 Abschirmung eines Magnetfeldes

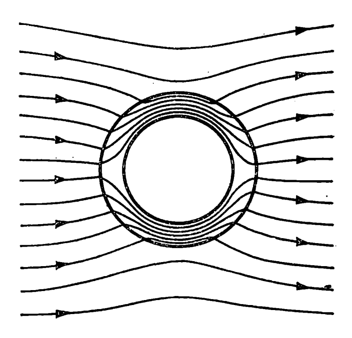


Abb. 13.72 Abschirmwirkung eines hochpermeablen Hohlzylinders

bedingungen mit Hilfe der Gleichungen (13/113) zu berechnen sind. Die Größe α stellt das vom Außenfeld induzierte Dipolmoment der zylindrischen Abschirmung dar. Da mit Ausnahme von $l = 1$ alle anderen Koeffizienten ver-

schwinden, findet man für die wichtigsten Konstanten α_1 und δ_1 die Beziehungen:

$$\alpha_1 = \frac{(2\mu_r + 1)(\mu_r - 1)}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2}(b^3 - a^3)B_0; \tag{13/114}$$

$$\delta_1 = -\frac{9\mu_r}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2}B_0. \tag{13/115}$$

Außerhalb des Zylinders entspricht das Feld dem homogenen B_0-Feld, dem ein Dipolfeld überlagert ist. Innerhalb des Abschirmzylinders entsteht ein homogenes Feld parallel zu B_0 nach Gl. (13/115). Für den wichtigen Fall, daß $\mu_r \gg 1$ ist, ergibt sich daraus

$$B_i = -\delta_1 = \frac{9}{2\mu_r\left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right)}B_0. \tag{13/116}$$

Das Innenfeld B_i ist also der Relativpermeabilität des Zylinders umgekehrt proportional. Mit relativ dünnen Hohlzylindern lassen sich mit hochpermeablen Materialien große Abschirmwirkungen erzielen. Diese Ableitung gilt für den Fall, daß die Länge L des Zylinders sehr viel größer als b ist. In Abb. 13.72 ist das Feldlinienbild für $\mu_r \gg 1$ dargestellt.

Bei konzentrischen Hohlzylindern multiplizieren sich die Abschirmfaktoren miteinander, wobei für die inneren Zylinder die Anfangspermeabilität μ_a eingesetzt werden muß. Ausführlich ist das Problem der Mehrfachabschirmung durch Zylinder von WADY [*13.200*] behandelt worden.

Bei *Panzergalvanometern* (s. § 2.254) muß das Erdfeld vollkommen abgeschirmt werden, damit der Drehmagnet als Richtkraft nur das Rückstellmoment des Aufhängefadens erhält. Die Abschirmwirkung konzentrischer *Kugelschalen* aus weichmagnetischen Materialien ist z. B. von SCHWEIZER [*13.187*] berechnet worden.

Für große abzuschirmende Volumina von 1 m³ und mehr, für die Abschirmzylinder aus Mu-Metall oder ähnlichen Legierungen kostspielig werden, kann man nach ALBACH und VOSS [*13.5*] gewöhnliches Dynamoblech benutzen, das vormagnetisiert wird. Da nach Gl. (13/116) die Relativpermeabilität μ_r für das entsprechende Störfeld eingesetzt werden muß und nach *Tabelle 12.10* die in Frage kommende Anfangspermeabilität μ_a um mindestens eine Größenordnung kleiner als die Maximalpermeabilität ist, kann durch *Vormagnetisieren* die wirksame Permeabilität gesteigert werden. Dies geschieht durch das Wechselfeld einer Toroidwicklung, die eine Feldstärke von maximal 0,5 A/cm bei 50 Hz erzeugt. Mit konzentrischen Zylindermänteln von 60, 95 und 150 cm Radius und 150, 200 und 300 cm Länge konnte ein Abschirmfaktor von über 100 erzielt werden.

13.95 Kompensation von Brummfeldern

Die in Laborräumen durch technischen Wechselstrom erzeugten *Brummfelder* von einigen 10^{-3} A/cm Amplitude zeigen ein reines Oberwellenspektrum (50, 100, 150, 250, 350 Hz) und sind durch eine Fourier-Reihe

$$H_B(t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_{Bn} \cos(n\omega t + \beta_{Bn})$$

darzustellen. Verschiedene Kurvenformen des Brummfeldes unterscheiden sich meist nur durch unterschiedliche Phasenwinkel β_{Bn}, während die Relativamplituden der Oberwellen konstant bleiben. Zur Kompensation des Brummfeldes müssen vorher die Amplituden der einzelnen Oberwellen mittels einer empfindlichen Feldsonde bestimmt werden. Nach BEIER [*13.23*] läßt sich ein in Richtung und Spektrum bekanntes Brummfeld durch die in Abb. 13.73

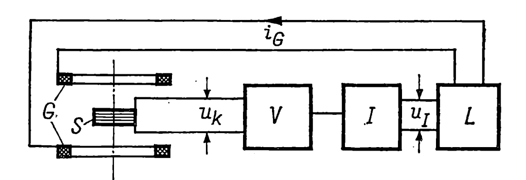


Abb. 13.73 Kompensation von Brummfeldern

schematisch dargestellte Anordnung kompensieren. Das Brummfeld H_B wird mit der Induktionsspule S gemessen und das induzierte Signal u_K in einem Schmalbandverstärker V für die am stärksten vertretenen Frequenzen verstärkt. Hinter der Integrationsstufe I ist das Signal u_I dem Brummfeld direkt proportional. Im Leistungsverstärker L wird u_I auf den Ausgangsstrom i_G verstärkt, der dann durch die Kompensationsspule G geschickt wird und das Gegenfeld $H_G(t)$ hervorruft. Da H_G dem Brummfeld entgegengerichtet ist, verbleibt im eingeschwungenen Zustand das kompensierte Störfeld

$$H_K(t) = H_B(t) - H_G(t),$$

das in der Spule S gemessen wird. Der Kompensationsgrad H_B/H_K hängt von der Gesamtverstärkung des Systems und von der Amplitude der Oberwellen ab, die im System nicht kompensiert werden. In der Praxis läßt sich eine Kompensation auf etwa 1% des ursprünglichen Feldes erzielen.

§ 14 INDUKTIVITÄTSMESSUNG [*14.3, 14.11, 14.27*]

Der Begriff der Induktivität wird aus dem verketteten Fluß Ψ abgeleitet, der vom Strom i erzeugt wird. Nach Gl. (13/29) wird durch die Größen L und i die magnetische Energie eines stromführenden Systems bestimmt.

In diesem Abschnitt werden die Methoden zur Berechnung von L angegeben und die verschiedenen Verfahren zur Messung der Selbst- und Gegeninduktivität bei NF und HF behandelt.

14.1 Grundbegriffe, Einheiten [*14.22*]

14.11 Begriff des Induktionskoeffizienten

Betrachtet man einen beliebigen geschlossenen, linearen Leiter mit eingeprägten (evtl. zeitlich veränderlichen) EMK und bildet das Flächenintegral der 2. Maxwell-Gleichung über die vom Leiter umschlossene Fläche, so folgt

$$\int_A \operatorname{rot} \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}\boldsymbol{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \boldsymbol{B} \, \mathrm{d}\boldsymbol{A} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \qquad (14/1)$$

Diese Beziehung kann nach dem Stokesschen Satz umgeformt werden:

$$\int_A \operatorname{rot} \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \oint_C \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \qquad (14/2)$$

wobei sich das Linienintegral auf die Berandung C der Fläche $\boldsymbol{A}$ bezieht. Da nach dem Ohmschen Gesetz die Stromdichte $\boldsymbol{G} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_e)$, wobei $\boldsymbol{E}_e$ die von den eingeprägten Spannungen hervorgerufene Feldstärke ist, folgt schließlich aus Gl. (14/2) die Beziehung

$$U_e = IR + \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \qquad (14/3)$$

d. h., eine in den Stromkreis geschaltete elektromotorische Kraft verteilt sich auf den ohmschen Widerstand und auf den induktiven Spannungsabfall.

Sind — wie in Abb. 14.1 gezeigt — mehrere Stromkreise benachbart, so gilt analog für den k-ten Stromkreis die der Gl. (14/3) entsprechende Beziehung

$$I_k R_k - U_{ek} = -\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{A_k} \boldsymbol{B} \, \mathrm{d}\boldsymbol{A}. \qquad (14/3\,\mathrm{a})$$

Ersetzt man nach Gl. (13/4) die Induktion $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ und wendet wieder den Stokesschen Satz an, so ergibt sich:

$$I_k R_k - U_{ek} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_C \boldsymbol{A} \, \mathrm{d}\boldsymbol{S}_k. \qquad (14/4)$$

Berücksichtigt man Gl. (13/23) und erstreckt die Integration auf alle vorhandenen n Leiterschleifen, so wird aus Gl. (14/4):

$$I_k R_k - U_{ek} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \oint_{C_k} \sum_l \frac{I_l}{4\pi} \oint_{C_l} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}_l}{r_{lk}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{S}_k. \tag{14/5}$$

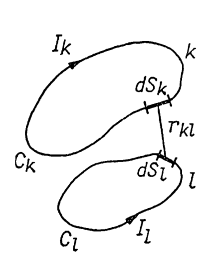


Abb. 14.1 Zur Ableitung des Induktionskoeffizienten

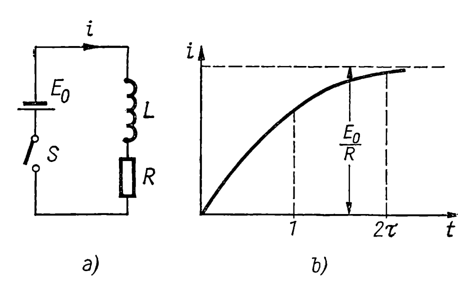


Abb. 14.2 Einschalten einer Induktivität

Führt man die Beziehungen

$$L_{kl} = L_{lk} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_k} \oint_{C_l} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}_l \,\mathrm{d}\boldsymbol{S}_k}{r_{kl}} \tag{14/6}$$

in Gl. (14/5) ein, so gewinnt man die wichtige Beziehung

$$I_k R_k - U_{ek} = -\sum L_{kl} \frac{\mathrm{d}I_l}{\mathrm{d}t}. \tag{14/7}$$

Die Größen L_{kl} und L_{lk} werden *Koeffizienten der gegenseitigen Induktion* genannt; sie geben die im k-ten Leiter induzierte Spannung an, wenn im l-ten Leiter sich der Strom I_l ändert.

Durch Vergleich der Formeln (14/3) und (14/7) findet man die Beziehung:

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^{n} L_{ik} I_i, \tag{14/8}$$

die für *einen* Leiter in Gl. (13/77) übergeht, woraus der *Selbstinduktionskoeffizient L* berechnet werden kann.

14.12 Energie des magnetischen Feldes

Die Relation

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{H}\boldsymbol{B} \,\mathrm{d}V = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{H} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \,\mathrm{d}V \tag{14/9}$$

läßt sich unter Berücksichtigung von

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$$

in folgende Form bringen:

$$W_m = \frac{1}{2} \int\limits_V \boldsymbol{A} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \, \mathrm{d} V - \frac{1}{2} \int \operatorname{div} (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{A}) \, \mathrm{d} V. \tag{14/10}$$

Das zweite Glied in dieser Gleichung verschwindet bei einer Integration über das gesamte Feld. Da nach Gl. (13/2) rot $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{G}$ ist, folgt hiermit aus Gl. (14/10):

$$W_m = \frac{1}{2} \int\limits_V \boldsymbol{A} \, \boldsymbol{G} \, \mathrm{d} V. \tag{14/11}$$

Setzt man in Gl. (14/11) den Ausdruck (13/23) ein, so erhält man schließlich die Beziehung

$$W_m = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} L_{ik} I_i I_k \tag{14/12}$$

für ein System von n Leitern, die für den Fall *eines* Leiters die bekannte Formel

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

liefert.

14.13 Zeitlich veränderliches Feld

Wird nach Abb. 14.2 die Selbstinduktion L mit dem ohmschen Widerstand R über den Schalter S an eine Spannungsquelle mit der EMK E_0 geschaltet, so gilt:

$$E_0 = iR + L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t};$$

hieraus folgt:

$$\mathrm{d}t = \frac{L \, \mathrm{d}i}{E_0 - iR}$$

und durch Integration

$$i = \frac{E_0}{R} - \frac{E_0}{R} e^{-Rt/L} = \frac{E_0}{R} (1 - \mathrm{e}^{-Rt/L}). \tag{14/13}$$

In Abb. 14.2b ist das zeitliche Anwachsen des Stromes i dargestellt, der bei $\tau = L/R = 1$ den Wert $0{,}633 E_0/R$ erreicht.

Wird der Strom I_0 in der Spule L plötzlich abgeschaltet und L über R kurzgeschlossen, so entlädt sich die magnetische Energie W_m durch den Widerstand R entsprechend der Beziehung

$$i = I_0 \, \mathrm{e}^{-Rt/L} = I_0 \, \mathrm{e}^{-t/\tau}. \tag{14/14}$$

14.14 Einheiten

Die Induktivität wird als diejenige Spannung definiert, die bei Änderung des Stromes im eigenen Kreis (Selbstinduktivität) oder in einem benachbarten Kreis (Gegeninduktivität) induziert wird. Als praktische Einheit der Induktivität wird das *Henry* (H) benutzt, das unterteilt wird in:

$$1\ \mathrm{mH} = 10^{-3}\ \mathrm{H}; \qquad 1\ \mu\mathrm{H} = 10^{-6}\ \mathrm{H}.$$

14.2 Berechnung von Induktivitäten [*14.7*, *14.8*, *14.9*]

14.21 Formeln für die Selbstinduktivität

Für die praktische Berechnung der Selbstinduktivität und der Gegeninduktivität zweier Leiter geht man meistens von der Beziehung

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \int_V \frac{\mu}{2} H^2 \,\mathrm{d}V$$

aus, wobei die magnetische Feldstärke über das ganze Volumen V zu integrieren ist, oder man benutzt den Ausdruck für den magnetischen Fluß Φ_k nach Gl. (14/8). Für die nachfolgenden Formeln ist als Umgebung Vakuum oder Luft vorausgesetzt ($\mu_0 = 1{,}2566 \cdot 10^{-8}$ H/cm); das zahlenmäßige Ergebnis wird in H erhalten.

Gerader Draht. Länge $l >$ Dicke $2r_0$:

$$L = \mu_0 \frac{l}{2\pi} \left(\ln \frac{2l}{r_0} - 0{,}75 \right). \tag{14/15}$$

Parallele Drähte. Abstand der Drähte $a \gg r_0$:

$$L = \mu_0 \frac{l}{\pi} \left(\ln \frac{a}{r_0} + 0{,}25 \right). \tag{14/16}$$

Gerades Band. Bandbreite b, Länge l:

$$L = \mu_0 \frac{l}{2\pi} \left(\ln \frac{2l}{b} + 0{,}5 \right). \tag{14/17}$$

Kreis. Radius $R \gg r_0$:

$$L = \mu_0 R \left(\ln \frac{R}{r_0} + 0{,}33 \right). \tag{14/18}$$

Rechteckschleife mit den Seiten a und b; $\sqrt{a^2 + b^2} = p$:

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left[a \ln \frac{2ab}{r_0(a+p)} + b \ln \frac{2ab}{r_0(b+p)} - \frac{7}{4}(a+b) + 2p \right]. \tag{14/19}$$

Quadrat von der Seite a:

$$L = \mu_0 \frac{2a}{\pi} \left(\ln \frac{a}{r_0} - 0{,}52 \right). \tag{14/19a}$$

Konzentrisches Kabel mit den Radien r_1 und r_2, kleine Manteldicke:

$$L = \mu_0 \frac{l}{2\pi} \left(\ln \frac{r_1}{r_2} + 0{,}25 \right). \tag{14/20}$$

In *Tabelle 14.1* ist die Selbstinduktivität von Bifilarleitung und konzentrischem Kabel für verschiedene Abmessungen angegeben. Obige Formeln gelten für niedrige Frequenzen und konstante Stromdichte im Leiter.

Tabelle 14.1
Selbstinduktivität gerader Doppelleiter (*in* μH/m)

$10^{-n} \cdot \beta$	Bifilarleitung $\beta = a/r_0$		Konzentrisches Kabel $\beta = r_1/r_2$	
	$n = 0$	$n = 1$	$n = 0$	$n = 1$
1		1,021	0,050	0,511
1,2		1,094	0,086	0,547
1,5		1,183	0,131	0,592
2	0,377	1,298	0,189	0,649
2,5	0,467	1,388	0,233	0,694
3	0,539	1,460	0,270	0,730
4	0,655	1,576	0,327	0,788
5	0,744	1,665	0,372	0,832
6	0,817	1,738	0,408	0,869
7	0,878	1,800	0,439	0,900
8	0,932	1,853	0,466	0,926
9	0,979	1,900	0,489	0,950
10	1,021	1,942	0,511	0,971

Einlagige Zylinderspule vom Radius r, der Windungszahl N und der Länge l:

$$L = \mu_0 \pi N^2 \frac{r^2}{l^2} \left(\sqrt{l^2 + r^2} - r \right), \tag{14/21}$$

und für $l \gg r$ in der Näherung:

$$L = \mu_0 \pi N^2 \frac{r^2}{l}. \tag{14/21a}$$

Kurze einlagige Spule:

$$L = \mu_0 \pi N^2 \frac{r^2}{l} f, \tag{14/21b}$$

wobei der Korrekturfaktor f eine Funktion von $l/2r$ ist, die in *Tabelle 14.2* angegeben ist.

Tabelle 14.2 Korrekturfaktor f für kurze Spulen

$l/2r$	f	$l/2r$	f
0,0001	0,00055	0,3	0,405
0,0002	0,00115	0,5	0,525
0,0003	0,00165	0,7	0,605
0,0005	0,00258	1	0,685
0,0007	0,00341	2	0,820
0,001	0,00465	3	0,87
0,01	0,0360	5	0,92
0,02	0,0610	7	0,94
0,03	0,0835	10	0,95
0,04	0,1040	15	0,975
0,1	0,200	20	0,98
0,2	0,315	50	0,99

Von LORENZ wird der Korrekturfaktor in Gl. (14/21b) zu

$$f = \frac{4}{3\pi}\,\frac{2r}{l}\left(\frac{2k^2-1}{k^3}\,E + \frac{1-k^2}{k^3}\,F - 1\right)$$

angegeben, worin $k = 2r/(4r^2 + l^2)^{1/2}$ und E und F die vollständigen elliptischen Integrale 1. und 2. Art des Moduls k sind.

Mehrlagige Spulen mit Innen- bzw. Außenradius r_i und r_a, axialer Länge l und Wicklungshöhe h:

$$L = \mu_0 \cdot 1{,}673 N^2 r_m \left(\frac{r_m}{l+h}\right)^{3/4} \quad \text{für } 1 > \frac{r_m}{l+h} > 0; \qquad (14/22\text{a})$$

$$L = \mu_0 \cdot 1{,}673 N^2 r_m \sqrt{\frac{r_m}{l+h}} \quad \text{für } 3 > \frac{r_m}{l+h} > 1, \qquad (14/22\text{b})$$

worin der *mittlere* Wicklungsradius $r_m = (r_i + r_a)/2$ ist.

Für *Selbstinduktionsnormale* wird oft ein quadratischer Wicklungsquerschnitt ($l = h$) und $r_m/l = 1{,}5 \cdots 2$ gewählt, wofür die kleinste Drahtlänge erforderlich ist und angenähert gilt:

$$L = 1{,}673\ \mu_0\ N^2 r_m.$$

Einlagige Flachspule mit Innen- und Außenradius r_i und r_a:

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{4\pi}\, r_a F(r_i/r_a), \qquad (14/23)$$

wobei F die in *Tabelle 14.3* angegebene Funktion bedeutet.

Tabelle 14.3 Spulenfunktion F

$\frac{r_i}{r_a}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
F	6,97	8,556	10,51	12,86	15,65	18,97	23,01	28,09	34,92	45,74

Beliebige Spule mit rechteckigem Wicklungsquerschnitt:

$$L = \frac{\pi r^2 N^2}{l} k, \qquad (14/24)$$

wobei der Faktor k von den Dimensionsverhältnissen $l/2r$ und $h/2r$ abhängt. In *Tabelle 14.4* sind einige der nach COURSEY berechneten Zahlenwerte für k zusammengestellt.

Tabelle 14.4 Spulenfaktor k für beliebige Spulen

$l/2r$	$h/2r$										
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,05	0,124										
0,06	0,141										
0,07	0,158										
0,08	0,174										
0,09	0,189										
0,1	0,203	0,159									
0,2	0,320	0,268	0,232								
0,3	0,405	0,350	0,308	0,276							
0,4	0,472	0,415	0,370	0,332	0,304						
0,5	0,526	0,467	0,420	0,379	0,346	0,321					
0,6	0,570	0,510	0,461	0,418	0,383	0,353	0,331				
0,7	0,607	0,547	0,495	0,451	0,414	0,381	0,356	0,338			
0,8	0,638	0,577	0,524	0,478	0,440	0,405	0,378	0,358	0,343		
0,9	0,665	0,604	0,550	0,503	0,465	0,426	0,397	0,375	0,358	0,349	
1,0	0,668	0,626	0,571	0,523	0,484	0,445	0,414	0,389	0,371	0,359	0,356
2	0,818	0,754	0,695	0,641	0,592	0,544	0,503	0,472	0,446	0,424	0,409
3	0,874	0,809	0,749	0,692	0,640	0,590	0,548	0,508	0,474	0,446	0,428
4	0,902	0,837	0,775	0,717	0,663	0,612	0,567	0,526	0,491	0,461	0,437
5	0,920	0,855	0,793	0,733	0,678	0,626	0,578	0,536	0,499	0,467	0,442
6	0,932	0,866	0,804	0,744	0,688	0,635	0,587	0,543	0,504	0,471	0,442
7	0,942	0,876	0,813	0,753	0,697	0,642	0,594	0,549	0,509	0,474	0,446
8	0,948	0,882	0,819	0,758	0,702	0,647	0,598	0,552	0,512	0,476	0,477
9	0,954	0,888	0,824	0,763	0,707	0,651	0,601	0,555	0,514	0,478	0,448
10	0,959	0,893	0,829	0,768	0,711	0,655	0,605	0,558	0,516	0,479	0,448
20	0,979	0,913	0,848	0,785	0,727	0,669	0,617	0,567	0,524	0,483	0,448
30	0,986	0,920	0,854	0,791	0,732	0,673	0,620	0,570	0,525	0,483	0,448
40	0,989	0,923	0,857	0,794	0,734	0,675	0,621	0,571	0,525	0,483	0,448
50	0,992	0,926	0,860	0,797	0,736	0,677	0,622	0,571	0,525	0,483	0,448

Toroid mit dem mittleren Radius R und der Windungsfläche F:

$$L = \mu_0 \frac{N^2 F}{2\pi R}. \tag{14/25}$$

14.22 Formeln für die Berechnung der Gegeninduktivität

Zwei koaxiale Kreise mit den Radien r_1 und r_2 im Abstand d:

$$M = L_{12} = \sqrt{r_1 r_2}\left[\left(\frac{2}{k} - k\right) F - \frac{2}{k} E\right] \mu_0, \tag{14/26}$$

mit

$$k = \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + d^2}},$$

worin E und F die vollständigen elliptischen Integrale 1. und 2. Art zum Modul k sind.

Näherungsformel für zwei gleiche, koaxiale Kreise mit dem Radius r:

$$M = \mu_0 r\left[\ln \frac{8r}{\mathrm{d}}\left(1 + \frac{3\mathrm{d}^2}{16r^2}\right) - \left(2 + \frac{\mathrm{d}^2}{16r^2}\right)\right]. \tag{14/26a}$$

Zwei gerade, parallele Leiter der Länge l im Abstand $d \ll l$:

$$M = \mu_0 \frac{l}{2\pi}\left(\ln \frac{2l}{\mathrm{d}} - 1\right). \tag{14/27}$$

Konzentrische, koaxiale einlagige Spulen gleicher Länge mit den Radien r_1 und r_2 und der Länge l:

$$M = \mu_0 \pi r_2^2 N_1 N_2 (l - 2 r_1 \alpha) \tag{14/28}$$

mit

$$\alpha = \frac{r_1 - a + l}{2r_1} - \frac{r_2^2}{16r_1^2}\left(1 - \frac{r_1^3}{a^3}\right) - \frac{r_2^4}{64r_1^4}\left(\frac{1}{2} + 2\frac{r_1^5}{a^5} - \frac{5}{2}\cdot\frac{r_1^7}{a^7}\right) - \ldots,$$

wenn $a = \sqrt{l^2 + r_1^2}$ und die Spulen die Windungszahlen N_1 bzw. N_2 besitzen.

14.23 Impedanz einer Selbstinduktivität

Da eine Induktivität L wegen des endlichen ohmschen Widerstandes der Wicklung den Wirkwiderstand R besitzt (mit Ausnahme von supraleitenden Spulen!), lautet der entsprechende Widerstandsoperator:

$$\boldsymbol{R} = R + \mathrm{j}\omega L. \tag{14/29}$$

Zwischen benachbarten Windungen einer Spule besteht ein elektrisches Feld und damit von Windung zu Windung eine Kapazität. Die über die ganze Spulenlänge verteilten Kapazitäten lassen sich zu einer Kapazität c_{12} zusammen-

fassen, die zu L parallelgeschaltet ist (s. Abb. 14.3). Ferner besitzen die Spulenwindungen Streukapazitäten c_{10} und c_{20} gegen Erde oder ein geerdetes Metallgehäuse. Die gesamte Spulenkapazität berechnet sich zu

$$C = c_{12} + \frac{c_{10} c_{20}}{c_{10} + c_{20}} \alpha, \tag{14/30}$$

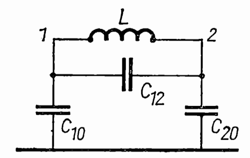


Abb. 14.3 Spulenkapazitäten

wo $\alpha \leqq 1$ einen von Form und Abschirmung der Spule abhängigen Faktor bedeutet. Bei unmittelbarer Erdung der Spulenklemmen *1* oder *2* ergibt sich: $C = c_{12} + c_{20}$ bzw. $c_{12} + c_{10}$. Für eine einlagige Zylinderspule vom Radius r gilt annähernd:

$$C = \frac{2r}{1/\cos(s/d)} \varepsilon_0, \tag{14/31}$$

wenn s der Abstand benachbarter Windungen und d der Drahtdurchmesser ist.

Das Ersatzschaltbild einer Induktivität entspricht der Serienschaltung von L und R mit einem parallelgeschalteten Kondensator C; der Widerstandsoperator der Schaltung lautet dann:

$$\boldsymbol{Z} = \frac{R + \mathrm{j}\omega[L(1 - \omega^2 LC) - CR^2]}{\omega^2 C^2 R^2 + (1 - \omega^2 LC)^2}. \tag{14/32}$$

Dabei können bei nicht zu hohen Frequenzen die Glieder mit R^2 gegen die übrigen Terme vernachlässigt werden. Näheres siehe [*14.2*]. Die Spulenkapazität bewirkt eine scheinbare Vergrößerung der Selbstinduktivität sowie des Wirkwiderstandes; es folgt nämlich aus Gl. (14/32):

$$L' = \frac{L_0}{1 - \omega^2 L_0 C}; \tag{14/33a}$$

$$R' = \frac{R_0}{(1 - \omega^2 L_0 C)^2}, \tag{14/33b}$$

wenn L_0 und R_0 die Werte ohne Spulenkapazität sind.

Als *Phasenwinkel* einer Induktivität folgt aus Gl. (14/32) die Beziehung:

$$\tan\varphi = \frac{\omega L}{R}(1 - \omega^2 LC) - \omega RC \approx \frac{\omega L}{R}(1 - \omega^2 LC) = \frac{\omega L'}{R'}. \tag{14/34}$$

Bei hohen Frequenzen kann die Spule zu *Eigenschwingungen* der Grund-

frequenz

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

und ihren Oberschwingungen angeregt werden.

14.3 Aufbau und Eigenschaften

14.31 Induktivitätsnormale [14.26]

Normale der Selbstinduktion bestehen meist aus mehrlagigen Kupferdrahtspulen, die auf Spulenkörper aus Porzellan, Marmor oder Quarz gewickelt sind. Der Wicklungsquerschnitt ist annähernd quadratisch (vgl. Gl. 14/22b), wodurch bei gegebenem L die Drahtlänge und daher der Widerstand ein Minimum werden. Der Spulenkörper muß maßbeständig sein und einen kleinen Temperaturkoeffizienten besitzen; sein Isolationswiderstand soll hoch sein. Die magnetische Suszeptibilität soll verschwindend klein und der benutzte Kupferdraht eisenfrei sein.

Bis etwa 20 kHz ist die Selbstinduktion praktisch frequenzunabhängig. Bei höheren Frequenzen erhöht sich infolge des Skineffekts (s. § 9.14) der Wirkwiderstand der Wicklung und verringert sich etwas die Induktivität der Spule. Um diesen Effekt zu vermindern, verwendet man *Litzendraht*, d. h. viele dünne, isolierte und miteinander verdrillte Kupferdrähte.

Absolute Selbstinduktionsnormale werden von Staatsinstituten (PTB, DAMW, NBS, NPL) mit großer Präzision hergestellt und laufend kontrolliert. Als einzige streng berechenbare Form ist hierzu die einlagige Zylinderspule nach der Formel von LORENZ (Gl. 14/21b) geeignet. Als Spulenkörper dienen Hohlzylinder aus imprägniertem Marmor mit eingeschnittenen Nuten zur Aufnahme der Wicklung aus blankem Kupferdraht, der unter Spannung aufgebracht wird. In *Tabelle 14.5* sind die Abmessungen einiger Selbstinduktionsnormale zusammengestellt.

Tabelle 14.5 Selbstinduktionsnormale

Institut	Spulen-körper	N	Draht-durchmesser mm	Spulen-durchmesser cm	Spulen-länge cm	L mH
PTB	Marmor	162	0,05	35,5	16,2	10,14
PTB	Marmor	447	0,05	35,5	33,5	50,01
PTB	Quarz	228	0,05	23,3	17,1	10,02
NBS	Porzellan	383	0,07	29,1	40,9	22,59
NBS	Glas	263	0,07	46,3	26,3	30,86
NBS	Quarz	1000	0,07	38,1	100,0	69,01

Die Induktivitätswerte der in der Tabelle aufgeführten Spulen sind auf etwa 10^{-5} genau; für Wechselstrommessungen sind sie nur bis etwa 1 kHz

verwendbar, da die nicht abgeschirmten Spulen erhebliche Streukapazitäten gegen die Umgebung besitzen.

Neuere Induktivitätsnormale werden daher oft als *Toroidspulen* ausgebildet, die zwar schwieriger zu bewickeln sind, aber ein in sich geschlossenes Magnetfeld besitzen, das nur wenig von außen beeinflußt werden kann. Man kann daher solche Spulen in Abschirmgehäuse einbauen und ihre Streukapazität genau berücksichtigen.

Gegeninduktivitätsnormale [*14.16*] sind aus den geometrischen Abmessungen mit größerer Sicherheit als die Selbstinduktionsnormalen berechenbar. Bei großem Abstand der beiden Spulen verringern sich die Einflüsse der Wirbelströme und der Eigenkapazität.

Das *absolute Normal der Gegeninduktivität* von CAMPBELL besteht aus einer symmetrisch geteilten, einlagigen Primärspule, die auf einen Marmorkern gewickelt ist, und einer mehrlagigen schmalen Sekundärspule, die sich symmetrisch zwischen den primären Teilspulen in einer schmalen Nut befindet. Ihr mittlerer Radius ist etwa 1,46mal so groß wie der der Primärspule, da für dieses Verhältnis die Gegeninduktivität am größten ist. Kleine Fehler im Abstand von Sekundär- zu Primärspulen beeinflussen den Betrag von M nur unwesentlich.

14.32 Gebrauchsnormale fester Induktivität

NF-Induktionsnormale werden auf Kerne aus Marmor, Porzellan oder keramischen Massen gewickelt. Kleinere Induktivitätswerte werden mit *einlagigen* Spulen erreicht, die geringe Dämpfung besitzen; größere Spulen erhalten quadratischen Wicklungsquerschnitt, wobei der mittlere Windungsradius das 1,5fache der Spulenlänge betragen soll.

Für HF-Spulen wird zur Vermeidung der Wirbelstromverluste HF-Litze verwendet und der Spulenkörper aus Styroflex o. ä. gefertigt. Zum Fixieren der Wicklung wird Paraffin benutzt. *Niederfrequenznormale* mit Werten zwischen 10^{-4} und 1 H sind bis etwa 5 kHz auf 10^{-4} von der Frequenz unabhängig. Der Wirkwiderstand allerdings steigt bei 5 kHz bereits auf das Doppelte des Gleichstromwertes an. Die Spulenkapazität liegt dabei zwischen 25 und 250 pF für eine 1-H-Spule. Für höhere Frequenzen empfiehlt es sich, trotz der damit sich ergebenden höheren Spulenkapazität die Spulen mit einer geerdeten *Abschirmung* zu umgeben.

Im HF-Bereich macht sich die Spulenkapazität (vgl. § 14.23) der Induktionsspule bemerkbar, die bei einer einlagigen Spule annähernd dem Spulenradius proportional ist und von der Spulenlänge sowie der Windungszahl nur wenig abhängt. *Mehrlagige Spulen* besitzen eine größere Eigenkapazität als einlagige. Zur Verringerung der Kapazität müssen die aufeinanderfolgenden Windungen so angebracht werden, daß die zwischen ihnen herrschende Potentialdifferenz nur ein Bruchteil der an der Spule liegenden Gesamtspannung ist. Dies läßt sich mit der in Abb. 14.4a gezeigten *Stufenwicklung* erreichen. Eine andere Möglichkeit bietet ein vergrößerter Abstand zwischen den einzelnen Wicklungslagen, wie er in Abb. 14.4b dargestellt ist. Bei der in Abb. 14.4c gezeigten *Universal-* oder *Honigwabenspule* wird der Draht gegen die Ebene der kurzen

Spule in ihrer ganzen Breite schief aufgewickelt, und zwar in jeder Lage mit abwechselndem Sinn. Auf diese Weise erhält man eine selbsttragende Spule mit kleiner Kapazität und geringen Abmessungen [*14.21*].

Über die Eichung von HF-Induktivitäten bei hohen Frequenzen siehe [*14.14*]. HF-Spulen mit kleiner Induktivität lassen sich auch mit keramischen

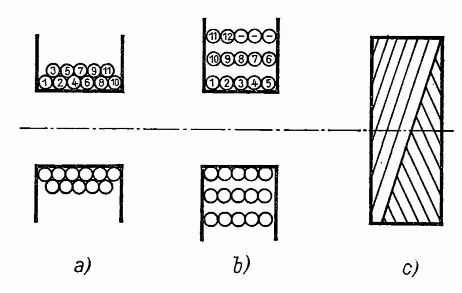


Abb. 14.4 Kapazitätsarme Induktivitäten

Spulenkörpern herstellen, auf die die Windungen in Form sehr dünner Ag-Bänder aufgebrannt sind. Über den Einfluß der *Feuchtigkeit* und der *Temperatur* auf die Induktivität siehe RAYNER [*14.20*] sowie DICKEY [*14.5*].

Toroidspulen mit ferromagnetischem Kern aus weichmagnetischem Material (s. § 12.52) haben den Vorzug kleiner Streuung und geringer Eigenkapazität. Über die Induktivität einer großen Toroidspule für Plasmaexperimente bei hohen Frequenzen oder kurzen Impulsen siehe [*14.19*].

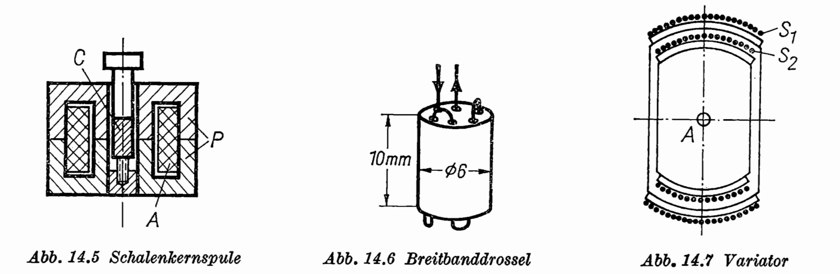


Abb. 14.5 Schalenkernspule *Abb. 14.6 Breitbanddrossel* *Abb. 14.7 Variator*

Für HF-Induktivitäten ist die Verwendung der weichmagnetischen Ferrite, z. B. Ferroxcube 3, 4 oder 7, weit verbreitet, deren Anfangspermeabilität zwischen 900 und 2300 liegt. Der magnetische Kreis wird z. B. als *Schalenkern* (s. Abb. 14.5) ausgebildet, der aus symmetrischen Hälften P besteht und den vollkommen abgeschirmten Spulenkörper A enthält. Durch einen Abgleichstift C aus magnetischem Material läßt sich die Induktivität um etwa 10% verändern. Die erreichbare Güte L/R solcher Spulen liegt zwischen 100 und 800 und erreicht ihr Maximum bei Frequenzen um 100 kHz.

Spulen mit einem *Topfkreis* enthalten ebenfalls einen geschlossenen magnetischen Kreis aus ferritischem Material, der aus einem Mittelkern, Ringkern und

zwei Deckplatten besteht. Weitere Kernformen sind der *E-Kern*, *Kreuzkern* und *H-Kern*, deren Wicklung z. T. freiliegt und deshalb nicht vollkommen abgeschirmt ist.

Breitband-Drosselspulen für den UKW-Bereich bestehen aus zylindrischen Ferroxcube-Kernen mit 6 axialen Bohrungen, durch die verzinnter Kupferdraht in einigen Windungen gezogen ist (Abb. 14.6). Solche Spulen besitzen wegen der großen Kernverluste einen ausgesprochenen Breitbandcharakter, ein geringes Streufeld und einen kleinen Gleichstromwiderstand. Sie sind besonders für die Verdrosselung von Heizkreisen in Röhrenschaltungen geeignet.

14.33 Spulensätze

Ähnlich wie Stöpselwiderstände (s. § 9.35) lassen sich auch Induktivitätssätze in dekadischer Unterteilung herstellen, die durch Messingstöpsel zusammengeschaltet werden. Bei Zylinderspulen ist eine gegenseitige Beeinflussung unvermeidbar; zweckmäßiger sind Toroidspulen mit Perminvar-Kernen mit Einzelwerten zwischen 10 μH und 10 mH. Näheres siehe [*14.12*].

14.34 Variatoren, Variometer

Stufenlos veränderliche Induktivitäten werden *Variatoren* genannt. Sie bestehen aus zwei Einzelspulen, deren Achsen gegeneinander geschwenkt oder verdreht werden können oder deren Abstand veränderlich ist. Die in Abb. 14.7 gezeigte Ausführungsform besteht aus den Einzelspulen S_1 und S_2, die in Serie geschaltet sind und deren Gesamtinduktivität

$$L = L_1 + L_2 \pm M$$

beträgt, wenn L_1, L_2 die Eigeninduktivität der Spulen und M ihre Gegeninduktivität bedeutet. Die innere Spule ist um die Achse A drehbar gelagert; die Eichung ist von kleinen axialen Verschiebungen der kugelförmigen Spulen unabhängig.

Für eine kurze Zylinderspule, die drehbar in einer langen Zylinderspule gelagert ist, wird die Gegeninduktivität $M \sim \cos\beta$, wenn β der Winkel zwischen den Spulenachsen ist. Mit solchen *Drehvariometern* kann die Induktivität im Verhältnis 1:10 verändert werden. Kleine Induktivitätsänderungen im HF-Bereich lassen sich mit einer Zylinderspule erreichen, in deren Mitte eine Scheibe oder ein Ring aus Kupfer senkrecht zur Spulenachse verdreht werden kann. Von WEIS [*14.24*] wird ein Variometer angegeben, bei dem die bewegliche Innenspule durch ein Drehspulsystem verdreht werden kann.

Auch mit *Flachspulvariometern*, deren Spulenebenen gegeneinander geschwenkt werden können, lassen sich große Induktivitätsänderungen erzielen.

Grundsätzlich verschieden hiervon sind Induktivitäten mit vormagnetisierten Eisenkernen. Mit zunehmender Induktion nimmt die reversible Permeabilität des magnetischen Kreises und damit die Induktivität ab; siehe auch [*14.23*].

14.35 Drosselspule

Drosselspulen sind Induktivitäten mit großem Blindwiderstand und kleinem Gleichstromwiderstand und dienen dazu, in Wechselstromkreisen den HF-Strom abzublocken, während der Gleichstrom, z. B. in Heizkreisen von Elektronengeräten, ungeschwächt fließen kann. Für NF werden solche Spulen mit lamelliertem Eisenkern aus weichmagnetischem Material ausgeführt. Die Induktivität hängt von der mittleren magetischen Induktion des Materials ab. Im HF- und UHF-Bereich werden geschlossene Ferritkerne (s. § 14.33) mit hohen Verlusten benutzt.

Drosselspulen mit großer Induktivität werden auch zur Glättung in Gleichrichterkreisen verwendet. Näheres siehe § 5.14.

14.4 Absolute Induktivitätsmessung

Unter der absoluten Meßmethode zur L-Messung versteht man das Zurückführen einer Induktivität auf andere physikalische Größen, wie Spannung, Widerstand oder Frequenz.

14.41 Messung des Scheinwiderstandes

Mißt man in einem Wechselstromkreis bei der Frequenz ω den Scheinwiderstand einer Induktivität

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \qquad (14/35)$$

wobei R der Gleichstromwiderstand ist, so berechnet sich daraus für bekanntes ω die Induktivität L zu

$$L = \sqrt{\frac{Z^2 - R^2}{\omega}}. \qquad (14/35\,\text{a})$$

Diese Formel gilt nur für rein sinusförmigen Strom; andernfalls ist die rechte Seite von Gl. (14/35a) mit dem Faktor

$$F = \sqrt{\frac{i_1^2 + i_2^3 + i_5^2 + \cdots}{i_1^2 + (3 i_3)^2 + (5 i_5)^2 + \cdots}} \qquad (14/36)$$

zu multiplizieren, wenn mit $i_1, i_3, \ldots$ die Effektivwerte der Grundschwingung bzw. der 2., 4. usw. Oberschwingung bezeichnet werden.

Bei HF kann R gegen ωL vernachlässigt werden; man koppelt dann zweckmäßig den durch einen Kondensator erweiterten Serienkreis, der aus Induktivität L (mit parallel geschaltetem Voltmeter), der Kapazität C und dem Strommesser besteht, an den HF-Oszillator an und stimmt mit C auf Resonanz ab.

14.42 Messung mit Spannungsteiler

Größere Genauigkeit läßt sich erzielen, wenn der zu bestimmenden Induktivität L ein induktionsfreier Widerstand R_n vorgeschaltet und die Spannungsabfälle iZ und iR_n durch Verändern von R_n gleich groß gemacht werden.

Es gilt dann:

$$L = \frac{\sqrt{R_n^2} - R}{\omega}, \tag{14/37}$$

wenn R wieder der Gleichstromwert des Spulenwiderstandes ist. Diese Methode ist besonders für $f < 1$ kHz geeignet und liefert für große Induktivitäten eine Genauigkeit von 10^{-4}.

14.43 Messung mit ballistischem Galvanometer

Analog zur Maxwell-Thomson-Brücke in Abb. 10.14 des § 10.42 kann man die zu messende Induktivität L in einen Zweig der Brücke in Abb. 14.8 schalten, die sonst aus induktionsfreien Widerständen R_2 bis R_4 besteht. Im Diagonalzweig befindet sich das ballistische Galvanometer G mit dem Innenwiderstand R_g. Nachdem die Brücke bei Gleichstrom abgeglichen und daraus der Wirkwiderstand R_1 von L ermittelt ist, wird durch den Schalter S der Brückenstrom unterbrochen und der Instrumentenausschlag α erhalten. Wird nun R_2 um ΔR_2 geändert, so bekommt man bei Gleichstrom den Dauerausschlag β. Aus beiden Beobachtungen findet man die gesuchte Induktivität mit Hilfe der Beziehung

$$L = \Delta R_2 \frac{\tau \alpha}{2\pi\beta} k^{t_1/\tau}, \tag{14/38}$$

wenn k das Dämpfungsverhältnis (s. Gl. 2/55), τ die volle Schwingungsdauer des Galvanometers und

$$\frac{t_1}{\tau} = \frac{1}{2\pi} \arctan \frac{2\pi}{\Lambda}$$

bedeutet, wenn $\Lambda = \ln k$ das logarithmische Dekrement ist. Größere Genauigkeit wird mit periodisch unterbrochenem Strom erzielt.

14.44 Messung in der Wechselstrombrücke

Analog zur Kapazitätsmessung (s. § 10.52) ist die Wien-Brücke in Abb. 14.9 auch zur Messung von Induktivitäten geeignet. In den Zweigen *1* und *2* befinden sich die Induktivitäten L_1 und L_2 mit den Gleichstromwiderständen R_1

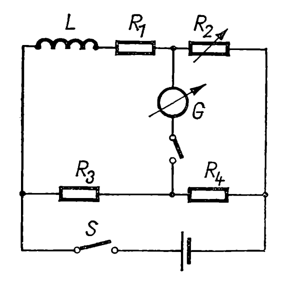




Abb. 14.8 Messung mit ballistischem Galvanometer

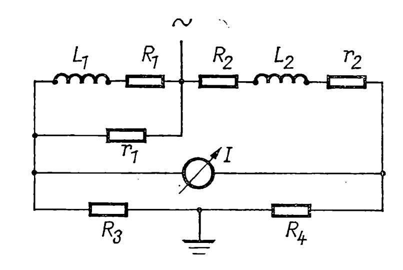


Abb. 14.9 L-Messung in der Wien-Brücke

und R_2, ferner der Vorwiderstand r_2 und der zu L_1 parallelgeschaltete Widerstand r_1. Die anderen Zweige werden durch die induktionsfreien Widerstände R_3 und R_4 gebildet. Als Nullinstrument I dient ein Röhrenvoltmeter, ESO o. ä. Aus den Brückenbedingungen

$$\omega^2 L_1 L_2 = (r_1 + R_1)(r_2 + R_2) - \frac{r_1 R_1 R_4}{R_3}$$

und

$$L_1 \left[\frac{r_1 R_4}{R_3} - (R_2 + r_2) \right] = L_2 (r_1 + R_1)$$

können dann die Bestimmungsgleichungen für die gesuchten L-Werte bzw. für das Verhältnis L_1/L_2 ermittelt werden.

14.45 Doppelspannungsteiler

Die hierfür benutzte Schaltung (Abb. 14.10) ist wie eine Wechselstrombrücke aufgebaut, wobei R_2 und R_3 induktionsfreie feste Widerstände sind und nur R_1 in Zweig *1* veränderlich ist. Durch den Umschalter S kann das Nullinstrument I wahlweise zwischen die Knotenpunkte a oder b und Erde gelegt werden, wobei nur der *Betrag* der an R_3 bzw. L liegenden Spannungen verglichen wird. Der Widerstand R_1 wird so lange geändert, bis das Röhrenvoltmeter I in beiden Schalterstellungen den gleichen Ausschlag ergibt. Der Gleichstromwiderstand von L soll bei dieser Methode gegen den Scheinwiderstand zu vernachlässigen sein; auch soll $\omega L \leqq 10^{-3} \cdot 1/\omega C_I$ sein, wenn C_I die Eigenkapazität von I ist.

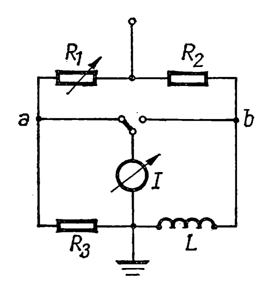


Abb. 14.10 Doppelspannungsteiler

Für $R_1/R_3 \geqq 20$ und eine Spulengüte $\omega L/R_L > 20$ lautet dann die Abgleichbedingung

$$\omega L = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_3} \qquad (14/39)$$

mit einem Fehler von $< 0{,}5\%$.

Das Verfahren ist im NF- und HF-Gebiet geeignet; für hohe Frequenzen ist für I ein Röhrenvoltmeter mit sehr hoher Eingangsimpedanz zu wählen.

14.5 Induktivitätsmessung durch Vergleich

14.51 Maxwell-Brücke

Im Grunde gehört diese sehr genaue Methode zu den unmittelbaren und absoluten Meßverfahren, wenn man die Parallelkapazität C_2 im Zweig *2* der Schaltung in Abb. 14.11a mit absoluten Methoden bestimmt (s. § 10.42). Im Zweig *3* befindet sich die zu messende Induktivität L mit dem Gleichstromwiderstand R_3. Für die abgeglichene Brücke lauten die beiden Bedingungen:

$$R_1 R_4 = R_2 R_3; \qquad \frac{L}{C_2} = R_1 R_4. \tag{14/40}$$

Sie enthalten also die Frequenz nicht, setzen aber voraus, daß die Meßwiderstände induktions- und kapazitätsfrei und die Zuleitungen kurz und induktionsarm sind (Vermeiden von Stromschleifen!). Alle Leitungen werden bifilar geführt und die vier Eckpunkte der Brücke möglichst nahe zusammengelegt, wie das in Abb. 14.11b gezeigt ist. Um alle Kapazitäten festzulegen, werden die

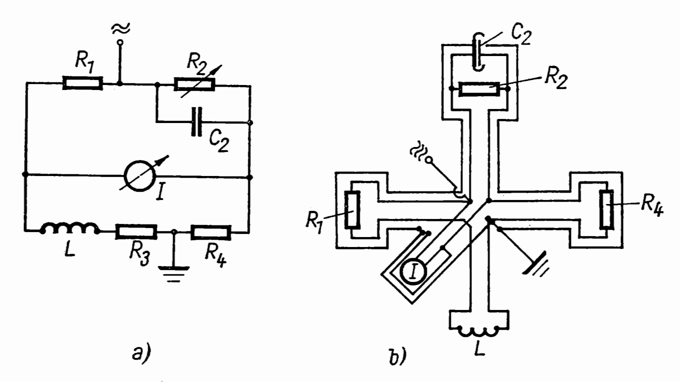


Abb. 14.11 Maxwell-Brücke: Prinzip (a), abgeschirmte Ausführung für HF (b)

einzelnen Brückenzweige abgeschirmt und die Brücke an einem Punkt geerdet. Das Nullinstrument I besitzt zwei Abschirmungen, von denen die innere mit dem Eckpunkt b, die äußere mit „Erde" verbunden ist. Die zwischen beiden Abschirmungen vorhandene Kapazität liegt damit parallel zu R_4. Bei der Messung nicht abgeschirmter Spulen geht die Kapazität $c_{12} + c_{20}$ (s. Abb. 14.3) in die Gleichgewichtsbedingungen ein. Bei der von Grüneisen und Giebe konstruierten Brücke werden als Widerstände parallel gespannte Manganindrähte verwendet, die über einen Schleifkontakt verändert werden können.

14.52 Resonanzbrücke

Bei der *Resonanzbrücke*, die im Prinzip in Abb. 14.12 dargestellt ist und von Grüneisen und Giebe für NF-Messungen entwickelt wurde, enthalten die Zweige *2* bis *4* reine Widerstände, während im Zweig *1* die zu messende In-

duktivität L_1 in Serie mit der veränderlichen Kapazität C_1 geschaltet ist. Der Widerstandsoperator des Zweiges *1*

$$\boldsymbol{Z}_1 = \mathrm{j}\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right) + R_1$$

wird reell, wenn durch Verändern von C_1 die Resonanzbedingung $\omega L_1 = 1/\omega C_1$ erfüllt ist, und es gelten die Abgleichbedingungen:

$$L_1 = \frac{1}{\omega^2 C_1}; \qquad \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}. \tag{14/41}$$

Durch die Eigenkapazität C_L der Spule vergrößert sich die Resonanzkapazität; anstelle von Gl. (14/41) gilt dann

$$L_1 = \frac{1}{\omega^2 (C_1 + C_L)}. \tag{14/41 a}$$

Die Größe von C_L hängt von der Spulenabschirmung und der Art der Einschaltung in die Brücke ab.

Die Resonanzbrücke ist auch für Substitutionsmessungen geeignet, wobei Fehler in der Symmetrierung eliminiert werden können. Für hohe Frequenzen

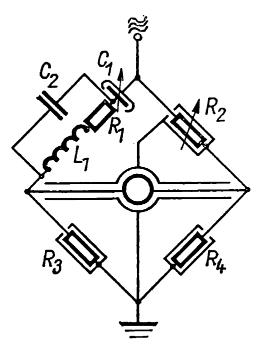


Abb. 14.12 Resonanzbrücke

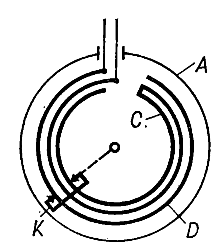


Abb. 14.13 Widerstand konstanter Induktivität

bereitet die Konstruktion des veränderlichen Widerstandes Schwierigkeiten. Bei der in Abb. 14.13 dargestellten Bauart bleibt die Induktivität für den ganzen Einstellbereich konstant. Der Widerstand besteht aus dem Manganindraht D, zu dem ein Bifilardraht C aus Kupfer verlegt ist. Der Widerstand wird mit dem Schleifkontakt K an den beiden äußeren Drähten abgegriffen, so daß die Länge der stromführenden Schleife immer konstant bleibt.

Nach Gl. (14/41 a) hängt die Genauigkeit der L-Messung von der Konstanz der Meßfrequenz ab und erfordert eine sinusförmige HF-Spannung.

Neben diesen Brücken werden verschiedene andere Schaltungen verwendet, bei denen das Brückengleichgewicht zwischen der gesuchten Induktivität L mit einem RC-Zweig (*Hay-Brücke*), zwei C-Zweigen (*Owen-Brücke*) oder

kombinierten *RC*-Zweigen (*Schering-Brücke*) hergestellt wird. Über erreichbare Genauigkeiten siehe [*14.25*]; eine mit Rechteckspannung betriebene Brücke wird von LAMONT [*14.17*] beschrieben. Für Vergleichsmessungen für große Induktivitäten sind Toroidspulen mit weichmagnetischem Kern geeignet, wie z. B. Permalloy, Mu-Metall. Näheres siehe [*14.10*, *14.18*].

14.53 Bifilarbrücke

Für den Vergleich zweier Induktivitäten ist die in Abb. 14.14 dargestellte Brücke nach MAXWELL geeignet, die in den Zweigen *3* und *4* induktions- und kapazitätsarme Widerstände R_3 und R_4 enthält. Die beiden Induktivitäten L_1

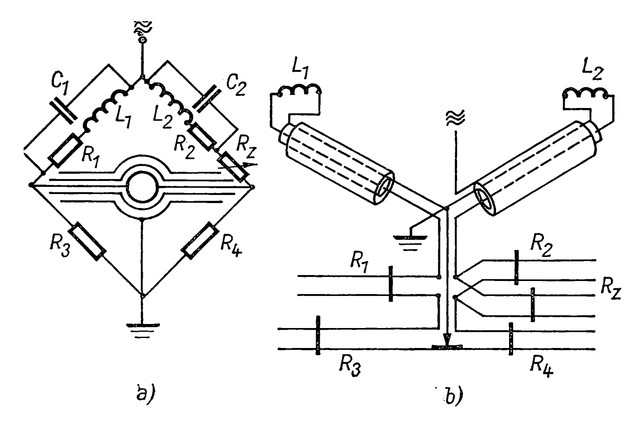


Abb. 14.14 Bifilarbrücke

und L_2 sind durch die Serienschaltung $L_1 R_1$ mit Parallelkapazität C dargestellt; der Spule mit dem kleineren Widerstand R_2 ist der veränderliche Bifilarwiderstand R_Z vorgeschaltet. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$$\frac{R_1}{R_2 + R_Z} = \frac{R_3}{R_4}; \quad \frac{L_1}{L_2} = \frac{R_3}{R_4}. \qquad (14/42)$$

Genaue Messungen sind nur möglich, wenn die induktive Kopplung zwischen den Brückenzweigen verhindert wird. Hierzu ist eine statische Abschirmung notwendig; ferner müssen die Brückenpunkte nahe beieinanderliegen, wie das in Abb. 14.14b gezeigt ist.

Die Gln. (14/42) müssen für genaue Messungen wegen des Einflusses der Spulenkapazität sowie der Kapazität und Induktivität von Zuleitungen und Widerständen erweitert werden. Die Teilkapazitäten der Spulenzuleitungen lassen sich eliminieren, wenn man Hin- und Rückleitung durch eine geerdete Abschirmung trennt. Bei kleinen zu messenden Induktivitäten müssen auch die Induktivitäten der Zuleitungen klein sein. Das Widerstandsverhältnis R_3/R_4 muß nach jeder Wechselstrommessung mit *Gleichstrom* genau bestimmt werden.

Hierzu wird die Zuleitung zu einer Spule gelöst und durch zwei Widerstandsbüchsen eine Wheatstone-Brücke gebildet.

In Abb. 14.14b sind die Widerstände R_3, R_4 und R_Z durch Bifilardrähte aus Widerstandsdraht gebildet, die über einen Schleifkontakt veränderlich sind. Zwischen R_3 und R_4 ist ein kurzes Stück Schleifdraht zum Feinabgleich eingefügt.

14.54 Differentialbrücke

Analog zu § 10.525 sind Differentialbrücken auch zur Messung von Induktivitäten geeignet. Eine hierfür geeignete Schaltung, die in Abb. 14.15 dargestellt ist, besteht aus zwei symmetrischen Zweigen, die vom Übertrager $\ddot{U}_1$

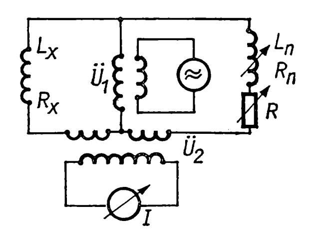


Abb. 14.15 Differentialmeßbrücke

gespeist werden. Der Kompensationszweig enthält die geeichte veränderliche Induktivität L_n (Wirkwiderstand R_n) sowie den Widerstand R zum Phasenabgleich. Die Einzelströme in beiden Zweigen werden im Differentialausgangsübertrager $\ddot{U}_2$ mit gleichen Primärwicklungen verglichen, so daß bei abgeglichener Brücke die in der Sekundärwicklung von $\ddot{U}_2$ induzierte Spannung verschwindet. Die Brücke ist auch für Substitutionsmessungen geeignet.

14.6 Messung kleiner und großer Induktivitäten [*14.4*]

Kleine Induktivitäten ($< 10\,\mu$H) lassen sich am besten in Brücken durch Kapazitätsvergleich bestimmen, da hierzu kein Induktivitätsnormal erforderlich ist und die Zuleitungsinduktivität durch Differenzmessung eliminiert werden kann. Mit Vorteil kann daher die Maxwell-Brücke (s. § 14.51), besonders in der abgeschirmten Bauweise nach Abb. 14.11b hierfür benutzt werden; auch die Resonanzbrücke nach Abb. 14.12 ist geeignet.

Auch die in § 12.18 besprochenen Methoden der Suszeptibilitätsmessung an paramagnetischen Substanzen bei HF gehören hierher, soweit die Veränderung der Induktivität einer Spule, welche die Probensubstanz enthält, bestimmt wird. Für die unmittelbare L-Messung wird die zu messende Spule L_x in einen aus L und C bestehenden Schwingungskreis geschaltet, der an einen stabilen Oszillator bekannter, veränderlicher Frequenz lose angekoppelt ist. Die durch L_x verursachte Frequenzänderung wird entweder durch die Änderung ΔC der Schwingkreiskapazität eliminiert, oder die Frequenzverschiebung wird direkt mit einem Frequenzzähler (vgl. § 7.43) gemessen.

Bei Benutzung der Bifilarbrücke (Abb. 14.14) wird die zu messende Spule L_x mit dem Widerstand R_x in Serie zu $R_3 > R_x$ gelegt. Die Brücke wird zuerst bei eingeschaltetem, dann bei kurzgeschlossenem L_x abgeglichen, wozu im letzteren Fall der Widerstand R_1 um den Betrag ΔR_1 geändert werden muß. Die gesuchte Induktivität ergibt sich dann zu

$$L_x = \Delta R_1 \frac{R_4}{\omega^2 L_2}. \qquad (14/43)$$

Große Induktivitäten können mit einer Strom-, Spannungs- und Leistungsmessung oder nach Abb. 14.8 mit dem ballistischen Galvanometer bestimmt werden.

Im ersten Fall wird die in Abb. 14.16 dargestellte Schaltung angewandt, in der die Stromspule des Wattmeters P mit dem Amperemeter I in Reihe und parallel zur Spule L das Voltmeter U geschaltet ist. Die gesuchte Induktivität berechnet sich aus den Beziehungen:

$$L = \frac{U}{\omega I}\sqrt{1 - \left(\frac{P}{UI}\right)^2}; \quad R = \frac{P}{I^2}; \quad \cos\varphi = \frac{P}{UI}. \qquad (14/44)$$

Der *Verlustwiderstand* von *Eisenspulen* stellt die Differenz ΔR zwischen dem Wechselstromwirkwiderstand und dem Gleichstromwiderstand dar und setzt sich aus den Hysteresisverlusten, den Wirbelstrom- und Nachwirkungsverlusten zusammen. Die Abhängigkeit vom Strom i und der Frequenz f läßt sich durch die Beziehung

$$\Delta R = k_1 i f + k_2 f^2 + k_3 f \qquad (14/45)$$

ausdrücken. Zur Messung von ΔR werden meist Ringkernspulen mit gleichmäßiger Bewicklung in einer von Sinusstrom gespeisten Wechselstrombrücke (Resonanz-, Maxwell-Brücke) verwendet. Durch Messungen bei verschiedenen Strömen und Frequenzen kann die Aufteilung von ΔR nach Gl. (14/45) gefunden werden.

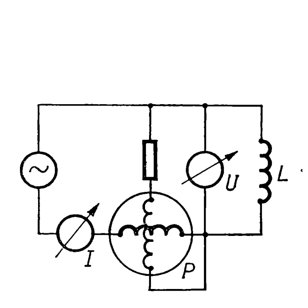



Abb. 14.16 L-Messung mit Wattmeter und Strom- und Spannungsmessung

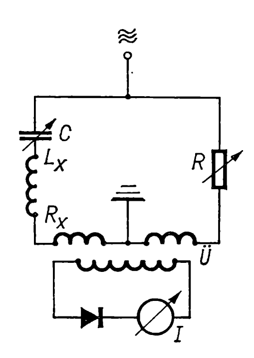


Abb. 14.17 Resonanzbrücke mit Differentialtransformator

Eine spezielle Brückenschaltung für Verlustmessungen in ferromagnetischen Kernen bei hoher magnetischer Induktion wird von HARRIS und COOTER [*14.13*] angegeben.

14.7 Spezielle Messungen bei Hochfrequenz

14.71 Differentialtransformator

Die von HUND angegebene Methode beruht auf Resonanzeinstellung und benutzt die in Abb. 14.17 dargestellte Schaltung. Der Meßzweig enthält die zu messende Spule L_x, R_x in Serie mit dem Drehkondensator C, während der Vergleichszweig nur den einstellbaren HF-Widerstand R besitzt. Durch Verändern von C wird auf Resonanz abgestimmt und mit R gleicher Strom in beiden Zweigen eingestellt. Das Brückengleichgewicht wird mit dem Röhrenvoltmeter I am Ausgang des Differentialtransformators $\ddot{U}$ nachgewiesen.

14.72 Messungen im Schwingungskreis

Für hohe Frequenzen wird ein Schwingungskreis benutzt, der aus der zu messenden Spule L mit dem Widerstand R und dem veränderlichen Kondensator C besteht, und die durch eine konzentrische Leitung bekannter Übertragungseigenschaften (s. § 3.7) verbunden sind. Dieser Schwingungskreis wird sehr lose mit dem HF-Oszillator und dem aperiodischen Indikatorkreis gekoppelt und auf Resonanz mittels C abgestimmt. Die Resonanzfrequenz wird mit den in § 7.4 behandelten Präzisionsmethoden gemessen. Das Meßobjekt wird zweckmäßig von einer geerdeten Abschirmung umgeben. Aus der Resonanzbedingung

$$\omega^2 = \frac{1}{(L + l_C)\,(C + c_L)} \tag{14/46}$$

kann bei bekanntem C die gesuchte Induktivität L ermittelt werden, wenn ω, die Induktivität l_C des Kondensators, die Eigenkapazität c_L der Spule sowie Induktivität und Kapazität der Zuleitungen bekannt sind. Durch Substitution von L durch eine etwa gleich große Normalinduktivität kann l_C bestimmt werden.

Zur Messung des Wirkwiderstandes nach LINDEMANN schaltet man bei festgehaltener Frequenz zu L einen bekannten induktions- und kapazitätsfreien Widerstand R in Reihe und mißt den Resonanzstrom i' bzw. i'' mit und ohne R. Der gesuchte Wirkwiderstand R_L ergibt sich dann aus der Beziehung

$$R_L = \frac{R}{i''/i' - 1},$$

wenn die Schwingkreiskapazität verlustfrei ist.

Der Wirkwiderstand kann ferner aus der gemessenen Resonanzkurve entnommen werden, wobei gilt:

$$R_L = 2\Delta L f_0, \tag{14/47}$$

wenn Λ das logarithmische Dekrement des Schwingungskreises ist. Man kann hierzu die Resonanzkurve durch Abstimmen der Oszillatorfrequenz aufnehmen, wobei man das Frequenzintervall Δf für den halben und δf für den 0,71fachen Maximalausschlag erhält. Der gesuchte Widerstand ergibt sich daraus zu

$$R_L = \omega L \frac{\delta f}{f_0} = \omega L \frac{\Delta f}{\sqrt{3} f_0}. \qquad (14/48)$$

Die Größe $\omega L / R_L = f_0 / \delta f$ wird als *Spulengüte* Q bezeichnet.

Wird die Frequenz festgehalten und der Kondensator um δC verstellt, um zu beiden Seiten der Resonanz den 0,71fachen Maximalausschlag zu erhalten, so gilt entsprechend:

$$R_L = \omega L \frac{\delta C}{2 C_0}, \qquad (14/49)$$

wenn C_0 die Kapazität bei Resonanz bedeutet.

14.73 Messung mit dem Dynatron

In der Dynatronschaltung von Elektronenröhren (s. § 5.47) nimmt der Anodenstrom mit zunehmender Anodenspannung ab, und es entstehen in einem angeschlossenen Schwingungskreis selbsterregte Schwingungen seiner Eigenfrequenz, wenn der Innenwiderstand R_i der Röhre dem Resonanzwiderstand des Schwingungskreises R_s entspricht. Sind R, L und C des Schwingungskreises bekannt, so lautet die Bedingung für die Selbsterregung

$$-R_i = \frac{L}{RC} \qquad (14/50)$$

und der Ausdruck für die erzeugte Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}\left(1 + \frac{R}{R_i}\right)}. \qquad (14/51)$$

Da der Schwingungseinsatz sehr scharf erfolgt, ist zur Anwendung dieses Effekts auf die Messung des Resonanzwiderstandes eine definierte Regelung des Innenwiderstandes R_i notwendig. Hierzu ist die in Abb. 14.18 dargestellte Schaltung geeignet, in der die negative Vorspannung (Abgriff am Potentiometer P_1) der Doppelgitterröhre E geändert wird, während das Schirmgitter eine gegen die Anodenspannung höhere Spannung erhält. Die am Potentiometer P_2 abgegriffene Anodenspannung wird so eingestellt, daß ein weicher Schwingungseinsatz erfolgt, der am angekoppelten Indikator A festgestellt wird. Nach dem Schwingungseinsatz wird anstelle des Schwingungskreises LC durch den Umschalter S die Röhre an eine Tonfrequenzbrücke angeschlossen, der Innenwiderstand des Dynatronkreises aus der Beziehung

$$R_i = \left(\frac{R_3}{R_4} + 1\right) R_n + R_3$$

ermittelt und daraus mittels Gl. (14/50) der Resonanzwiderstand des Schwingungskreises berechnet. Der gesuchte Wirkwiderstand R_L der Induktivität L ist nur dann mit dem berechneten R identisch, wenn der Kondensator C verlustfrei ist.

Über Impedanzmessungen bei höchsten Frequenzen mit Hilfe von Doppel- und konzentrischen Leitungen siehe § 7.74. Näheres siehe z. B. [*14.1*].

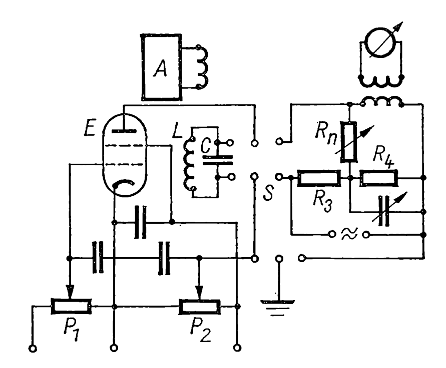


Abb. 14.18 Dynatronschaltung

14.8 Messung von Gegeninduktivitäten

Über Messungen der Suszeptibilität durch Bestimmung der Gegeninduktivität s. a. § 12.19. Auch die Messung der Streuinduktivität fest gekoppelter Spulen in Übertragern gehört in den Anwendungsbereich dieser Verfahren.

14.81 Unmittelbare Methoden

In der Schaltung der Abb. 14.19 wird durch die Primärspule der Gegeninduktivität M der Strom i geschickt, während der Sekundärkreis durch das ballistische Galvanometer G mit dem Gesamtschließungswiderstand R geschlossen ist. Wird der Strom i unterbrochen, so entsteht der ballistische Ausschlag α. Es gilt dann die Beziehung

$$M = RC\,\frac{\alpha}{i}\,k^{t_1/\tau} \qquad (14/52)$$

mit den Bezeichnungen für k und t in § 14.43.

Schaltet man in den Primärkreis einen Stromunterbrecher der Frequenz f, der gleichzeitig im Sekundärkreis den Schließungs- oder Öffnungsstrom unterdrückt, so erhält man den Ausschlag α_2. Wird das Galvanometer in den Primärkreis geschaltet, so entsteht beim Strom i der Ausschlag α_1. Die gesuchte Gegeninduktivität ergibt sich aus der Beziehung

$$M = \frac{R \tan \alpha_2}{f \tan \alpha_1}. \qquad (14/53)$$

Schickt man durch die Primärspule einen Wechselstrom i und mißt die Leerlaufspannung U_0 an der Sekundärspule mit einem Voltmeter hoher Eingangsimpedanz, z. B. mit dem elektrostatischen Voltmeter oder einem Röhrenvoltmeter der Eingangskapazität C_u, so berechnet sich M aus

$$M = \frac{U_0}{\omega i} (1 - \omega^2 L C_u), \tag{14/54}$$

wenn L die Induktivität des Sekundärkreises ist.

Bei der von CAMPBELL (1912) angegebenen Methode, deren Schaltung in Abb. 14.20 dargestellt ist, liegt die Sekundärspule von M in Serie mit dem

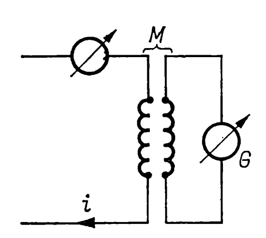


Abb. 14.19 Gegeninduktivitätsmessung mit ballistischem Galvanometer

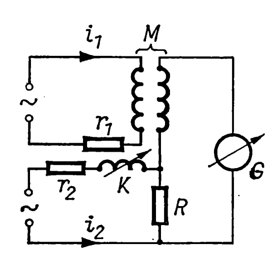


Abb. 14.20 Campbell-Methode

induktionsfreien Widerstand R am Vibrationsgalvanometer oder einem entsprechenden Röhrenvoltmeter G. Die Primärspule von M wird vom Sinusstrom $i_1 \cos \omega t$ über den Vorwiderstand r_1 erregt, während an den Widerstand R der um 90° phasenverschobene Strom $i_2 \sin \omega t$ über den Widerstand r_2 gelegt ist. Mit Hilfe des Variometers K wird die gewünschte Phasenverschiebung genau eingestellt. Durch Verändern des Stromverhältnisses i_1/i_2 oder des Widerstandes R kann die Sekundärspannung zum Verschwinden gebracht werden; es gilt dann:

$$M = \frac{i_2}{i_1} \cdot \frac{R}{\omega}. \tag{14/55}$$

Das Stromverhältnis wird an den Widerständen r_1, r_2 mit einem hochohmigen Voltmeter gemessen. Von HASEBE [*14.15*] wird eine abgeänderte Campbell-Brücke beschrieben, die durch eine dritte Spule abgeglichen wird und in der ein in Phase und Amplitude bekannter Strom fließt.

14.82 Vergleich mit Kapazitäten

Bei der von CAMPBELL angegebenen Resonanzmethode (s. Abb. 14.21) sind Primär- und Sekundärspule der gesuchten Gegeninduktivität M einseitig mit dem veränderlichen Kondensator C verbunden. Die Sekundärspule liegt in Reihe mit C am Nullinstrument G. Bei richtiger Polung der Sekundärspule kann durch Verändern von C die Sekundärspannung $i_1 \cdot \mathrm{j}(\omega M - 1/\omega C)$

zum Verschwinden gebracht werden; es gilt dann die Bedingung:

$$M = \frac{1}{\omega^2 C}. \tag{14/56}$$

Stromlosigkeit wird nur erhalten, wenn C verlustfrei ist und die Spulenkapazitäten zu vernachlässigen sind. Ferner ist reiner Sinusstrom erforderlich.

Carey-Foster-Methode. Die in Abb. 14.22 angegebene Kompensationsschaltung, die von SCHERING verbessert wurde, stellt eine Stromverzweigung dar, bei der Primärspule L_1, veränderliche Induktivität L_k und R_1 einen Zweig,

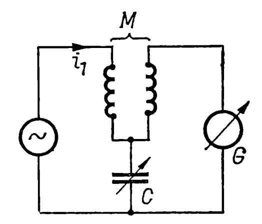


Abb. 14.21 Resonanzbrücke nach CAMPBELL

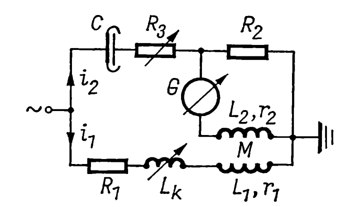


Abb. 14.22 Kompensationsmethode nach CAREY-FOSTER

und Widerstand R_2, veränderlicher Widerstand R_3 und Kapazität C den anderen bilden. Die Sekundärspule L_2 liegt über das Nullinstrument G an R_2. Als Abgleichsbedingung ergibt sich

$$M = \frac{1}{\omega} \frac{\mathrm{j}\omega L_1 + R_1 + r}{R_2 + R_3 - \mathrm{j}/\omega C} R_2 \approx C R_2 (R_1 + r), \tag{14/57}$$

wenn man den Scheinwiderstand ωL_1 gegen die ohmschen Widerstände R_1, r_1 und R_2, ferner R_3 gegen $1/\omega C$ vernachlässigt. Da ein Brückenabgleich nur für $M = L_1$ möglich ist, schaltet man die bekannte variable Induktivität L_k in den unteren und den Widerstand R_3 in den oberen Zweig. Außer Gl. (14/57) muß dann die Beziehung $L_1 + L_k = M(1 + R_3/R_2)$ gelten.

Sind die Teilkapazitäten der Einzelspulen und die gegenseitige Kapazität zwischen Primär- und Sekundärwicklung nicht zu vernachlässigen, so müssen mehrere Messungen mit verschiedener Verschaltung der Spulenenden durchgeführt werden.

14.83 Vergleich mit Selbstinduktion

Schaltet man die Spulen L_1 und L_2 der Gegeninduktivität M in Serie, so findet man je nach gegenseitigem Wicklungssinn der Einzelspulen die Gesamtinduktvitität

$$L' = L_1 + L_2 + 2M;$$

$$L'' = L_1 + L_2 - 2M$$

und daraus

$$M = \frac{L' - L''}{4}. \tag{14/58}$$

Maxwell-Brücke. In der von MAXWELL angegebenen Brückenschaltung (Abb. 14.23) bildet die Sekundärspule L_2, R_2 einen Zweig der aus den weiteren Widerständen R_1, R_3, R_4 bestehenden Brücke, so daß der Abgleich für die Bedingungen

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad \text{und} \quad -M = L_2 \Big/ \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \tag{14/59}$$

möglich ist. Dabei ist M so zu schalten, daß es L_2 entgegenwirkt. Ein Abgleich ist allerdings nur möglich, wenn $L_2 > M$ ist. Wesentlich bequemer wird der Abgleich, wenn außen der Parallelwiderstand R_5 hinzugeschaltet wird. Man kann nun R_3, R_4 unverändert lassen und nur mit R_1 und R_5 abgleichen, wobei anstelle der zweiten Bedingung in Gl. (14/59) die Relation

$$-M = \frac{L_2}{1 + \frac{R_4}{R_3} + \frac{R_4(R_1 + R_3)}{R_5 R_1}} \tag{14/59a}$$

tritt.

Heaviside-Brücke. Bei dieser in Abb. 14.24 dargestellten Brückenanordnung enthält der zweite Zweig die Induktivität L_2 mit dem Eigenwiderstand R_2

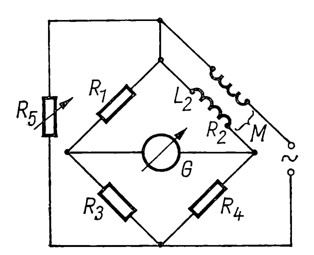


Abb. 14.23 Maxwell-Brücke

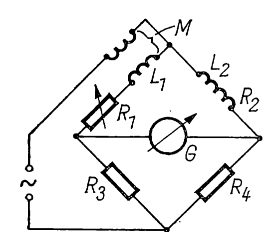


Abb. 14.24 Heaviside-Brücke

und der erste Zweig den variablen Vorwiderstand R_1. Es herrscht Brückengleichgewicht, wenn

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad \text{und} \quad R_4(L_1 + M) = R_3(L_2 - M). \tag{14/60}$$

Werden L_1 und L_2 vertauscht, so gilt entsprechend:

$$R_4(L_1 - M) = R_3(L_2 + M). \tag{14/60a}$$

Bei einer gleicharmigen Brücke ($R_3 = R_4$) vereinfachen sich dann die Abgleichsbedingungen, und es muß gelten:

$$R_1 = R_2; \quad 2M = L_2 - L_1 \quad \text{bzw.} \quad 2M = L_1 - L_2. \tag{14/60b}$$

Diese Schaltung eignet sich besonders zur Eichung veränderlicher Gegeninduktivitäten, für die $L_2 = \text{const}$ bleibt.

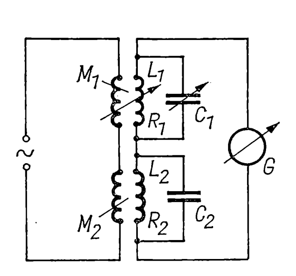
14.84 Vergleich zweier Gegeninduktivitäten [14.14]

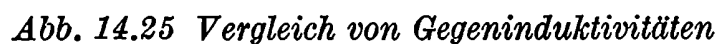
Die einfachste Methode besteht nach Abb. 14.25 darin, die zu messende Gegeninduktivität M_2 mit einem veränderlichen Gegeninduktivitätsnormal M_1 primär- und sekundärseitig in Reihe zu schalten und die Kompensation der Sekundärspannungen mit dem Röhrenvoltmeter G zu verfolgen ($M_1 = M_2$).

Ist die Eigenkapazität der Spulen nicht zu vernachlässigen, so erhält man in G nur ein Spannungsminimum und muß zum völligen Abgleich der Schaltanordnung zur Spule L_1 die veränderliche Kapazität C_1 parallel schalten. Es gilt dann die Abgleichbeziehung:

$$M_2 = M_1 \frac{1 - \omega^2 L_2 C_2}{1 - \omega^2 L_1 C_1} \approx M_1 \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}. \tag{14/61}$$

Die zu Suszeptibilitätsmessungen (vgl. § 12.19) viel benutzte Hartshorn-Brücke ist schematisch in Abb. 14.26 dargestellt. Sie besteht aus dem geeichten




Abb. 14.25 Vergleich von Gegeninduktivitäten

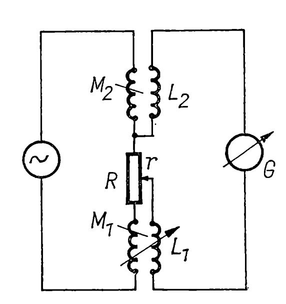


Abb. 14.26 Hartshorn-Brücke

Variometer M_1, das dem zu messenden Spulenpaar M_2 entgegengeschaltet ist; mit dem Nullinstrument G wird der Abgleich beobachtet. Wegen des Verlustfaktors der Gegeninduktivität M_1, der zu

$$\tan \varepsilon = \frac{s_1}{\omega M_1} \tag{14/62}$$

definiert ist, worin $\varepsilon = 90 - \varphi$ und φ durch Gl. (14/34) bestimmt wird, ist die in L_1 induzierte Spannung $u_1 = (s_1 + \mathrm{j}\omega M_1) i$. Man bezeichnet den Verlustwiderstand s_1 auch als *Unreinheit* der Gegeninduktivität M_1. Zur Kompensation der Unreinheiten von M_1 und M_2 dient der Widerstand R im Primärkreis, an dem der Betrag r zur Einstellung des Gleichgewichts abgegriffen wird. Die Nullbedingungen lauten dann:

$$M_1 = M_2; \qquad s_2 = s_1 + r. \tag{14/63}$$

Von McKim [*12.145*] wird über eine Hartshorn-Brücke zur Suszeptibilitätsmessung zwischen 1,7 und 77 K berichtet, die mit 175 Hz betrieben wird und eine sehr hohe Empfindlichkeit besitzt. In der von Erickson et al. [*14.6*]

konstruierten Brücke nach diesem Prinzip ist die Vergleichsgegeninduktivität in 5 Dekaden einstellbar und können die Unreinheiten von M_1 und M_2 durch ein Doppelpotentiometer kompensiert werden. Die erreichbare Empfindlichkeit der Brücke, die ebenfalls zu Tieftemperaturmessungen dient, wird mit 1 nH angegeben. Eine von MAXWELL [*12.141*] modifizierte Hartshorn-Brücke wird in § 12.19 (Abb. 12.23) näher beschrieben.

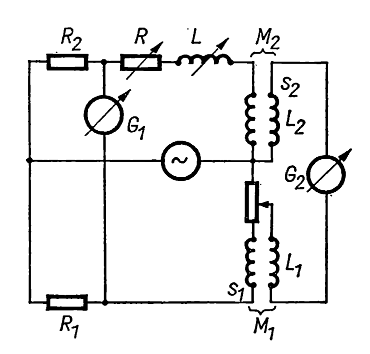


Abb. 14.27 Vergleich von zwei ungleichen Induktivitäten

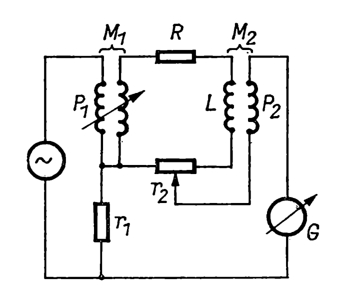


Abb. 14.28 Campbell-Methode mit zwei Gegeninduktivitäten

Sollen ungleiche Gegeninduktivitäten miteinander verglichen werden, so verbindet man nach dem Vorschlag von HARTSHORN die Primärspulen mit den Widerständen R_1 und R_2 sowie den variablen Widerstand R und die Induktivität L zu einer Brücke, die mit dem Nullinstrument G_1 abgeglichen wird (Abb. 14.27). Mit einem zweiten Röhrenvoltmeter G_2 wird — wie in der symmetrischen Hartshorn-Brücke — der Abgleich der Sekundärkreise von M_1 und M_2 verfolgt, wobei M_1 und r verändert werden müssen. Die Abgleichbedingungen lauten dann:

$$M_2 = M_1 \frac{R_2}{R_1}; \quad s_2 = \frac{R_2}{R_1}(s_1 + r), \tag{14/64}$$

wenn s_1 die bekannte Unreinheit von M_1 bedeutet.

Bei der von CAMPBELL angegebenen Methode (s. Abb. 14.28) sind die Sekundärspulen der zu vergleichenden Gegeninduktivitäten M_1 und M_2 durch bekannte Widerstände verbunden. Der Gesamtwiderstand dieses Kreises soll R, seine Induktivität L betragen. Die Primärspule P_1 von M_1 liegt über den induktionsfreien Widerstand r_1 an der Wechselspannungsquelle O; die entsprechende Spule P_2 ist über r_1 und den Teil r_2 des Sekundärwiderstandes mit dem Nullinstrument G verbunden. Sind M_1 und M_2 vollkommen entkoppelt, so ist die Brücke abgeglichen, wenn die Bedingungen

$$\omega^2 M_1 M_2 = R r_1 \quad \text{und} \quad M_1 r_2 = L r_1 \tag{14/65}$$

erfüllt sind. Ist M_1 veränderlich und bekannt, so läßt sich M_2 bei bekannten Widerständen R und r_1 aus Gl. (14/65) ermitteln.

14.85 Elektronische Gegeninduktivitätsbrücke

Für die Messung sehr kleiner Änderungen der Gegeninduktivität wird von DILLINGER et al. [*12.51*] eine elektronische Brückenschaltung angegeben, die vereinfacht in Abb. 14.29 dargestellt ist. Sie ist vor allem für Suszeptibilitätsmessungen bei tiefen Temperaturen bestimmt und enthält die Gegeninduktivität M_1 mit geteilten Sekundärspulen, die gegeneinander geschaltet sind. In einer

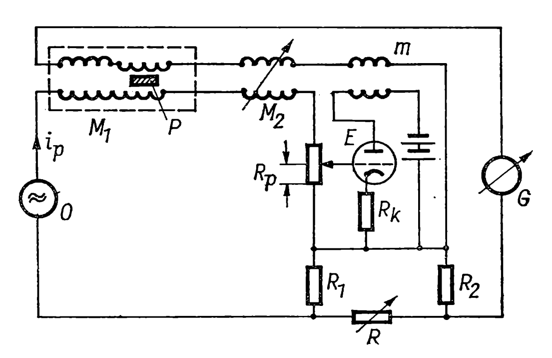


Abb. 14.29 Elektronische Brücke

dieser Teilspulen befindet sich die zu untersuchende Probe P. Die Gegeninduktivität M_2 dient zur Kompensation größerer Abweichungen und ist als astatisches Variometer ausgebildet. Die Primärspulen liegen in Serie mit dem Dekadenwiderstand R_p und dem Widerstand R_1 am Oszillator O und werden vom Strom i_p durchflossen. Der Widerstand R_p bildet gleichzeitig den Eingang der Triode E, deren Anodenstrom i_m durch die Primärspule der festen Gegeninduktivität m fließt und deren Sekundärspule in Reihe zu den Sekundärspulen von M_1 und M_2 liegt. Die Brücke wird durch Verändern von R_p und damit durch die in m induzierte Spannung abgeglichen und hat den Vorteil, daß Primär- und Sekundärkreis konstante Impedanz besitzen. Der Eingangswiderstand des zusätzlichen von E dargestellten Primärkreises ist groß gegen die Blindwiderstände; der Strom i_m ist in Phase mit dem Eingangssignal. Ist R_i der Röhreninnenwiderstand, so gilt

$$i_m = \frac{R_p}{R_i + R_k}\, i_p = R_p G i_p, \tag{14/66}$$

wenn R_k der Katodenwiderstand der Röhre ist. Die von m in den Sekundärkreis abgegebene Induktionsspannung beträgt dann:

$$U_m = \mathrm{j}\,\omega m i_m = \mathrm{j}\,\omega (R_p m G) i_p. \tag{14/67}$$

Andererseits besitzt der Kreis R_1, R_2, R den Ersatzwiderstand R_e und liefert in den Sekundärkreis die phasenreine Spannung $i_p R_e$. Durch Vergleich von (14/66) und (14/67) findet man die Gleichgewichtsbedingung

$$R_p m G = M + \text{const}, \tag{14/68}$$

d. h., zum Abgleich ist lediglich der Dekadenwiderstand R_p einzustellen. Der Nulldetektor ist als mehrstufiger Vorverstärker mit nachgeschaltetem Schmalbandverstärker und ESO-Ausgang ausgebildet; die Arbeitsfrequenz beträgt 50 Hz.

14.86 Messung der Streuinduktivität

Unter *Streuinduktivität* versteht man den Teil σL der Induktivität, der nicht mit dem anderen Kreis magnetisch gekoppelt ist. Das Ersatzschaltbild eines Übertragers mit dem Übersetzungsverhältnis $ü$ ist in Abb. 14.30a gegeben, wobei die Sekundärseite kurzgeschlossen sein soll. Mißt man nun die Induktivität des kurzgeschlossenen Übertragers, so erhält man aus dem verbleibenden Induktivitätsrest die Streuinduktivität σL. In Abb. 14.30b sind

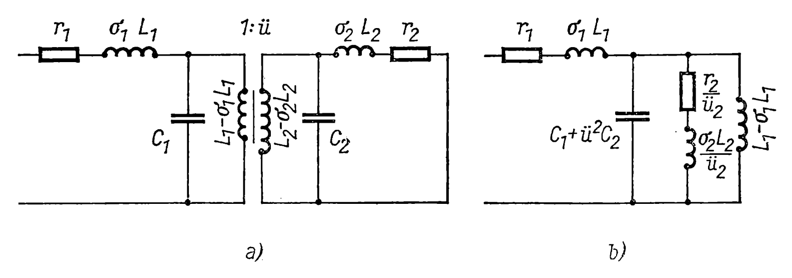


Abb. 14.30 Kurzgeschlossener Übertrager

alle Größen auf die Primärseite bezogen, und man kann daraus bei der Kurzschlußmessung den Einfluß der Meßfrequenz abschätzen, um Fehlmessungen zu vermeiden.

§ 15 ELEKTRISCHE MASCHINEN

In vielen Versuchsaufbauten werden Elektromotoren für Verstellaufgaben, schnellaufende Antriebe oder als Nullindikatoren, Generatoren für Mittelfrequenzen, Transformatoren für die Leistungsversorgung oder zur Hochspannungserzeugung verwendet. Ohne in Einzelheiten der exakten Theorie, Konstruktion oder Berechnung elektrischer Maschinen einzugehen, werden in diesem Abschnitt Aufbau, Wirkungsweise und wesentliche Eigenschaften erläutert, um die Anwendungen solcher Maschinen zu erleichtern [*15.9*, *15.27*, *15.32*, *15.59*].

15.1 Elektromotoren [*15.42*, *15.52*]

15.11 Allgemeines

Außer als Antriebsmaschinen werden Elektromotoren kleiner Abmessungen in Geräten und Meßanordnungen für die selbsttätige Kompensation als Verstelleinheit, in Meßbrücken als „Nullmotor", als Meßwertübertrager oder als Integrationsgerät benutzt. Man unterscheidet nach Bauart und Arbeitsprinzip folgende Bauformen:

1. Gleichstrommotor,
2. Drehstromasynchronmotor,
3. Wechselstromsynchronmotor,
4. Wechselstromkollektormotor,
5. Spezialmotoren.

Jeder Motor besteht aus *Ständer* (Stator) und *Läufer* (Anker) und besitzt eine *Nutzwicklung,* die beim Gleichstrommotor der Läufer, bei den Wechselstrom- und Induktionsmotoren der Ständer trägt. Die Nutzwicklung, der elektrische Leistung zugeführt wird, besteht aus mehreren Wicklungssträngen, die auf dem Umfang von Läufer oder Ständer abwechselnd magnetische Nord- und Südpole erzeugen. Die Zahl der Polpaare p hängt von der Ausführungsart und Verschaltung der Nutzwicklung ab.

Der andere Teil des Motors ist entweder als *Magnetsystem* mit der gleichen Zahl p von Polpaaren wie die Nutzwicklung ausgebildet oder besteht aus einem kurzgeschlossenen Leitersystem, wie bei den Wechselstrominduktionsmaschinen.

Nach dem Induktionsgesetz (Gl. 11/10) wird in einem Wicklungsstrang die EMK

$$e_i = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$$

induziert, wenn Ψ der mit dem Strang verkettete Kraftfluß ist und die zeitliche Änderung aus der Relativverschiebung von Läufer gegen Ständer resultiert oder Ψ durch einen Wechselstrom erzeugt wird. Allgemein gilt daher für

die induzierte EMK

$$e_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -2\pi n \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \tag{15/1}$$

wenn n die Läuferdrehzahl und α der Winkel zwischen Ständer und Läufer ist.

Fließt durch die Nutzwicklung der Strom i, so gilt für die elektrische Arbeit der Ausdruck

$$\mathrm{d}W = -2\pi n i \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}t - i\frac{\partial \Psi}{\partial t}\,\mathrm{d}t. \tag{15/2}$$

Für $n = 0$ verschwindet das erste Glied und ist die elektrische Arbeit der zeitlichen Änderung des verketteten magnetischen Flusses proportional. Bei endlichem n und konstantem Fluß wird $\mathrm{d}W = M\,\mathrm{d}\alpha$ und folgt aus Gl. (15/2) die Beziehung

$$M\,\mathrm{d}\alpha = -2\pi n i \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}t, \tag{15/3}$$

woraus sich das Drehmoment der Maschine zu

$$M = -i\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \tag{15/3a}$$

ergibt. Diese Gleichung gilt für Motoren und Generatoren; man nennt sie die *zweite Hauptgleichung der elektrischen Maschinen.*

15.12 Gleichstrommaschine

Die Gleichstrommaschine besteht aus dem Stator C mit den aufgesetzten Polschuhen N, S, welche durch die Wicklungen W erregt werden, und dem drehbaren Anker A, in dessen Nuten L die Ankerwicklung liegt (Abb. 15.1).

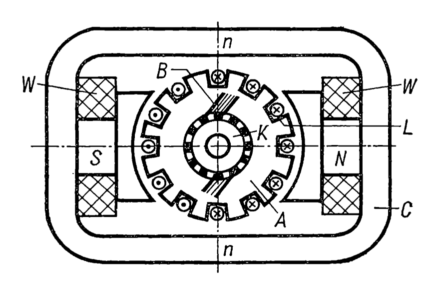


Abb. 15.1 Gleichstrommaschine

Die Enden der in Serie verbundenen Ankerspulen sind zu den Lamellen des Kollektors K geführt und werden über die Bürsten B mit Strom versorgt. Dabei werden die in den Nuten liegenden Ankerdrähte in der gezeichneten Richtung von Strom durchflossen; dem Polschuh N stehen die in *einer* Richtung strom-

durchflossenen Leiter und dem Pol S die in der Gegenrichtung durchflossenen Drähte gegenüber. Das auf die Ankerwicklung ausgeübte Drehmoment wird durch die Nutenstege auf den Anker übertragen. Durch die Drehung des Ankers wird am Kollektor immer dann die Stromrichtung in den einzelnen Ankerspulen umgedreht, wenn diese die „Neutrale Ebene" n-n überschreiten.

Da der Fluß Ψ, der durch die Erregerwicklung W erzeugt und durch den Anker geführt wird, konstant ist, gilt für die induzierte EMK nach Gl. (15/1)

$$e_i = 2\pi n \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\alpha}. \tag{15/1a}$$

Die Bürsten liegen so auf dem Kollektor (Stromwender), daß sie den Maximalwert von $\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}\alpha$ abgreifen. In der entsprechenden Ankerstellung geht Ψ gerade durch Null; die Hälfte der Ankerwindungen umschließt einen positiven, die andere einen negativen Fluß. Die Ankerspulen sind derart über den Ankerumfang verteilt, daß jede Windung einen möglichst großen Teil Φ_m des Gesamtflusses umschließt, der von einem Magnetpol ausgeht. Ist p die Zahl der Polpaare, so entspricht die Breite einer Windung längs des Ankerumfangs einem Winkel π/p. In jeder Ankerstellung liegt zwischen zwei Bürsten ein Wicklungsstrang aus w gleichartigen Windungen. Bei einer Ankerdrehung um den Winkel $\Delta\alpha$ beträgt die gesamte Flußänderung $2wp\Phi_m\Delta\alpha/\pi$ und wird

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\alpha} \approx \frac{\Delta\Psi}{\Delta\alpha} = 2w\frac{p}{\pi}\Phi_m.$$

Mit diesem Ausdruck ergibt sich aus Gl. (15/1a) zwischen den Bürsten die induzierte EMK

$$E_i = 4wnp\Phi_m \tag{15/4}$$

und aus Gl. (15/3a) beim Motor für das Drehmoment

$$M = 2Iw\frac{p}{\pi}\Phi_m, \tag{15/5}$$

wenn I der Ankerstrom ist.

Der magnetische Fluß Φ_m ist eine Funktion des durch die Statorwicklung fließenden Erregerstroms I_e und des magnetischen Widerstandes des Magnetkreises; er nähert sich bei hoher Durchflutung einem Sättigungswert.

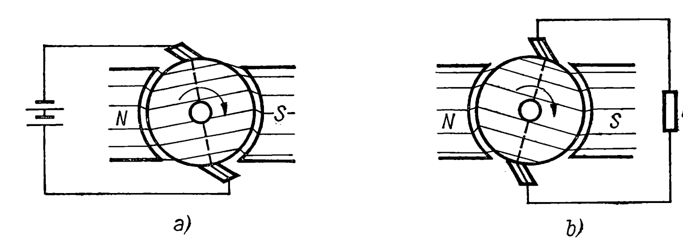


Abb. 15.2 Ankerrückwirkung: im Motor (a), im Generator (b)

Die Kommutierung des durch die einzelnen Ankerwicklungen fließenden Stroms erfolgt nur im *Leerlauf* in der Ebene $n—n$ in der Abb. 15.1. Mit zunehmendem Ankerstrom I entsteht eine Quermagnetisierung des Ankers, die sich mit dem Erregerfeld überlagert und den effektiven magnetischen Fluß Φ_m verringert. In Abb. 15.2 ist die Wirkung des Ankerfeldes, die *Ankerrückwirkung* genannt wird, für den Motor (a) und für den Generator (b) dargestellt. Die Ankerrückwirkung läßt sich kompensieren, wenn man die Bürsten im angegebenen Sinn gegenüber der symmetrischen Stellung verstellt oder *Hilfs-* oder *Wendepole* senkrecht zur Achse der Hauptpole anbringt, die vom Ankerstrom durchflossen werden.

15.13 Bauarten und Betriebsverhalten von Gleichstrommotoren

Der magnetische Kreis von Gleichstrommaschinen besteht gewöhnlich aus einem ringförmigen Eisen- oder Stahlgehäuse mit eingesetzten Polkernen und zylindrisch ausgedrehten Polschuhen. Der Anker besitzt zylindrische Form und ist aus Transformatorblechen mit eingestanzten Nuten zusammengesetzt. Bei kleinen Motoren wird die Ankerwicklung von Hand aufgebracht, bei größeren Maschinen werden die Wicklungen maschinell gefertigt und in die Ankernuten eingelegt. Der auf der Achse sitzende *Kommutator* oder *Kollektor* besteht aus Kupfersegmenten, die gegeneinander isoliert sind und mit den Enden der einzelnen Ankerwicklungen verbunden werden. Die auf dem Kollektor schleifenden *Bürsten* bestehen bei größeren Maschinen aus Kohle (Stromdichte 5···12 A/cm²), Kupferkohle (20 A/cm²) oder Kupferblech (15···30 A/cm²) und werden durch Federn angedrückt. Bei kleinen Motoren werden hierfür Kupferbronzefedern verwendet. Der Spannungsabfall pro Bürste liegt zwischen 0,1 und 1 V.

Nebenschlußmotor. In diesem Fall werden, wie in Abb. 15.3a gezeigt, die Feldwicklung und der Anker an die Betriebsspannung U gelegt, wobei die

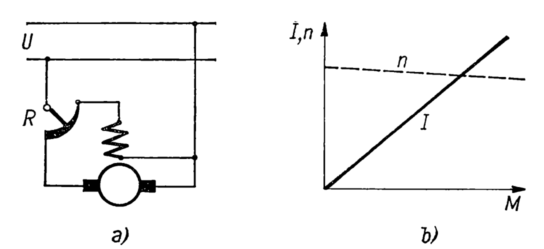


Abb. 15.3 Nebenschlußmotor: Schaltung (a), Kennlinien (b)

Drehzahl n so lange steigt, bis die im Anker induzierte EMK E_i dem Spannungsabfall am Anker entspricht, d. h.,

$$U = E_i + IR_i. \tag{15/6}$$

Da im allgemeinen $IR_i \ll E_i$, ergibt sich die Motordrehzahl n mit Gl. (15/4) zu

$$n = \frac{U}{4wp\Phi_m}; \tag{15/7}$$

sie kann durch Feldschwächung erhöht werden. Die Ankerstromstärke I findet man aus Gl. (15/5) zu

$$I = \frac{M\pi}{2wp\Phi_m}, \tag{15/5a}$$

wenn M das ausgeübte Drehmoment bedeutet. Eine Feldschwächung erhöht also den Ankerstrom bei vorgegebenem M. In Abb. 15.3b sind I und n als Funktion des Drehmoments M dargestellt; n nimmt mit wachsendem M nur wenig ab.

Hauptschlußmotor. Bei dem in Abb. 15.4 dargestellten Hauptschlußmotor liegen Anker und Feldwicklung in Serie und werden gemeinsam mit dem

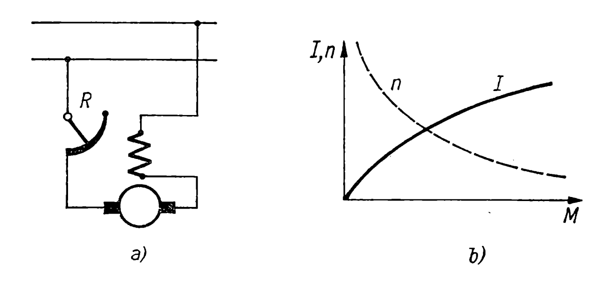


Abb. 15.4 Hauptschlußmotor: Schaltung (a), Kennlinien (b)

Widerstand R geregelt. Im Gegensatz zum Nebenschlußmotor sind beim Hauptschlußmotor die Feldspulen niederohmig. Setzt man für den linearen Teil der Magnetisierungskurve $\Phi_m = kI$ ein, so folgt aus den Gln. (15/6), (15/4) und (15/5a), daß das Anlaufmoment für $n = 0$ $M_0 \sim (U/R_i)^2$ und mit zunehmender Drehzahl das Drehmoment asymptotisch abnimmt. In Abb. 15.4b sind I und n über M aufgetragen. Unbelastet nimmt die Drehzahl sehr schnell zu; der Motor „geht durch". Beim *Doppelschlußmotor* sind auf den Polkernen je eine Nebenschluß- und eine Hauptschlußwicklung angebracht.

Hauptschlußmotoren werden wegen des großen Anfahrmoments z. B. für Hebezeuge gebraucht; Nebenschlußmotoren werden für Rührer, Umformer und für die meisten im Experimentierbetrieb vorkommenden Anwendungen benutzt.

Kleinmotoren. Für kleine und kleinste Leistungen wird das Magnetfeld durch *Permanentmagnete*, vor allem durch Ferroxdure (s. *Tabelle 12.15*) erzeugt, die in Form dünner quermagnetisierter Ringe oder Segmente gebracht werden. Dadurch werden die äußeren Abmessungen sehr klein und ermöglichen die Anwendung in selbstabgleichenden Kompensatoren (s. § 2.343), X, Y-Schreibern (s. § 2.66) und anderen Regelgeräten. Die kleinsten Ausführungen besitzen einen Ankerdurchmesser von nur wenigen Millimetern. Für spezielle Zwecke werden *Flachmotoren* entwickelt, deren Feld aus ringförmigen Ferroxdurmagneten besteht, die quermagnetisiert und durch einen Eisenring außen geschlossen werden. Die magnetische Induktion erreicht hohe Werte von 1,4 T in einem engen Spalt, in dem ein meist eisenloser flacher Anker läuft (s. [*15.41*]).

15.14 *Kollektorlose Gleichstrommotoren*

Mit Hilfe der in § 11.73 angegebenen Halbleiterfeldplatten nach WEISS läßt sich ein Gleichstrommotor konstruieren, der eigentlich ein Dreiphasensynchronmotor ist. Der Ständer dieser Maschine besitzt drei um 120° verdrehte Wicklungen W_1, W_2, W_3, die in der Schaltung nach Abb. 15.5 durch die Transistoren

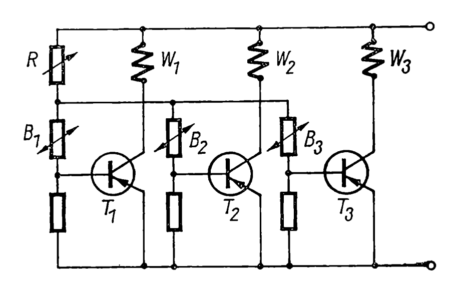


Abb. 15.5 Feldplattenmotor

T_1, T_2, T_3 gesteuert werden. Dies erfolgt durch drei Feldplatten B_1, B_2, B_3, die am Motorgehäuse befestigt sind und deren Widerstand durch einen auf der Motorachse befindlichen Permanentmagneten periodisch verändert wird. Dieser Steuermagnet ist so ausgebildet, daß von den drei Feldplatten immer nur eine niederohmig ist und den zugehörigen Transistor öffnet. Durch einen Regelwiderstand R kann die Motordrehzahl der Belastung angepaßt werden. Der Wirkungsgrad solcher Motoren liegt bei über 50%. Drehzahlen von 6000 1/min bei einigen Watt Leistung werden erreicht. Auch das in § 15.22 besprochene Prinzip der Unipolarmaschine wird in Sonderfällen für die Konstruktion von Motoren mit großem Regelbereich angewandt.

15.15 *Einphasenwechselstrommotor*

In ähnlicher Konstruktion wie die Gleichstrommotoren lassen sich auch *Einphasenkollektormotoren* bauen, wobei lediglich wegen der Hystereseverluste auch der Stator aus Transformatorblech besteht. Wie bei der Gleichstrommaschine muß für die Aufhebung der Ankerinduktivität eine Kompensations-

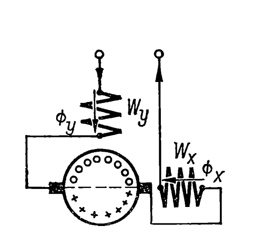


Abb. 15.6 Einphasenreihenschlußmotor

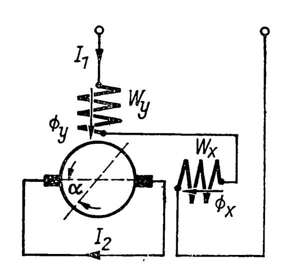


Abb. 15.7 Repulsionsmotor

wicklung angebracht werden, die um 90° gegen die Hauptpole einer zweipoligen Maschine verschoben ist. In Abb. 15.6 ist ein Wechselstromreihenschlußmotor mit der Hauptwicklung W_y und der Kompensationswicklung W_x dargestellt, deren magnetische Flüsse Φ_y und Φ_x zeitlich in Phase mit dem Ankerstrom sind und auf die zu jedem Zeitpunkt Gl. (15/5) angewandt werden kann. Die Kompensationswicklung kann auch kurzgeschlossen werden.

Im *Repulsionsmotor* (LATOUR, WINTER-EICHBERG) wirkt der rotierende Motoranker als Sekundärwicklung eines Transformators, der über die Bürsten kurzgeschlossen ist. Die Statorwicklung erzeugt zwei um 90° versetzte magnetische Flüsse Φ_y und Φ_x, deren Resultierende mit der Bürstenebene den Winkel α bildet (Abb. 15.7). Für $\alpha = 90°$ wird der Ankerstrom $I_2 = 0$ und das Erregerfeld maximal, für $\alpha = 0$ sind die beiden Größen vertauscht und ergeben ebenfalls kein Drehmoment. Zwischen beiden Bürstenstellungen bei 10···25° liegt der Höchstwert des Drehmoments. Der Repulsionsmotor kann allein durch Bürstenverstellung angelassen, geregelt und in der Drehrichtung umgekehrt werden.

15.16 Wechselstromsynchronmotor

Wechselstromsynchronmaschinen besitzen einen lamellierten Stator mit äquidistanten Nuten, in die eine Mehrphasenwicklung eingelegt ist. Bei Dreiphasenmaschinen trägt der Ständer S drei gleichartige Wicklungsstränge, die gegeneinander längs des Umfangs um je $2\pi/3p$ verschoben sind, wenn p die Zahl der Polpaare ist. In der Ständerbohrung läuft der Anker A, der bei großen Maschinen p Magnetpolpaare besitzt bzw. bei kleinen Motoren aus einem Permanentmagneten besteht. In Abb. 15.8 ist schematisch ein solcher Motor mit $p = 2$ dargestellt. Werden die drei Wicklungsstränge von Wechselströmen durchflossen, die gegeneinander um 120° phasenverschoben sind (Drehstrom), so durchläuft das Maximum des erzeugten magnetischen Flusses während einer Periode gerade den Winkel $2\pi/p$. Es entsteht ein umlaufendes magnetisches *Drehfeld*, dessen Umlauffrequenz

$$n = \frac{f}{p} \tag{15/8}$$

beträgt, wenn f die Netzfrequenz ist. Der Anker (Polrad) läuft mit dieser *synchronen Drehzahl* um und wird durch die Feldkräfte zwischen den ungleichnamigen Polen von Ständer- und Läuferfeld mitgenommen. Wird dem Anker Arbeit entnommen, so bleibt er etwas hinter dem Ständerfeld zurück, behält aber seine synchrone Drehzahl bei. Am Läufer treten magnetische Tangentialkomponenten auf, die dem Bremsmoment das Gleichgewicht halten. Bei zu starker Abbremsung geraten die Läuferpole zwischen die Ständerpole und kommt der Läufer außer Tritt und zum Stillstand. Für das Drehmoment ergibt sich die Beziehung

$$M = \frac{3}{2\pi} \frac{E_0 U}{n \omega L_s} \sin \vartheta, \tag{15/9}$$

wenn E_0 die induzierte EMK im Leerlauf, U die Netzspannung, L_s die Induktivität eines Wicklungsstranges und $\vartheta = \alpha p$ der zeitliche *Nacheilwinkel* des Läufers ist (α = räumlicher Nacheilwinkel).

Kleine Motoren müssen von Hand auf die Nenndrehzahl gebracht werden, oder der Läufer ist mit einem Kurzschlußkäfig für den asynchronen Anlauf

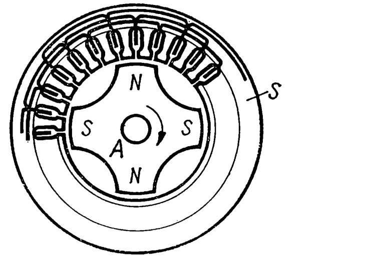


Abb. 15.8 Dreiphasensynchronmotor

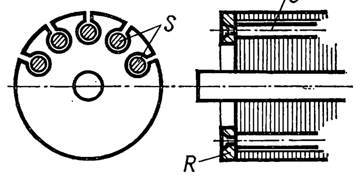


Abb. 15.9 Kurzschlußläufer

ausgerüstet. Synchronmotoren sind besonders für konstanten Drehzahlbetrieb geeignet, da n nur von der Frequenz des Wechselstroms abhängt und diese mit besonderen Mitteln sehr konstant gehalten werden kann (s. a. § 15.3). Bei zeitlich veränderlichem Drehmoment können *Pendelungen* um die Nenndrehzahl auftreten, die mit kurzgeschlossenen Dämpferwicklungen im Läufer unterbunden werden.

15.17 Wechselstrominduktionsmotor

Der Stator von *Wechselstrominduktions-* oder *-asynchronmotoren* ist der gleiche wie der von Synchronmotoren (s. Abb. 15.8). Bei größeren Maschinen besitzt der Läufer eine gleichartige Wicklung, die zu drei Schleifringen geführt ist und über veränderliche Widerstände geschlossen wird. Kleinere Motoren sind mit einem *Käfigläufer* (s. Abb. 15.9) ausgerüstet. Er besteht aus Kupferstäben S, die in die Ankernuten gelegt und an den Stirnseiten durch Kupferringe R kurzgeschlossen sind. Bei kleinen Ankerdurchmessern werden die Nuten im Spritzgußverfahren mit Al ausgefüllt. Um einen leiseren Lauf zu erzielen und das Nutengeräusch zu vermeiden, werden die Ankerbleche etwas gegen die Achse verdreht, so daß die Ankerstäbe windschief zur Achse stehen.

Durch das mit der Drehzahl $n_1 = f_1/p$ umlaufende magnetische Drehfeld wird in den Ankerstäben eine EMK induziert und werden Ströme erzeugt, die ihr Maximum dort haben, wo maximaler magnetischer Fluß vorhanden ist. Zwischen den Ankerströmen und dem Drehfeld treten mechanische Kräfte auf, die den Läufer in die Umlaufrichtung des Feldes mitzunehmen suchen. Ist die Läuferdrehzahl $n_2 < n_1$, so nehmen die Frequenz der vom Läufer wahrgenommenen Flußänderung und der Läuferstrom mit der Differenz $n_1 - n_2$ ab; bei synchroner Drehzahl wird der Läuferstrom und damit das erzeugte mechanische Drehmoment Null. Der Läufer muß also immer etwas hinter der Umlaufgeschwindigkeit des Drehfeldes hereilen (Asynchronmotor).

Die Frequenz f_2 der Läuferströme verhält sich zur Netzfrequenz wie

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1} = s; \tag{15/10}$$

die Größe s wird *Schlupf* genannt und bestimmt den Drehzahlbereich des Motors. Der Asynchronmotor ist als kurzgeschlossener Transformator anzusehen, dessen Frequenz in der Sekundärwicklung veränderlich und wesentlich kleiner als f_1 ist. Das vom Läufer ausgeübte Drehmoment läßt sich aus der Ständerdurchflutung Ψ_1 und der gesamten Streuinduktivität L_σ berechnen, die sich aus den von Ständer und Läufer herrührenden Anteilen zusammensetzt. Man erhält schließlich die Beziehung

$$M = M_k = \frac{3}{4\pi} \frac{U_1^2}{n_1} \frac{1}{\omega L_\sigma}, \tag{15/11}$$

wobei M_k das maximale, kritische Moment ist, das bei um so kleineren Drehzahlen auftritt, je größer der Läuferwiderstand ist. In Abb. 15.10 ist als Kurve a die Drehzahl als Funktion des Drehmoments dargestellt; mit M_0 ist das Anlaufmoment bezeichnet. Größeres Anzugsmoment bei kleinerem Anlaufstrom erhält man mit Läufern, bei denen die Ankerstäbe aus flachen Stäben bestehen oder zwei Käfigwicklungen angewandt werden (Kurve b).

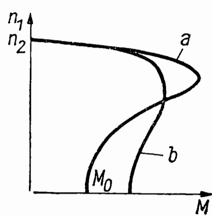


Abb. 15.10 Kennlinie des Asynchronmotors

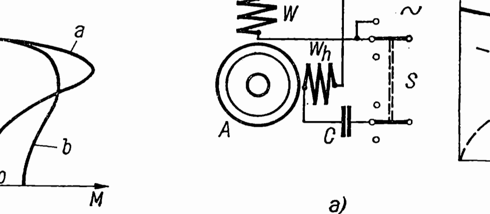


Abb. 15.11 Asynchroner Einphasenmotor mit Hilfswicklung: Schaltung (a), Momentkurve (b)

Durch geeignete Schaltung der einzelnen Wicklungsstränge im Ständer lassen sich verschiedene Drehzahlen im Verhältnis 6:3, 2:1 einstellen [*15.40*]. Über eine direkt anzeigende Schlupfmeßeinrichtung siehe [*15.51*].

Für spezielle Anwendungen werden Mittelfrequenz-Asynchronmotoren konstruiert, die in zweipoliger Ausführung 30000···60000 U/min erreichen und die zum Antrieb Frequenzumformer für 500 oder 1000 Hz erfordern. Die Ständer dieser Motoren sind meist wassergekühlt, da die Ummagnetisierungsverluste trotz Verwendung sehr dünner Transformatorbleche mit f anwachsen. Das Leistungsgewicht ist wegen der hohen Drehzahlen sehr niedrig und von der Größe 0,5 kg/kW.

Einphasen-Asynchronmotor. Bildet man die Ständerwicklung für Einphasenbetrieb aus, so kann das magnetische Wechselfeld in zwei mit entgegengesetztem Drehsinn umlaufende Drehfelder zerlegt werden. Wird ein Kurzschlußläufer in einer Drehrichtung angetrieben, so wirkt die gleichsinnig umlaufende Feldkomponente auf ihn treibend, die entgegengesetzte bremsend. Im Gleich-

gewicht stellt sich bei einem etwas unter der Synchrondrehzahl liegenden Betriebszustand das maximale Drehmoment ein.

Da dieser Motor nicht von sich aus anlaufen kann, wird eine zweite, um 90° räumlich versetzte Ständerwicklung W_h angebracht, die durch eine Serienkapazität C mit einem gegen den Hauptstrom etwa um $\pi/2$ phasenverschobenen

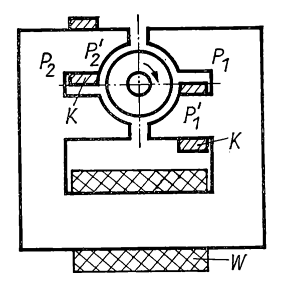




Abb. 15.12 Einphasensynchronmotor

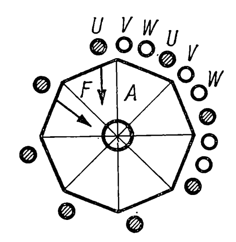


Abb. 15.13 Supraleitender Motor

Strom versorgt wird (s. Abb. 15.11a). In der gezeigten Anlaufstellung des Schalters S ist W_h eingeschaltet; im Betriebszustand ist nur W wirksam. In Abb. 15.11b ist das Drehmoment des Motors mit und ohne Hilfswicklung dargestellt. Ohne Hilfswicklung ist das Anfahrmoment Null.

Kleine Motoren werden — wie in Abb. 15.12 gezeigt — mit geschlitzten Magnetpolen P_1 und P_2 ausgerüstet und von der gemeinsamen Feldwicklung W erregt. Die gegenüberliegenden Hälften P_1' und P_2' besitzen einen Kurzschlußring K aus Kupfer, wodurch ihr magnetischer Fluß um etwa 90° gegen den der unbelasteten Polhälften verschoben ist und ein magnetisches Drehfeld entsteht. Bringt man als Rotor ein quermagnetisiertes Stahlscheibchen oder einen kleinen Zylindermagneten an, so läuft dieser wie ein Kurzschlußanker asynchron an, nach Erreichen der Synchrondrehzahl aber synchron weiter. Solche Motoren werden nur für kleine Drehmomente gebaut und häufig für Registrierapparate u. a. angewandt.

Anstelle geschlitzter Polschuhe kann auch eine Hälfte der Pole einen vergrößerten Luftspalt besitzen, wodurch der magnetische Kraftfluß gegen den anderen Teil phasenverschoben wird und den selbsttätigen Anlauf bewirkt. Über einen im Drehzahlbereich 1:5,5 arbeitenden Induktionsmotor siehe [*15.62*]. Synchron- und Asynchronmotoren lassen sich auch in Hochvakuumapparaturen benutzen, wenn der Stator z. B. über ein dünnwandiges Glasrohr geschoben wird, während der Läufer im Hochvakuumraum angebracht ist [*15.6*].

15.18 Spezielle Motorbauarten

Für Regel- und Steuerzwecke wird häufig der *Ferraris-Motor* benutzt, dessen Ständer zwei um 90° versetzte Polpaare enthält, die von den Strömen $I_1 = I_{10}e^{j\omega t}$ und $I_2 = I_{20}e^{j(\omega t-\varphi)}$ durchflossen werden. Der magnetische Kreis wird durch einen feststehenden, ebenfalls lamellierten Zylinder über einen Luftspalt geschlossen. In diesem Luftspalt befindet sich ein dünnwan-

diger Al- oder Cu-Hohlzylinder, in dem durch das Drehfeld Wirbelströme induziert werden, die den Läufer im Umlaufsinn des Drehfeldes mitnehmen. Anlauf- und Drehmoment des Motors hängen vom Verhältnis I_{10}/I_{20} sowie vom Phasenwinkel φ ab. Drehrichtung und Moment können durch Phasenänderung allein geändert werden. Näheres siehe z. B. [*15.56*] und § 6.313.

Integrationsmotoren werden meist als Induktionsmaschinen ausgebildet, die nach dem Prinzip der Induktionszähler (s. § 6.46) arbeiten. Die gleichzeitig auf den Läufer wirkende Wirbelstrombremse, deren Bremsmoment proportional zu n ist, bewirkt, daß die Drehzahl dem Ständerstrom proportional und die Gesamtzahl der Umdrehungen $\sim \int i\,\mathrm{d}t$ ist. Von FARR [*15.15*] werden Gleichstrommotoren mit permanenter Erregung als Integrationsinstrumente untersucht, die mit Bürsten und Kollektor aus Gold und Edelsteinlegierung ausgerüstet sind.

Für spezielle Anwendungen ist der von SCHOCK [*15.50*] in Abb. 15.13 dargestellte *Supraleitungsmotor* geeignet, der ein eisenloses dreiphasiges Ständerfeld für $p = 8$ enthält. Die einzelnen Stränge U, V, W sind hintereinandergeschaltet und bestehen aus supraleitendem Draht, z. B. Nb–Zr-Draht (vgl. § 13.32). Der Läufer A besteht aus Nb und stellt ein regelmäßiges Achteck dar, das innerhalb der Ständerwicklung rotieren kann. Das von den Wicklungssträngen erzeugte Magnetfeld kann wegen des Meissner-Effekts in den supraleitenden Läufer nicht eindringen und ruft bei passender Phasenlage auf A eine nicht durch die Läuferachse zielende Kraftresultante F hervor, die den Läufer in synchrone Drehung mit dem Drehfeld bringen kann. Das Drehmoment berechnet sich aus der Beziehung

$$M(\alpha) = \frac{p}{2}\, I^2\, \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\alpha},$$

wenn I der Ständerstrom und L die Induktivität zwischen Ständerleiter und Läufer ist. In flüssigem Helium lassen sich 1200 U/min, in Hochvakuum von 1 μTorr 20000 U/min erzielen. Bei Verwendung supraleitender Lager ist ein hoher Gesamtwirkungsgrad zu erreichen, da in erster Näherung keine ohmschen Verluste auftreten. Über ähnliche Bauformen siehe [*15.22*].

BUCHHOLD [*15.11*] hat ein supraleitendes *Gyroskop* angegeben, das aus einer Nb-Hohlkugel besteht, die in supraleitenden Schalen drehbar gelagert und von einem Drehfeld im Hochvakuum und bei Heliumtemperaturen angetrieben wird.

15.2 Generatoren, Umformer [*15.43*]

Generatoren elektrischer Energie werden hier nur insoweit behandelt, als es sich um spezielle Bauformen, z. B. für sehr hohe Ströme, oder um Motor-Generatoren für besondere Anwendungen handelt.

15.21 Gleichstromgenerator

Der Aufbau dieser Maschine entspricht dem der Abb. 15.1, und die induzierte Spannung berechnet sich nach Gl. (15/4). Bei *fremderregten Generatoren* nach Abb. 15.14 liegt die Erregerwicklung W über den Regelwiderstand R_r am

Netz und kann stetig hochgeregelt werden. Um beim Abschalten Spannungsüberschläge wegen der großen Induktivität der Erregerwicklung zu vermeiden, ist an R_r ein Endkontakt vorgesehen, der W beim Abschalten kurzschließt. Die *Leerlaufkennlinie* in Abb. 15.14b gibt die Abhängigkeit der magnetischen Induktion im magnetischen Kreis vom Erregerstrom i wieder. Bei konstanter Drehzahl n ändert sich die induzierte EMK E_i bei vernachlässigbarer Ankerrückwirkung nur wenig, hingegen nimmt die Generatorspannung $U = E_i - R_a I$ linear mit dem Ankerstrom und proportional zum Ankerwiderstand R_i ab,

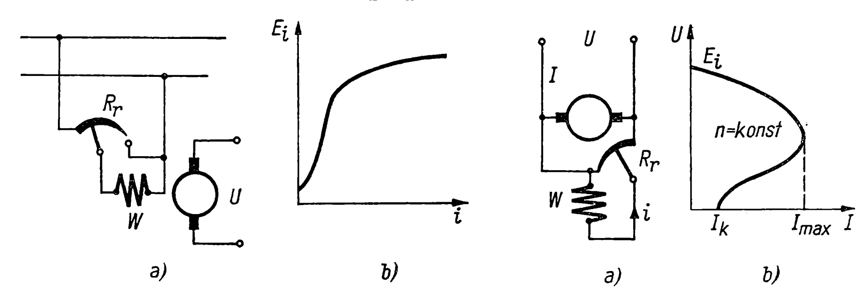


Abb. 15.14 Gleichstromgenerator: Schaltung (a), Leerlaufkennlinie (b)

Abb. 15.15 Nebenschlußgenerator: Schaltung (a), Kennlinie (b)

Beim *Nebenschlußgenerator* (s. Abb. 15.15) liegt die Erregerwicklung W über den Regelwiderstand R_r an den Läuferbürsten und wird von einem zu U proportionalen Strom durchflossen. Die Selbsterregung der Maschine ist die Folge des remanenten Induktionsflusses im Erregerkreis. Um die Spannung zu regeln, wird der Widerstand des Feldreglers R_r und damit der Erregerstrom i geändert. Verringert man den äußeren Schließungswiderstand des Generators, so steigt der Belastungsstrom I wie bei der fremderregten Maschine an, jedoch etwas weniger, da die Klemmenspannung und damit der Erregerstrom i abfällt. Der Kurzschlußstrom $I_k = E_i/R_a$ ist viel kleiner als der maximale Strom, wie aus der Belastungskennlinie der Abb. 15.15b hervorgeht.

Beim *Reihenschlußgenerator* liegen Läufer und Erregerwicklung ohne Regler in Serie. Im Gegensatz zur Nebenschlußmaschine nimmt der magnetische Fluß mit wachsendem Strom zu, wobei die gelieferte Klemmenspannung abfällt. Die Maschine hat — von speziellen Fällen abgesehen — keine praktische Bedeutung.

Der *Doppelschlußgenerator* besitzt auf jedem Polkern zwei Wicklungen, von denen die hochohmige im Nebenschluß, die niederohmige im Hauptschluß an die Läuferklemmen geschaltet sind. Bei passender Wahl von Durchflutung und Widerstand der beiden Spulenpaare wird die Generatorspannung über einen großen Bereich unabhängig vom entnommenen Strom sein.

15.22 Unipolarmaschine (vgl. a. § 13.63)

Zur Erzeugung sehr hoher Gleichströme bei niedrigen Spannungen werden vielfach *Unipolar-* oder *Homopolarmaschinen* verwendet, deren Aufbau aus Abb. 15.16a hervorgeht. Zwischen Eisenständer S und rotierendem Anker A, der ebenfalls aus Weicheisen besteht, wird durch die Erregerwicklung W die

magnetische Induktion B erzeugt. Bei Rotation des Läufers mit der Umfangsgeschwindigkeit v wird die EMK

$$E_i = Blv \tag{15/12}$$

induziert, wenn l die zwischen den Bürsten C liegende Ankerlänge im Feld B ist. Die an den Bürsten C_1, C_2 abgenommene Gleichspannung ist oberwellenfrei; der gelieferte Strom hängt vom Läuferwiderstand und vor allem vom Übergangswiderstand an den Bürsten ab. Nimmt man für einen Stahlläufer als

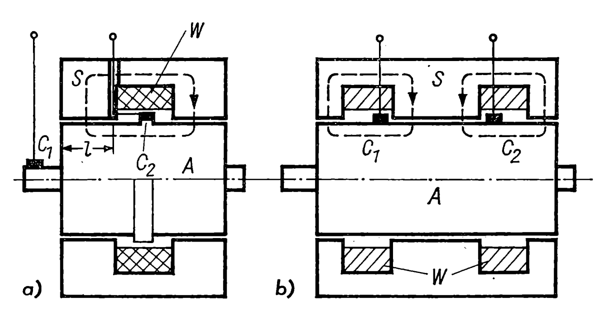


Abb. 15.16 Unipolarmaschinen

maximale Umfangsgeschwindigkeit $v = 100$ m/s und für die Induktion $B = 10^{-4}$ Vs/cm² an, so liefert eine Maschine mit $l = 30$ cm eine Spannung von 30 V.

Die symmetrische Bauform in Abb. 15.16b gibt eine bessere Ausnutzung des Statorfeldes, erfordert allerdings zwei bei hoher Umgangsgeschwindigkeit arbeitende Abnahmebürsten.

Konventionelle Bürsten aus Kupferkohle oder Kohle besitzen für die abzuführenden Ströme von 10···100 kA eine zu geringe Flächenbelastung. Aus diesem Grund werden *Flüssigkeitskontakte* angewandt, bei denen flüssiges Metall (Hg, NaK-Mischung) durch die Fliehkraft in einer U-förmigen Kreisrinne gehalten und der Strom über einen Kontaktring aus Cu abgenommen wird. Bei einer günstigeren Ausführung wird die leitende Flüssigkeit durch Düsen mit hoher Geschwindigkeit auf die Kontaktringe gespritzt.

Bei der von KLAUDY [*15.24*] konstruierten Maschine mit einem Läuferdurchmesser von 26 cm und der maximalen Umfangsgeschwindigkeit von 130 m/s werden 20 kA bei 14 V erreicht und Hg-Kontakte bei einer Stromdichte von 5 kA/cm² verwendet. Die in Livermore, Calif. (USA) eingesetzte Maschine liefert bei $n = 10000$ U/min einen Maximalstrom von 250 kA bei etwa 30 V Klemmenspannung und verwendet zur Kontaktgabe flüssiges Na–K, das aus Bronzeringen auf den Läufer strömt.

15.23 Synchrongenerator

Der *Synchrongenerator* besteht aus dem lamellierten Stator mit eingelegter Ein- oder Mehrphasenwicklung und dem innen umlaufenden *Polrad* mit einem oder mehreren Polpaaren, deren Wicklung über zwei Schleifringe mit dem

Erregerstrom versorgt wird. Die an der Statorwicklung abgenommene Leerlaufspannung ist eine Wechselspannung mit der Spitzenspannung nach Gl. (15/4) und eine Funktion des Erregerstroms. Von Bedeutung für den Experimentalphysiker sind *Mittelfrequenzgeneratoren* kleinerer Leistung bis etwa 1000 Hz zur Speisung von Mittelfrequenzmotoren (s. § 15.17). Die hohe Polzahl bedingt eine kleine Polteilung in den Ständerblechen, in deren Nuten oft

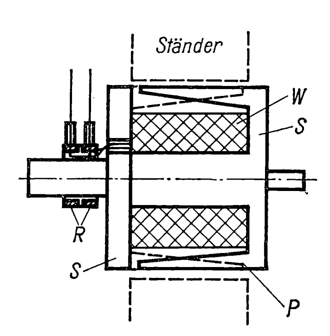


Abb. 15.17 Mittelfrequenzmaschine

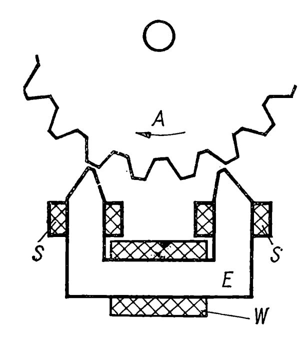


Abb. 15.18 Wechselspannungsmaschine nach DOLEZALEK

nur *ein* Cu-Leiter eingeschoben wird. Das Polrad besteht — wie in Abb. 15.17 angedeutet — aus zwei Stahlscheiben S mit aufgesetzten ineinandergreifenden Polschuhen P abwechselnder Polarität. Die gemeinsame Erregerwicklung W wird über Schleifringe R mit Strom versorgt. Wegen der höheren Frequenzen wird der Ständer aus 0,25 mm dünnen Fe–Si-Blechen aufgebaut. Für spezielle Anwendungen werden 15-kHz-Generatoren mit einer Umfangsgeschwindigkeit des Läufers von 300 m/s und einer Polteilung von 5 mm für Leistungen bis 1500 kVA gebaut.

Eine zweite, heute kaum mehr gebräuchliche Wechselstrommaschine stammt von DOLEZALEK und ist vereinfacht in Abb. 15.18 dargestellt. Der Läufer A (aus Transformatorblech) ist mit Zähnen versehen und bewegt sich an den zugespitzten Polen des U-förmigen Magneten E vorbei. Durch die Gleichstromwicklung W wird ein magnetischer Kraftfluß erzeugt, der bei Rotation des Läufers periodisch verändert wird und in den Spulen S eine Wechselspannung erzeugt, deren Frequenz nz ist, wenn z die Zähnezahl von A ist. Der Magnet läßt sich auch zu einem ringförmigen lamellierten Ständer mit Einphasenwicklung ergänzen. Die maximale Frequenz liegt bei 100 kHz, die Leistung bei 2 kVA.

15.24 Asynchrongenerator

In § 15.17 ist darauf hingewiesen worden, daß die Asynchronmaschine einen Transformator mit einer Sekundärwicklung darstellt, die kurzgeschlossen und deren Frequenz dem Schlupf s proportional ist. Es läßt sich zeigen, daß — wie in Abb. 15.19 angedeutet — der Strom $\boldsymbol{I}$ im Ständer durch ein Kreisdiagramm beschrieben werden kann und sich vektoriell aus dem Leerlaufstrom

I_0 und der Wirkstromkomponente I_{1z} zusammensetzt. Das erzeugte Drehmoment ist der Strecke $a—b$ verhältnisgleich und erreicht bei a_k den Maximalwert. Als Parameter ist längs des Kreises der Schlupf s aufgetragen; für $s = 1$ ergibt die Strecke $a_0—b_0$ das Anlaufmoment M_0 (vgl. Abb. 15.10).

Bei übersynchroner Winkelgeschwindigkeit des Läufers ($n_2 > n_1$) wird $s < 0$, und der Endpunkt des Stromvektors I durchläuft den unteren Halbkreis des

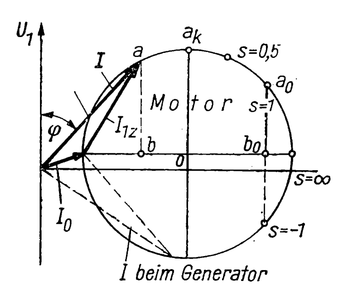


Abb. 15.19 Kreisdiagramm der Asynchronmaschine

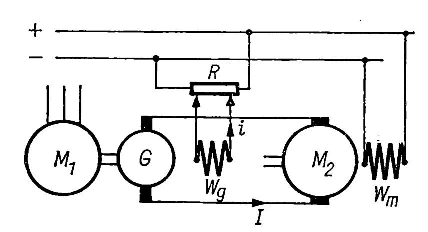


Abb. 15.20 Leonard-Schaltung

Diagramms in Abb. 15.19. Gleichzeitig wird der Phasenwinkel φ negativ, d. h., es wird elektrische Leistung über die Ständerwicklung an das angeschlossene Netz übertragen; die Maschine arbeitet als *Generator* bei der Netzfrequenz.

Die Asynchronmaschine hat als Generator keine große Bedeutung. Für spezielle Anwendungen, z. B. zum Abbremsen kleiner Arbeitsmaschinen, kann jedoch der im Gegensatz zur Synchronmaschine weite Drehzahlbereich von Vorteil sein.

15.25 *Einankerumformer*

Einankerumformer sind Einankermaschinen zum Umformen von Wechsel- in Gleichstrom oder umgekehrt. Ihr Aufbau entspricht dem einer Synchronmaschine mit außen liegenden Polen und einem gleichmäßig bewickelten Läufer, dessen Wicklungsstränge sowohl zu Drehstromschleifringen als auch zu einem Gleichstromkollektor geführt sind. Diese Maschinen sind raumsparend und für die Erzeugung großer Stromstärken bei relativ kleiner Spannung gut geeignet.

15.26 *Leonard-Schaltung* [*15.36*]

Die in Abb. 15.20 dargestellte Leonard-Schaltung gibt die Möglichkeit, einen Gleichstrommotor in einem großen Drehzahlbereich mit gutem Wirkungsgrad zu betreiben und seine Drehrichtung umzusteuern. Hierzu treibt der Asynchronmotor M_1 mit konstanter Drehzahl den Steuergenerator G an, dessen Feldwicklung W_g über das Potentiometer R aus dem Netz erregt wird. Der Arbeitsmotor M_2, dessen Feldwicklung W_m an der konstanten Netzspannung liegt, ist direkt an die Klemmen von G angeschlossen und wird mit einer

Spannung gespeist, die vom Erregerstrom i abhängt. Die Schaltung ermöglicht praktisch verlustloses Regeln bis zum Stillstand; beim Bremsen wird elektrische Leistung über M_1 an das Wechselspannungsnetz abgegeben.

15.27 Maschinenverstärker

Um die Nutzleistung von Gleichstrom- oder auch Wechselstromgeneratoren mit geringer Leistung steuern zu können, benutzt man nach Abb. 15.21 eine von der Generatorwelle angetriebene Erregermaschine G_2 in Nebenschlußschaltung, deren Feld über den Regler R aus dem Netz gespeist wird. Der

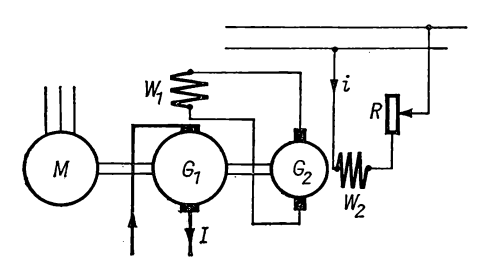


Abb. 15.21 Generator mit Erregermaschine

Hauptgenerator G_1 mit der Erregerwicklung W_1 wird vom Asynchronmotor M mit konstanter Drehzahl angetrieben. Durch Verändern von R wird der Erregerstrom i und damit die in G_1 induzierte Spannung beeinflußt. Als Verstärkungsfaktor A wird das Verhältnis der von G_1 abgegebenen Leistung zur Erregerleistung in W_2 bezeichnet. Für Maschinenverstärker kann A zwischen 500 und 10000 liegen. Um hohe Regelgeschwindigkeit zu erreichen, lamelliert man den Ständer der Erregermaschine und arbeitet weit unterhalb der Sättigung des magnetischen Kreises. Da A mit n zunimmt, besitzen Verstärkermaschinen hohe Drehzahl.

15.3 Elektronische Motorsteuerung

Für viele Anwendungen von Gleich- und Wechselstrommotoren wird konstante, von der Belastung unabhängige Drehzahl oder ein bestimmtes Steuerprogramm für Drehzahl und Umlaufrichtung verlangt. Für physikalische Aufgaben tritt die erste Bedingung besonders häufig auf.

Für kleine Drehmomente lassen sich Synchronmotoren mit selbsttätigem Anlauf (s. § 15.17) verwenden und mit bekannten Mitteln die Frequenz der Betriebsspannung konstant halten. Bei sehr hohen Anforderungen wendet man einen besonderen NF-Oszillator mit Frequenzstabilisierung und nachgeschaltetem Leistungsverstärker an.

Bei *Gleich-* und *Wechselstromnebenschlußmotoren* wird die Steueranlage nach dem Blockschaltbild 15.22a aufgebaut, welche getrennte Regelglieder für Anker- und Feldstrom enthält. Für die Drehzahl gilt nach den Gln. (15/6)

und (15/7)

$$n = \frac{U - IR_i}{4wp\Phi_m} = C_1 \frac{U - IR_i}{\Phi}. \tag{15/13}$$

Das Drehmoment M und die Motorleistung $P = nM$ erhält man aus Gl. (15/5) zu

$$M = C_2 I \Phi_m; \quad P = C_1 C_2 (UI - IR_i) = C_3 (UI - I^2 R_i) \tag{15/14}$$

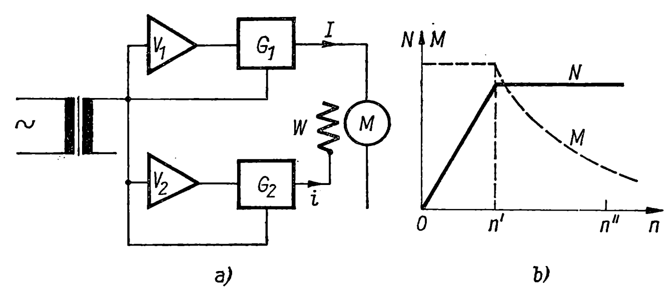


Abb. 15.22 Schema einer Motorsteuerung: Schaltung (a), Motorkennlinien (b)

und den Fluß im linearen Induktionsflußbereich zu

$$\Phi_m = C_4 i, \tag{15/15}$$

wenn i der Erregerstrom ist.

Wie in Abb. 15.22b gezeigt ist, kann man die folgenden Regelmöglichkeiten anwenden:

1. Vom Stillstand bis zur Drehzahl n' erhöht man bei konstanter Felderregung die *Anker*spannung U und erhält für $IR_i < U$ eine linear mit U wachsende Drehzahl bei konstantem Moment M;

2. Von n' bis n'' wird das *Feld* heruntergeregelt, wodurch n bei konstanter Motorleistung zunimmt.

Da nach Gl. (15/13) die Drehzahl der Ankerspannung proportional ist, kann man diese als Meßgröße für die beiden Verstärker V_1 und V_2 verwenden. In Abb. 15.23 ist eine gebräuchliche Schaltung zur Drehzahlstabilisierung mit Hilfe der Ankerspannung wiedergegeben. Die Speisung des Läufers A erfolgt über die Thyratrons T_1 und T_2, deren Gitter aus dem Übertrager $Ü$ und der RC-Brücke B um 90° phasenverschobene Steuerspannungen erhalten. Außerdem liegt an den Gittern eine positive Vorspannung, die an der Kapazität C infolge der Gleichrichterwirkung der Diode G_1 und des Spannungsabfalls in der Triode E entsteht, deren Gitter an der positiven Ankerklemme liegt. Je nachdem, ob hierdurch den Gittern von T_1 und T_2 eine positive oder negative Spannung überlagert wird, wird ihr Zündzeitpunkt verschoben und der Ankerstrom geändert. Durch ein Potentiometer P_1, an dem ein Teil der an der Feld-

wicklung liegenden Spannung abgegriffen wird, kann die Solldrehzahl durch Vergleich mit der Ankerspannung eingestellt werden.

Bei den meisten Motorsteuerungen wird zusätzlich die Höhe des Ankerstroms I begrenzt, um beim Anlaufen zu hohe Stromaufnahme zu unterbinden. Ferner werden auch Schaltungen verwendet, in denen der Spannungsabfall IR_i (s. Gl. (15/13)) kompensiert wird und die Proportionalität zwischen n und U genau zutrifft. Zu diesem Zweck wird in den Ankerkreis ein Widerstand in Serie geschaltet, dessen Spannungsabfall verstärkt und über einen Impedanzwandler von der Ankerspannung subtrahiert wird.

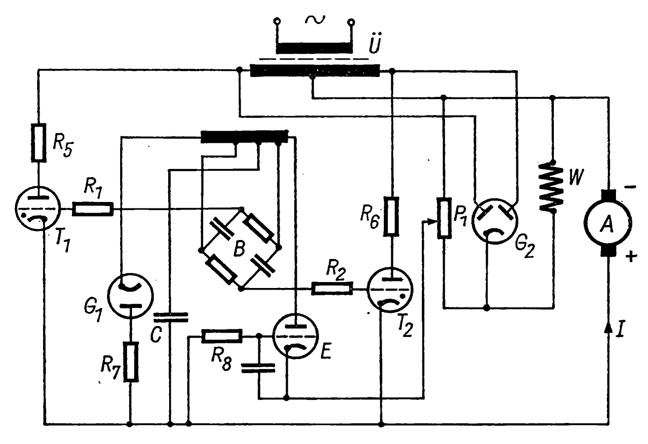


Abb. 15.23 Drehzahlstabilisierung

Eine von der Ankerspannung unabhängige Drehzahlsteuerung läßt sich mit einem *Tachometergenerator* erzielen, dessen Ausgangsspannung und -frequenz der Motordrehzahl n proportional ist. Die Tachometerspannung wird mit einer vorgegebenen Spannung verglichen und wie oben zum Verstellen des Zündzeitpunkts des Thyratrons benutzt.

Für kleine Wechselstrommotoren, die mit getrennten Feldwicklungen für beide Drehrichtungen ausgerüstet sind, wird der Feldstrom durch zwei Transformatoren gesteuert, die im Sättigungsbereich arbeiten.

15.4 Transformator [*15.25, 15.61, 15.10, 15.44, 15.23*]

Transformatoren sind ruhende Leistungsübertrager, die aus einem magnetischen, meist geschlossenen Kreis und Wicklungen bestehen, die möglichst eng mit dem magnetischen Wechselfluß verkettet sind. Für hohe Frequenzen werden anstelle des Transformatorblechs Ferrite (s. § 12.8) verwendet; im Höchstfrequenzbereich werden nur noch induktiv gekoppelte Spulen angewandt. Zu den Transformatoren zählen auch die Meßwandler für Strom und Spannung bei Hochspannung.

15.41 Theorie

In § 3.46 ist bereits der ideale Transformator allgemein behandelt worden, bei dem vollkommene Kopplung zwischen Primär- und Sekundärspule vorausgesetzt ist. Einer etwas tiefer gehenden Behandlung ist das Schema in Abb. 15.24 zugrunde gelegt. Für die zwischen den Klemmen *1* und *2* liegenden Spannungen gilt die Beziehung

$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + i_1 R; \tag{15/16}$$

analog hat man für die Sekundärspule zu setzen:

$$u_2 = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + i_2 R_2. \tag{15/17}$$

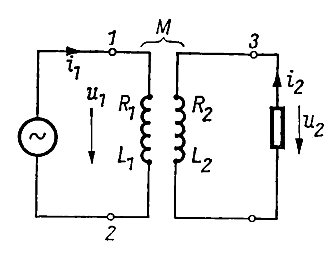


Abb. 15.24 Schema des Transformators

Primär- und Sekundärkreis sind über einen geschlossenen magnetischen Kreis (aus lamellierten Kernen oder HF-Eisen) miteinander gekoppelt. Ohne magnetische Streuung müßte für den magnetischen Widerstand R_m nach den Gln. (13/12) und (14/8) für beide Kreise gelten:

$$L_1 = \frac{N_1^2}{R_m}; \quad L_2 = \frac{N_2^2}{R_m}, \tag{15/18}$$

wenn N_1 und N_2 die Windungszahlen von Primär- und Sekundärspule sind. Außerdem würde bei offener Sekundärwicklung ($i_2 = 0$) der von der Primärwicklung erzeugte magnetische Fluß

$$\Phi = \frac{i_1 N_1}{R_m}$$

auch mit der Sekundärwicklung verkettet sein, woraus die Gegeninduktivität

$$M = \frac{N_1 N_2}{R_m} = \sqrt{L_1 L_2} \tag{15/19}$$

folgt. Tatsächlich ist ein Teil des magnetischen Flusses *nicht* mit der anderen

Wicklung verkettet. Man führt den *Streufaktor*

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \tag{15/20}$$

ein, der beim idealen Transformator den Wert Null hat, und definiert als *Kopplungsgrad* die Größe

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \sqrt{1 - \sigma}. \tag{15/21}$$

Die *Streuung* des primären Magnetflusses Ψ_1 läßt sich durch die Aufteilung in *Bündelflüsse* Φ_1 und Φ_{12} übersehen, die in beiden Wicklungen die gleichen Gesamtflüsse ergeben würden:

$$\Phi_1 = \frac{\Psi_1}{N_1}; \quad \Phi_{12} = \frac{\Psi_{12}}{N_2}. \tag{15/22}$$

Als *primärer Streufluß* ergibt sich die Differenz

$$\Phi_1 - \Phi_{12} = \Phi_{\sigma 1} = L_{\sigma 1} \frac{\dot{i}_1}{\Phi_{\sigma 1}} N_1. \tag{15/23}$$

Analog findet man für Primär- und Sekundärwicklung die in *Tabelle 15.1* zusammengestellten Kenngrößen.

Tabelle 15.1 Kenngrößen des Transformators

	Primärwicklung	Sekundärwicklung	
Gesamtinduktivität	$L_1 = \frac{N_1 \Phi_1}{\dot{i}_1}$	$L_2 = \frac{N_2 \Phi_2}{\dot{i}_2}$	(15/24 a, b)
Streuinduktivität	$L_{\sigma 1} = \frac{N_1 \Phi_{\sigma 1}}{\dot{i}_1}$	$L_{\sigma 2} = \frac{N_2 \Phi_{\sigma 2}}{\dot{i}_2}$	(15/25 a, b)
Hauptinduktivität	$L_{h1} = L_1 - L_{\sigma 1}$	$L_{h2} = L_2 - L_{\sigma 2}$	
	$= \frac{N_1 \Phi_{12}}{\dot{i}_1}$	$= \frac{N_2 \Phi_{12}}{\dot{i}_2}$	(15/26 a, b)
	$= \frac{N_1}{N_2} M$	$= \frac{N_2}{N_1} M$	(15/27 a, b)
	$L_{\sigma 1} = L_1 - \frac{N_1}{N_2} M$	$L_{\sigma 2} = L_2 - \frac{N_2}{N_1} M$	(15/28 a, b)

$$\frac{L_{h1}}{L_{h2}} = \frac{N_1^2}{N_2^2} \tag{15/29}$$

$$\sigma \simeq \frac{L_{\sigma 1}}{L_1} + \frac{L_{\sigma 2}}{L_2} \quad \text{für } \sigma \ll 1 \tag{15/30}$$

15.42 *Ersatzbilder des Transformators*

Auf Grund der Gln. (15/16) und (15/17) können *Ersatzbilder* angegeben werden, die nur Widerstände und Induktivitäten enthalten und das Betriebsverhalten des Transformators leicht zu übersehen gestatten. In komplexer Schreibweise lauten die beiden Beziehungen:

$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{I}_1(R_1 + \mathrm{j}\,\omega L_1) + \boldsymbol{I}_2\,\mathrm{j}\,\omega M; \tag{15/16a}$$

$$\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{I}_2(R_2 + \mathrm{j}\,\omega L_2) + \boldsymbol{I}_1\,\mathrm{j}\,\omega M. \tag{15/17a}$$

Beide in Abb. 15.25 dargestellten Ersatzbilder lassen sich durch die obigen Gleichungen beschreiben. Im *Kopplungsersatzbild* (Abb. 15.25a) wird die Gegeninduktivität auf eine Induktivität zurückgeführt. Es wird dann angewandt, wenn L_1, L_2 und M unabhängig von den Strömen sind, d. h. in Lufttransformatoren oder bei kleiner magnetischer Induktion des magnetischen Kreises. Dies trifft für kleine Transformatoren im NF-Bereich zu.

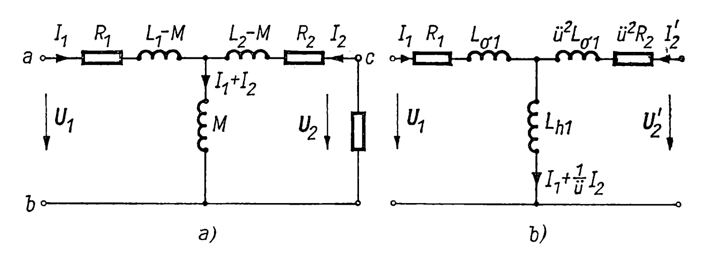


Abb. 15.25 Ersatzbilder des Transformators: Kopplungsersatzbild (a), Streuungsersatzbild (b)

In der Starkstromtechnik wird meist das *Streuungsersatzbild* der Abb. 15.25b verwendet, in dem das Übersetzungsverhältnis

$$ü = \frac{N_1}{N_2} \tag{15/31}$$

eine Rolle spielt und Strom und Spannung der Sekundärseite durch die Beziehungen

$$\boldsymbol{U}_2' = ü\boldsymbol{U}_2 = \frac{N_1}{N_2}\,\boldsymbol{U}_2; \tag{15/32}$$

$$\boldsymbol{I}_2' = \frac{\boldsymbol{I}_2}{ü} = \frac{N_2}{N_1}\,\boldsymbol{I}_2 \tag{15/33}$$

auf die Primärseite bezogen werden. Da die Streuflüsse hauptsächlich außerhalb des Transformatorkerns verlaufen, sind die Streuinduktivitäten vom Strom unabhängig. Die Hauptinduktivität L_{h1} hängt dagegen von der Permeabilität des Kerns ab, so daß das Ersatzbild jeweils für einen bestimmten Betriebszustand gilt.

Das Streuungsersatzbild kann auch aus dem Zeigerdiagramm der Abb. 15.26 für den verlust- und streuungsfreien Transformator abgeleitet werden. Im Leerlauf ($I_2 = 0$) ist der Strom I_0 mit dem Fluß Φ_1 in Phase und induziert die Effektivspannung

$$U_1 = E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega N_1 \Phi_1. \tag{15/34}$$

Zwischen U_1 und I_0 herrscht eine Phasenverschiebung von 90°. Der Fluß Φ_1 induziert in der Sekundärwicklung die Spannung

$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega N_2 \Phi_1 = \frac{N_2}{N_1}\,U_1 = \frac{1}{ü}\,U_1, \tag{15/35}$$

wobei beide nach der Vorzeichenfestlegung nach Abb. 15.24 in Phase sind. Bei belasteter Sekundärseite entsteht der Strom $\boldsymbol{I}_2$, der durch $\boldsymbol{U}_2$ und die Impedanz

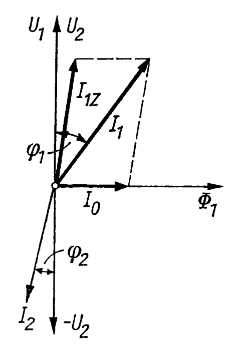


Abb. 15.26 Zeigerdiagramm des verlust- und streufreien Transformators

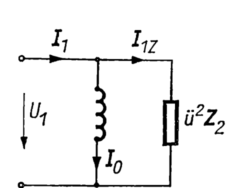


Abb. 15.27 Ersatzbild zu Abb. 15.26

des Lastwiderstandes bestimmt ist und eine Durchflutung $N_2\boldsymbol{I}_2$ des magnetischen Kreises erzeugt. Da der Fluß Φ_1 erhalten bleiben muß, dessen Durchflutung durch $\boldsymbol{I}_0$ gedeckt ist, entsteht auf der Eingangsseite der *primäre Zusatzstrom* $\boldsymbol{I}_{1z}$, der in Gegenphase zu $\boldsymbol{I}_2$ steht und sich aus

$$N_1 I_{1z} = N_2 I_2$$

ergibt. Die Komponenten $\boldsymbol{I}_{1z}$ und $\boldsymbol{I}_0$ ergeben den Primärstrom $\boldsymbol{I}_1$. Besitzt der Lastwiderstand die Impedanz $\boldsymbol{Z}_2$, so gilt:

$$-\boldsymbol{I}_2 = \frac{\boldsymbol{U}_2}{\boldsymbol{Z}_2} = \frac{1}{ü}\,\frac{\boldsymbol{U}_1}{\boldsymbol{Z}_2} = \frac{\boldsymbol{U}_1}{ü\boldsymbol{Z}_2}, \tag{15/36}$$

$$\boldsymbol{I}_{1z} = -\frac{N_2}{N_1}\,\boldsymbol{I}_2 = \frac{\boldsymbol{U}_1}{ü^2\boldsymbol{Z}_2}. \tag{15/37}$$

Der primäre Zusatzstrom $\boldsymbol{I}_{1z}$ ergibt sich also aus Primärspannung $\boldsymbol{U}_1$ und der Lastimpedanz $\boldsymbol{Z}_2$, die mit dem Quadrat des Übersetzungsverhältnisses multi-

pliziert ist. Daraus läßt sich das einfache Ersatzschaltbild entsprechend der Abb. 15.26 angeben (Abb. 15.27), an dem z. B. das Problem der Leistungsanpassung bei einem Übertrager an den Generatorwiderstand mittels geeigneter Wahl von *ü* erörtert werden kann.

15.43 Bauformen

Je nach der Formgebung des Eisenkerns unterscheidet man Mantel- und Kerntransformatoren. Beim *Manteltransformator* (Abb. 15.28a) sind Primär- und Sekundärwicklungen auf *einem* gemeinsamen Kern angebracht und in ein Doppeljoch eingeschlossen. Beim *Kerntransformator* (Abb. 15.28b) sind beide Schenkel des magnetischen Kreises mit den Wicklungen versehen. Die Bleche für die Kerne großer Leistungstransformatoren ergeben einen etwa kreisförmigen Querschnitt, um Zylinderspulen anwenden zu können.

Drehstromtransformatoren enthalten drei bewickelte Schenkel (s. Abb. 15.28c) und können sowohl in Kern- als auch in Mantelbauweise angewandt werden.

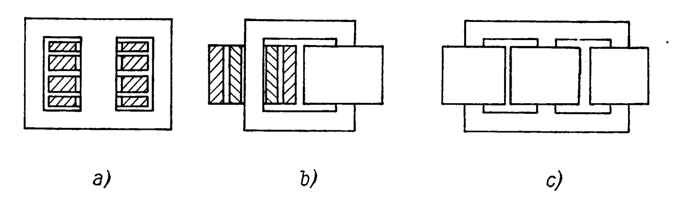


Abb. 15.28 Transformatorbauformen: Manteltransformator (a), Kerntransformator (b), Drehstromtransformator (c)

Als *Kernmaterial* werden legierte Bleche mit 2,5···4% Si benutzt, die gewöhnlich 0,35 mm stark sind und bei 1 T Verluste von 0,5···1 W/kg aufweisen. Für höhere Frequenzen wird die Blechdicke auf 0,1 mm verringert.

Bei Manteltrafos mit rechteckigem Kern werden *Scheibenwicklungen*, bei Kerntrafos *Röhrenwicklungen* bevorzugt. In Leistungstrafos werden Kern und Wicklung mit Öl gekühlt, wodurch gleichzeitig die Durchschlagsspannung stark heraufgesetzt wird.

Neuerdings werden *supraleitende Transformatoren* untersucht, deren aus supraleitendem Draht (Nb–Ti, Nb–Zr) bestehende Wicklungen mit flüssigem He gekühlt werden und daher mit einer sehr hohen Stromdichte betrieben werden können. Diese kompakten Wicklungen weisen sehr kleinen Streufluß und verschwindenden ohmschen Widerstand auf; sie ermöglichen, große Leistungen auf kleinstem Raum unterzubringen.

Spartransformatoren werden bei kleinen Unterschieden zwischen Primär- und Sekundärspannung angewandt und übertragen die Energie z. T. induktiv, z. T. unmittelbar. Der Spartrafo besitzt nur *eine* Wicklung auf einem geschlossenen Blechkern, die mit Abgriffen oder einem Schleifkontakt versehen ist.

Stelltransformatoren bestehen aus einem Toroidblechkern, der gleichmäßig meist in Sparschaltung bewickelt ist. Mit einem von einem Dreharm geführten

Schleifkontakt wird an der Außenseite der Wicklung direkt die Ausgangsspannung abgegriffen. Stelltrafos werden auch in Regelkreisen mit selbsttätiger Verstellung benutzt und für Leistungen bis 5 kVA gebaut. Näheres siehe [*15.53*].

Drehtransformatoren stellen im Prinzip einen Drehstromschleifringmotor (s. § 15.17) dar, dessen Anker festgehalten wird und mittels Schneckenuntersetzung verdreht werden kann. Durch Verdrehen des Läufers kann die Ausgangsspannung stufenlos geändert werden. Analog kann dieses Prinzip auch auf den Einphasendrehtrafo übertragen werden.

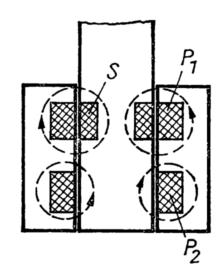


Abb. 15.29 Stelltransformator

Der *Schubtransformator* stellt einen Manteltrafo mit zwei entgegengesetzt magnetisierenden Erregerwicklungen (P_1, P_2 in Abb. 15.29) dar, dessen Sekundärwicklung S mit dem Trafokern verschoben werden kann. Je nach Stellung von S läßt sich die Sekundärspannung zwischen $\pm U_2$ stufenlos verändern.

15.44 Meßwandler [*15.8, 15.29, 15.18*]

Meßwandler dienen zur Erweiterung des Meßbereichs von Wechselstrominstrumenten, zur Trennung der Niederspannungsmeßeinrichtung vom Hochspannungsnetz und zum Anschluß von Zählern und Regeleinrichtungen. Näheres siehe § 6.33. Über eine Absoluteichmethode für Spannungswandler siehe [*15.12*]. Spannungswandler für Höchstspannungen werden in [*15.13*] beschrieben.

15.5 Leistungsgleichrichter

In § 5.1 sind bereits die Grundlagen der Gleichrichtung, ihre Berechnungsunterlagen und ihr Aufbau behandelt.

Als *Ventile* kommen *Selengleichrichter* [*15.39, 15.31*] in Betracht, deren Strombelastung etwa 40 mA/cm² und Betriebsspannung pro Platte 10···30 V beträgt. *Hochvakuumventile* sind bis zu einigen Ampere bei Spannungen bis 200 kV belastbar. *Quecksilberdampfventile* werden für Spannungen bis 800 V und Ströme bis 5 kA hergestellt. *Silizium-Leistungsgleichrichter* [*15.17, 15.38*] zeichnen sich durch hohe Spannungs- und Stromwerte bei Betriebstemperaturen bis 150 °C aus. Für große Leistungen ist Parallelschaltung ohne weiteres möglich (s. a. *Tabelle 4.5*). Für technische Zwecke werden *Kontaktgleichrichter* benutzt, in denen Schaltkontakte durch einen 50-Hz-Synchronmotor in der

richtigen Phasenlage betätigt werden. Solche Gleichrichter besitzen einen großen Wirkungsgrad und arbeiten zwischen 100 und 600 V bei maximalen Stromstärken von 15 kA.

15.6 Wechsel- und Umrichter [*15.7*]

Wechselrichter [*15.57*, *15.19*] dienen dazu, Gleichstromenergie in Wechselspannung mit möglichst hohem Wirkungsgrad umzuformen, und werden zum Betrieb von Induktionsöfen u. a. angewandt. Hierfür werden gittergesteuerte *Gasentladungsröhren* (s. § 4.35) und *Thyristoren* (s. § 4.268) benutzt, deren Zündspannung vom angeschlossenen Wechselstromnetz (über einen Phasenschieber) geliefert wird oder die in Selbsterregung arbeiten. In Abb. 15.30 ist ein mit

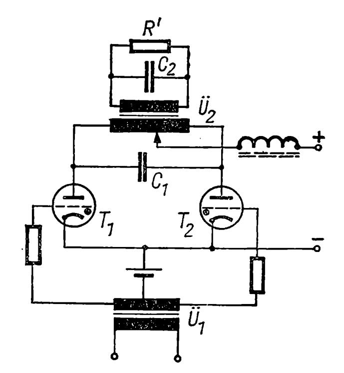




Abb. 15.30 Wechselrichter mit Thyratrons

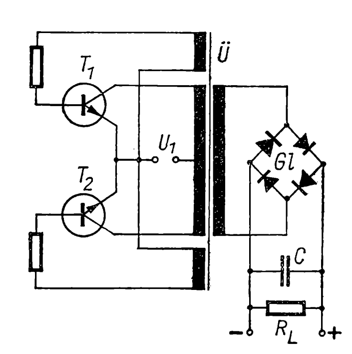


Abb. 15.31 Transistor-Konverter

Thyratrons T_1 und T_2 ausgerüsteter Wechselrichter dargestellt, deren Gitter über den Transformator $\ddot{U}_1$ von einer äußeren Spannungsquelle gesteuert werden. Die erzeugte Wechselspannung besteht aus Exponentialkurven $e^{-R't/L}$, wenn R' der auf den Anodenkreis mittels $\ddot{U}_2$ transformierte Lastwiderstand ist. Ähnliche Schaltungen lassen sich mit Si-Leistungstransistoren oder Thyristoren ausführen. Über Wechselrichter oder *Inverter* mit gesteuerten Hg-Entladungsgefäßen siehe [*15.55*].

Für technischen Wechselstrom von 50 Hz werden für hohe Leistungen auch mechanisch gesteuerte *Kontaktwechselrichter* benutzt, die von einem phasenempfindlichen Synchronmotor betätigt werden [*15.47*].

Umrichter oder *Konverter* [*15.45*] dienen zur Gleichspannungsumformung in Gleichstrom von meist viel höherer Spannung mit Hilfe eines Wechselrichters mit nachgeschaltetem Gleichrichter. Eine sehr häufig angewandte Schaltung eines Konverters mit zwei Transistoren T_1 und T_2 ist in Abb. 15.31 vereinfacht wiedergegeben. Der Transformator $\ddot{U}$ dient sowohl zur Basissteuerung der Transistoren, als auch zur Transformation auf die gewünschte Spannung. Im Primärkreis von $\ddot{U}$ fließt ein von den Schalttransistoren erzeugter Rechteckstrom, dessen Frequenz von den Kreisparametern abhängt und meist von der Größe 100 kHz ist. Im nachgeschalteten Gleichrichter *Gl* in Graetz-

schaltung mit dem Glättungskondensator C wird am Lastwiderstand R_L die gewünschte Spannung erzeugt. (Weitere Schaltungen z. B. in [*15.35*, *15.28*].) Solche Konverter mit Transistor-Relaxationsoszillator werden im Leistungsbereich von einigen Milliwatt bis zu mehreren Watt bei einer Spannungsübersetzung von einigen Volt bis zu vielen Kilovolt für Teilchenzähler, Fotozellen und transportable Oszillatoren verwendet.

Eine zweite, einfachere Schaltung (s. Abb. 15.32) benutzt nur einen Transistor T und den Transformator $Ü$, dessen Primärwicklung vom Kollektorstrom durchflossen wird. Der Transistor wirkt als Unterbrecher: leitet T, so

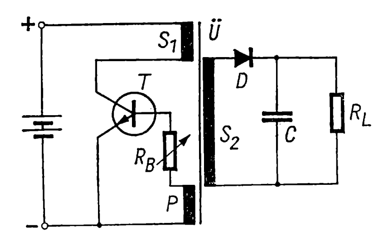


Abb. 15.32 Transistor-Konverter

fließt im Kollektorkreis (Primärwicklung P) ein Stromimpuls, der im angeschlossenen Diodenkreis einem negativen Spannungsimpuls entspricht. Wird T durch die negative Basisspannung über die Wicklung S_1 abgeschaltet, so entsteht in der Ausgangswicklung S_2 ein positiver Impuls, der über den Gleichrichter zu R_L bzw. C gelangt. Der einstellbare Widerstand R_B ist für die optimale Einstellung der Betriebsbedingungen notwendig. Für kleine Leistungen von 1···50 W liegt der maximale Wirkungsgrad solcher Konverter zwischen 60 und 75%. Mit zwei Transistoren nach Abb. 15.31 sind zwischen 2 und 200 W übertragener Leistung und maximal 800 V Ausgangsspannung mit Si-Leistungstransistoren Wirkungsgrade zwischen 75 und 85% erreichbar.

15.7 Leistungsverstärker

Das Grundsätzliche über NF-Leistungsverstärker mittels Elektronenröhren und Leistungstransistoren ist bereits in § 5.24 behandelt. Durch die Fortentwicklung der Si-Leistungstransistoren lassen sich heute Leistungsverstärker bis zu mehreren Kilowatt im Tonfrequenzgebiet und bis zu einigen hundert Watt bei Frequenzen bis zu 500 MHz anwenden.

15.71 Magnetische Verstärker (Transduktoren) [15.58, 15.60, 15.33, 15.16, 15.3, 15.49]

Grundsätzlich werden Vorrichtungen für die Steuerung magnetischer Flüsse in ferromagnetischen Kernen als *magnetische Verstärker* bezeichnet. Der Anwendungsbereich ist sehr weit und ermöglicht eine Leistungsverstärkung

bis zu 10^{12} pro Stufe bei Eingangssignalen von weniger als 1 pW. Für technische Frequenzen werden Si-Bleche als Transduktorkern verwendet; mit Ferriten kann der Frequenzbereich bis 10 MHz erweitert werden.

Der Magnetkern für Verstärker mit großem Verstärkungsfaktor und kleiner Leistung besteht aus Fe–Ni-Legierungen mit kleiner Koerzitivfeldstärke. Für

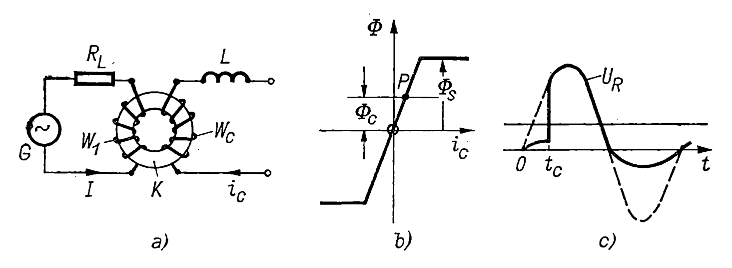


Abb. 15.33 Schema des magnetischen Verstärkers: Schaltung (a), Magnetisierungskurve (b), Spannungsverlauf (c)

größere Leistungen wird vor allem *Permalloy* wegen der hohen Sättigungsinduktion (vgl. *Tabelle 12.10*) und der rechteckigen Magnetisierungskurve (bei Kornorientierung) verwendet. Der magnetische Fluß springt in solchen Kernen zwischen $-B_s$ und $+B_s$ in sehr kurzer Zeit und verursacht kleine Wirbelstromverluste. Meist wird der Kern aus dünnen Bändern von 0,1 mm Stärke ringförmig gewickelt, so daß die Kornorientierung überall die gleiche ist.

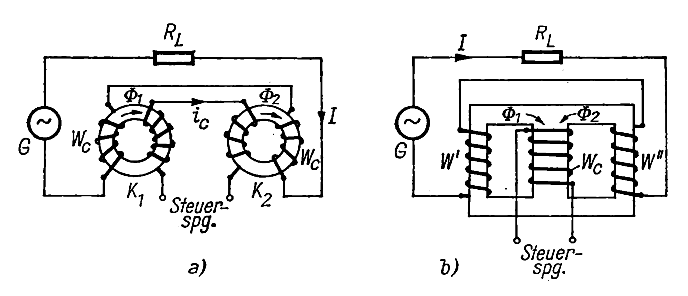


Abb. 15.34 Magnetischer Verstärker mit kompensierter Steuerwicklung

In Abb. 15.33 ist die einfachste Schaltung eines magnetischen Verstärkers dargestellt. Der Toroidkern K enthält die Wicklung W in Reihe mit der Lastimpedanz R_L und der Wechselspannungsquelle G. Die Steuerwicklung W_c wird vom Gleichstromsignal i_c durchflossen und verursacht eine teilweise Sättigung des Kerns. Um den Kurzschluß von W_c durch die Gleichspannungsquelle kleiner Impedanz zu verhindern, ist die Drosselspule L oder ein hochohmiger Widerstand in den Steuerkreis geschaltet. Der Steuerstrom i_c verschiebt den Arbeitspunkt von O nach P (Abb. 15.33b) und bewirkt, daß der Sättigungsfluß Φ_s in einer Halbwelle bereits bei einer Induktion eintritt, die einem Fluß von $\Phi_c - \Phi_s$ entspricht. Für den Rest dieser Halbwelle ist der

Laststrom I nur von R_L bestimmt, so daß die volle Spannung auftritt. In der folgenden Halbwelle wirkt der volle Blindwiderstand des Kerns; die Spannung erreicht an R_L nur einen kleinen Wert (s. Abb. 15.33c).

In keiner der Halbwellen tritt eine Gleichstromkomponente auf. Der Zeitpunkt t_c für das Erreichen von Φ_s während der ersten Halbwelle ist eine Funktion des Steuerstroms i_c; analog kann damit der mittlere Laststrom I gesteuert werden. Eine annähernd rechteckige Magnetisierungskurve ergibt einen äußerst empfindlichen magnetischen Verstärker.

Durch eine symmetrische Anordnung von zwei Magnetkernen K_1 und K_2 in Abb. 15.34a läßt sich die Drosselspule im Steuerkreis vermeiden, da sich die in den Steuerwicklungen W_c von der Grundwelle induzierten Spannungen bei richtiger Polung kompensieren. In Abb. 15.34b ist der häufig verwendete Dreischenkelkern gezeigt, der eine gemeinsame Steuerwicklung W_c und die

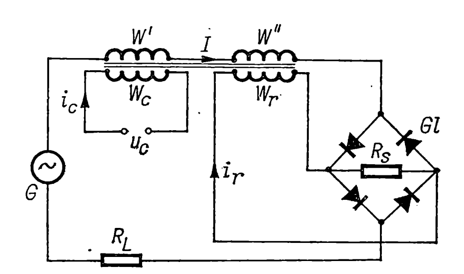


Abb. 15.35 Magnetischer Verstärker mit Rückkopplung

beiden in Serie geschalteten Wicklungen W' und W'' für den Laststrom I enthält.

Wesentlich höhere Verstärkung ist durch *Rückkopplung* eines Teils des Laststroms auf die von der Steuerwicklung erzeugten Flußänderungen möglich. Eine hierfür geeignete Schaltung mit „äußerer" Rückkopplung ist in Abb. 15.35 dargestellt. Die Hauptwicklungen W' und W'' liegen in Reihe mit dem Graetz-Gleichrichter Gl und der Lastimpedanz R_L. Der Gleichrichterausgang wird an die Rückkopplungswicklung W_r angeschlossen, während W_c vom Steuerstrom durchflossen wird. Der Widerstand R_s im Gleichrichter dient zur Stabilisierung, d. h. zur Unterdrückung selbsterregter Schwingungen. Der Lastwiderstand kann auch in den Rückkopplungskreis gelegt werden und wird dann von Gleichstrom durchflossen. Der Verstärkungsfaktor hängt natürlich von der Stärke der Rückkopplung ab; ein stabiles Arbeiten ist nur mit Gleichrichtern möglich, deren Rückstrom temperaturunabhängig ist. Für eine vorgegebene Ausgangsleistung ist ein bestimmtes Volumen des Magnetkerns erforderlich, das vom Material und der Arbeitsfrequenz abhängt. Für eine Leistung von 10 W werden bei 50 Hz 20 cm³ Supermalloy benötigt.

Weitere Einzelheiten und Anwendungen magnetischer Verstärker siehe [*15.5, 15.14, 15.21, 15.26, 15.30, 15.48*]. Über die Umformung von kleinen Eingangsleistungen in Impulsfolgen mittels magnetischer Verstärker siehe [*15.34*].

15.72 *Dielektrische Verstärker* [*15.54, 15.37*]

An die Stelle des Ferromagnetikums mit nichtlinearem Zusammenhang zwischen **B** und **H** im magnetischen Verstärker tritt beim dielektrischen Verstärker ein Dielektrikum, dessen Ladung eine nichtlineare Funktion von der anliegenden Spannung U ist. Diese Eigenschaft weisen die in § 10.7 besprochenen *ferroelektrischen* Stoffe auf. Im Gegensatz zum magnetischen Verstärker mit kleiner Eingangsimpedanz der Steuerwicklung ist beim dielektrischen Verstärker diese für Gleichspannung fast unendlich. Nachteilig ist jedoch die Alterung der Dielektrika und ihre starke Temperaturabhängigkeit.

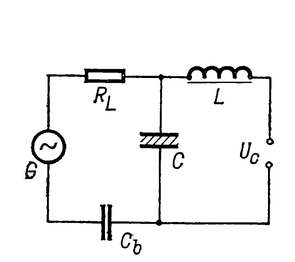


Abb. 15.36 Dielektrischer Verstärker

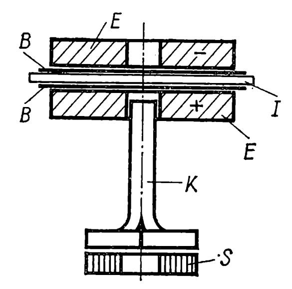


Abb. 15.37 Höchststromschalter

In Abb. 15.36 ist die einfachste Schaltung eines dielektrischen Verstärkers dargestellt. Das nichtlineare Dielektrikum C liegt einerseits in Serie mit der (hochohmigen) Last R_L, der Wechselspannungsquelle G und dem Abblockkondensator C_b. Die Steuerspannung u_c wird dem Dielektrikum über die Drosselspule L zugeführt. Die Wirkungsweise ist analog der des magnetischen Gegenstücks in Abb. 15.33 und hängt von der Steilheit und Breite der elektrischen Hysteresiskurve ab. Man kann diese Anordnung auch in Resonanz betreiben, wobei in den Hauptkreis zusätzlich eine Induktivität geschaltet wird.

15.8 Spezielle Schaltgeräte

Für einige physikalische Anwendungen, besonders in der Plasma- und Hochspannungsphysik, werden Schalter für hohe Ströme, hohe Spannungen und kleiner Induktivität gebraucht, wie sie in der Starkstromtechnik nicht gebräuchlich sind. Im Gegensatz zu den kommerziellen Hochspannungsschaltern muß beim Einschalten eines kurzzeitigen Magnetfelds (s. § 13.62) die Kondensatorbank nur mit der Feldspule verbunden, braucht aber nicht von ihr abgeschaltet zu werden. Das gleiche gilt auch für die Erzeugung starker Stromimpulse bei Experimenten z. B. über den Ladungstransport in elektrischen Leitern.

Ein Konstruktionsbeispiel für einen mechanischen Schalter für Ströme von 100 kA bei 100 kV Kondensatorspannung wird von ROGERS [*15.46*] gegeben und ist schematisch in Abb. 15.37 dargestellt. Ein Kolben K mit breitem Fuß

und zylindrischem Schaft aus Duraluminium wird durch einen kurzen Stromimpuls durch die Flachspule *S* nach oben getrieben. Er durchstößt hierbei die Cu-Bleche *B* und die 1 mm starke Isolationsplatte *I*, die zwischen die durchbohrten Hauptelektroden *E* gepreßt sind, in etwa 30 μs und stellt den Kontakt zwischen den Cu-Blechen bei 3 μΩ Übergangswiderstand her; s. a. [*15.4*, *15.20*]. Über eine ähnliche Konstruktion von ALSTON et al. siehe [*15.1*].

Eine andere Lösung besteht darin, Funkenstrecken mit einer Vorzündelektrode in Luft zu versehen und eine Hochstromentladung zwischen zwei großflächigen Elektroden einzuleiten. Solche „Schalter" sind für 120 kA konstruiert worden und sind für viele tausend Schaltungen brauchbar. Auch Vakuumschalter für 100 kA und Entladungsspannungen von 20 kV und darüber sind erfolgreich in der Plasmatechnik erprobt worden.

Über einen schnellwirkenden *supraleitenden Schalter* für große Leistungen wird von AMEEN und WIEDERHOLD [*15.2*] berichtet.

§ 16 SPEZIELLE STROMQUELLEN

Für eine Reihe von Meßmethoden ist die erreichbare Genauigkeit von der Konstanz der Betriebsspannungsquellen abhängig. Die früher fast ausschließlich benutzten Akkumulatoren, die eine regelmäßige Wartung erfordern, werden heute zum Teil durch stabilisierte Netzgeräte ersetzt, die immer einsatzbereit sind und auch für sehr hohe Ströme zur Verfügung stehen. Daneben werden in diesem Abschnitt Verfahren zur Hochspannungserzeugung besprochen, die in der experimentellen Technik Verbreitung gefunden haben. Die Prinzipien für die Erzeugung hochenergetischer Elementarteilchen sind dem Bd. V vorbehalten. Schließlich werden noch die thermoelektrischen, fotoelektrischen und thermionischen Energiewandler sowie Brennstoffelemente in ihren Grundlagen behandelt, um etwaige Anwendungsmöglichkeiten in speziellen Experimenten beurteilen zu können.

16.1 Galvanische Stromquellen [*16.31, 16.126, 16.23*]

16.11 Allgemeines

Bekanntlich folgt aus dem Ersten Hauptsatz der Thermodynamik die von einem galvanischen Element erzeugte Leerlaufspannung zu

$$E_0 = -\frac{\Delta(U + pV - TS)}{NF} = -\frac{\Delta G}{NF}, \tag{16/1}$$

wenn ΔG die mit der chemischen Reaktion verbundene Änderung der Freien Enthalpie, N die Elektronenzahl im Reaktionsaustausch und $F = 96500$ As die Faraday-Konstante bedeuten. Obige Beziehung gilt für reversible Reaktionen und liefert die *reversible* Spannung E_0. Wird das Element mit der Klemmenspannung E betrieben, so stellt das Verhältnis

$$\varepsilon_E = \frac{E}{E_0} \tag{16/2}$$

den energetischen Wirkungsgrad des Elements dar.

Als *Primärelemente* bezeichnet man Elemente, in denen eine direkte Umsetzung von chemischer Energie in elektrische vor sich geht; die wichtigsten Reaktionen in Primärelementen und die aus den thermodynamischen Daten berechnete Klemmenspannung E_0 sind in *Tabelle 16.1* zusammengestellt.

Die in der letzten Spalte angegebene Energiedichte ist in der Praxis nur teilweise erreichbar.

In *Tabelle 16.2* sind analog die entsprechenden Reaktionen, Spannung und Energiedichte der *Sekundärelemente* oder *Akkumulatoren* zusammengestellt.

Tabelle 16.1 Primärelemente

Elektrochemische Reaktion	E_0 V	max. theoretische Energiedichte Wh/kg
$Zn + 2MnO_2 \rightarrow ZnO + Mn_2O_3$ (Salmiakelektrolyt)	1,25	280
$Zn + 2MnO_2 \rightarrow ZnO + Mn_2O_3$ (alkalischer Elektrolyt)	1,1	252
$Zn + HgO \rightarrow ZnO + Hg$	1,2	229
$Zn + AgO \rightarrow ZnO + Ag$	1,5	424
$Mg + 2MnO_2 \rightarrow MgO + Mn_2O_3$	1,4	392
$6Mg + 8H_2O + C_6H_4(NO_2)_2 \rightarrow 6Mg(OH)_2 + C_6H_4(NH_2)_2$	1,1	807
$Zn + PbO_2 + 2H_2SO_4 \rightarrow ZnSO_4 + PbSO_4 + 2H_2O$	2,2	264
$Mg + 2AgCl \rightarrow MgCl_2 + 2Ag$	1,4	250

Tabelle 16.2 Akkumulatoren

Elektrochemische Reaktion	E_0 V	max. theoretische Energiedichte Wh/kg
Technische Akkumulatoren		
$Pb + PbO_2 + 2H_2SO_4 \rightarrow 2PbSO_4 + 2H_2O$	2,1	167
$Cd + 2NiOOH + 2H_2O \rightarrow Cd(OH)_2 + 2H_2O$	1,35	220
$Fe + 2NiOOH + 2H_2O \rightarrow Fe(OH)_2 + 2Ni(OH)_2$	1,4	272
$Zn + Ag_2O \rightarrow ZnO + Ag$	1,5	260
Hochenergieakkumulatoren (theor.)		
$2Li + Cl_2 \rightarrow 2LiCl$	4,0	2520
$4Na + O_2 \rightarrow 2Na_2O$	2,7	1800
$Na + 3S \rightarrow NaS_3$	3	680
$2Zn + O_2 \rightarrow 2ZnO$ (KOH-Elektrolyt)	1,65	890

Die in die Tabellen aufgenommenen Hochenergiezellen mit großer Energiedichte sind seit langem bekannt, konnten aber bisher auch in kleinem Maßstab nicht realisiert werden.

16.12 Primärelemente

Die *klassische Trockenzelle* mit Zn und MnO_2 (Braunstein) als Elektroden und Salmiakelektrolyt ist in den letzten Jahren technisch weiterentwickelt worden. Durch Zusatz von gut leitendem Graphit zur Depolarisationsmasse, Verwendung hochaktiver Braunsteinsorten und Anwendung der Papierfutterkonstruktion sind höher belastbare Zellen entwickelt worden. Sie haben aber den Nachteil kürzerer Lagerdauer. HUBER [*16.56*] teilt die normale Rundzelle in vier Segmente, die elektrisch parallel belastet werden können, ohne daß die Lagerfähigkeit verringert wird (*Segmenta-Zelle*).

Die Luftsauerstoffzelle mit Manganchloridlösung als Elektrolyt mit plattenförmigen Elektroden und daher hoher Diffusionsrate von O_2 sowie der Ionen aus dem Elektrolyten gewinnt neuerdings an Bedeutung. Im Vergleich zum normalen Trockenelement ist die Spannungskonstanz wesentlich höher und die Entladungszeit auf z. B. 0,75 V die doppelte.

Die alkalische Zn–HgO-Zelle nach Ruben [*16.106*] liefert nach *Tabelle 16.1* eine Spannung von 1,2 V und erreicht eine *praktische* Energiedichte von 120 W/kg. Die alkalischen Zn–MnO_2-Zellen mit einem feinen Zn-Gitter als Katode und einem KOH-Elektrolyten können wirksam gegen den Austritt des Elektrolyten geschützt und einige Male entladen und wieder aufgeladen werden [*16.64*].

16.13 Bleiakkumulator

Die in *Tabelle 16.2* angegebene theoretische Energiedichte wird in praxi nicht annähernd erreicht, da die Wasserzugabe zum Elektrolyten, der Füllfaktor der Platten u. a. zu berücksichtigen sind. Als praktische Grenze werden

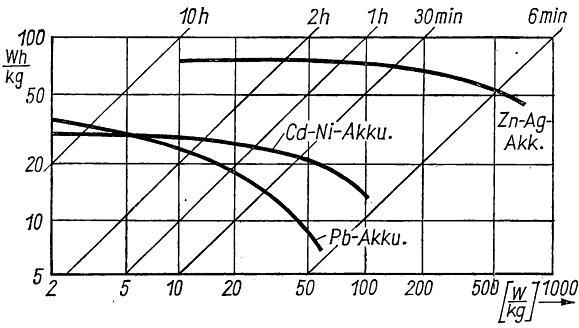


Abb. 16.1 Energiedichte von Akkumulatoren

daher etwa 55 Wh/kg *ohne* Gefäßgewicht erreicht. Mit zunehmender Belastung nimmt die Energiedichte merklich ab (s. Abb. 16.1).

In Abb. 16.2 ist der zeitliche Verlauf der Zellenspannung bei verschiedenen konstanten Entladeströmen dargestellt. Sie sinkt bei fortschreitender Entladung infolge Rückgangs der Säuredichte (von $\varrho = 1{,}21$ auf 1,12) in den Plattenporen und Anstiegs des Innenwiderstandes. Der innere Widerstand beträgt etwa $0{,}1 \cdots 0{,}2\ \Omega$ bei 1 Ah Kapazität und ist dieser umgekehrt proportional. Während der Ladung, die bei 2,1 V pro Zelle beginnt, steigen Spannung und Säuredichte zunächst wenig, etwa ab 2,4 V Zellenspannung jedoch stark an, wobei lebhafte Wasserzersetzung stattfindet (Explosionsgefahr!).

16.14 Alkalische Akkumulatoren

Beim Cd–Ni- bzw. Fe–Ni-Akkumulator besteht die positive aktive Masse aus Ni-Hydroxyd in feiner Pulverform, die negative aktive Masse aus Cd-Pulver bzw. Fe-Pulver, das billiger ist, aber in verschlossenen Zellen nachgast.

Als Elektrolyt wird verdünnte Kalilauge der Dichte 1,20 g/cm³ (20 °C) verwendet. Das Zellengefäß besteht aus vernickeltem Stahlblech.

Die praktisch erreichte Energiedichte liegt bei 40 Wh/kg (s. Abb. 16.1); sie wird vom Zn–Ag-Akkumulator übertroffen, dessen Lebensdauer jedoch kürzer ist und bei 50···100 Zyklen liegt.

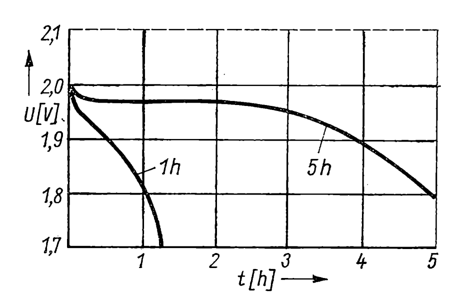


Abb. 16.2 Entladung eines Akkumulators

Für verschiedene Anwendungen kommt der Frage der Gasdichtheit und Wartung große Bedeutung zu. Völlig verschlossen können heute nur Cd–Ni-Akkumulatoren hergestellt werden, die in einem großen Strombereich gegen Überladen und Umpolen geschützt sind. Gasdichte Zn–Ag-Akkumulatoren gibt es für spezielle Anwendungen in der Raumfahrt, doch ist ihr elektrochemischer Mechanismus noch nicht völlig klar.

16.2 Geregelte Spannungsquellen [*16.49*, *16.48*]

In vielen experimentellen Meßverfahren ist die zeitliche Konstanz der Betriebs- und Vergleichsspannungen eine unabdingbare Voraussetzung, wie z. B. für die Elektronenbeugung und -mikroskopie, für den Betrieb von Teilchendetektoren oder hochempfindlichen Verstärkern; bei den meisten elektrischen Messungen erbringt die Spannungsstabilisierung erhöhte Meßgenauigkeit und -empfindlichkeit. Je nach den Anforderungen werden hierzu *Glimmstabilisatoren*, *magnetische Spannungskonstanthalter* und *elektronische Stabilisatoren* verwendet, die unabhängig von der entnommenen Stromstärke eine konstante Spannung liefern.

16.21 Allgemeines

Eine spannungsstabilisierte Stromquelle muß nicht nur eine konstante Spannung erzeugen, sondern einen kleinen Quellenwiderstand besitzen. Zum Vergleich verschiedener Stabilisierungsverfahren läßt sich der *Stabilisierungsfaktor*

$$S = \frac{U_0}{U_s} \frac{\mathrm{d}U_s}{\mathrm{d}U_0} \qquad (16/3)$$

definieren, wenn U_s die Spannung vor dem Stabilisator und U_0 die stabilisierte Spannung ist. Als *Quellenimpedanz* R_0 wird der Ausdruck

$$R_0 = -\frac{\mathrm{d}U_0}{\mathrm{d}I_0} = -\frac{u_0}{i_0} \tag{16/4}$$

bezeichnet, worin I_0 der abgegebene Strom ist. Die für den eigentlichen Stabilisierungskreis wichtigste Eigenschaft stellt der *Glättungsfaktor*

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}U_0}{\mathrm{d}U_1} = \frac{u_0}{u_1} \tag{16/5}$$

dar, wenn mit U_1 die Ausgangsspannung des Gleichrichters einschließlich des Glättungsfilters bezeichnet wird. Die Größe α gibt ein Maß für die Brummspannung am Ausgang des Stabilisators. Die Größen S, R_0 und α sind keine echten Konstanten, sondern hängen vom Strom und von der Gleichrichterspannung ab.

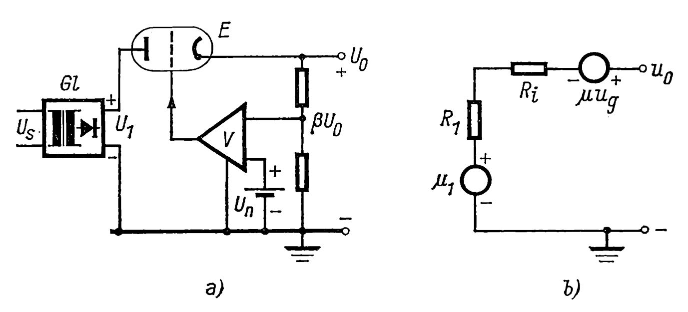


Abb. 16.3 Spannungsstabilisator: Schaltung (a), Ersatzschaltbild (b)

Die Prinzipschaltung der meisten Spannungsstabilisatoren ist in Abb. 16.3a wiedergegeben. Sie enthält die Gleichrichterstufe *Gl* mit Glättungsfilter und in Serienschaltung mit dem Lastwiderstand die Triode *E*. Ein Teil β der Ausgangsspannung U_0 wird mit der Festspannung U_n verglichen, die von einem Glimmstabilisator, einer Zener-Diode (s. § 4.243) oder einer Trockenbatterie geliefert werden kann. Die Differenz $\beta U_0 - U_n$ wird im Differenzverstärker V mit dem Verstärkungsfaktor A verstärkt und dem Gitter der Triode E zugeführt. Auf diese Weise entsteht eine *degenerative* oder ***Rückwärtsregelung***, welche jede Änderung der Ausgangsspannung U_0 kompensiert. In der Schaltung wird nur mit Widerstandskopplung gearbeitet, wodurch der Verstärkungsfaktor reduziert wird. Überbrückt man die Widerstände mit Kondensatoren, so erhält man für Wechselspannungskomponenten (Brumm!) eine stärkere Unterdrückung als für die Gleichspannung.

Das Ersatzschaltbild dieser Schaltung in Abb. 16.3b enthält den Innenwiderstand R_1 der Gleichrichterstufe und der Triode R_i mit der Ersatzspannung $\mu u_g = -\mu u_0(1 + \beta A)$, wenn $\mu = 1/D$ ist (vgl. § 3.8). Man findet daraus für

den Stabilisatorkreis die wichtigen Beziehungen

$$S \approx \frac{U_0}{U_1} \mu \beta A; \tag{16/6}$$

$$R_0 \approx \frac{R_1 + R_i}{\mu \beta A}; \tag{16/7}$$

$$\alpha \approx \frac{1}{\mu \beta A}, \tag{16/8}$$

wenn $\mu \beta A \gg 1$.

In Abb. 16.4 ist die entsprechende Schaltung mit dem Transistor T anstelle der Triode in Abb. 16.3 gezeigt, wobei der Ausgang des Differenzverstärkers V an die Basis von T geführt wird und T als Emitter-Folger (s. § 4.273) geschaltet ist. Durch das in V verstärkte Differenzsignal $\beta U_0 - U_n$ wird der Innenwiderstand von T im richtigen Sinn verändert. Da die Schaltung einen sehr kleinen Innenwiderstand besitzt, müssen Mittel zur Strombegrenzung vorgesehen sein.

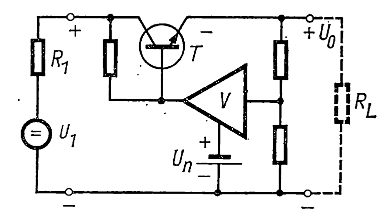


Abb. 16.4 Transistor-Spannungsstabilisator

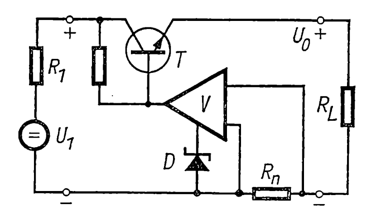


Abb. 16.5 Transistor-Stromstabilisator

Für die *Stromstabilisierung* werden grundsätzlich analoge Schaltungen (Abb. 16.5) angewandt, wobei der Spannungsabfall an einem in Serie zu R_L liegenden Normalwiderstand R_n mit der Referenzspannung U_n verglichen wird. In der Abbildung wird U_n als Spannungsabfall an einer Zener-Diode D geliefert. Im Idealfall besitzt der Stromstabilisator eine unendlich hohe Ausgangsimpedanz.

Durch Kombination der Schaltungen in den Abbn. 16.4 und 16.5 können sowohl die Spannung als auch der Strom innerhalb eines bestimmten Leistungsbereichs stabilisiert werden.

16.22 Glimmstabilisator

Bei Lastströmen bis 100 mA und nicht zu hohen Anforderungen an die Spannungskonstanz ist die Stabilisierung mit Glimmröhren (s. § 4.37) meist ökonomischer als andere Methoden. In Abb. 16.6a ist die U,I-Charakteristik für die Glimmröhre VR150 dargestellt, deren Brennspannung zwischen 148 und 153 V liegt, wenn sich der Glimmstrom zwischen 0 und 40 mA ändert. Das dynamische Verhalten dieser Glimmstrecken entspricht nicht ganz der statischen Kennlinie; vielmehr zeigen sich Hysteresiseffekte und Schwankungen um einige Zehntel Volt. In Abb. 16.6b ist die übliche Schaltung des Glimm-

stabilisators dargestellt, der an der Eingangsspannung U_s liegt und die stabilisierte Spannung U_0 am Lastwiderstand R_L aufrechterhalten soll. Eingangsseitig ist der Widerstand R_v vorgeschaltet, der vom Strom $i_s = i_L + i_g$ durchflossen wird. Änderungen der Betriebsspannung U_s treten an der Glimmstrecke um den Faktor R_i/R_v schwächer auf, wenn der dynamische Innenwiderstand der Glimmröhre $R_i = \Delta U_0/\Delta i_g$ ist. Der günstigste Arbeitsbereich wird durch den kleinsten und größten Querstrom i_g bestimmt; die Eingangsspannung U_s wird zweckmäßig zu $U_s \geqq 1{,}4\, U_0$ gewählt.

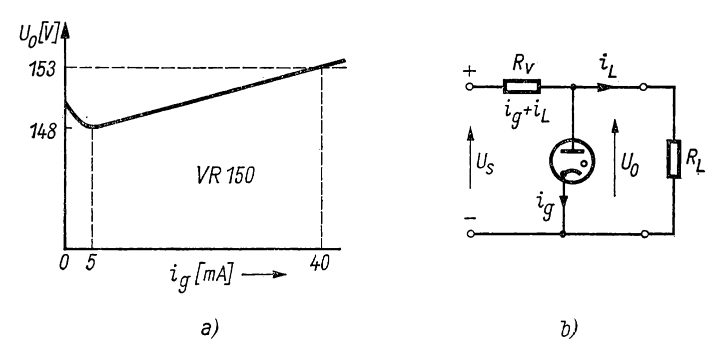


Abb. 16.6 Glimmstabilisator: U,I-Kennlinie (a), Schaltung (b)

Parallelschaltung von Glimmstrecken ist wegen der etwas unterschiedlichen Zünd- und Brennspannungen nicht möglich. Dagegen können mehrere Glimmröhren in Serie geschaltet werden. Auch kann man für höhere Ansprüche zwei Glimmröhren in Kaskadenschaltung verwenden, wobei die zweite Röhre über einen Vorwiderstand R_{v2} am Ausgang der ersten Glimmstrecke liegt.

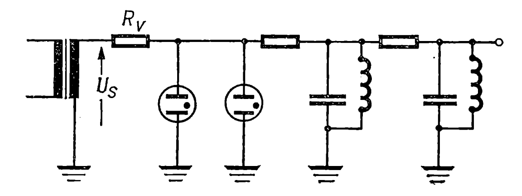


Abb. 16.7 Stabilisierung von Wechselspannung

Nach Higinbotham [*16.55*] betragen bei glimmstreckenstabilisierten Netzgeräten für 1500 und 5000 V die Spannungsschwankungen nur $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ bei einem Temperaturkoeffizienten von 0,002···0,008%/grd. Näheres siehe auch [*16.10, 16.91*].

Auch die Stabilisierung von *Wechselspannungen* ist mit Glimmstrecken möglich. Da die meisten Glimmstabilisatoren aktivierte Elektroden haben und deshalb die Zündspannung von der Polung abhängt, kann man nach Abb. 16.7 zwei Glimmstrecken mit entgegengesetzter Polung über R_v an die Eingangs-

spannung U_s legen und den meist starken Oberwellenanteil durch Tiefpaß- oder Resonanzfilter beseitigen. Die Glimmstrecken zünden abwechselnd und begrenzen die beiden Halbwellen. Die Speisespannung muß die 5- bis 10fache Zündspannung der Röhren betragen (s. a. [*16.83*]).

16.23 Magnetische Spannungskonstanthalter [*16.58, 16.57, 16.38, 16.36*]

Diese Geräte dienen zur Vorstabilisierung der Netzspannung und beruhen auf dem kleinen dynamischen Widerstand gesättigter Eisendrosseln (s. § 15.71). Mit einer solchen Eisenspule lassen sich in Verbindung mit ohmschen, kapazitiven und induktiven Widerständen Stabilisierungsschaltungen für schwankende Wechselspannungen aufbauen.

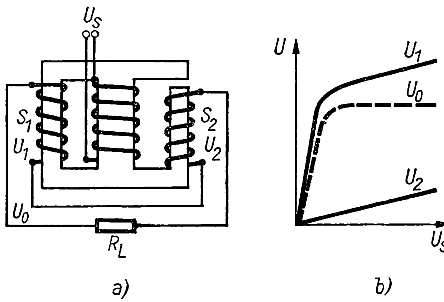


Abb. 16.8 Magnetischer Spannungsstabilisator: Schaltung (a), Kennlinien (b)

Abb. 16.9 Magnetischer Spannungskonstanthalter

In Abb. 16.8 ist ein magnetischer Konstanthalter mit dreischenkligem Transformatorkern dargestellt. Die auf dem mittleren Schenkel befindliche Spule liegt an der zu stabilisierenden Spannung U_s, während die Sekundärwicklung S_1 auf dem linken, stark gesättigten Schenkel die Spannung U_1 erzeugt. Der rechte Schenkel besitzt einen weiten Luftspalt und ist schwach gesättigt. Die in S_1 und S_2 induzierten Spannungen werden über den Lastwiderstand gegeneinandergeschaltet. Aus Abb. 16.8b ist zu ersehen, daß innerhalb eines bestimmten Spannungsbereichs die resultierende Spannung $U_0 = U_1 - U_2$ konstant und unabhängig von der Netzspannung U_s ist.

Die gebräuchlichste Ausführung ist in Abb. 16.9 gezeigt; sie besteht aus zwei Transformatoren T_1 und T_2. Der Trafo T_1 mit einer Kapazität C in der Primärwicklung ist stark gesättigt, während T_2, dessen Primärwicklung vom gleichen Strom wie T_1 durchflossen wird, mit Luftspalt versehen und schwach gesättigt ist. Die Ausgangsspannung U_0 stellt wieder die Differenz der beiden Sekundärspannungen dar. Bei sorgfältiger Bemessung läßt sich ein Stabilisierungsfaktor S von 100···500 erzielen, wobei S entsprechend Gl. (16/3) dem Verhältnis $\mathrm{d}U_s/U_s : \mathrm{d}U_0/U_0$ gleichzusetzen ist.

Magnetische Konstanthalter liefern infolge der starken Sättigung eine verzerrte Sinusspannung und sind auch von Frequenzänderungen abhängig.

16.24 *Anwendung spannungsabhängiger Widerstände*

Für nicht zu hohe Stabilitätsansprüche und kleinere zeitliche Spannungs- oder Belastungsänderungen werden die in § 9.362 behandelten *Heißleiter* (NTC-Widerstände, negative temperature coefficient) in Serienschaltung mit einem temperaturunabhängigen Widerstand R_1 verwendet. Bezeichnet man den Heißleiterwiderstand mit $R_2(i)$, so liefert die Serienschaltung von R_1 und R_2

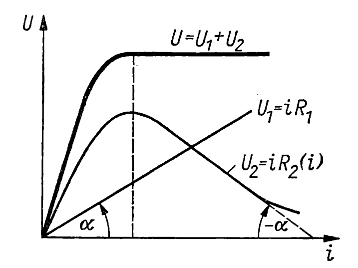


Abb. 16.10 Spannungsstabilisierung mit Heißleiter

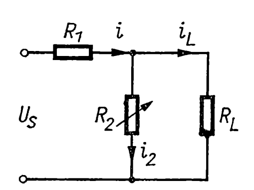


Abb. 16.11 Spannungsstabilisierung mit VDR-Widerstand

eine Gesamtspannung $U = U_1 + U_2 = i[R_1 + R_2(i)]$. Bei Benutzung eines Heißleiters mit einer U, I-Kennlinie nach Abb. 9.20 entsteht nach Abb. 16.10 ein ziemlich weiter Bereich, in dem die Gesamtspannung U konstant bleibt. Der Vorwiderstand R_1 muß so groß gewählt werden, daß die Neigung $\tan \alpha$ der Spannungsgeraden der Größe nach im abfallenden Teil von U_2 die gleiche ist.

Auch die in § 9.363 besprochenen spannungsabhängigen Widerstände-*Varistoren* oder VDR-Widerstände (voltage dependent resistor), deren U,I-Kennlinie durch Gl. (9/59) beschrieben werden kann, sind zur Konstanthaltung der Spannung bei veränderlicher Belastung geeignet. Man benutzt hierzu die in Abb. 16.11 gezeigte Schaltung, in der der Varistor R_2 parallel zum Lastwiderstand R_L liegt und der Vorwiderstand R_1 vom Gesamtstrom durchflossen wird. Innerhalb eines bestimmten Strombereichs bleibt die an R_2 liegende Spannung annähernd konstant.

16.25 *Konstanthaltung mit Zener-Dioden*

Für kleinere Spannungen zur Versorgung von selbstabgleichenden Kompensatoren (s. § 2.342) und Nullpunktsunterdrückung bei Thermokraftmessung u. a. werden vielfach *Zener-Dioden* benutzt, deren Eigenschaften in § 4.243 besprochen wurden. In der Sperrichtung setzt ziemlich scharf bei einer bestimmten, von geometrischen Abmessungen und dem Halbleitermaterial abhängigen Spannung U_z ein Strom ein, der um eine Größenordnung kleiner als der in Durchlaßrichtung ist (vgl. Abb. 4.24). Der dynamische Widerstand $R_d = \Delta U_z/\Delta i_z$ in diesem Bereich ist relativ klein und von der Größe 10 Ω. Die Zener-Spannung U_z kann zwischen einigen Volt und mehreren Kilovolt liegen, doch werden zur Spannungskonstanthaltung Dioden mit $U_z = 3$ bis 30 V bevorzugt. In Abb. 16.12 ist ein Beispiel eines Stabilisators dargestellt,

der aus dem Wechselstromnetz über den Transformator T mit nachgeschaltetem Gleichrichter Gl gespeist wird. Die gleichgerichtete Spannung U_s liegt an der Reihenschaltung vom Vorwiderstand R_v und der Zener-Diode Z, die vom Strom i_z durchflossen wird. Parallel zu Z liegt der vom Strom i_L durchflossene Lastwiderstand R_L. Mit $R_L \gg R_d$ ergibt sich der Stabilisierungsfaktor zu

$$S \approx \frac{U_z}{U_s}\left(1 + \frac{R_v}{R_d}\right) = \frac{U_z}{U_s}\left[1 + \frac{U_s - U_z}{R_d(i_L + i_z)}\right]. \qquad (16/9)$$

Mit $R_v \to \infty$ und $U_s \to \infty$ erreicht S seinen Maximalwert

$$S_{\max} = \frac{U_z}{R_d(i_L + i_z)}. \qquad (16/9\text{a})$$

In praxi läßt sich mit $U_z = 6$ V und Strömen von einigen Milliampere ein Stabilisierungsfaktor von 100 erzielen. Näheres siehe [*16.27*, *16.94*].

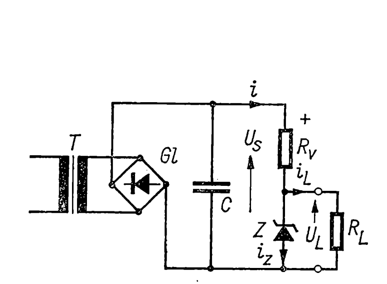


Abb. 16.12 Spannungskonstanthalter mit Zener-Diode

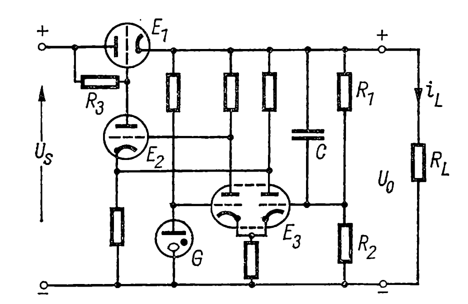


Abb. 16.13 Röhren-Spannungsstabilisator

16.26 Elektronisch stabilisierte Gleichspannungsquellen [*16.77*, *16.67*]

Den weitesten Anwendungsbereich haben die elektronisch geregelten Konstantspannungsquellen, deren Prinzip in § 16.21 erläutert ist. Als Beispiel eines Gerätes mit Elektronenröhren wird in Abb. 16.13 ein Stabilisator mit Gleichspannungsrückkopplung dargestellt. Nach dem Prinzipschaltbild stellt die Röhre E_1 die Steuereinheit für den Laststrom i_L dar. Die Doppelröhre E_3 bildet einen empfindlichen Differenzverstärker, ihre Eingangsspannungen werden einmal von der Vergleichsspannung des Glimmstabilisators G, andererseits vom Spannungsteiler $R_1 R_2$ an der Ausgangsspannung U_0 geliefert. Die zusätzliche Röhre E_2 wird von der Differenzspannung der Anodenpotentiale der Röhre E_3 gesteuert, um die Drift im Regelkreis zu eliminieren. Mit gewöhnlichen Empfängerröhren läßt sich ein Stabilisierungsfaktor von 1000 erzielen, wobei der Innenwiderstand R_0 nach Gl. (16/4) von der Größe 1 Ω wird.

Weitere Ausführungen siehe [*16.4*, *16.44*], mit gittergesteuerten Gleichrichtern siehe [*16.73*].

Bei den meisten kommerziellen Stabilisatoren sind heute die Elektronenröhren durch die höher belastbaren *Transistoren* ersetzt und Schaltungen nach

dem Prinzip der Abb. 16.4 angewandt [*16.89*]. Zur Berechnung des Innenwiderstands R_0 und des Stabilisierungsfaktors S wird zweckmäßig der Ersatz-T-Kreis (vgl. Abb. 4.45 in § 4.274) des Transistors benutzt. Als Beispiel wird in Abb. 16.14 ein stabilisiertes Netzgerät für 50 V gezeigt. Die über Netztransformator $\ddot{U}$ und Graetz-Gleichrichter Gl gelieferte und durch die Kapazität C_1 (300 μF)

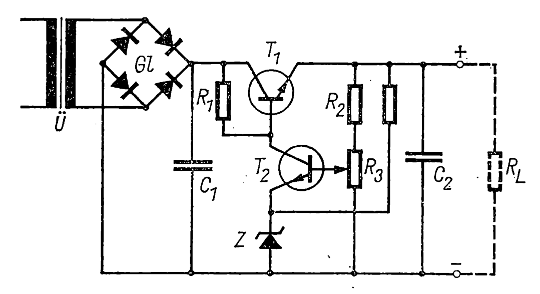


Abb. 16.14 Stabilisierte Spannungsquelle

geglättete Spannung wird über den Leistungstransistor T_1 (2N2197) an die Last R_L gelegt. Zur Steuerung dient der Transistor T_2, dessen Kollektorstrom von der Differenzspannung zwischen der konstanten Spannung der Zener-Diode Z und dem Abgriff am Potentiometer R_3 abhängt. Bei einer Nennspannung von 50 V fällt die Spannung bei 300 mA um 0,6 V ab; bei diesem Strom beträgt die Brummspannung 0,24 V.

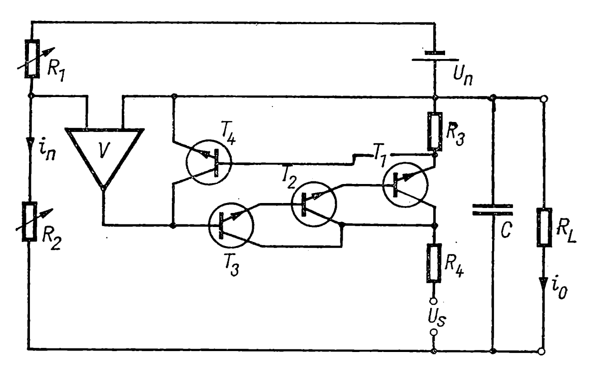


Abb. 16.15 Spannungsgeregeltes Stromversorgungsgerät mit Strombegrenzung

In Abb. 16.15 ist die vereinfachte Schaltung eines spannungsstabilisierten Stromversorgungsgerätes mit Strombegrenzung dargestellt. Der Differentialverstärker V regelt die Ausgangsspannung U_0 auf den Spannungsabfall am Widerstand R_2. Da die Eingangsimpedanz von V sehr hoch ist, fließt der von der Vergleichsspannungsquelle U_n erzeugte Strom durch den Spannungsteiler $R_1 R_2$, so daß gilt:

$$\frac{U_n}{U_0} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Bei konstanter Vergleichsspannung fließt der Strom i_n durch R_1 und R_2, und die Ausgangsspannung wird $U_0 = i_0 R_2$. Der Ausgang der durch die Transistoren T_2 und T_3 dargestellten Treiberstufen steuert den Regeltransistor T_1, durch den der Strom i_0 fließt. Der Transistor T_4 und der Widerstand R_3 dienen zur Strombegrenzung: übersteigt i_0 den Maximalwert $i_{0\max}$, so steuert der Spannungsabfall an R_3 über T_4 den Ausgangsstrom des Differentialverstärkers V so, daß der Strom i_0 zusammenbricht. Die gleichgerichtete Eingangsspannung U_s wird über R_4 an den Regeltransistor T_1 gelegt.

16.27 Stabilisierte Hochspannungsquellen

Für die Speisung von Katodenstrahlgeräten, Strahlungsdetektoren oder Klystrons werden höhere Spannungen im kV-Bereich bei geringem Strom von nur wenigen Milliampere gebraucht. Hierbei können analoge Schaltungen wie die in Abb. 16.13 benutzt werden, wobei als Steuerröhre ein entsprechend spannungsfester Typ auszuwählen ist. Bei Spannungen oberhalb von 1 kV treten an den Transformatoren und anderen Schaltelementen Glimmentladungen auf, die in den angeschlossenen Meßkreisen Störsignale verursachen.

Die andere Möglichkeit besteht in der Verwendung eines Gleichspannungskonverters (s. § 15.6) im HF-Bereich, dessen Ausgangsspannung mit Hochspannungsgleichrichterröhren oder -dioden erzeugt wird. Die Stabilisierung wird bei hohen Spannungen bereits beim HF-Oszillator vorgenommen [*16.8*].

Von Lewis et al. [*16.81*] wird die Hochspannungsversorgung für ein Experimentier-Elektronenmikroskop für maximal 30 kV beschrieben, die in Schritten

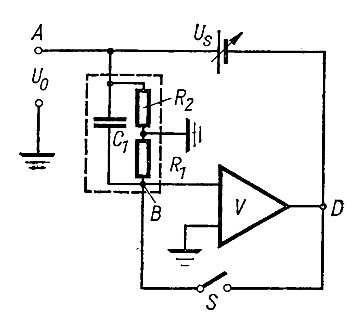


Abb. 16.16 Hochspannungskonstantquelle

von etwa 0,6 V eingestellt werden kann. Der Restbrumm beträgt nur 50 mV und die Instabilität $4 \cdot 10^{-6}$/h. Die Schaltung wird mit 40 kV gespeist und benutzt eine Hochspannungstriode zur Konstanthaltung. Als Vergleichsspannung wird wieder eine Zener-Diode verwendet, deren Zündspannung mit dem entsprechenden Spannungsabgriff eines Präzisionsspannungsteilers verglichen wird. Zur Erhöhung der Genauigkeit kann man nach Spiers und Symons [*16.114*] zehn in Reihe geschaltete Zener-Dioden verwenden, die eine Konstanz von 10^{-5} gewährleisten.

Von BOOKSHIER [*16.17*] wird zur Hochspannungsstabilisierung ein neues Prinzip benutzt, das in Abb. 16.16 angedeutet ist. Der gestrichelt umrandete Teil der Schaltung stellt einen abgeschirmten Vakuumkondensator C_1 dar, dessen Restwiderstände mit R_1 und R_2 bezeichnet sind. Legt man C_1 an den Eingang eines hochempfindlichen Verstärkers V, dessen Eingangsstrom z. B. 0,1 fA beträgt, so beträgt der Spannungsabfall des geladenen Kondensators nur $0{,}36 \cdot 10^{-6}$/h für $C_1 = 1$ nF. Durch Schließen des Schalters S werden die Punkte B und D auf ein virtuelles Erdpotential und C_1 auf die Spannung U_s der auszuregelnden Spannungsquelle gebracht. Wird S geöffnet und U_s um ΔU_s geändert, so tritt zwischen A und B ein Störsignal ΔU_0 und an D die Korrekturspannung $A \cdot \Delta U_0$ auf, wenn A der Verstärkungsfaktor des Operationsverstärkers V ist. Es gilt dann die Beziehung

$$\frac{\Delta U_0}{\Delta U_s} = \frac{1}{1 - A}. \qquad (16/10)$$

Der Vorteil dieser Methode besteht darin, daß der Verstärker an Erdpotential liegen kann und nur relativ kleine Spannungen zu liefern hat. Ist $U_s = 10$ kV $\pm$ 0,1%, so hat der Verstärker nur eine Spannung von $\pm$10 V aufzubringen. Es läßt sich eine Stabilität von 10^{-6} über 12 h bei 10 kV Betriebsspannung erzielen.

Weitere Stabilisierungsschaltungen für Spannungen um 1 kV siehe [*16.82, 16.54, 16.86*], für 5···20 kV [*16.74*] und für eine Beschleunigungsspannung von 200 kV [*16.26*]. Für geringere Konstanzansprüche kann auch eine motorische Nachlaufregelung benutzt werden [*16.90, 16.122*].

Wechselspannungen können nach § 16.22 mit Glimmstrecken [*16.47, 16.109*] oder mit Thyristoren stabilisiert werden, die im gezündeten Zustand einen kleinen Innenwiderstand haben.

Über eine Spannungsquelle mit zeitlich linear veränderlicher Spannung siehe [*16.80*]. Die Spannungsmodulation für den Betrieb eines Klystrons in einem weiten Frequenzbereich wird in [*16.104*] beschrieben.

16.3 Stabilisierte Stromquellen

Stabilisierte Gleichstromquellen dienen zum Betrieb konstanter Magnetfelder in Elektronenmikroskopen, Massenspektrografen, Kern- und Elektronenresonanzspektrografen und anderen Anwendungen, in denen die Grenzauflösung oder Linienbreite von der zeitlichen Konstanz des Feldes abhängt. Im Gegensatz zu den Spannungskonstanthaltern soll ihr Innenwiderstand möglichst hoch sein, damit sich Änderungen des Lastwiderstandes nicht auf den Laststrom auswirken.

16.31 Stromabhängige Widerstände

Für geringe Regelansprüche werden für Gleich- und Wechselstrom stromabhängige Widerstände, sogenannte *Kaltleiter* benutzt (s. § 9.36), deren Widerstand stark von der Temperatur bzw. vom Strom abhängt. Es werden hierzu

häufig *Eisen–Wasserstoff-Widerstände* [*16.60*] verwendet, die eine dünne Eisendrahtwendel in einem mit H_2 von bestimmtem Druck gefüllten Glaskölbchen besitzen. Die bei einem vorgegebenen Strom herrschende Drahttemperatur hängt von der Wärmeableitung durch die H_2-Atmosphäre und die Zuleitungen sowie von der Wärmeabstrahlung ab. Diese Widerstände werden in Serie mit dem Lastwiderstand geschaltet und liefern eine Stromkonstanz von 1···2%.

16.32 Stabilisierter Gleichstromgenerator

Für größere Leistungen, z. B. für die Erregung großer Elektromagneten, lassen sich die in § 15.27 besprochenen *Maschinenverstärker* anwenden. Hierbei wird in Serie mit dem Verbraucher ein bekannter Widerstand geschaltet und der an ihm verursachte Spannungsabfall mit der „Sollspannung" einer Normalspannungsquelle verglichen. Die Spannungsdifferenz nach Verstärkung wird benutzt, um den Regulierwiderstand R in Abb. 15.21 im richtigen Sinn zu verstellen. Weitere Methoden siehe [*16.45*]; von SMITH et al. [*16.111*] wird ein 10-kA-Stromregler eines 7,5-kW-Magnets beschrieben. Die Stabilisierung der 50-kW-Magneten eines Elektronenbeschleunigers nach [*13.30*] besteht aus einem Motorgenerator mit nachgeschaltetem Transistorfilter und einem empfindlichen Regelverstärker; es wird eine Stromstabilität von $2 \cdot 10^{-5}$ erzielt. Das gleiche Stabilisierungsprinzip wird von SOMMERS et al. [*16.112*] für einen 40-kW-Magnet angewandt, wobei die Stromschwankungen auf 10^{-6} reduziert werden konnten.

16.33 Elektronische Stromstabilisierung

Für Ströme bis zu 100 A ist eine direkte, von einem Transistor geregelte Stromstabilisierung möglich, wobei die Prinzipschaltung der Abb. 16.5 anzuwenden ist. In Abb. 16.17 ist ein einfacher Röhrenregler dargestellt, der vom

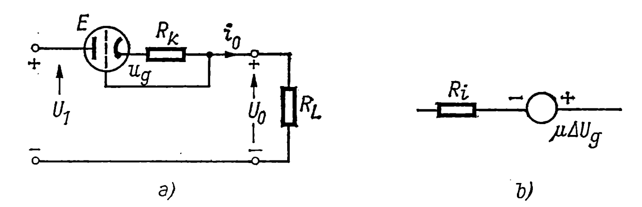


Abb. 16.17 Stromstabilisator mit Triode: Schaltung (a), Ersatzschaltbild (b)

„Sollstrom" i_0 durchflossen wird und am Lastwiderstand R_L die Spannung U_0 erzeugt. In dieser Schaltung wird keine Vergleichsspannung eingeführt, doch wirkt die Röhre E als Regler, wenn der Spannungsabfall an R_k und die zum Anodenstrom i_0 gehörige Gittervorspannung sich unterscheiden. Liegt z. B. i_0 oberhalb des Sollwerts, so verschiebt der Spannungsabfall $i_0 R_k$ den Arbeitspunkt zu einem kleineren Anodenstrom.

Ist U_1 die Eingangsspannung und definiert man als

Stabilisierungsleitwert $\quad G_s = \left(\frac{\Delta i_0}{\Delta U_i}\right)_{\Delta U_0 = 0}$

und als *Ausgangsleitwert* $\quad G_0 = -\left(\frac{\Delta i_0}{\Delta U_0}\right)_{\Delta U_1 = 0}$,

so gilt für die obige Schaltung die Beziehung:

$$G_s = G_0 \frac{1}{R_i + R_k(1 + \mu)}. \tag{16/11}$$

Man sieht daraus, daß dieser Regler für veränderliche Werte von U_1 und R_L keine vollkommene Stabilisierung liefern kann. Durch großen Innenwiderstand R_i (Pentode!) und großes μ können G_s und G_0 sehr klein gemacht werden.

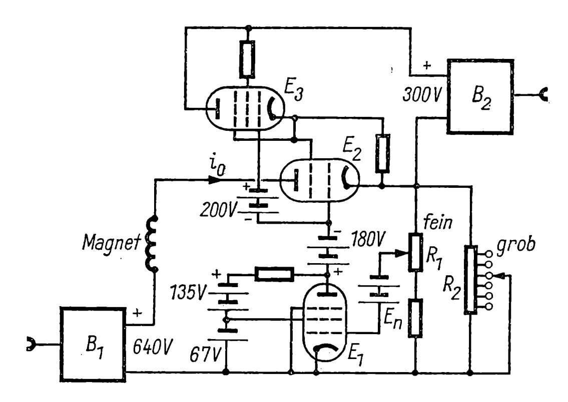


Abb. 16.18 Röhrenstabilisator für konstanten Magnetstrom

Als Beispiel ist in Abb. 16.18 ein Stromstabilisator des Elektromagneten eines Massenspektrografen dargestellt, der mit Vakuumröhren arbeitet und etwa 120 W Leistung benötigt. Es wird dabei der Spannungsabfall an der Widerstandskombination R_1, R_2, die vom Magnetstrom i_0 durchflossen wird, mit der Festspannungsquelle E_n verglichen. Die Röhre E_1 dient als Differenzverstärker, deren Ausgang über eine Batterie an das Gitter der Röhre E_2 gelegt wird. Das Schirmgitter von E_2 wird von der Katodenfolgerstufe der Röhre E_3 versorgt. Zur Stromversorgung dienen die Netzgeräte B_1 für den Magnetkreis und B_2 für den Katodenfolger.

Weitere Ausführungsbeispiele von Röhrenstabilisatoren siehe [*16.124*, *16.61*]. Über ein Netzanschlußgerät für konstante Stromversorgung von Elektronenlinsen siehe [*16.70*].

Die vereinfachte Schaltung eines Transistor-Stromstabilisators für einen Elektromagneten ist in Abb. 16.19 wiedergegeben. Die Zweiweggleichrichterschaltung Gl_1 dient zur Bereitstellung des maximalen Magnetstroms von 3 A,

der von zwei parallel geschalteten Leistungstransistoren T_1 (OC16) mit den Treiberstufen $T_2 \div T_4$ geregelt wird. Der Basisstrom von T_1 wird von dem stabilisierten Gleichrichter Gl_2 geliefert. Der Transistor T_5 dient als Differenzverstärker für die an der Zener-Diode Z abfallende Spannung und den Spannungsabfall an der Widerstandskombination R_1, R_2, die in 15 Grobstufen und einer Feineinstellung den Magnetstrom in einem großen Bereich zu ändern gestattet. Die Relativänderung des Stromes beträgt bei Änderung der Netzspannung um 10% $5 \cdot 10^{-5}$ und bei einer 20%igen Laständerung $5 \cdot 10^{-4}$ bei 1 A bzw. $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ bei 3 A.

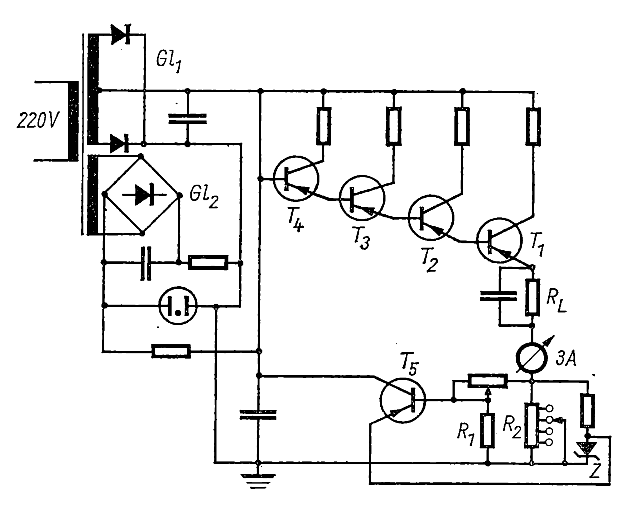


Abb. 16.19 Transistor-Stabilisatorschaltung für einen Elektromagneten

Über die Stabilisierung von Stromquellen für Elektromagnete siehe [*16.99*], Heizer von Massenspektrometern [*16.1*] und weitere stromstarke Verbraucher siehe [*16.100, 16.115, 16.107*]. Von großem Nutzen sind auch stabilisierte Stromquellen für sehr kleine Ströme im Bereich 1 μA bis 1 pA für die Temperaturmessung mit Halbleiterwiderständen (s. Bd. II, § 3.3) bei sehr tiefen Temperaturen, wo die in den Meßfühlern verbrauchte Heizleistung 0,1 nW nicht übersteigen darf. Geeignete Konstantstromquellen lassen sich mit elektronischen Mitteln [*16.25, 16.16*] realisieren.

16.34 Konstantstromquelle für Eichzwecke

Für spezielle Anwendungen kann auch ein Elektronengerät, das im Sättigungsgebiet arbeitet, als Konstantstromquelle verwendet werden. Glühkatoden sind wegen der großen Temperaturabhängigkeit hierzu nicht geeignet, wohl aber Fotokatoden und vor allem radioaktive α- oder β-Strahler mit langer Halbwertszeit. SANTORO et al. [*16.108*] verwenden eine mit sehr reinem Argongas gefüllte Ionisationskammer mit kreisförmigen Elektroden im Abstand von 1 cm, wobei eine Elektrode einen elektrolytischen Niederschlag

von ^{241}Am hat. Durch die 5,5 MeV-α-Strahlen wird ein Ionisationsstrom erzeugt, der je nach Zellenkonstruktion 5···100 pA unabhängig von der angelegten Spannung beträgt und sich wegen der Halbwertszeit von 458 Jahren jährlich nur um 0,15% verringert. Solche Stromquellen werden zur Eichung hochempfindlicher Elektrometer benutzt.

16.35 Spezielle Konstantstromquellen

Für bestimmte Untersuchungen wird eine vorgegebene zeitliche oder anderweitig abhängige Stromänderung verlangt, die von der anliegenden Spannung oder dem Lastwiderstand unabhängig ist. Dies ist z. B. für Messungen an Josephson-Tunneldioden (s. § 11.66) der Fall, deren U,I-Kennlinie eine große Anzahl von Maxima aufweist. Leslie et al. [*16.79*] geben eine geeignete Transistorschaltung für diese Anwendung an, die einen zeitlinearen Stromanstieg liefert und durch eine Rückkopplung die Änderungsgeschwindigkeit automatisch herabsetzt, wenn ein Strommaximum überstrichen wird.

16.4 Hochspannungserzeuger [*16.14, 16.75, 16.116, 16.103*]

16.41 Hochspannungstransformator mit Gleichrichter

Mäßig hohe Gleichspannungen bis zu etwa 100 kV werden nach dem Schema der Einweggleichrichtung in Abb. 5.2 oder auch in der Spannungsverdopplerschaltung nach Abb. 5.15 erzeugt.

Der *Hochspannungstransformator* (vgl. § 15.4) zeichnet sich durch ein großes Übersetzungsverhältnis N_2/N_1 und große Streuung aus, da die Isolation große Abstände zwischen Primär- und Sekundärwicklungen erfordert. Als Gleichrichter kommen für hohe Spannungen *Hochvakuumventile* (vgl. § 4.13) in Betracht, neuerdings auch *Si-Gleichrichter* in Serienschaltung, die den Vorteil der fehlenden Katodenheizung aufweisen. Für die Glättungskondensatoren werden Hochspannungstypen mit Glimmer-, Preßgas- oder Glasisolierung verwendet. Verbreitung haben diese Gleichrichter in Röntgenanlagen gefunden.

16.42 Kaskadengenerator

Für sehr viel höhere Spannungen bis zu 2 MV wird die in Abb. 5.17 dargestellte *Kaskadenschaltung* benutzt, die von Greinacher 1920 angegeben, später unabhängig davon von Cockcroft und Walton sowie von Bouwers ausgeführt wurde. Die in einem Kaskadenvervielfacher mit z Stufen und identischen Serienkapazitäten C erzeugte mittlere Gleichspannung beträgt nach § 5.16

$$\overline{U} = zE_m - \frac{zI}{48fC}(4z^2 + 9z + 2), \tag{16/12}$$

wenn mit E_m die Transformatorspannung, mit I der mittlere Laststrom und mit f die Frequenz bezeichnet wird. Diese Beziehung gilt für ideale Dioden

und vernachlässigbare Impedanz der Transformatorwicklung. Die entsprechende *Brummspannung* erhält man aus

$$U_w = \frac{Iz(z+2)}{16fC}; \qquad (16/13)$$

sie nimmt mit wachsender Frequenz f ab.

Als *Ventile* kommen Hochspannungsgleichrichterröhren in Betracht, die sich auf hohem Potential gegen Erde befinden. Zur Erzeugung der Heizleistung (von 10 W je Ventil) können isoliert aufgestellte Akkumulatoren oder kleine von einer gemeinsamen Isolierwelle angetriebene selbsterregte Dynamomaschinen angewandt werden. Für eine größere Anzahl von Ventilen

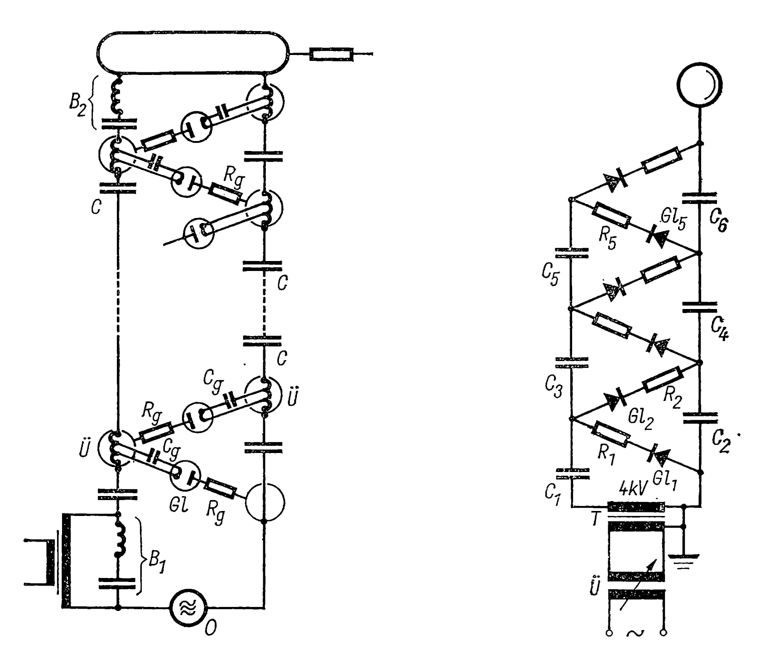


Abb. 16.20 Kaskadengenerator mit HF-Heizung der Ventile *Abb. 16.21 Kaskadengenerator mit Si-Dioden*

ist die im Prinzip in Abb. 16.20 dargestellte HF-Heizung der Ventile vorzuziehen. Der HF-Oszillator O von 250 W Leistung und 500 kHz liegt an der linken Kondensatorkette über ein LC-Glied B_1, an der rechten Kette direkt und ist an der Hochspannungselektrode über ein zweites LC-Glied B_2 geschlossen. An jedem Schaltungsknoten ist ein HF-Autotransformator $Ü$ eingeschaltet, der die Heizleistung für jedes Ventil Gl erzeugt und den Heizstrom über den Serienkondensator C_g an die Katoden liefert. Die Dämpfungswiderstände R_g in Serie mit den Ventilen sorgen dafür, daß die HF-Spannung zwischen den Kondensatorreihen nicht kurzgeschlossen wird. Einzelheiten siehe [*16.96, 16.84*].

Für weniger hohe Spannungen kann man nach BROADBENT [*16.15*], wie in Abb. 16.21 angedeutet ist, die Hochvakuumventile durch Si-Gleichrichter *Gl* ersetzen. Dabei besteht jede Gleichrichterstrecke aus 14 Einzel-Si-Dioden (Lucas DD 058) und einem Widerstand *R* von 22 kΩ; die Kondensatoren *C* besitzen eine Kapazität von 1000 pF. Die Ausgangsspannung des Hochspannungstransformators *T* beträgt 4 kV; primärseitig wird *T* über den Regeltransformator *Ü* betrieben. Der Hochspannungsgenerator liefert 35 kV von beliebiger Polarität. Weitere Ausführungen siehe [*16.34*].

16.43 HF-Kaskadengenerator

Das Prinzip der Hochspannungskaskade läßt sich mit Vorteil im HF-Bereich anwenden, in dem die Eingangsspannung durch relativ kleine Transformatoren geliefert wird und die Welligkeit bereits mit Kondensatoren kleiner Kapazität unterdrückt werden kann. Das Schema einer solchen Anlage ist in Abb. 16.22 wiedergegeben. Der zwischen 40 und 120 kHz arbeitende HF-Generator *O* wird vom stabilisierten Netzgerät *A* betrieben und speist

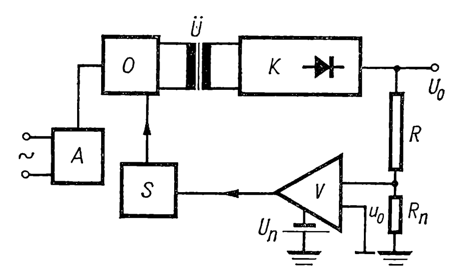


Abb. 16.22 Schema einer HF-Hochspannungskaskade

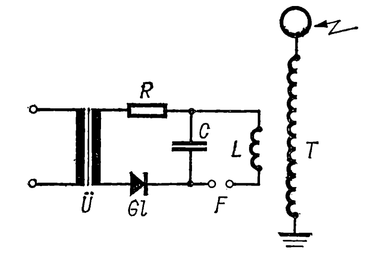


Abb. 16.23 Tesla-Transformator

über einen Hochspannungs-HF-Übertrager *Ü* die Gleichrichterkaskade *K*, die mit Si-Dioden ausgerüstet ist. Die Arbeitsspannung liegt am Hochohmwiderstand *R* und dem erdseitigen Serienwiderstand R_n, dessen Spannungsabfall u_0 der Hochspannung U_0 proportional ist. Im Regelverstärker *V* wird u_0 mit der Normalspannung U_n verglichen und die Ausgangsspannung über das Stellglied *S* zur Regelung des Oszillators *O* benutzt. Solche Hochspannungsgeneratoren werden für Spannungen bis 300 kV und Ströme bis zu 1 mA gebaut, sind auf 10^{-4} genau und besitzen eine Welligkeit von maximal 10^{-5} der Endspannung. Diese Form von Hochspannungsquellen ist weit verbreitet bei Zählschaltungen, in der Elektronenmikroskopie und in der Plasmaphysik. Näheres siehe [*16.102, 16.97, 16.29*].

16.44 Tesla-Transformator [*16.46*]

Aus Gl. 15.35 geht hervor, daß bei gleichem Induktionsfluß und gleicher Sekundärwindungszahl N_2 bei hohen Betriebsfrequenzen hohe Spannungen U_2 induziert werden. Dieser Weg wird für relativ kleine Leistungen und Spannungen bis zu 100 kV verfolgt, wobei die Spulen in Isolierharz eingegossen werden, um große Spannungsfestigkeit zu erzielen [*16.88*].

Als *Tesla*-Transformator wird ein HF-Übertrager hoher Sekundärspannung bezeichnet (s. Abb. 16.23), der über die Primärspule L induktiv angeregt wird. Kapazität C und Primärwicklung L bilden einen über die Funkenstrecke F sich entladenden Schwingungskreis, der vom Transformator $\ddot{U}$ und dem Gleichrichter Gl mit hoher Spannung versorgt wird. Bei passender Kopplung zwischen L und Sekundärwicklung T sowie Resonanz von Schwingkreis- und Eigenfrequenz von T entsteht an den Enden der Sekundärwicklung eine sehr hohe Wechselspannung, die 1 MW betragen kann und nicht nur vom Windungsverhältnis N_1/N_2 abhängt. Allerdings ist der Wirkungsgrad beim Tesla-Transformator gering.

16.45 *Hochspannungsimpulserzeugung*

Kurzzeitige Spannungsstöße werden für die Prüfung von Hochspannungsbauteilen, aber auch in ***Funkenkammern*** (s. Bd. V) und für Plasmaexperimente gebraucht. Während für einige Hundert Kilovolt ein auf diese Spannung aufgeladener Kondensator über eine Funkenstrecke als „Schalter" über einen Widerstand entladen wird, wendet man für höhere Spannungen den ***Stoßgenerator*** nach Marx an. Dieser besteht — wie in Abb. 16.24 dargestellt ist —

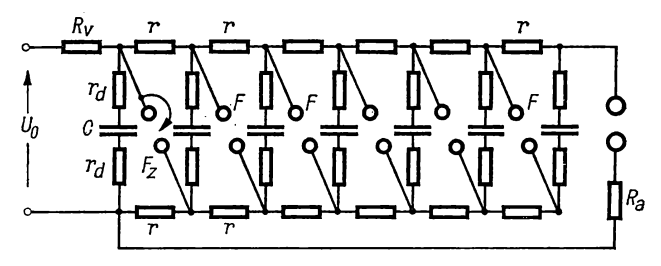


Abb. 16.24 Stoßgenerator nach Marx

aus Hochspannungskondensatoren C, die über die hochohmigen Widerstände r von der Hochspannungsquelle mit der Spannung U_0 aufgeladen werden. Der Widerstand R_v dient als Lade- und Schutzwiderstand und ist viel größer als r. Die aufgeladenen Kapazitäten C können durch Zündung der Funkenstrecken F in Serie geschaltet werden, wobei die Einzelspannungen addiert werden und am Entladewiderstand R_a eine sehr hohe Spannung auftritt, deren Flankensteilheit Bruchteile von Mikrosekunden beträgt. Als erste wird die mit einer Hilfselektrode versehene Funkenstrecke F_z gezündet, wodurch der Durchschlag der restlichen Funkenstrecken eingeleitet wird. Durch die in Serie mit F liegenden Dämpfungswiderstände r_d werden Haupt- und Nebenkreise aperiodisch gemacht. Solche Stoßgeneratoren werden mit Kondensatoren von 0,2 μF und einer Ladespannung von 200 kV ausgerüstet und liefern eine Stoßspannung von 3 MV und mehr.

Über kleinere Anlagen siehe [*16.24, 16.68*]; von Finkelstein et al. [*16.33*] wird ein induktiver Impulstransformator beschrieben, der aus zwei LC-Kreisen besteht und mit dem Spannungsimpulse von 1 MW erzeugt werden können.

16.46 Bandgenerator [16.32, 16.93, 16.110]

Der 1931 von VAN DE GRAAFF [*16.40*] zuerst angegebene elektrostatische Generator stellt eine elegante Weiterentwicklung der alten Influenzmaschinen dar und spielt auch heute noch für die Erzeugung mittelschneller Elementarteilchen eine wichtige Rolle. Das Prinzip dieser auch als *Bandgenerator* bezeichneten Maschine geht aus Abb. 16.25 hervor. Der auf dem Isolierrohr I

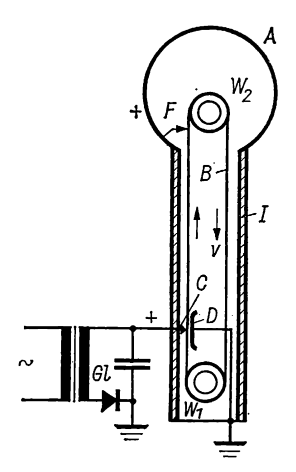


Abb. 16.25 Van-de-Graaff-Generator

montierten metallischen Hohlkugel A (Hochspannungselektrode) wird elektrische Ladung durch das auf Walzen W laufende und aus Isoliermaterial bestehende Band B zugeführt, wobei der Spitzenkamm F durch Influenzwirkung die Ladung absaugt. Die elektrische Ladung wird auf das Band durch eine Koronaentladung zwischen dem unteren Spitzenkamm C und der geerdeten Gegenelektrode D „aufgesprüht". Der Kamm C wird von der Gleichrichteranlage Gl auf etwa 20 kV gebracht.

Die *maximale Spannung* U_m der Hochspannungselektrode A ist durch die Beziehung

$$U_m = E_d r_0 \tag{16/14}$$

gegeben, wenn E_d die Durchbruchfeldstärke an der Kugeloberfläche und r_0 deren Radius ist. Für den *maximalen Strom* $I_{\max}$, der durch die Beziehung

$$I_{\max} = \sigma b v \tag{16/15}$$

gegeben ist (b Bandbreite, v Bandgeschwindigkeit), ist ebenfalls die Größe E_d maßgebend, denn die *Ladungsdichte* beträgt

$$\sigma = \varepsilon_0 E_d . \tag{16/16}$$

Setzt man nach § 10.8 in *Luft* für $E_d = 30$ kV/cm, ferner $b = 100$ cm und $v = 1000$ cm/s ein, so erhält man einen Maximalstrom von

$$I_{max} = 2{,}66 \cdot 10^{-9} \text{ As/cm}^2 \cdot v \cdot b = 0{,}266 \text{ mA},$$

der praktisch nicht erreicht wird. Bei einem Elektrodendurchmesser von $r_0 = 100$ cm beträgt die theoretische Maximalspannung $U_{max} = 3$ MV.

Die tatsächlich erreichbare Spannung hängt von dem durch Korona- und Glimmentladung verursachten Verluststrom ab, der zwischen zylindrischen Elektroden $i_v = k(U - U_k)^2$ beträgt, wenn U_k den Einsatz der Koronaentladung angibt.

Durch geeignete Anordnung ist es möglich, den abwärtsgehenden Bandteil entgegengesetzte Ladung abführen zu lassen, so daß sich I_{max} verdoppelt. Zu diesem Zweck wird die obere Walze (in Abb. 16.25 W_2) isoliert befestigt und durch einen Sprühkamm positiv beladen. Von der Elektrode F wird diese Ladung entnommen und dem Band negative Ladung nach abwärts mitgegeben.

Die Fortentwicklung dieser Maschinen geschah unter den folgenden Gesichtspunkten:

1. Nach dem Paschen-Gesetz nimmt die Durchbruchfeldstärke E_d bis zu mäßig hohen Drücken proportional dem Druck p zu. Demnach sollten bei einem in einen Drucktank eingebauten Generator I_{max} und auch U_{max} proportional mit p zunehmen. Infolge von Gleitentladungen längs des Bandes ist jedoch die Ladungsdichte begrenzt, kann aber durch dem Band benachbarte Elektroden mit Entladungsspitzen erhöht werden.
2. Kompensation von Störladungen durch Anwendung des gleitenden Kondensators nach Kossel, indem man den Abstand der Bandhälften stark verringert und diese aufeinander gleiten läßt. Hierdurch wird die Durchbruchfeldstärke beim Aufsprühen merklich erhöht.
3. Bei Scheibengeneratoren (s. § 16.47) wird der ladungstransportierenden Scheibe oder Trommel eine schwachleitende Fläche in geringem Abstand gegenübergestellt, wodurch große elektrische Tangentialfeldstärken vermieden werden.

Näheres über maximale Ladungsdichte, Selbsterregung und Feldausgleich siehe [*16.6, 16.53, 16.69, 16.72*]. Zusätzliche Einrichtungen, Stabilisierungsfragen und Erregergeräte werden in [*16.57, 16.87, 16.62*] behandelt. Zur Eichung der erzeugten Hochspannung lassen sich p-γ-Resonanz-Reaktionen an B und C benutzen. Einen kleinen tragbaren Van-de-Graaff-Generator für 200 kV und 15 μA Kurzschlußstrom beschreibt Foord [*16.35*]. Der mit vier Perlonbändern ausgestattete Elektronenbeschleuniger nach Maurer, Springer und Maier-Leibnitz [*16.85*] liefert mit $v = 17{,}5$ m/s einen Strom von 0,4 mA bei einer Maximalspannung von 1,2 MV.

Als Beispiel eines *Druckgenerators* ist in Abb. 16.26 eine 1,5-MV-Anlage nach Herb et al. [*16.51*] dargestellt, die in einem Druckkessel K von 7 m Länge und 1,7 m Durchmesser bei 6 at Luftdruck arbeitet. Die beiden Bänder B_1 und B_2 werden bei A beladen und laden die Mittelelektrode E auf die hohe Spannung auf. Durch durchbrochene Potentialbleche oder -ringe C wird eine

homogene Spannungsverteilung entlang den Bändern bewirkt. Das Entladungsrohr ist im gleichen Tank untergebracht und ebenfalls von Potentialringen *R* umgeben.

Über den Druckgenerator der Universität Zürich siehe [*16.13*, *16.18*]; der Tank von 3 m Höhe ist mit Luft von 10 at gefüllt. Durch besondere Regeleinrichtungen läßt sich die Hochspannung bei 1 MV auf ± 1 kV konstant halten. Außer Luft wird als Füllgas N_2, CCl_4 und Freon verwendet [*16.21*].

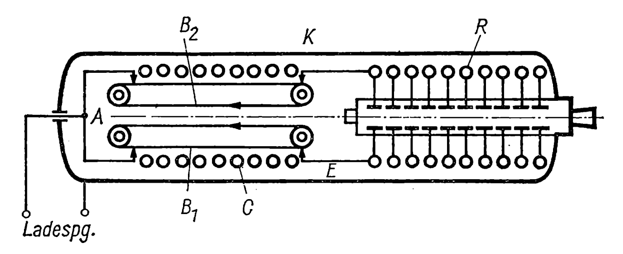


Abb. 16.26 Druckgenerator nach [*16.51*]

16.47 Generatoren mit flüssigen oder gasförmigen Ladungstransportmitteln

Es ist auch mit einigem Erfolg versucht worden, anstelle geladener, umlaufender Isolierbänder elektrisch geladene Staubteilchen durch einen Gasstrom oder Ionen in einer Flüssigkeitsströmung zur Hochspannungselektrode

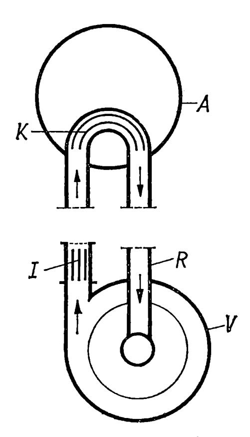


Abb. 16.27 Staubgenerator

zu transportieren. Das Prinzip eines solchen erstmals von PAUTENIER und MOREAU-HANOT [*16.98*] vorgeschlagenen *Staubgenerators* ist in Abb. 16.27 dargestellt. Er besteht aus dem Radialgebläse *V*, das im geschlossenen Kreislauf mit Staub (Flugasche) beladene Luft zwischen der Hochspannungselektrode *A* und *V* in Isolierrohren *R* umwälzt. Am Ventilatoraustritt werden die Staubteilchen in einer Ionisationsvorrichtung *I* mit wabenartigen Zellen

ionisiert. Bei K wird die Ladung der Staubteilchen durch ein mit A verbundenes feinmaschiges Netz abgenommen. Wie beim Bandgenerator hängt der Strom vom Ionisationsgrad, von der Luftgeschwindigkeit und vom Strömungsquerschnitt ab, wobei die wirksame Transportgeschwindigkeit wegen der auf die Teilchen ausgeübten elektrostatischen Abstoßungskräfte kleiner als die Luftgeschwindigkeit sein wird. Die Geschwindigkeitsdifferenz hängt von Teilchengröße, kinematischer Zähigkeit des Transportmediums und Teilchenladung ab. Es konnten nach diesem Verfahren Maximalspannungen von 1 MV und Ströme von 0,1 mA erreicht werden.

Von JANNER, MAGUN und SCHOPPER [*16.59*] ist ein Generator mit *Transformatoröl* als Transportmittel untersucht worden, das nach mehrfacher Reinigung eine Durchschlagfestigkeit von $2 \cdots 5 \cdot 10^5$ V/cm erreicht. Damit ergeben sich kurze Transportwege und ein sehr kleiner Rückstrom. Für die Aufladung der Flüssigkeit kommen Ionisierung des Öls oder Injektion von Ladungsträgern in Frage. Mit einer kleinen Versuchsanordnung konnte nachgewiesen werden, daß ein Generator für 1 MV und 1 mA Maximalstrom in einem Gefäß von 1 m Durchmesser und 1,5 m Höhe unterzubringen ist.

STUETZER [*16.118*] konnte in einem Labormodell mit Kerosin oder Trafoöl, das durch Spitzenentladung ionisiert wird, 400 kV erzeugen.

16.48 Elektrostatische Scheibengeneratoren

Anstelle elektrisch beladener, umlaufender Isolierbänder lassen sich in Weiterentwicklung der alten Influenzmaschine auch Kreisscheiben oder Hohlzylinder aus Isoliermaterial für elektrostatische Hochspannungsgeneratoren verwenden [*16.52, 16.92*]. Die erzeugte Stromstärke hängt von der Drehzahl und der Ladungsdichte der Transportfläche ab. Durch besondere Konstruktionsdetails, wie Einbetten der leitenden Beläge in isolierende Scheiben und Kontaktabnahme an deren Rändern, ferner Einbau in gasdichte Gehäuse oder Überdruckanwendung lassen sich stromstarke Generatoren für Spannungen bis 200 kV und 10 mA maximalen Strom herstellen. Einzelheiten solcher Maschinen siehe [*16.28, 16.50, 16.76*].

16.49 Umschaltung von Kapazitäten

CLARK und FARMER [*16.22*] wenden das im Marx-Stoßgenerator benutzte Prinzip der Hintereinanderschaltung aufgeladener Kapazitäten auf die Konstruktion einer Gleichspannungsquelle hoher Spannung an. Mit Hilfe eines Kontaktrades werden 20 Kondensatoren in Parallelschaltung auf 2,3 kV aufgeladen und dann in Serienschaltung über den Lastwiderstand entladen. Dieser Zyklus wird mit einer Frequenz von 25 oder 50 Hz wiederholt und liefert 26 kV bei einem Strom von 5⋯10 mA.

16.5 Thermoelektrische Stromerzeugung [*16.119, 16.117, 16.30, 16.63*]

In diesem und in den folgenden Abschnitten werden neuartige und meist auf spezielle Anwendungen beschränkte Methoden besprochen, durch thermoelektrische, thermionische, fotoelektrische und andere Verfahren elektrische

Energie unmittelbar zu erzeugen. Diese unkonventionellen Wege zur direkten Stromerzeugung spielen z. B. in der Raumfahrt eine bedeutende Rolle, können jedoch in Einzelfällen auch im Laboratorium mit Vorteil angewandt werden. Eine ausführliche Literaturübersicht ist unter [*16.13, 16.11, 16.65, 16.71, 16.113, 16.120*] zu finden.

Für spezielle Anwendungen kommt die *thermoelektrische Stromerzeugung* in Frage, die auf dem Seebeck-Effekt beruht. Dieser läßt sich im Leiterkreis nach Abb. 16.28 nachweisen, der aus den Leitern *1* und *2* besteht und dessen Kontaktstellen auf verschiedenen Temperaturen T_w und T_k gehalten werden. Dadurch entwickelt sich die *Thermospannung*

$$U_s = \alpha_{12}(T_w - T_k); \qquad (16/17)$$

die Größe α_{12} ist der differentielle Seebeck-Koeffizient der Leiterkombination *1—2*. Wird dem Thermoelement ein elektrischer Strom I entnommen, so tritt an den Kontaktstellen der *Peltier-Effekt* auf, der durch die Beziehung

$$Q_P = \Pi_{12} I \qquad (16/18)$$

beschrieben wird und je nach dem Vorzeichen des Peltier-Koeffizienten Π_{12} eine Wärmeentwicklung oder einen Wärmeentzug darstellen kann. Die Energiebilanz des Thermokreises wird außer von der in beiden Schenkeln auftretenden Jouleschen Wärme noch durch den *Thomson-Effekt* beeinflußt, der die Wärmemenge

$$Q_T = -\tau I (T_w - T_k) \qquad (16/19)$$

erzeugt, die dem Strom I, dem Thomson-Koeffizienten τ und dem Temperaturgefälle proportional ist.

Aus der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse lassen sich folgende Beziehungen ableiten:

$$\Pi_{12} = \alpha_{12} T; \qquad (16/20)$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_{12}}{\mathrm{d}T} = \frac{\tau_1 - \tau_2}{T}; \qquad (16/21)$$

daraus folgt

$$\alpha = \int_0^T \frac{\tau}{T}\,\mathrm{d}T, \quad \text{wobei} \quad \alpha_{12} = \alpha_1 - \alpha_2. \qquad (16/22)$$

Der *thermoelektrische Generator* ist eine Wärmekraftmaschine, deren Wirkungsgrad η durch das Verhältnis der erzeugten elektrischen Leistung P und der bei T_w zugeführten Wärmemenge Q_w definiert ist, also

$$\eta = \frac{P}{Q_w}. \qquad (16/23)$$

Ein hoher Wirkungsgrad läßt sich mit Materialien erzielen, die eine hohe Thermokraft α und elektrische Leitfähigkeit σ bei kleiner thermischer Leitfähigkeit $\varkappa$ aufweisen. Man führt zweckmäßig eine neue Materialkonstante z

ein, die *thermoelektrische Effektivität* genannt und durch die Beziehung

$$z = \frac{\alpha^2 \sigma}{\varkappa} \tag{16/24}$$

definiert wird. Als maximalen Wirkungsgrad eines einstufigen Generators erhält man

$$\eta_{\max} = \frac{T_w - T_k}{T_w} \cdot \frac{M - 1}{M + T_k/T_w}, \tag{16/25}$$

wenn

$$M = \sqrt{1 + z \frac{T_w + T_k}{2}} \tag{16/26}$$

bedeutet. Diese Beziehungen sind bereits 1911 von E. ALTENKIRCH [*16.2*] abgeleitet und veröffentlicht worden.

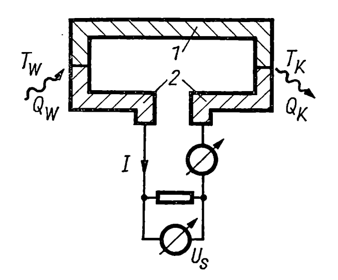




Abb. 16.28 Thermogenerator

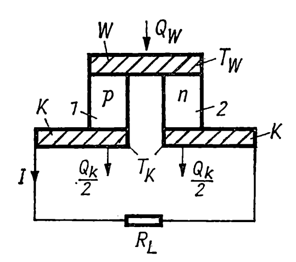


Abb. 16.29 Halbleitergenerator

Die Größe α liegt bei Halbleiterelementen in der Größenordnung von einigen Tausendstel pro Grad und hängt stark von der Temperatur und technologischen Eigenschaften ab. Es ist auffallend, daß für die verschiedensten Stoffe das Produkt $z \cdot T$ etwa Eins ist. In Abb. 16.29 ist schematisch der Aufbau eines Halbleitergenerators dargestellt, der aus den p- und n-leitenden Schenkeln *1* und *2* besteht, die durch besondere Lötverfahren gut wärmeleitend mit den Kupferschienen W und K verbunden sind. Bei der höheren Temperatur T_w wird der Schiene W die Wärmemenge Q_w zugeführt und bei K insgesamt die Wärmemenge Q_k durch eine Kühlvorrichtung entnommen. Der Außenwiderstand R_L ist bei optimaler Leistungsentnahme dem Innenwiderstand R_i des Elements angepaßt.

In *Tabelle 16.3* sind die Eigenschaften der wichtigsten Halbleitersubstanzen für Thermogeneratoren zusammengestellt.

ALTENKIRCH hat bereits die optimalen Abmessungen der Schenkel in Abhängigkeit von z und den Betriebsbedingungen berechnet. Unter angemessenen Arbeitstemperaturen können in einem Element bei einer Spannung von etwa 0,1 V Leistungen zwischen 0,1 und 1 W erzeugt werden. Es sind daher viele Elemente in Serie zu schalten, um z. B. Spannungen für die Versorgung von

Tabelle 16.3
Verwendung von Halbleitern für Thermogeneratoren

Temperaturbereich	Substanz	Typ	$z \cdot T$
300 ··· 550 K	$Bi_{2-x}Sb_xTe_3$	p	0,8
	$Bi_2Te_{3-x}Se_x$	n	0,8
500 ··· 800 K	$Zn_{1-x}Cd_xSb$	p	0,7
	$Ge_{1-x}Bi_xTe$	p	1,0
	PbTe	n	0,8
	$FeSi_2$	p	0,15
	$FeSi_2$	n	0,2
800 ··· 1200 K	$Ge_{1-x}Si_x$	p	0,6
	$Ge_{1-x}Si_x$	n	0,7

Transistoren zu erreichen. Ein Ge—Si-Bauelement mit 0,25 cm² Schenkelquerschnitt und 1 cm Schenkellänge liefert zwischen den Temperaturen $T_w = 800\,°C$ und $T_k = 400\,°C$ bei 0,125 V Klemmspannung eine Leistung von 0,8 W, was einem thermoelektrischen Wirkungsgrad von 5% entspricht.

Die Wärmemenge Q_w wird für spezielle Anwendungen in der Raumfahrt durch Radionuklide, deren Strahlung in einer Bremssubstanz in Wärme umgewandelt wird, oder kleine Reaktoren geliefert. Die Abfuhr der Wärmemenge Q_k geschieht oft durch Abstrahlung über großflächige Metallflächen.

Über die Ausnutzung der Sonnenwärme in thermoelektrischen Generatoren siehe Telkes [*16.121*]. Auch der Nernst-Ettinghausen-Effekt, der in Anwesenheit eines Magnetfeldes *H* eine dem senkrecht zu *H* fließenden Wärmestrom proportionale Spannung liefert, kann zur Stromerzeugung herangezogen werden. Näheres siehe [*16.39*, *16.105*].

16.6 Solarzellen

Als *Solarzelle* werden Halbleiterfotoelemente bezeichnet, in denen die fotoelektrische Energieumwandlung mit Hilfe der folgenden Prozesse erfolgt:

1. Erzeugung freier Ladungsträger durch Absorption von Strahlung;

2. Erzeugung einer Fotospannung bzw. eines Fotostroms durch Trennung der Ladungsträger im elektrischen Feld einer Sperrschicht.

Dieser schon lange bekannte Effekt kam erst zu praktischem Nutzen, seit Si mit einer pn-Sperrschicht hierfür verwendet werden konnte. In Abb. 16.30a ist der Schnitt durch ein Si-Fotoelement dargestellt, das aus einer n-leitenden Si-Scheibe mit eindiffundierter p-Randschicht von 5 μm Dicke besteht. Das Licht dringt durch die dünne p-Schicht und erzeugt freie Ladungsträger, die in der Sperrschicht getrennt werden und eine Leerlaufspannung von etwa 0,5 V hervorrufen. Der Gesamtwirkungsgrad kann bis 11% ansteigen, hängt aber vom Außenwiderstand ab. Durch Serienschaltung können die für die Versorgung von Transistorgeräten in Satelliten benötigten Spannungen er-

reicht werden. Es sind Fotoelementbatterien von 100 W und mehr für solche Anwendungsfälle konstruiert worden.

Die Quantenausbeute der n-p-Si-Zellen beträgt zwischen 0,5 und 0,95 μm mehr als 90%.

Eine allgemeine Verwendung als technische Stromquelle ist wegen der sehr hohen Herstellungskosten in nächster Zeit nicht zu erwarten. Außer Si kommen für Solarzellen noch InP, GaAs, CdTe GaP und CdS in Betracht, die einen größeren Bandabstand als Si aufweisen und mit denen Wirkungsgrade zwischen 7 und 12% im entsprechenden Frequenzbereich erzielt werden. Näheres siehe [*16.9, 16.20, 16.123, 16.95*].

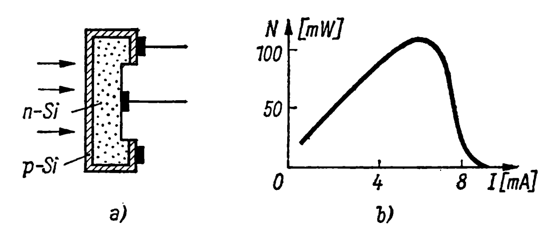


Abb. 16.30 Si-Fotoelement: Aufbau (a), Kennlinie (b)

16.7 Thermionik-Konverter [*16.78, 16.95*]

Das Prinzip dieser Methode zur direkten Energieerzeugung entspricht der bekannten *Thermodiode,* bei der eine beheizte Katode nach der Richardson-Formel

$$I_s = A T^2 \exp\left(-e \Phi_k / k T\right) \qquad (16/27)$$

einen Elektronenstrom aussendet, der gegen die (negative) Anode anläuft und zur Spannungsquelle wird. Dabei ist Φ_k die Austrittsarbeit der Katode; die Leerlaufspannung ergibt sich zu

$$U_0 = \Phi_k - \Phi_a \qquad (16/28)$$

mit Φ_a als Austrittsarbeit der Anode. Die abgegebene Leistung steigt aus thermodynamischen Gründen und wegen Gl. (16/27) mit zunehmender Temperatur. Die Entwicklung dieser Konverter führt zu Hochtemperaturkatoden und Katoden-Anoden-Abständen von 10 μm, wobei bisher Stromdichten von 1 A/cm² erreicht werden. Zur Kompensation der Raumladungseffekte wird Cs-Dampf eingeleitet.

Der technische Stand auf diesem Gebiet ist wenig bekannt; es sind bei Katodentemperaturen von 2000 K an der Katode Leistungsdichten von fast 30 W/cm² bei einem Wirkungsgrad von 20% erreicht worden.

16.8 Brennstoffelemente [*16.5, 16.125, 16.66*]

Im *Brennstoffelement* wird unabhängig von dem durch den Carnot-Prozeß definierten Wirkungsgrad chemische Energie in elektrische umgewandelt. Die elektrische Energie wird dadurch gewonnen, daß die bei der Oxydations-

reaktion vom Brennstoff zum Sauerstoff übergehenden Valenzelektronen über einen äußeren Nutzstromkreis geleitet werden, während im Elektrolyten durch wandernde Ionen der Stromkreis geschlossen wird.

Das Prinzip des Brennstoffelements läßt sich an der in Abb. 16.31 dargestellten Zelle mit festem Metalloxid als Elektrolyt erläutern. An der Katode K nimmt der Sauerstoff Elektronen unter Bildung von Sauerstoffionen auf, die durch den Elektrolyten E wandern und an der Anode A mit dem Wasserstoff (als Beispiel eines Brennstoffs) reagieren, wobei H_2O als Verbrennungsprodukt frei wird. Die Elektronen der O_2-Ionen werden an A abgegeben und fließen über den Nutzstromkreis. Beide Teilreaktionen zusammen ergeben die Verbrennungsreaktion des H_2.

Die *reversible Spannung* U^0 der Brennstoffzelle bei 1 at ergibt sich aus der Beziehung

$$U^0 = -\frac{\Delta G}{zF} = -\frac{\Delta I - T\Delta S}{zF}, \tag{16/29}$$

worin ΔG die Freie Enthalpie der Verbrennungsreaktion, z die Zahl der Valenzelektronen/Molekül und F die Faraday-Konstante ist. Die Druckabhängigkeit der O_2—H_2-Kette ist gegeben durch die Formel

$$U_p^0 = U^0 + \frac{RT}{zF} \ln \frac{p_{O_2}}{p_0} + \frac{RT}{zF} \ln \frac{p_{H_2}}{p_{H_2O}}, \quad (p_0 = 1 \text{ at}) \tag{16/30}$$

wenn R die Gaskonstante und p_{O_2}, p_{H_2} und p_{H_2O} die entsprechenden Drücke bedeuten.

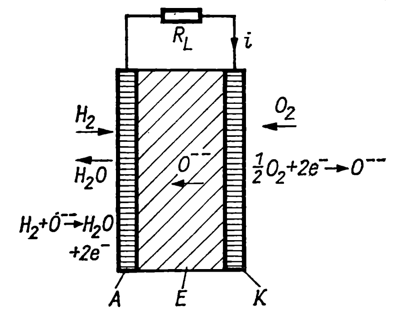


Abb. 16.31 Prinzip der Brennstoffzelle

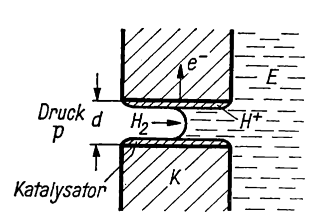


Abb. 16.32 Poröse Gaselektrode

Der *Wirkungsgrad* der Brennstoffzelle berechnet sich aus der idealen Arbeit $A_{id} = U^0 zF$, der realen elektrischen Arbeit $A_{re} = UzF$ (U Spannung am Lastwiderstand) und aus der in der Zelle erzeugten Wärmemenge Q zu

$$\eta_{el} = \frac{A_{re}}{A_{re} + Q_{re}} = \frac{A_{re}}{A_{id}} \eta_{id} = \frac{U}{U^0} \eta_{id} = \frac{U}{U^0 \Delta I^0}. \tag{16/31}$$

Die Größe $U^0 \Delta I^0$ folgt aus Gl. (16/29), wenn anstelle von ΔG die Standardverbrennungsenthalpie ΔI^0 eingesetzt wird.

Tabelle 16.4 Verbrennungsreaktionen in Brennstoffzellen

Reaktion	ΔI° kcal/mol	ΔS° cal/mol/grd	U°_{288K} mV	U°_{373K} mV	U°_{1100K} mV	$U^\circ_{\Delta H^\circ}$ mV	η_{298K}
$C + O_2 = CO_2$	− 94,1	+ 0,70	1022	1022	1026	1020	1,0
$C + 0{,}5O_2 = CO$	− 26,4	+ 21,4	711	746	1085	573	1,24
$CO + 0{,}5O_2 = CO_2$	− 67,6	− 20,7	1333	1298	966	1467	0,91
$H_2 + 0{,}5O_2 = H_2O$ (g)	− 57,8	− 10,6	1184	1166	970	1253	0,94
$H_2 + 0{,}5O_2 = H_2O$ (fl)	− 68,3	− 39,0	1229	1160	—	1482	0,83
$NH_3 + 0{,}75O_2 = 0{,}5N_2 + 1{,}5H_2O$ (g)	− 75,7	+ 7,8	1127	1135	—	1093	1,03
$NH_3 + 0{,}75O_2 = 0{,}5N_2 + 1{,}5H_2O$ (fl)	− 91,4	− 34,8	1171	1135	—	1321	0,89
$CH_4 + 2O_2 = CO_2 + 2H_2O$ (g)	−191,8	− 1,2	1037	1037	1037	1039	1
$CH_4 + 2O_2 = CO_2 + 2H_2O$ (fl)	−212,8	− 58,0	1059	1037	—	1059	0,92
$Na + 0{,}5H_2O$ (fl) $+ 0{,}25O_2 = NaOH$	− 78,1	− 20,9	3120	3050	—	3385	0,92
$Al + H_2O$ (fl) $+ 0{,}5O_2 = Al(OH)_3$	−202,5	− 5,2	2710	2655	—	2935	0,92

Reaktionspartner: gasförmig (g) oder flüssig (fl)

Die angegebene Stromstärke hängt von der Reaktionsgeschwindigkeit, d. h. von der Zahl n der pro Sekunde umgesetzten Moleküle, ab. Es gilt dabei

$$1\,A \triangleq \frac{1{,}04 \cdot 10^{-5}}{z}\,\text{Mol/s} \triangleq \frac{6{,}25 \cdot 10^{18}}{z}\,\text{Moleküle/s}. \qquad (16/32)$$

Die Reaktionsgeschwindigkeit $\mathrm{d}n/\mathrm{d}t$ hängt von T und der Aktivierungsenergie E_a in folgender Weise ab

$$i \sim \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \sim \mathrm{e}^{-E_a/RT}. \qquad (16/33)$$

Eine große Stromausbeute ergibt sich demnach mit kleiner Aktivierungsenergie, hoher Temperatur und natürlich mit großer Elektrodenoberfläche. Um auf kleinem Raum eine große Oberfläche zu erzielen, werden poröse Elektroden verwendet, deren Poren innen mit dem Katalysator ausgekleidet sind, wie in Abb. 16.32 gezeigt ist. Durch die Kapillarkräfte des wäßrigen Elektrolyten E muß im Gasraum ein Druck

$$p = \frac{4\gamma}{d} \qquad (16/34)$$

herrschen, um die Poren teilweise mit dem Elektrolyten zu füllen. In Gl. (16/34) ist γ die Oberflächenspannung des Wassers und d der Porendurchmesser.

In *Tabelle 16.4* sind die Daten für verschiedene Verbrennungsreaktionen aufgeführt.

Die technische Entwicklung verschiedener Elemente ist bereits weit fortgeschritten; der konstruktive Aufbau soll hier nicht gezeigt werden. Es sind bisher Leistungsgewichte bei H_2—O_2-Zellen von 10···20 kp/kW erreicht worden.

16.9 Elektrete [*16.41, 16.101*]

Bereits in § 10.75 sind die Eigenschaften von Elektreten behandelt, deren elektrische Flächenladung an der Oberfläche eine Feldstärke von der Größe 1 kV/cm hervorrufen kann.

Durch Aufbringen dünner metallischer Elektroden können in speziellen Anwendungsfällen mit Außenwiderständen von 1 GΩ Elektrete als quasistatische Spannungsquellen benutzt werden. Die erzeugte Spannung hängt von der Zeit, der Temperatur und vom Isolationsvermögen des elektrischen Kreises ab. Einzelheiten über Elektrete aus *Naphthalin* siehe [*16.7*], *Carnauba-Wachs* [*16.19*] und aus *anorganischen Dielektrika* [*16.42, 16.43*].

§ 17 SPEZIELLE MESSMETHODEN DER ELEKTROCHEMIE [*17.10, 17.22, 17.33*]

In diesem Abschnitt werden spezielle Methoden zur Messung der Leitfähigkeit, Konzentration, Beweglichkeit und Spannungen in Elektrolyten sowie einige elektrochemische Effekte behandelt. Dabei kann auf die §§ 9 und 10 zurückgegriffen werden. Bezüglich atomistischer Problemstellungen muß auf Band V verwiesen werden.

17.1 Allgemeines über Elektrolyte [*17.23, 17.32, 17.45*]

Die *elektrolytische* Leitfähigkeit unterscheidet sich von der elektronischen durch die Art der Ladungsträger, die atomare oder molekulare Größe besitzen, und dadurch, daß sie mit einem Massentransport verknüpft ist. Fließt ein Strom in einem Kreis, der sich aus metallischen und elektrolytischen Leitern zusammensetzt, so treten an den Grenzflächen *elektrochemische* Reaktionen auf. Beim Übergang von Elektronen in den Elektrolyten tritt an der Grenzfläche *Reduktion*, im umgekehrten Fall *Oxydation* auf. Da in jeder elektrolytischen Zelle *beide* Vorgänge durch die gleiche Anzahl von Ladungsträgern hervorgerufen werden, sind beide Prozesse einander quantitativ äquivalent.

Die Leitfähigkeit bei der Lösung von Säuren, Basen und Salzen in Flüssigkeiten von meist hoher Dielektrizitätskonstante entsteht durch positive *Kationen* und negative *Anionen*, die sich in Lösung indifferent verhalten. Erst bei der Ladungsabgabe an den Grenzflächen treten Reaktionen auf. Unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes wandern die Ionen zu den Elektroden, wobei sich die Stromdichte nach

$$\boldsymbol{j} = (n_+ q_+ v_+ + n_- q_- v_-)\boldsymbol{E} \tag{17/1}$$

aus Konzentration n, Ladung q und Geschwindigkeit v der positiven und negativen Träger berechnet. Insgesamt ist die Flüssigkeit ungeladen, d. h., es muß gelten:

$$n_+ q_+ = n_- q_- . \tag{17/2}$$

Stark verdünnte Lösungen. Im Fall unendlicher Verdünnung sind sämtliche in Lösung gehende Moleküle *dissoziiert*, d. h. in Ionen zerfallen, an denen die Kraft $\boldsymbol{K}_i = q_i \boldsymbol{E}$ angreift, welche die konstante Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{K}_i/a$ hervorruft, wenn a der Reibungsfaktor ist. Es folgt daraus die Beziehung

$$\boldsymbol{v} = \frac{q}{a}\boldsymbol{E} = u\boldsymbol{E}, \tag{17/3}$$

in der u als Beweglichkeit des Ions bezeichnet wird (vgl. § 4.22). Setzt man Gl. (17/3) in Gl. (17/1) ein, so ergibt sich daraus die *elektrische Leitfähigkeit* zu

$$\sigma = \frac{\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{E}} = n_+ q_+ v_+ + n_- q_- v_- . \tag{17/4}$$

Da die Ladung q ein ganzzahliges Vielfaches z der Elementarladung e, d. h.

$$q_+ = z_+ e \quad \text{und} \quad q_- = z_- e \tag{17/5}$$

ist, und ein gelöstes Molekül in ν_+ positive und ν_- negative Ionen zerfallen kann, gilt:

$$n_+ = \nu_+ n \quad \text{und} \quad n_- = \nu_- n, \tag{17/6}$$

und liefert die *Wertigkeit* w zu

$$w = \nu_+ z_+ = \nu_- z_- . \tag{17/7}$$

Mit der Loschmidtschen Zahl $L = 6{,}023 \cdot 10^{23}$/mol und der Faraday-Konstanten $F = eL = 9{,}65 \cdot 10^4$ C/mol ergibt sich aus Gl. (17/4) die Leitfähigkeit zu

$$\sigma = new(u_+ + u_-) \tag{17/4a}$$

und als Definition die *Äquivalentleitfähigkeit*

$$\Lambda = \frac{1000\,\sigma}{c}, \tag{17/8}$$

wenn c (g-Äquivalent/Liter) die *Äquivalentkonzentration*

$$c = 1000\,w\,\frac{n}{L} \tag{17/9}$$

und $1000\,n/L = c/w$ die *molare Konzentration* (mol/l) bedeutet. Beim Übergang zu verdünnten Lösungen zerfällt von den in Lösung gehenden Molekülen nur ein Bruchteil α, den man *Dissoziationsgrad* nennt. Ferner dürfen die elektrostatischen Kräfte zwischen den Ionen nicht mehr vernachlässigt werden.

Starke Elektrolyte. Sie besitzen hohe elektrische Leitfähigkeit und bestehen infolge der elektrischen Wechselwirkung zwischen den Ionen aus *Ionenwolken*, die sich im elektrischen Feld deformieren. Da Gl. (17/3) wegen der Abschirmkräfte und der vermehrten Reibung nur bei unendlicher Verdünnung gilt, setzt man die Beziehung

$$\Lambda_c = \lambda_{c+} + \lambda_{c-} \tag{17/10}$$

an, die für jede Konzentration gilt. In Übereinstimmung mit der Theorie gilt für *binäre Elektrolyte* ($z_+ = z_-$)

$$\Lambda_c = \Lambda^0 - B\,\sqrt{zc}, \tag{17/11}$$

wenn Λ^0 für unendliche Verdünnung gilt und B von der Dielektrizitätskonstanten, der Viskosität und der Temperatur des Lösungsmittels abhängt. Die Beziehung ist als *Onsager-Gleichung* bekannt.

Da im Wechselfeld für die Deformation der Ionenwolke eine Relaxationszeit $\tau = 10^{-10}/c$ s erforderlich ist und andererseits bei niedrigen Frequenzen an den Elektroden Polarisation auftritt, werden Leitfähigkeitsmessungen meist im Frequenzbereich zwischen 10 kHz und 1 MHz ausgeführt.

Schwache Elektrolyte. Wegen der geringen Konzentration können elektrische Wechselwirkungskräfte vernachlässigt werden. Da $\alpha < 1$ ist, besteht zwischen Ionen und Molekülen thermodynamisches Gleichgewicht nach dem *Massenwirkungsgesetz,* das für binäre Elektrolyte lautet:

$$\frac{c_+ c_-}{c_0} = \frac{\alpha_+ \alpha_-}{\alpha_0} c = k_c. \tag{17/12}$$

Dabei sind c_0 und c die Konzentrationen der Moleküle bzw. der gesamten gelösten Substanz und k_c die *Dissoziationskonstante*; es gilt außerdem:

$$\alpha_+ = \frac{c_+}{c}; \quad \alpha_- = \frac{c_-}{c}; \quad \alpha_0 = \frac{c_0}{c}. \tag{17/13}$$

Für zwei gleichwertige Ionen wird $c_+ = c_- = \alpha c$ und $c_0 = (1 - \alpha)c$; damit tritt anstelle von Gl. (17/12) die Gleichung:

$$\frac{\alpha^2 c}{1 - \alpha} = k_c. \tag{17/12a}$$

Da nach Gl. (17/10) die Beziehung

$$\Lambda_c = \alpha \Lambda^0 = \alpha F (u_+ + u_-) \tag{17/10a}$$

gilt, folgt mit Gl. (17/12a) das *Ostwaldsche Verdünnungsgesetz*:

$$\frac{c \Lambda_c^2}{(\Lambda^0 - \Lambda_c) \Lambda^0} = k_c. \tag{17/14}$$

Durch Messung der Konzentrationsabhängigkeit von Λ_c können Λ^0 und k_c bestimmt und nach Gl. (17/14) durch eine Gerade dargestellt werden, wenn $1/\Lambda_c$ als Funktion von $c\Lambda_c$ aufgetragen wird. Die Gerade hat nach Umformen von Gl. (17/14) die Form

$$c\Lambda_c + k_c \Lambda^0 = k_c \Lambda^{02}/\Lambda_c,$$

schneidet die Ordinate bei $1/\Lambda^0$ und besitzt die Steigung $1/k_c \Lambda^{02}$. In *Tabelle 17.1* ist die Äquivalentleitfähigkeit Λ_c als Funktion von c für verschiedene wäßrige Elektrolyten bei 25 °C zusammengestellt.

17.2 Meßverfahren für die Leitfähigkeit [*17.8*]

Für Leitfähigkeitsmessungen werden gewöhnlich Wechselstrommethoden bevorzugt, da bei Gleichspannung elektrolytische Effekte auftreten, welche die Äquivalentleitfähigkeit verändern und an den Elektroden Konzentrationsänderungen erzeugen.

17.21 Grundsätzliches [*17.15, 17.17*]

Genaue Messungen werden gewöhnlich bei 1 kHz ausgeführt; gelegentlich wird die Äquivalentleitfähigkeit als Funktion der Frequenz bestimmt. In der Praxis werden zur Eichung der Meßzellen (s. § 17.22) *Eichlösungen* verwendet und die bei einer bestimmten Frequenz gemessenen Widerstandswerte bei der Leitfähigkeitsbestimmung von unbekannten Lösungen zugrunde gelegt.

Tabelle 17.1 Äquivalentleitfähigkeit starker Elektrolyte in Wasser

Gelöste Substanz	Λ^0 Ω^{-1} cm^{-1}	Konzentration c 0,001	0,005	0,01	0,02	0,05	0,10
HCl	426,0	421,2	415,6	411,8	407,0	398,9	391,1
NaOH	247,9	244,9	239,9	236,9	232,9	226,9	220,9
$Ca(OH)_2$	257,9	—	232,2	225,9	213,9	—	—
NaCl	126,4	123,6	120,6	118,4	115,7	111,0	106,6
$CaCl_2$	135,7	130,3	124,2	120,3	115,6	108,4	102,4
KCl	149,8	146,9	143,5	141,2	138,2	133,3	128,9
NH_4Cl	149,6	146,8	143,5	141,2	138,3	133,2	128,7
$KHCO_3$	117,9	115,2	112,1	110,0	107,1	—	—
$K_4Fe(CN)_6$	183,9	167,1	146,0	134,7	122,7	107,6	97,9
NaO_2CCH_3	91,0	88,5	85,7	83,8	81,2	76,9	72,8
$NaO_2CCH_2CH_3$	85,9	83,5	80,9	79,1	76,6	—	—

Der grundsätzliche Aufbau einer *elektrochemischen Meßzelle* geht aus Abb. 17.1 hervor. Sie besteht aus einem Isoliergefäß aus Glas, keramischen Massen

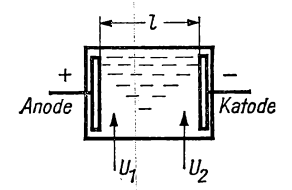


Abb. 17.1 Elektrochemische Meßzelle

oder Kunstharz und enthält zwei metallische Elektroden sowie die beiden Potentialsonden U_1 und U_2 zur Messung des Spannungsabfalls. Bezeichnet man mit A den Gefäßquerschnitt bzw. die Elektrodenfläche und mit l ihren Abstand, so ergibt sich der Leitwert der Zelle aus der Beziehung

$$G = \frac{1}{R} = \sigma \frac{A}{l}. \tag{17/15}$$

Da das Verhältnis A/l nur bei kleinem Elektrodenabstand aus den Abmessungen genau genug berechnet werden kann, wird die *Meßzellenkonstante* $\sigma/G = l/A$ aus Widerstandsmessungen mit einer KCl-Eichlösung bestimmt. In *Tabelle 17.2* ist die spezifische Leitfähigkeit für verschiedene Molkonzentrationen als Funktion der Meßtemperatur angegeben.

17.22 Meßzellen

In Abb. 17.2 sind drei gebräuchliche Formen für elektrochemische Meßzellen angegeben, die aus Glas oder Quarzglas mit eingeschmolzenen Elektroden bestehen. Bei der Ausführungsform (*a*), die sich für hohe Leitfähigkeit eignet, sind die beiden Elektroden weit voneinander entfernt; die Größe A in Gl. (17/15) ist durch den Rohrquerschnitt gegeben. Für geringe Leitfähigkeit

Tabelle 17.2 Spezifische Leitfähigkeit von KCl-Eichlösungen

c	C		σ (Ω^{-1} cm^{-1})	
g-Mol/dm³	g/dm³	0 °C	18 °C	25 °C
1,0	71,1352	0,065144	0,09779	0,11129
0,1	7,41913	0,0071344	0,011161	0,01285
0,01	0,7453	0,0007733	0,0012199	0,0014081

und Wechselstrommessungen ist die Bauform (b) mit kleinem Elektrodenabstand l geeignet. In (c) ist eine Zelle mit zylindrischen Elektroden dargestellt. Da die Elektrodenpolarisation mit der Stromdichte zunimmt, werden die Pt-Elektroden mit Platin-Moor überzogen, wodurch die chemisch wirksame Fläche der Elektroden stark vergrößert wird.

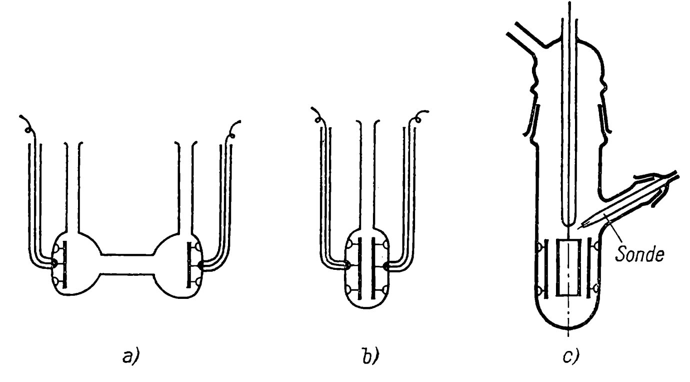


Abb. 17.2 Elektrochemische Meßzellen aus Glas

Bei schlecht leitenden Lösungen kann man auch elektrodenlos bei HF messen, wobei außerhalb der Meßzellen Metallelektroden aufgedampft werden. Näheres siehe § 17.25.

Die Ausbildung von Konzentrationsänderungen kann durch Rühren des Elektrolyten oder durch Verwendung von Durchlaufzellen verhindert werden. An den *Elektroden* bildet sich eine elektrische *Doppelschicht* aus, die durch besonders ausgebildete *Potentialsonden* gemessen werden können. Näheres siehe § 17.5. Für Leitfähigkeitsmessungen an *geschmolzenen Salzen* werden Meßzellen aus Quarzglas oder Porzellan mit Elektroden aus Edelmetall, Nickel oder Graphit verwendet. Für genaue Messungen werden die Meßzellen in einen Thermostaten gesetzt, dessen Temperatur konstant und genau bekannt ist.

17.23 Gleichstrommessungen

Gleichstrommessungen werden für Leitfähigkeitsuntersuchungen in nichtwäßrigen Lösungen angewandt, deren spezifischer Widerstand hoch ist. Es können relativ hohe Gleichspannungen von einigen hundert Volt angelegt

werden, so daß Polarisationsspannungen zu vernachlässigen sind. Wegen Gl. (17/2) müssen an den Elektroden die gleichen Elektrizitätsmengen oder für verschiedene Substanzen die gleiche Anzahl von g-Äquivalenten ausgeschieden werden, z. B. 1,1182 mg Ag, 0,3293 mg Cu, 0,1162 cm³ H_2 oder 0,0580 cm³ O_2 im Normzustand pro Sekunde.

In Abb. 17.3 ist schematisch der Meßkreis für Leitfähigkeits- und Potentialmessungen mit Gleichstrom dargestellt. Durch die Meßzelle Z wird aus der Batterie E der Strom i geschickt, wobei der regelbare Vorwiderstand R so

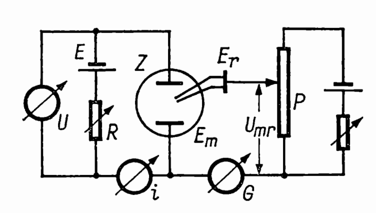


Abb. 17.3 Gleichstrommeßkreis

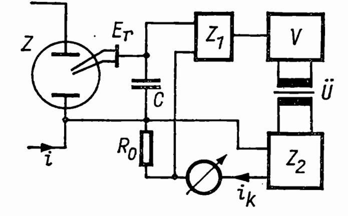


Abb. 17.4 Kompensationsmethode

hoch sein soll, daß sich Änderungen des Innenwiderstandes von Z nicht auf i auswirken. Aus der Zellenspannung U und dem Strom i kann die Leitfähigkeit bestimmt werden. Die Polarisation der Meßelektrode E_m wird aus der Änderung ihrer Spannung gegen die Referenzelektrode E_r erhalten, die stromlos mit dem geeichten Potentiometer P oder einem Kompensationsapparat (s. § 2.34) mit Hilfe des Nullgalvanometers G gemessen wird. Auch die zwischen Referenzelektrode und Meßelektrode liegende Spannung U_{mr} wird kompensatorisch gemessen bzw. mit einem Kompensationsschreiber registriert. In Abb. 17.4 ist das Beispiel eines Kompensationsverstärkers dargestellt, der aus den phasenempfindlichen Wechselrichtern Z_1 und Z_2 sowie dem Verstärker V besteht. Der am Ausgang von Z_2 erzeugte Kompensationsstrom i_k ruft am Festwiderstand R_0 die zur Kompensation von U_{mr} erforderliche Spannung $i_k R_0$ hervor, so daß i_k ein Maß für die gesuchte Spannung ist. Da für V Transistorverstärker sehr hoher Eingangsimpedanz verwendet werden können, wird U_{mr} praktisch potentiometrisch gemessen.

Nach dem gleichen Prinzip arbeitet der in Abb. 17.5 dargestellte *Galvanostat*, mit dem bei veränderlichem Innenwiderstand der Zelle Z der Belastungsstrom i_Z konstant gehalten werden kann. Dabei wird der Spannungsabfall iR_0 mit der einstellbaren Spannung U_k eines Hilfsstromkreises verglichen, der aus der Batterie E, dem Vorwiderstand R_v und der Zener-Diode ZD (s. § 4.243) besteht. Auch die in § 16.3 besprochenen Konstantstromquellen können hierfür eingesetzt werden. *Galvanostatische* Messungen sind zur Untersuchung von Diffusionsproblemen besonders geeignet, da an den Elektroden konstante Quellstromdichte herrscht. Näheres siehe [*17.18*, *17.26*].

Die zur Aufnahme von Strom-Spannungskurven in bestimmten Strombereichen einer Elektrode und instationärer Einschaltvorgänge häufig benutzten Spannungskonstanthalter oder *Potentiostaten* (s. Abb. 17.6) sind Regelkreise mit hochohmigem Eingang, deren Ausgangsstrom i_Z so eingestellt wird,

daß die Differenzspannung U_{mr} an der Meßsonde konstant ist und dem eingestellten Wert U_k im Hilfsstromkreis entspricht.

Wird U_k durch einen weiteren Regelkreis in einer vorgegebenen Zeitfunktion, z. B. als Dreiecksfunktion, geändert und gleichzeitig i_Z registriert, so lassen sich Strom-Spannungs-Charakteristiken für die Analyse von Oxydations- und Reduktionsvorgängen an Elektroden aufnehmen [*17.19, 17.37, 17.49, 17.51, 17.52, 17.59*].

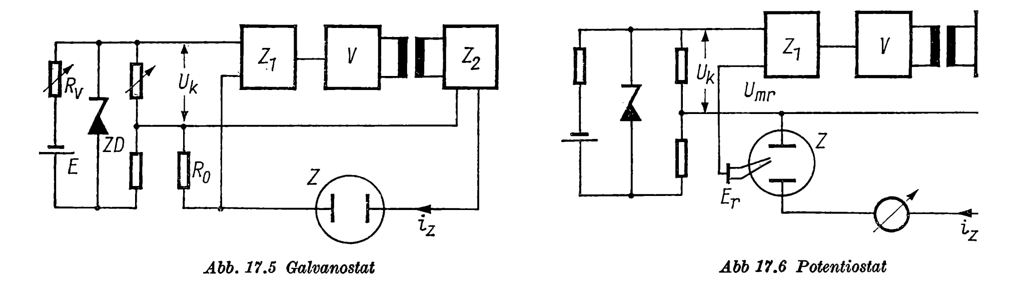


Abb. 17.5 Galvanostat

Abb 17.6 Potentiostat

17.24 Messungen bei hohen Feldstärken

Werden bei der Messung der elektrischen Leitfähigkeit wesentlich höhere Feldstärken als von der Größe 1 V/cm angewandt, so nimmt die Äquivalenzleitfähigkeit mit wachsender Feldstärke zunächst linear, dann weniger stark zu. Dieser Effekt bestätigt die Debye-Hückel-Onsager-Theorie der interionischen Kräfte, wonach bei hohen Ionengeschwindigkeiten die Zeit zur Bildung der Ionenatmosphäre nicht mehr ausreicht und die bei verdünnten Lösungen vorkommenden Werte für die Ionenbeweglichkeit einzusetzen sind [*17.16*].

17.25 Wechselstrommessungen [*17.14*]

Für Leitfähigkeitsmessungen an Elektrolyten sind Wechselstrommethoden besonders geeignet, da die Elektrodenpolarisation vermieden wird und aus der Frequenzabhängigkeit Rückschlüsse auf den Solvatationsgrad u. ä. gezogen werden können.

In der einfachsten Form ist hierfür die Wheatstone-Brücke (s. § 9.53) geeignet, die von einem NF- oder HF-Oszillator variabler Frequenz gespeist wird und in der als Nullinstrument ein Röhrenvoltmeter oder der ESO verwendet wird. Als veränderliche Widerstände lassen sich *Flüssigkeitswiderstände* (*Magnanische Lösung* mit kleinem Temperaturkoeffizienten), besser aber induktions- und kapazitätsarme Draht- oder Schichtwiderstände verwenden. Bei Präzisionsmessungen müssen auch die Blindwiderstände der Meßzelle abgeglichen werden. Neben den in § 9.6 besprochenen Wechselstrombrücken kommen spezielle HF-Meßmethoden der Impedanzmessung in Betracht [*17.43*]. In Abb. 17.7 ist als Beispiel für eine Leitfähigkeitsmessung eine Brücke mit Phasenabgleich dargestellt. Sie besteht aus den Festwiderständen R_1 und R_2, dem veränderlichen Widerstand R_n mit Parallelkapazität C_n und wird

über den Transformator $Ü_1$ vom HF-Oszillator O gespeist. Die Meßzelle Z mit dem gesuchten Widerstand R_x und der Kapazität C_x bildet den vierten Brückenzweig; oft wird noch der Abgleichkondensator C_a parallelgeschaltet. Der Brückenausgang wird über den Transformator $Ü_2$ an den Y-Verstärker der ESO gelegt, während die Oszillatorspannung auf der X-Achse registriert

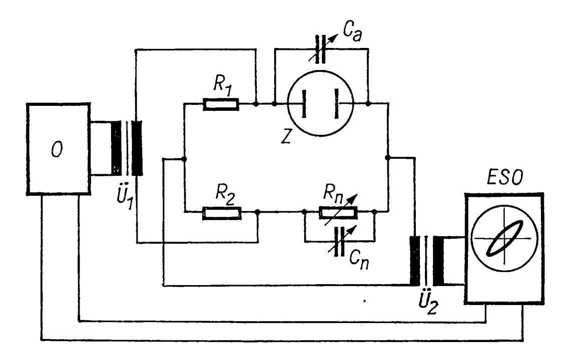


Abb. 17.7 Wechselstrombrücke für Leitfähigkeitsmessungen an Elektrolyten

wird. Beim Abgleich entsteht aus der ursprünglichen Ellipse auf dem ESO-Schirm eine geneigte Gerade, die sich schließlich in die Waagerechte dreht. Weitere Beispiele siehe [*17.28, 17.34, 17.39*].

Über Meßbrücken zur Impedanzmessung an *galvanischen Zellen* siehe [*17.12, 17.13*].

17.26 Barretter-Methode

Bei der *Barretter*- oder *Bolometer*-Methode dient als Strommeßgerät für zwei Vergleichszweige ein temperaturabhängiger Widerstand, dessen Größe mit Gleichstrom in einer Brücke gemessen wird. In einer neueren Ausführung, die

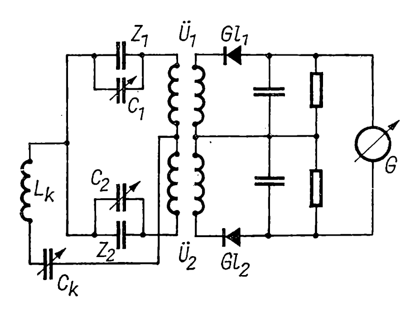


Abb. 17.8 Barretter-Methode

in Abb. 17.8 dargestellt ist, sind zwei Meßzellen Z_1 und Z_2 mit Parallelkapazitäten C_1 und C_2 zu einer Brücke geschaltet, die über einen veränderlichen Kondensator C_k und die Koppelspule L_k vom Oszillator erregt wird. Mit Hilfe

der beiden HF-Übertrager $\ddot{U}_1$ und $\ddot{U}_2$ werden die Brückenströme in den abgeschlossenen Gleichrichterkreisen mit den Dioden Gl_1 und Gl_2 miteinander verglichen.

Diese oder eine ähnliche Schaltung kann auch zur *elektrodenlosen* Leitfähigkeitsmessung bei schlecht leitenden Lösungen und hohen Frequenzen verwendet werden.

Von HINKELMANN [*17.25*] wird eine selbsterregte Oszillatorschaltung angegeben, bei der die Meßzelle als komplexer Widerstand für die Rückkopplung fungiert und die erzeugte Frequenz eine eindeutige Funktion der gesuchten Leitfähigkeit ist. Weitere Verfahren siehe [*17.21*].

17.27 *Höchstfrequenzmethoden* (vgl. a. § 8.7)

Bei sehr hohen Frequenzen wird die Annäherung an die Leitfähigkeit Λ^0 in Gl. (17/11) und gleichzeitig *Dispersion* der Dielektrizitätskonstanten beobachtet. Diesem Effekt überlagert sich bei meist noch höheren Frequenzen die Dispersion des Lösungsmittels. Im Zentimeterwellenbereich können Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante in Hohlleitern oder konzentrischen Leitern gemessen werden.

17.28 *Zahlenwerte*

In *Tabelle 17.3* ist die Äquivalentleitfähigkeit Λ^0 von Ionen in Wasser in unendlich verdünnter Lösung zusammengestellt.

Tabelle 17.3 *Äquivalentleitfähigkeit Λ^0 von Ionen in wäßriger Lösung*

Ion	t °C	Λ^0	Ion	t °C	Λ^0
H^+	15	300,6	OH^-	25	197,6
Li^+	25	38,7	Cl^-	25	76,34
Na^+	25	50,11	Br^-	25	78,3
K^+	15	59,66	I^-	25	76,8
NH_4^+	25	73,4	NO_3^-	25	71,4
Ag^+	25	61,92	ClO_4^-	25	68,0
Tl^+	25	74,7	HCO_3^-	25	44,5
$0{,}5\,Mg^{++}$	25	53,06	$CH_3CO_2^-$	25	40,9
$0{,}5\,Ca^{++}$	25	59,50	$0{,}5\,C_2O_4^{-}$	25	74,2
$0{,}5\,Cu^{++}$	25	54	$0{,}5\,SO_4^{-}$	25	80
$0{,}5\,Zn^{++}$	25	53	$0{,}33\,Fe(CN)_6^{3-}$	25	101

Angaben über die Leitfähigkeit verschiedener wäßriger Elektrolyte siehe [*17.5, 17.6, 17.7*].

17.3 Bestimmung der Konzentration

Die Konzentration einer Lösung läßt sich aus Leitfähigkeitsmessungen bestimmen, wie aus den Gln. (17/4a) und (17/8) folgt. Zur Angabe der Konzentration werden folgende Bezeichnungen benutzt:

Gewichtsprozente der Lösung	p
g-Äquivalent pro Kubikzentimeter der Lösung	m
g-Äquivalent pro Liter der Lösung	c
Zahl der Moleküle im Kubikzentimeter	n.

Es gelten dabei folgende Zusammenhänge:

$$\frac{c}{1000} = m = zw\frac{n}{L} = zwp\varrho/100 \cdot M = \frac{\sigma}{\Lambda}, \tag{17/16}$$

wenn ϱ die Dichte der Lösung und M das Molekulargewicht der gelösten Substanz ist.

Die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Konzentration ist in genauen Tabellen niedergelegt, aus denen bei bekannter Leitfähigkeit die Konzentration berechnet werden kann. Bei verdünnten Lösungen benutzt man Gl. (17/8) oder auch bei höherer Konzentration Gl. (17/11).

17.4 Messung der Beweglichkeit

17.41 Grundsätzliches

Nach Gl. (17/4a) ist die Leitfähigkeit einer Lösung proportional der Summe der Beweglichkeiten u_+ und u_-. Für *schwache Elektrolyte* ist ferner die Äquivalentleitfähigkeit sowohl zu $(u_+ + u_-)$ als auch zum Dissoziationsgrad α nach Gl. (17/10a) proportional.

Die Ladungsabgabe in der Nähe der Elektroden beim Anlegen einer Gleichspannung geht folgendermaßen vor sich: In Katodennähe wandern $n_- v_-$ negative Ionen aus dem Kubikzentimeter aus, während die zurückbleibenden Kationen an der Elektrode entladen werden und den Strom der ankommenden Kationen verstärken. Es entsteht daher in der Nähe der Katode eine Konzentrationsverringerung $\Delta n_- = n_- v_-$. Das gleiche spielt sich vor der Anode ab, d. h., es ergibt sich eine Abnahme der Anionenkonzentration um $\Delta n_+ = n_+ v_+$. Durch Vergleich folgt:

$$\frac{\Delta n_+}{\Delta n_-} = \frac{n_+ v_+}{n_- v_-} = \frac{n_+ u_+}{n_- u_-}. \tag{17/17}$$

Das Verhältnis des durch Kationen bewirkten Stroms zum Gesamtstrom bzw. zur Summe der Beweglichkeiten wird nach HITTORF *Überführungszahl* t des Kations genannt. Dasselbe gilt für die Anionen, und man definiert:

$$t_- = \frac{u_-}{u_- + u_+}; \quad t_+ = \frac{u_+}{u_- + u_+}. \tag{17/18}$$

Mit Gl. (17/10a) findet man daraus für die Beweglichkeiten:

$$u_+ = \frac{t_+ \Lambda^0}{F}; \quad u_- = \frac{t_- \Lambda^0}{F}; \quad \frac{u_+}{u_-} = \frac{t_+}{t_-}, \tag{17/19}$$

woraus die u-Werte durch Messung der Überführungszahlen bestimmt werden können. Infolge der elektrostatischen Kräfte zwischen den Ionen nimmt die Überführungszahl des Ions mit der größeren Beweglichkeit bei wachsender Konzentration zu, die des anderen Ions ab.

Die durch Gl. (17/17) beschriebene Methode der Messung der Überführungszahlen durch Konzentrationsbestimmung wurde zuerst von HITTORF vorgeschlagen. Sie besteht darin, *nach* Beendigung des Versuchs die Konzentration der Lösung in verschiedenen Beobachtungsbereichen, z. B. durch Analyse, zu bestimmen [*17.35*].

Von KAJMAKOV und FIKS [*17.29*] wird eine Methode zur Messung der Überführungszahlen beschrieben, bei der gleichzeitig die Ionenbeweglichkeiten beobachtet werden.

17.42 Überführungsmessung nach dem Drei-Kammer-Verfahren

Bei der schematisch in Abb. 17.9 dargestellten Anordnung wird das Versuchsgefäß durch zwei Diaphragmen D_1 und D_2 in drei Räume unterteilt. Durch die unterschiedlichen Überführungszahlen der beiden Ionenarten ändert sich

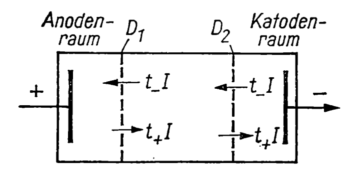


Abb. 17.9 Drei-Kammer-Zelle

die Konzentration im Anoden- und Katodenraum, nicht aber im mittleren Abschnitt. Die Mengenänderung in den Teilräumen wird durch Analyse oder Leitfähigkeitsmessung [*17.55*] bestimmt, wobei die Umsetzung an den Elektroden berücksichtigt und die gesamte durchflossene Ladungsmenge gemessen werden muß. Aus den Konzentrationsänderungen können unmittelbar die Hittorfschen Überführungszahlen $t^H{}_-$ und $t^H{}_+$ erhalten werden. In wäßrigen Lösungen wird wegen der Hydration auch das Lösungsmittel überführt, das nach Definition in Ruhe bleiben muß.

Das Drei-Kammer-Verfahren kann auch auf *Schmelzen* angewandt werden. Bei *festen* Ionenleitern werden die Probekörper mit angeschliffenen Grenzflächen aufeinandergepreßt und nach dem Versuch wieder getrennt und gewogen.

17.43 Methode der wandernden Grenzfläche

Bei dieser Methode werden in einem Rohr mit Meßteilung zwei Lösungen mit gemeinsamem Anion A_- und unterschiedlichen Kationen K_{+1} und K_{+2} übereinander geschichtet. Die Schichtgrenze, die durch unterschiedliche Färbung, radioaktive Strahlung oder andere physikalische Eigenschaften beobachtet wird, soll in der Zeit t so weit wandern, daß in einem Volumen V alle

K_{+1}-Ionen durch K_{+2} ersetzt sind. Ist die Äquivalenzkonzentration der $K_{+1}A_{-}$-Lösung m_1, so wird während der Zeit t die Ladung $m_1 F\ V$ transportiert, die dem Stromanteil der Kationen $i_K = m_1 VF/t$ entspricht. Der Anteil i_K am Gesamtstrom i verhält sich nach Gl. (17/10) zu diesem wie $\lambda_{+1}/(\lambda_{+1} + \lambda_{-})$. Es gilt also

$$i_K = \frac{m_1 VF}{t} = i\,\frac{\lambda_{+1}}{\lambda_{+1} + \lambda_{-}} = i \cdot t_{+1}, \tag{17/20}$$

woraus folgt:

$$t_{+1} = \frac{m_1 VF}{it}. \tag{17/20a}$$

Für genaue Messungen an der Schichtgrenze soll das Kation K_{+2} ebenso schnell wie K_{+1} wandern, was durch ein geeignetes Konzentrationsverhältnis $m_1/m_2 = c_1/c_2$ erreicht werden kann. Ferner soll das Ion mit der größeren Geschwindigkeit dem anderen vorauseilen, da an der besser leitenden Lösung die

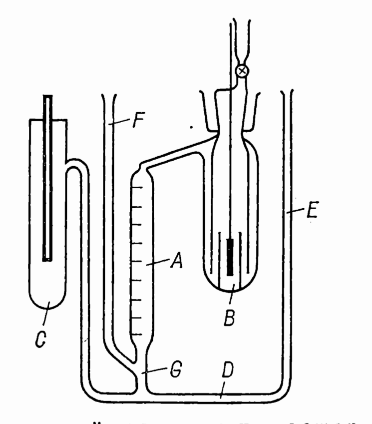



Abb. 17.10 Überführungsmeßzelle nach [17.24]

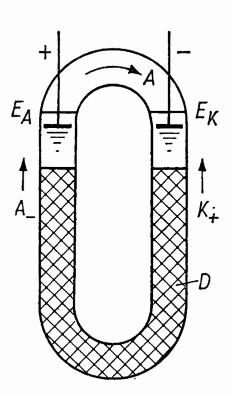


Abb. 17.11 Isotopentrennung

kleinere Spannung liegt, wegen der größeren Beweglichkeit aber ein Ausgleich der Wanderungsgeschwindigkeiten erreicht wird. Außerdem soll natürlich die dichtere Flüssigkeit durch die leichtere überschichtet werden und die angelegte Spannung nicht zu klein sein, um Fehler durch Diffusion zu vermeiden.

Das in Abb. 17.10 dargestellte Ausführungsbeispiel nach Hartley und Donaldson [*17.24*] besteht aus dem kalibrierten Meßrohr A von etwa 7 mm lichter Weite, dem geschlossenen Elektrodenraum B, dem offenen Elektrodenraum C, dem Verbindungsrohr D sowie den Kapillaren E und F. Nach der Füllung über F wird der Hahn von B geschlossen und Luft über F eingedrückt, bis bei G die Flüssigkeit unterbrochen ist. Dann wird CDE durch Absaugen entleert, mit Wasser gespült und mit dem zweiten Elektrolyten gefüllt. Durch Nachfüllen über F kann die leitende Verbindung der beiden Lösungen hergestellt und die Grenzschicht in das Meßrohr A verlegt werden. Nun wird

Spannung angelegt, die Wanderung der Grenzschicht verfolgt und die transportierte Ladung bestimmt.

Diese Methode ist auch auf Schmelzen und feste Elektrolyte anwendbar, wenn radioaktive Isotope als Indikatorionen K_{+2} verwendet werden.

17.44 Bestimmung der Beweglichkeit

Die durch Gl. (17/3) definierte Beweglichkeit wird durch Messung der Leitfähigkeit (s. § 17.2) und der Überführungszahl bestimmt, wie aus Gl. (17/19) hervorgeht. In *Tabelle 17.4* sind die Überführungszahlen der positiven Ionen in wäßrigen Elektrolyten bei 25 °C als Funktion der Äquivalenzkonzentration c angegeben.

Tabelle 17.4 Überführungszahlen t der positiven Ionen in wäßrigen Lösungen bei 25 °C

Lösung	Konzentration c					
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,50
HCl	0,8251	0,8266	0,8292	0,8314	0,8337	—
H_2SO_4	0,813	—	0,819	0,819	0,819	0,815
LiCl	0,3289	0,3261	0,3211	0,3168	0,3112	—
NaCl	0,3918	0,3902	0,3876	0,3854	0,3821	—
KCl	0,4902	0,4901	0,4899	0,4898	0,4894	0,4888
$BaCl_2$	0,4400	0,4375	0,4317	0,4253	0,4162	0,3986
$LaCl_3$	0,4625	0,4576	0,4482	0,4375	0,4233	—
NH_4Cl	0,4907	0,4906	0,4905	0,4907	0,4911	—
Na_2SO_4	0,3848	0,3836	0,3829	0,3828	0,3823	—
K_2SO_4	0,4829	0,4848	0,4870	0,4890	0,4910	0,4909
KNO_3	0,5084	0,5087	0,5093	0,5103	0,5120	—
$AgNO_3$	0,4648	0,4652	0,4664	0,4682	—	—
NaOH	0,202	—	—	—	—	—

17.45 Isotopentrennung

Zwei Isotope der Masse m mit der Massendifferenz Δm haben infolge ihrer unterschiedlichen Ionenradien verschiedene Beweglichkeiten und Wanderungsgeschwindigkeiten. In einem geschlossenen Rohr (s. Abb. 17.11) mit den Elektroden E_K und E_A, das teilweise mit dem Diaphragma D gefüllt ist, befindet sich der Elektrolyt A_-K_+. Während sich die Anionen A_- an E_K abscheiden und an der Katode E_K neu gebildet werden, wird das *neutrale* Abscheidungsprodukt A von E_A nach E_K überführt. Der Elektrolyt wird im rechten Schenkel des Rohres erzeugt und im linken verbraucht, wodurch eine Strömung durch die Diaphragmaporen zustande kommt. Die Kationen befinden sich bezüglich des Diaphragmas in Ruhe, wandern aber relativ zum Elektrolyten mit einer um Δv unterschiedlichen Geschwindigkeit, wodurch sich die schnelleren vor der Katode, die langsameren vor der Anode ansammeln.

Der durch das Verhältnis $\frac{\Delta v/v}{\Delta m/m}$ definierte *Masseneffekt* beträgt z. B. bei der Trennung von Ag im festen α-AgJ −0,11, bei der Li-Trennung in flüssigem $LiNO_3$ −0,05.

17.5 Spannungen an Elektrolytlösungen [*17.38*, *17.41*]

17.51 Allgemeines

Die in einem Elektrolyten bei angelegter Spannung auftretenden Konzentrationsänderungen rufen umgekehrt bei ihrem Ausgleich eine Spannung hervor, wenn die Beweglichkeit der Ionen verschieden ist. Die beweglicheren Ionen eilen den anderen so lange voraus, bis die entstehende Potentialdifferenz die Geschwindigkeiten ausgleicht. Aus der allgemeinen Thermodynamik findet man für die erzeugte Spannung die Beziehung:

$$E = -\frac{u_+ - u_-}{u_+ + u_-} \cdot \frac{RT}{zF} \ln \frac{f_{a1} c_1}{f_{a2} c_2} \quad \text{(V)}, \tag{17/21}$$

in der f_{a1} und f_{a2} die *Aktivitätskoeffizienten* sind, die mit der Aktivität a eines Ions folgendermaßen zusammenhängen:

$$f_{a1} = \frac{a_1}{c_1} \quad \text{und} \quad f_{a2} = \frac{a_2}{c_2}. \tag{17/22}$$

Aus dem Vorzeichen der Gl. (17/21) erkennt man, daß für $u_+ > u_-$ in der stärkeren Lösung überschüssige negative Ladung zurückbleibt und umgekehrt. Aktivitätskoeffizienten können experimentell aus Schmelzpunktdepression, Siedepunktserhöhung, Dampfdruckerniedrigung, Potentialmessung an galvanischen Zellen und aus der Löslichkeit bestimmt werden.

An der Grenzfläche zwischen Elektroden und Elektrolyten bildet sich eine elektrische Doppelschicht aus. Gehen die Metallionen aus der Lösung und scheiden sich an der Elektrode aus (edle Metalle), so erhält die Metallelektrode eine *positive Ladung*; bei unedlen Metallen ist es umgekehrt. Bezeichnet man die Konzentration der gemeinsamen Ionen im Elektrolyten und an der Elektrode mit c_0 und den zugehörigen Aktivitätskoeffizienten mit f_{a0}, so findet man die entstehende Spannung aus der Beziehung:

$$\begin{aligned} E &= \pm \frac{RT}{zF} \ln \frac{f_a c}{f_{a0} c_0} = \pm \frac{RT}{zF} \ln (f_{a0} c_0) \pm \frac{RT}{zF} \ln (f_a c) \\ &= E_0 \pm \frac{RT}{zF} \ln (f_a c), \end{aligned} \tag{17/23}$$

wenn die oberen Zeichen für positive, die unteren für negative Ionen gelten.

Im allgemeinen werden diese Spannungsdifferenzen mit *zwei* Elektroden gemessen, deren Aktivität bekannt ist. In *Tabelle 17.5* ist das Potential einiger Elektroden in wäßrigen Lösungen gegen die Wasserstoffnormalelektrode angegeben.

Tabelle 17.5 Potential von Elektroden in wäßriger Lösung gegen Wasserstoffelektrode bei 25 °C

Elektrodenreaktion	E (V)	Elektrodenreaktion	E (V)
Li $= Li^+ + e$	3,045	$Ag + I^- = AgI + e$	0,151
K $= K^+ + e$	2,925	Sn $= Sn^{++} + 2e$	0,136
Na $= Na^+ + e$	2,714	Pb $= Pb^{++} + 2e$	0,036
Mg $= Mg^{++} + 2e$	2,37	$H_2 = 2H^+ + 2e$	0,000
Al $= Al^{3+} + 3e$	1,66	Cu $= Cu^{++} + 2e$	−0,337
Zn $= Zn^{++} + 2e$	0,763	$2OH^- = H_2O + 0{,}5\ O_2 + e$	−0,401
Fe $= Fe^{++} + 2e$	0,440	$2Hg = Hg_2^{++} + 2e$	−0,789
Cd $= Cd^{++} + 2e$	0,403	Ag $= Ag^+ + e$	−0,799
Ni $= Ni^{++} + 2e$	0,250	$2Cl^- = Cl_2 + 2e$	−1,360

Tabelle 17.5 liefert die *Spannungsreihe* der Elemente, aus der die Spannung von galvanischen Elementen (s. a. § 16.11) berechnet werden kann.

17.52 Meßelektroden

Zur Messung von Potentialdifferenzen an Elektrolyten werden *Referenzelektroden* eingesetzt, deren Spannung an der Phasengrenze Elektrode/Elektrolyt gut reproduzierbar ist. Sie werden mit einer Elektrolytbrücke mit der

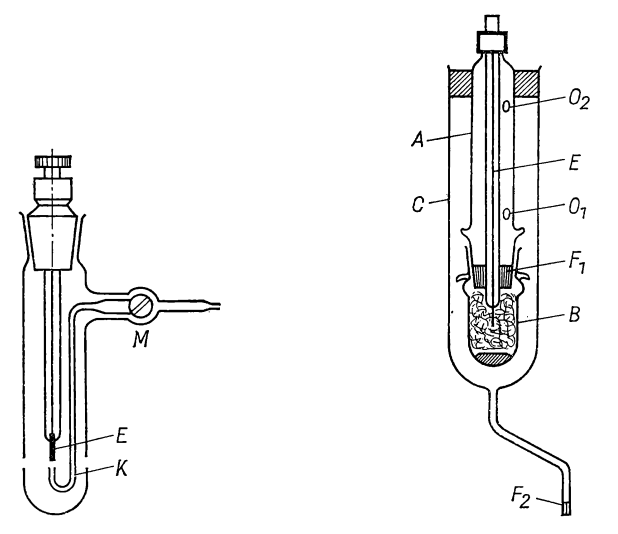


Abb. 17.12 Jenaer Wasserstoff-Tauchelektrode

Abb. 17.13 Kalomel-Tauchelektrode

Meßzelle verbunden und stellen zusammen mit der Meßelektrode ein galvanisches Element dar. Bei Belastung verringert sich die Leerlaufspannung E_0 auf E; die Differenz $E_0 - E$ entspricht der *Polarisation* an der Meßelektrode.

Normal-Wasserstoffelektrode. Alle Elektrodenpotentiale werden auf das Potential der Normal-Wasserstoffelektrode bezogen, die eine reversible H_2-Elektrode unter dem H_2-Partialdruck von 1 at in der Elektrolytlösung der H_2-Ionenaktivität 1 mol/dm³ darstellt. Nach Abb. 17.12 wird die in die zu untersuchende Lösung tauchende platinierte Pt-Elektrode E (Blech von $0{,}5 \times 2$ cm²) mit einem H_2-Strom von konstantem Druck umspült. Dabei löst sich H_2 in Pt, zerfällt in zwei H-Atome, die unter dem Lösungsdruck als H^+-Ionen in Lösung gehen wollen. Die in Abb. 17.12 gezeigte Ausführungsform der *Jenaer Wasserstoff-Tauchelektrode* enthält eine dünne Glaskapillare K, durch die H_2 an die Elektrode herangebracht werden kann. Der Wasserstoff muß frei von O_2 und anderen Verunreinigungen sein; bei der Partialdruckbestimmung müssen Barometerstand und Dampfdruck des Elektrolyten berücksichtigt werden.

Anstelle des von H_2 umspülten Pt-Blechs können auch *Gas-Diffusionselektroden* verwendet werden, die aus porösen Körpern bestehen, in die von der einen Seite H_2, von der anderen der Elektrolyt eindringt.

Kalomelelektrode. Sie ist die gebräuchliche Gegenelektrode, bei der im Gegensatz zur H_2-Elektrode auch die Anionen mitwirken. Hierzu wird die mit Hg_2Cl_2 (Kalomel) bedeckte Hg-Elektrode mit einer 0,1 normalen KCl-Lösung überschichtet. Bei der geringen Löslichkeit des Hg_2Cl_2 stellt sich das Potential nach der geringen Sättigungskonzentration der Hg_2^{++}-Ionen am Hg ein. Die KCl-Lösung bezweckt, daß die Hg_2^{++}-Konzentration von der Cl^--Konzentration und vom Löslichkeitsprodukt $[Hg_2^{++}][Cl^{-}]^2$ abhängt. Die Kombination H_2- und Kalomel-Elektroden liefert für die Kette $(+)Hg_2Cl_2/Cl^-$ 0,1 norm.-H^+ 1 norm./$H_2(-)$ folgende Spannung:

t(°C)	18	20	25	30	37,5	40
E'(V)	0,3380	0,3379	0,3376	0,3372	0,3364	0,3360

In Abb. 17.13 ist die Tauchelektrode mit Jenaer Glasfilter dargestellt. Das Hg und die Hg_2Cl_2-Paste befinden sich in der Schliffhülse B und sind oben durch das Glasfilter F_1 abgeschlossen. Die Pt-Elektrode E wird durch das Rohr A mit angesetztem Schliffkegel geführt. Damit unter F_1 keine Luftblase eingeschlossen wird, gießt man auf die Hg_2Cl_2-Paste etwas KCl-Lösung, ehe man das Rohr A auf B setzt. Das unten durch die feinporige Glasfritte F_2 geschlossene Mantelgefäß C wird etwa zur Hälfte mit gesättigter KCl-Lösung gefüllt, wobei durch die Öffnung O_1 die Lösung in das Rohr A eindringt, wenn die Elektrode zusammengesetzt wird.

Chinhydronelektroden werden benutzt, wenn die H_2-Elektrode wegen ihrer reduzierenden Wirkung nicht brauchbar ist. Chinhydron stellt eine aus Chinon und Hydrochinon im Verhältnis 1:1 gebildete gut kristallisierende, in wäßrigen Lösungen schwer lösliche Molekülverbindung dar. Man mißt in der Kette: Pt-Chinhydron, Lösung X, KCl gesätt./KCl 0,1 norm. (Hg_2Cl_2)/Hg, benutzt also die Kalomel-Elektrode als Gegenelektrode. Die Spannung zwischen beiden Elektroden beträgt:

t(°C)	18	20	25	30	37,5	40
E'(V)	0,3662	0,3648	0,3614	0,3581	0,3534	0,3519

Jenaer Glaselektrode [*17.11*]. Diese kann auch in oxydierenden Lösungen eingesetzt werden und ist in der p_H-Meßtechnik weit verbreitet. Ihr wesentlicher Bestandteil ist ein dünnwandiges, kugelförmiges Glasgefäß, das als Membran nur die H_2-Ionen durchläßt. Die Spannung wird an zwei Elektroden inner- und außerhalb der Kugel gemessen. Bei gleichen Elektroden heben sich ihre Potentiale auf. Man mißt z. B. mit zwei Kalomelelektroden in der Kette: Hg/Hg_2Cl_2/KCl gesätt./Lösung I, Glas, Lösung II/KCl gesätt. Hg_2Cl_2/Hg. Da die Diffusionspotentiale der Lösungen klein und entgegengesetzt sind, bleibt nur das Membranpotential übrig, das von der Durchlässigkeit für die verschiedenen Ionen der Lösung abhängt. Eine in Wasser gequollene Glasmembran läßt nur die H_3O^+-Ionen, nicht aber die Anionen durch. Trennt man zwei Lösungen mit verschiedener H_3O^+-Konzentration durch eine solche Membran, so entsteht ein Diffusionspotential nach Gl. (17/21), worin $u_- = 0$ zu setzen ist. Die Membranspannung wird dann:

$$E = -\frac{RT}{F} \ln \frac{(a^+_{H_3O^+})_2}{(a^+_{H_3O^+})_1} = -\frac{RT}{F} \ln 10 \, (p_{H1} - p_{H2}), \qquad (17/24)$$

wenn $p_H = \lg a_{c,H^+}$. Dies entspricht dem Ausdruck für die Wasserstoffelektrode.

17.53 pH-*Messung* [*17.2, 17.31, 17.56*]

Die Bestimmung der H-Ionenkonzentration spielt für biologische und elektrochemische Prozesse eine wichtige Rolle und kann mit großer Genauigkeit ausgeführt werden. Die Grundlage der pH-Messung stellt die Gl. (17/24) dar, welche das gemessene Potential E als Funktion der Differenz der pH-Werte beschreibt. Die H_2-Ionenkonzentration c_{H^+} wird der kürzeren Schreibweise halber statt durch Zehnerpotenzen 10^{-pH} durch den negativen Potenzexponenten p_H (*Wasserstoffexponent*) ausgedrückt, d. h.,

$$pH = -\log c_{H^+}.$$

Wird eine Wasserstoff-Normalelektrode verwendet, so wird $c_{H^+} = 1$ und $pH = 0$.

Gewöhnlich wird zur Wasserstoff-Normalelektrode die Kalomelelektrode verwendet in der Kette: Pt/H_2(1 at)/Lösung/KCl gesätt./Hg_2Cl_2/Hg.

In oxydierenden oder reduzierenden Lösungen kann die H_2-Elektrode nicht verwendet werden und wird durch die Jenaer Glaselektrode ersetzt. Als Gläser werden Na-Gläser und vor allem die Sorte Corning 015 (72 SiO_2, 22 Na_2O, 6% CaO) häufig verwendet, wobei sich die Zusammensetzung nach dem benutzten Temperaturbereich richtet. Als Innenelektrode werden Pt- oder Au-Drähte verwendet, die in eine Pufferlösung aus AgCl oder Chinhydron tauchen. In der Praxis werden Glaselektroden mit einer Lösung von bekanntem pH-Wert geeicht. Als diese dient meist eine KH-Phthalat-Lösung (0,05 m), deren pH-Werte aus *Tabelle 17.6* zu entnehmen sind.

Die Potentialdifferenz wird potentiometrisch gemessen, d. h. mit einem Kompensator (s. § 2.34) oder mit speziellen Röhrenvoltmetern großer Eingangsimpedanz (s. § 2.33). Bei sorgfältiger Messung und Eichung beträgt die

Tabelle 17.6 pH-Werte von Normal-Pufferlösungen

Temp. °C	KH-Phthalat (0,05 m)	KH-Tartrat (bei 25 °C gesätt.)	KH_2PO_4 (0,025 m) Na_2HPO_4 (0,025 m)	KH_2PO_4 (0,008695 m) Na_2HPO_4 (0,03043 m)	Borax (0,01 m)
0	4,006		6,984	7,534	9,464
5	3,999		6,951	7,500	9,395
10	3,997		6,923	7,472	9,332
15	3,997		6,900	7,448	9,276
20	4,000		6,881	7,429	9,225
25	4,008	3,557	6,865	7,413	9,180
30	4,016	3,552	6,853	7,400	9,139
35	4,024	3,549	6,844	7,389	9,102
40	4,035	3,547	6,838	7,380	9,068
45	4,047	3,547	6,834	7,373	9,038
50	4,063	3,549	5,833	7,367	9,011

Meßgenauigkeit etwa 0,05 *p*H-Einheiten. Mit der Glaselektrode ergeben sich bei *p*H-Werten von über 8 Fehler durch die Na^+-Ionen in der Glaskugel. Für sehr kleine *p*H-Werte (< 2) wird die Anzeige zu hoch.

Glaselektroden sind für Drücke bis zu 1500 kp/cm² verwendbar, wie ozeanografische Messungen erwiesen haben. Von BEN-YAAKOV et al. [*17.3*] wird eine spezielle Elektrodenform mit Druckausgleich und Bezugselektroden beschrieben, die in Tiefen bis zu 270 m benutzt wurde. Zur Messung der Potentialdifferenz wird ein Operationsverstärker mit 10 TΩ Eingangsimpedanz und 1 pA Eingangsstrom verwendet.

Weitere Transistorverstärker mit hohem Eingangswiderstand und großer Empfindlichkeit, wie sie zur Messung kleiner Potentialdifferenzen an biologischen Strukturen u. a. benutzt werden, siehe [*17.9, 17.27, 17.50*].

Unter *Titration* versteht man die Neutralisation einer Säure durch eine Base bekannter Hydroxidionen-Konzentration, wobei der *p*H-Wert sprunghaft umschlägt (Äquivalenzpunkt). Mit speziellen Anordnungen, in denen das elektrochemische Potential zwischen zwei Normalelektroden gemessen wird, läßt sich die Titration selbsttätig durchführen [*17.1, 17.36, 17.42*].

17.54 Kontakt- und Voltaspannungsmessung

Als Voltaspannung $U_{2,1}$ eines leitenden Stoffes gegen einen zweiten Leiter wird die Differenz der Elektronenaustrittsspannungen verstanden, d. h.,

$$U_{2,1} = U_2 - U_1 .$$

Die klassische Methode zum Nachweis dieser Spannung, die auch *Kontaktpotential* genannt wird, ist die von Lord KELVIN angegebene Kondensatormethode, die in Abb. 17.14 dargestellt ist. Die obere Platte *1* des Kondensators C_{12} führt Schwingungen in Richtung der Plattennormalen aus und ist über das

Potentiometer P mit dem Elektrometer E verbunden. Der Elektrometerausschlag verschwindet, wenn die Kompensationsspannung U_k der Voltaspannung $U_{2,1}$ zwischen den Platten aus verschiedenem Material entspricht. Die Größe $U_{2,1}$ ist eine Relativspannung, die sowohl vom Elektrodenmaterial als auch von der Art und Struktur der Oberflächenschicht abhängt. Von ZISMAN [*17.60*] wird die bewegliche Platte durch einen Nutenanker mit vergoldeten Belägen und das Elektrometer durch einen Elektrometerröhrenverstärker (s. § 2.32) ersetzt. Die Voltaspannungen gegen Au schwanken zwischen $-0{,}25$ V (Ag) und $-0{,}9$ V (Zn), hängen aber stark von Oxidschichten ab.

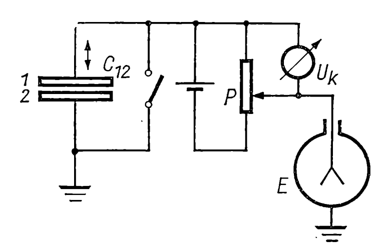


Abb. 17.14 Kondensatormethode für Kontaktspannungsmessung

Von SCHAAFFS [*17.46, 17.47, 17.48*] wird eine akustische Methode zur Messung der Voltaspannung angegeben, mit der Metalloberflächen bei Oxydation und Absorption untersucht wurden (s. a. [*17.40*]).

17.6 Elektrokinetische Effekte

Elektrokinetische Erscheinungen treten an der Grenzfläche zwischen einer metallischen Oberfläche und einem Elektrolyten auf.

17.61 Elektrophorese [17.53, 17.20]

Befinden sich in einem Elektrolyten feinverteilte Schwebeteilchen (*Kolloide*), so laden sich diese Teilchen wegen der großen Oberflächenentwicklung und des damit verbundenen Adsorptionsvermögens *gleichsinnig* auf. Die Aufladung kann durch Adsorption von H_2- oder OH-Ionen aus dem Wasser oder von Ionenarten bewirkt werden, aus denen die Moleküle der kolloidalen Teilchen selbst bestehen.

Die Wanderungsgeschwindigkeit v der Teilchen ist der Feldstärke $E = U/l$ proportional und beträgt:

$$v = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \xi}{\eta} E, \qquad (17/25)$$

worin ε_r die relative Dielektrizitätskonstante der Teilchen, ξ das elektrokinetische Potential und η die Viskosität des Elektrolyten ist. Die Geschwindigkeit v ist von gleicher Größe wie die der Ionen in wäßrigen Lösungen und fast unabhängig von ihrem Durchmesser.

17.62 Elektroosmose

Werden die Schwebeteilchen zu einem porösen Stopfen zusammengesintert und in ein Rohr gebracht, so entsteht bei Anlegen einer Spannung eine Flüssigkeitsströmung mit der Wanderungsgeschwindigkeit

$$v' = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \xi}{\eta} E. \tag{17/26}$$

Eine ähnliche Erscheinung tritt auch an dünnen Kapillaren auf: so tritt z. B. das Wasser aus einem Zylinder aus porösem Ton aus, wenn man zwischen der Innenelektrode und einer (negativen) Außenelektrode Spannung anlegt. In einer Kapillaren vom Radius r und der Länge l entsteht ein Überdruck

$$p = \frac{8 \varepsilon_r \varepsilon_0 \xi l}{r^2} E. \tag{17/27}$$

17.63 Polarografie [17.30, 17.54]

Befinden sich in einer Lösung mehrere Ionensorten, so hängt die Reihenfolge der Abscheidung an den Elektroden bei der Elektrolyse von der relativen Größe der Einzelpotentiale ab. Die quantitative und qualitative Analyse gelöster Stoffe bezeichnet man als *Polarografie.*

Man benutzt hierzu ein Entladungsgefäß nach Abb. 17.15a, dessen Hg-Anode A den Boden bedeckt, während die Hg-Katode K als *Tropfelektrode* ausgebildet ist, die in die Analysenlösung taucht. Mit Hilfe des Potentiometers P wird die anliegende Spannung U_p stetig gesteigert, während mit dem empfindlichen Galvanometer G oder einem pA-Meter der Strom registriert wird. Bei Erreichen der Zersetzungsspannung steigt der Strom stark an und bleibt so lange konstant, bis das Reduktionspotential des nächsten Ions erreicht wird. Aus der Höhe der registrierten Stufen (s. Abb. 17.15b) kann auf die Stoffmenge, aus dem Zersetzungspotential auf die Ionensorten geschlossen werden.

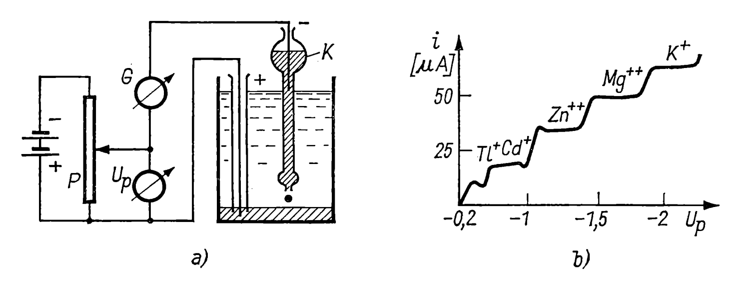


Abb. 17.15 Polarometrische Analyse: Anordnung (a), Polarogramm (b)

Über ein Instrument für schnelle Präzisionsmessungen siehe [*17.58*], über Messung hoher Polarisationsspannungen siehe [*17.44*].

17.64 Elektrolytisches Polieren [*17.4*, *17.57*]

Unter elektrolytischem Polieren versteht man die Herstellung einer vollkommen ebenen Metalloberfläche, d. h. nach der Beseitigung der von der Bearbeitung herrührenden gröberen Oberflächenrauhigkeiten durch *Abätzen* die anschließende Erzeugung einer spiegelnden Fläche durch anodische Behandlung der Probe. Durch den Ätzvorgang werden sowohl die geometrischen Oberflächenunebenheiten als auch die strukturlosen, „verschmierten" Schichten abgetragen, die je nach Bearbeitung und Material beim Feilen 45 μm (V2A) bis 130 μm (Zn) oder nach dem Schleifen 12 μm (V2A) bis 60 μm (Zn) Dicke besitzen. Durch das anschließende Polieren entsteht eine spiegelnde, blanke und glänzende Oberfläche mit einer restlichen Rauhigkeit von weniger als 1/100 μm.

Als Elektrolyt dient z. B. konzentrierte Orthophosphorsäure (H_3PO_4) oder Perchlorsäure ($HClO_4$); die Katode besteht aus Pt oder Ni. In Abb. 17.16

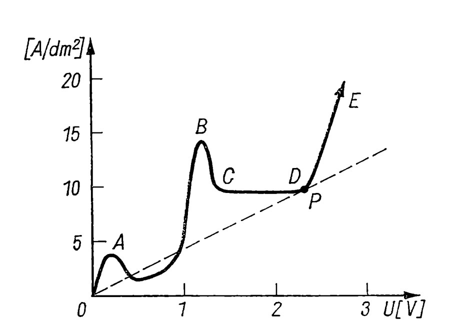


Abb. 17.16 Stromdichte-Spannungs-Kurve einer Cu–H_3PO_4-Zelle

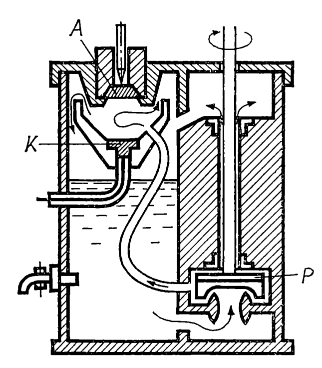


Abb. 17.17 Elektropoliergerät

ist am Beispiel des Cu—H_3PO_4-Systems der Zusammenhang zwischen Anodenpotential und Anodenstromdichte dargestellt. Wird an den beiden Cu-Elektroden die Spannung in Stufen gesteigert, wobei jeweils die Gleichgewichtseinstellung abzuwarten ist, so treten charakteristische Maxima und Minima auf, die in der Abbildung durch Buchstaben gekennzeichnet sind. Bei kleiner Stromdichte, d. h. zwischen *A* und *B*, wird die Probe geätzt. Zwischen *B* und *C* treten Instabilitäten mit periodischen Stromschwankungen auf, während zwischen *C* und *D* *Elektropolieren* bei konstanter Stromdichte stattfindet. Die Polierqualität nimmt bis *D* zu; bei *D*···*E* tritt Gasbildung auf und wird eine genarbte Oberfläche erhalten. Die besten Ergebnisse werden für Cu mit einer H_3PO_4-Konzentration von 500···1000 g/l bei Spannungen zwischen 0,5 und 1,5 V und Stromdichten zwischen 2 und 4 A/dm² erhalten.

Für spezielle Metalle wie Ni, Ge, Pt, Pd und Au können geschmolzene Elektrolyte verwendet werden.

Zur praktischen Anwendung gibt es eine Reihe kommerzieller Elektropoliergeräte, bei denen besonderer Wert auf die Regelung der Polierbedingungen

und die Umwälzung des Elektrolyten gelegt wird. In Abb. 17.17 ist vereinfacht ein Gerät mit einer Zentrifugalpumpe P zur Umwälzung des Elektrolyten dargestellt, bei dem die Probe A von oben auf einen Dichtsitz gepreßt und von unten von der Flüssigkeit bespült wird.

Glatte und glänzende elektropolierte Oberflächen lassen sich nur mit *reinen* Metallen oder einphasigen Legierungen, die ohne Einschlüsse sind, erreichen. Mehrphasige Legierungen ergeben lokale Potentialdifferenzen und besitzen keine eindeutigen Strom-Spannungs-Kennlinien.

Die Vorteile des Elektropolierens — Einfachheit, Geschwindigkeit (meist nur 30···60 s), Anpassung an die Probengröße und Aufdecken der kristallinen Struktur — haben das Verfahren zu einem wertvollen Werkzeug in der Forschung und bei der industriellen Fertigung gemacht.

LITERATURHINWEISE

§ 1 Elektrische Maßsysteme und Einheiten

1.1 Carr, L. H. A., Proc. IEE *97*, 235 (1950)
2 Huntoon, R. D., und McNish, A. G., Suppl. Nuovo Cim. (10) *6*, 146 (1957)
3 Fischer, J., Elektrotechn. Z. (ETZ) (A) *77*, 280 (1956)
4 Fischer, J., Größen und Einheiten der Elektrizitätslehre. Berlin — Göttingen — Heidelberg 1961
5 Stille, U., Messen und Rechnen in der Physik, 2. Aufl. Braunschweig 1961
6 Wallot, J. Elektrotechn. Z. (ETZ) *43*, 1329 und 1381 (1922)
7 Wallot, J., Physik. Z. *44*, 17 (1943)
8 Wallot, J., Größengleichungen, Einheiten und Dimensionen, 2. Aufl. Leipzig 1957
9 Westphal, W. H., Die Grundlagen des physikalischen Begriffssystems. Braunschweig 1965
10 Comptes rendus de la 10e Conférence générale des poids et mesures. Paris 1955; Comptes rendus de la 11e Conférence générale des poids et mesures. Paris 1961
11 Verordnung über die physikalisch-technischen Einheiten vom 14. 8. 1958. DDR-GBl. I, Nr. 56, 647 (1958)
12 Verordnung über die physikalisch-technischen Einheiten vom 31. 5. 1967. DDR-GBl. II, Nr. 52, 351 (1967)
13 Anordnung über die Tafel der gesetzlichen Einheiten vom 26. 11. 1968. DDR-GBl., Sonderdruck Nr. 605 (1969)
14 Gesetz über Einheiten im Meßwesen vom 2. 7. 1969. Bundesgesetzblatt der BRD, Teil I, Nr. 55, 709 (1969)

§ 2 Spannungs- und Strommessung

2.1 Atwood, S. S., Electric and Magnetic Fields. New York 1949
2 Bahr, G. F., Carlsson, L., und Lomakka, G., Rev. sci. Instr. *27*, 749 (1956)
3 Barnes, R. B., und Silverman, S., Rev. mod. Physics *6*, 162 (1934)
4 Beattie, J. R., und Conn, G. K. T., Rev. sci. Instr. *25*, 888 (1954)
5 Beers, Y., Nat. Bur. Standards Rep. No. 6747, 1961
6 Beetz, W., Elektrizitätszähler. Braunschweig 1958
7 Beetz, W., Elektrizitätszähler, Tarifgeräte und Schaltuhren, 3. Aufl. Braunschweig 1957
8 Beneking, H., Kupferschmidt, K. H., und Wolf, H., Elektrotechn. Rdsch. *10*, 268 und 348 (1956)
9 Berndt, H., Diss. TH München 1964
10 Beug, L., und Eggers, R., AEG-Mitteilungen *50*, 352 (1960)
11 Blythe, H. J., Harvey, T. J., Hoare, F. E., und Moody, D. E., Cryogenics *4*, 28 (1964)
12 Borrmann, D., Elektrie. *18*, 46 (1964)
13 Bowdler, G. W., Proc. IEE (B) *102*, 301 (1955)
14 Braddick, A. J. J., The Physics of Experimental Method. London 1954 (Dtsch. Übers.: Die Physik des experimentellen Arbeitens. Berlin 1959)
15 Brewer, A. W., J. sci. Instr. *30*, 91 (1953)
16 Brière, M., und Weill, J., J. Physique Radium *16*, 695 (1955)

2.17 Broadbent, T. E., Cooper, R., und Elliot, C. T., J. sci. Instr. *42*, 618 (1965)
18 Brooks, H. B., Defandorf, F. M., und Silsbee, F. B., J. Res. nat. Bur. Standards, *20*, 253 (1938)
19 Brunner, G., Z. angew. Physik *10*, 98 (1958)
20 Bubert, I., Elektrische Meßgeräte. Füssen/Allgäu, 1949
21 Bubert, J., Arch. techn. Messen (ATM) J 013—3, 4 (1947)
22 Bumann, H., Elektrotechn. und Maschinenbau *62*, 441 (1944)
23 Burtt, R. B., und Willis, J., J. sci. Instr. *34*, 177 (1957)
24 Caldecourt, V. J., Rev. sci. Instr. *20*, 748 (1949)
25 Cassie, A. B. P., J. sci. Instr. *7*, 21 (1930)
26 Chaplin, G. B. B., und Owens, A. R., Proc. IEE (B) *105*, 249 und 258 (1958)
27 Chater, W. T., Rev. sci. Instr. *40*, 529 (1969)
28 Clark, A. F. C., und Fickett, F. R., Rev. sci. Instr. *40*, 465 (1969)
28a Clarke, J., Philos. Mag. *13*, 115 (1966)
29 Claussnitzer, W., und Neumann, H., Z. angew. Physik *2*, 443 (1950)
30 Compton, A. H., und Compton, K. T., Physic. Rev. *14*, 85 (1919)
31 Copeland, K., Downing, A. C., und Hill, A. V., J. sci. Instr. *30*, 40 (1953)
32 Coursaget, J., Ann. Physique *7*, 30 (1952)
33 Crawford, D., und Rogers, G., Physic. Rev. *76*, 199 (1949)
34 Dauphinee, T. M., Physic. Rev. *87*, 230 (1952)
35 Dekabrun, L. L., Sov. Physics — J. techn. Physics *2*, 1461 (1957)
36 Devins, J. C., und Reynolds, S. I., Rev. sci. Instr. *28*, 11 (1957)
37 Diesselhorst, H., Arch. techn. Messen (ATM) J 931—9 (1956)
38 Diggle, H., und Hartill, E. R., Proc. IEE (II) *101*, 349 (1954)
39 Dimeff, J., und Lane, J. W., Rev. sci. Instr. *35*, 666 (1964)
40 Dowben, R. M., Rev. sci. Instr. *23*, 506 (1952)
41 Downing, A. C., J. sci. Instr. *25*, 230 (1948); *12*, 277 (1935); *30*, 40 (1953)
42 Dubrau, J., Kernenergie *5*, 752 (1962)
43 Durand, E., Electrostatique et magnétostatique. Paris 1953
44 Ebinger, A., Elektrotechn. und Maschinenbau *73*, 440 (1956)
45 Eckhardt, G., AEG-Mitteilungen *50*, 365 (1960)
46 Edelmann, M., Physik. Z. *7*, 314 (1906)
47 Eggers, H. R., Elektrotechn. Z. (ETZ) *71*, 85 (1950)
48 Ehmert, A., Z. angew. Physik *5*, 24 (1953)
49 Ehmert, A., und Mühleisen, R., Z. angew. Physik *5*, 43 (1953)
50 Eicke, H., Z. Instr.-Kde. *67*, 13 (1959)
51 Emschermann, H. H., Arch. techn. Messen (ATM) J 071—5 (1956)
51a Erdman, R. J., J. appl. Phys. *40*, 2086 (1969)
52 Feaster, G. R., Prosser, F. W., und Wiseman, G. G., Rev. sci. Instr. *23*, 763 (1952)
53 Feller, H. G., J. sci. Instr. *42*, 294 (1965)
54 Fischer, J., Z. techn. Physik *24*, 149 (1943)
55 Foh, J., Z. angew. Physik *18*, 14 (1964)
56 Fortrat, R., Rev. gén. Électr. (41) *66*, 226 (1957)
57 Fragstein, C. von, Z. angew. Physik *9*, 268 (1957)
58 Frankelhauser, C., und MacDonald, D. K. C., J. sci. Instr. *26*, 145 (1949)
59 Gänger, B., Arch. Elektrotechn. *39*, 443 (1949)
60 Gathman, St. G., und Anderson, R. V., Rev. sci. Instr. *36*, 1490 (1965)
61 Glass, F. M., Rev. sci. Instr. *20*, 239 (1949)
62 Goodman, P., J. sci. Instr. *32*, 439 (1955)
63 Gunn, R., Rev. sci. Instr. *25*, 432 (1954)
64 Gygax, S., Z. angew. Math. Physik (ZAMP) *12*, 289 (1961)

2.65 Gygax, S., Z. angew. Math. Physik (ZAMP) *13*, 519 (1962)
66 Hansen, J., Rev. sci. Instr. *7*, 182 (1936)
67 Hechtel, R., Elektronenröhrenphysik (NF) Nr. 1, 38 (1956)
68 Heeks, J. S., und Overall, D. W., J. sci. Instr. *34*, 370 (1957)
69 Hieronymus, H., und Weiss, H., Solid-State Electron. *6*, 463 (1963)
70 Higinbotham, W. A., und Rankowitz, S., Rev. sci. Instr. *22*, 688 (1951)
71 Hill, A. V., J. sci. Instr. *3*, 335 (1925/26)
72 Hill, A. V., J. sci. Instr. *11*, 309 (1934); *25*, 225 (1948)
73 Hill, A. V., J. sci. Instr. *25*, 225, 284 und 351 (1948)
74 Hill, A. V., J. sci. Instr. *30*, 44 (1953)
75 Hill, A. V., J. sci. Instr. *36*, 297 (1959)
76 Hoffmann, G., Physik. Z. *13*, 480 und 1029 (1912); Ann. Physik *42*, 1196 (1913)
77 Huey, R. M., und Lancaster, B. J., J. sci. Instr. *37*, 136 (1960)
78 Hug, A., Bull. Schweiz. elektrotechn. Ver. *42*, 385 (1951)
79 Hughes, W. T., und Lander, J. J., Rev. sci. Instr. *24*, 331 (1953)
80 Israël, H., Meteorol. Taschenb. *5*, 334 (1939)
81 Jaeger, W., Elektrische Meßtechnik, Leipzig 1928
82 Kachinskii, V. N., Cryogenics *5*, 34 (1965)
83 Kaden, H., Die elektromagnetische Schirmung in der Fernmelde- und HF-Technik. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1950
84 Kelen, A., Appl. sci. Res. [Hague] (13) *4*, 278 und 285 (1954/55)
85 Kendall, B. R. F., Nucl. Instr. *3*, 73 (1958)
86 Kennedey, P. A., und Kent, G., Rev. sci. Instr. *27*, 916 (1956)
87 Kind, D., Elektrotechn. Z. (ETZ) (A) *77*, 14 (1956)
88 Kinnard, I. F., Applied Electrical Measurements. New York 1956
89 Knauer, W., Z. angew. Physik *9*, 115 (1957)
90 Kolm, H. H., Rev. sci. Instr. *27*, 1046 (1956)
91 Kottler, F., in: S. Flügge ed., Handbuch der Physik, Bd. 16. Berlin 1927, S. 225
92 Kroebel, W., Z. angew. Physik *5*, 286 (1953)
93 Krönert, J., Arch. techn. Messen (ATM) J 721—1 (1932)
94 Krüger, H., Z. angew. Physik *4*, 173 (1952)
95 Kuhn, F., et al., Siemens-Z. *26*, H. 3 (1952)
96 Kuhrt, F., und Maaz, K., Elektrotechn. Z. (ETZ) (A) *77*, 487 (1956)
97 Kuraschow, A. A., und Linew, A. F., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 2, 70 (1957)
98 Larass, W., AEG-Mitteilungen *52*, 10 (1962)
99 Lewis, I. A. D., und Collinge, B., Rev. sci. Instr. *24*, 1113 (1953)
100 Lindemann, F. A., und Kerley, T. C., Philos. Mag. *47*, 577 (1924)
101 Löhle, F., Z. Instr.-Kde. *53*, 323 (1933)
102 Lücking, H., Z. angew. Physik *4*, 169 (1952)
103 Lutz, C. W., Physik. Z. *24*, 166 und 460 (1923); *25*, 282 (1924)
104 Lutz, C. W., Z. Instr.-Kde. *60*, 252 (1940)
105 MacDonald, D. K. C., J. sci. Instr. *24*, 232 (1947)
106 Madey, R., und Farly, G., Rev. sci. Instr. *25*, 275 (1954)
107 McHugo, J. W., J. sci. Instr. *36*, 288 (1959)
108 Meissner, W., und Doll, R., Z. angew. Physik *7*, 461 (1955)
109 Mende, H. G., Elektronik *4*, 78 (1955)
110 Merz, L., Arch. Elektrotechn. *31*, 1 (1937)
111 Merz, L., Arch. techn. Messen (ATM) J 014—8 (1938); Z. Instr.-Kde. *58*, 324 (1938)
112 Metcalf, J., und Thompson, H., Physic. Rev. *30*, 1498 (1930)
113 Meyer, E., Arch. techn. Messen (ATM) Z 65—5 (1949); Z 65—6 (1951)

2.114 MEYER, E., und MOERDER, C., Spiegelgalvanometer und Lichtzeigerinstrumente. Leipzig 1952
115 MEYLAN, L., Helv. physica Acta *5*, 276 (1932); *7*, 475 (1934)
116 MILATZ, J. M., BOORT, H. J. J., LAAR, J. VAN, und ALKEMADE, C. T. J., Appl. sci. Res. [Hague] (B) *4*, 447 (1955)
117 MILES, W. R., Rev. sci. Instr. *10*, 134 (1939)
118 MOERDER, C., Arch. techn. Messen (ATM) J 721—11, 12 (1949)
119 MOERDER, C., Arch. techn. Messen (ATM) Z 65—7 (1952)
120 MOERDER, C., Grundlagen der Drehspulinstrumente und verwandter Systeme. Karlsruhe 1960
121 MOLL, W. J. H., und BURGER, H. C., Z. Physik *34*, 109 und 112 (1925)
122 MOULLIN, E., Spontaneous Fluctuations of Voltage. Oxford 1938
123 MUIR, W. B., Rev. sci. Instr. *35*, 408 (1964)
124 MURRAY, C. T., und HOLLWAY, D. L., J. sci. Instr. *32*, 481 (1955)
125 NAMBA, S., Rev. sci. Instr. *27*, 336 (1956)
126 NEUBERT, U., Elektrostatik in der Technik, Geräte — Maschinen — Anwendung, 2. Aufl. München 1954
127 NIELSEN, P., Rev. sci. Instr. *18*, 18 (1947)
128 NIESEN, E., Rev. sci. Instr. *32*, 1407 (1961)
129 NURRIE, D. H., WALL, I., und WOOD, A. E. R., J. sci. Instr. *42*, 356 (1965)
130 OSWALD, H., und STRAUBEL, H., Z. angew. Physik *9*, 438 (1957)
131 OTTE, V. A., und SULLIVAN, R. P., Rev. sci. Instr. *36*, 1504 (1965)
132 PALEVSKY, H., SWANK, R. K., und GRENCHIK, R., Rev. sci. Instr. *18*, 298 (1947)
133 PALM, A., Elektrische Meßgeräte und Meßeinrichtungen, 3. Aufl. Berlin 1948
134 PALM, A., Elektrostatische Meßgeräte. Karlsruhe 1951
135 PALM, A., Registrierinstrumente. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1950
136 PALMIERI, J. N., und GOLOSKIE, R., Rev. sci. Instr. *35*, 1023 (1964)
137 PENICK, D. B., Rev. sci. Instr. *6*, 115 (1935)
138 PERFECT, D. S., Proc. physic. Soc. *42*, 532 (1930)
139 PERUCCA, E., Z. Instr.-Kde. *47*, 524 (1927)
140 PETERS, C. J., Rev. sci. Instr. *36*, 174 (1965)
141 PFLIER, P. M., Siemens-Z. *22*, H. 2 (1942)
142 PFLIER, P. M., und JAHN, H., Elektrische Meßgeräte und Meßverfahren, 3. Aufl. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1965
143 PIPPARD, A. B., und PULLAN, G. T., Proc. Cambridge philos. Soc. *48*, 188 (1952)
144 PLANKEEL, F. H., Rev. sci. Instr. *29*, 899 (1958)
145 POHL, H. G., Z. angew. Physik *10*, 125 (1958)
146 PRENSKY, S. D., Modern Electronic Voltmeters. New York 1964
147 REESE jr., H., Nucleonics *6*, 40 (1950)
148 REIBEDANZ, H., SCHISKE, P., und UHLIG, H. R., Z. angew. Physik *19*, 73 (1965)
149 RICHARDS, J. M., und GEISOW, J. C. H., J. sci. Instr. *41*, 28 (1964)
150 RIDER, N. E., und BRADLEY, E. F., Rev. sci. Instr. *33*, 25 (1962)
150a RIES, R. P., und SATTERTHWAITE, C. B., Rev. sci. Instr. *38*, 1203 (1967)
151 RITSMA, R. J., Appl. sci. Res. [Hague] *6*, 429 (1957)
152 ROGERS, E. J., Rev. sci. Instr. *34*, 660 (1963)
153 ROGERS, H. H., Rev. sci. Instr. *34*, 250 (1963)
154 ROTHGORDT, U., Z. angew. Physik *9*, 496 (1957)
155 ROYDEN, H. N., und CALDWELL, D. O., Rev. sci. Instr. *27*, 91 (1956)
156 RUST, H. H., Z. angew. Physik *2*, 290 (1950)
157 RUST, H. H., und ENDESFELDER, H., Z. angew. Physik *2*, 39 (1950)
158 RYMER, T. B., und WRIGHT, K. H. R., J. sci. Instr. *29*, 139 (1952)
159 SCHEIBE, P. O., Rev. sci. Instr. *34*, 481 (1963)

2.160 Scherbatskoy, S. A., Gilmartin, T. H., und Swift, G., Rev. sci. Instr. *18*, 415 (1947)
161 Schilling, G. F., und Kreager, P., Rev. sci. Instr. *24*, 877 (1953)
162 Schlenz, H., und Gast, T., Z. Instr.-Kde. *65*, 167 (1957)
163 Schlosser, E.-G., Arch. techn. Messen (ATM) Z 159—60, 173—6 (1957)
164 Schlosser, E.-G., und Winterling, K.-H., Galvanometer. Karlsruhe 1960
165 Schlotter, C., und Kopineck, H. J., Ind.-Elektronik *1*, 3 (1955)
166 Schwenkhagen, H., Elektrizitätswirtschaft *25*, 300 (1926)
167 Seaton, N. T., Rev. sci. Instr. *20*, 500 (1949)
168 Servant, R., J. Physique Radium (8) *9*, 305 (1948)
169 Shalnikov, G. I., Sov. Physics — J. techn. Physics *2*, 1269 (1957)
170 Shonka, F. R., Failla, G., und Rose, J. E., Rev. sci. Instr. *35*, 1046 (1964)
171 Siegfried, G., AEG-Mitteilungen *50*, 368 (1960)
172 Simonyi, K., Theoretische Elektrotechnik. Berlin 1956
173 Sirs, J. A., J. sci. Instr. *36*, 223 (1959)
174 Smith, L. G., Rev. sci. Instr. *25*, 510 (1954)
175 Smith, A. W., und Wiedenbeck, M. L., Electrical Measurements. London 1959
176 Softky, S., und Jungerman, J., Rev. sci. Instr. *23*, 307 (1952)
177 Spangler, R. A., Rev. sci. Instr. *33*, 1406 (1962)
178 Stabe, H., Feinwerktechnik *57*, H. 7 (1953)
179 Stanek, J., Elektrotechnik *6*, 75 (1952)
180 Starke, H., und Schroeder, R., Arch. Elektrotechn. *20*, 115 (1928)
181 Stöckl, M., Elektrische Meßtechnik, 2. Aufl., Stuttgart 1961
182 Täuber-Gretler, A., Schweiz. techn. Z. *2*, H. 9 (1939)
182a Taylor, D. J., Rev. sci. Instr. *40*, 559 (1969)
183 Templeton, I. M., J. sci. Instr. *32*, 314 (1955)
184 Templeton, I. M., J. sci. Instr. *32*, 172 (1955)
185 Thiele, W., Zeiss-Nachrichten *7*, 55 (1955)
186 Violet, P., Funktechnik *3*, 113 (1948)
187 Vonnegut, B., und McCraig, D. A., Rev. sci. Inst. *28*, 1097 (1957)
188 Vroomen, A. R. de, und Baarle, C. van, Physica *23*, 785 (1957)
189 Wadey, W. C., Rev. sci. Instr. *27*, 910 (1956)
190 Waidelich, W., Z. angew. Physik *5*, 171 (1953)
191 Watson, E. E., Amer. J. Physics *27*, 404 (1959)
192 Watson, P. K., und Sharbaugh, A. H., Rev. sci. Instr. *35*, 1310 (1964)
193 Watts, R. J., Rev. sci. Instr. *22*, 356 (1951)
194 Weber, E., Mapping of Electric and Magnetic Fields. New York 1951
195 White, W. P., in: Temperature Symposium, New York 1941, S. 265
196 Witt, W., Z. angew. Physik *17*, 364 (1964)
197 Wood, R. H., und Jongenburger, H..S., Rev. sci. Instr. *35*, 407 (1964)
198 Wulf, E., Die Fadenelektrometer. Berlin 1933
199 Wulfson, K. S., J. techn. Fiziki (russ.) *20*, 758 (1950)
200 Wunsch, D. C., und Erteza, A., Rev. sci. Instr. *35*, 816 (1964)
201 Yarwood, J., und Croisette, D. H. de, Electron. Engng. *26*, 14 (1954)
202 Zipprich, B., Physik. Z. *37*, 35 (1936)
203 Curtis, R. W., et al., J. Res. nat. Bur. Standards *28*, 133 (1942)
204 Driscoll, R. L., und Cutkosky, R. D., J. Res. nat. Bur. Standards *60*, 297 (1958)
205 Driscoll, R. L., J. Res. nat. Bur. Standards *60*, 287 (1958)
206 Vigoureux, P., Metrologia *1*, 3 (1965)
207 Janowski, B. M., et al., Trudy WNIIM (russ.) *15* (75) (1953)
208 Gorbazewitsch, S. W., et. al., Trudy WNIIM (russ.) *31* (81) (1957)

§ 3 Lineare Netzwerke

3.1 BOONE, E. M., Circuit Theory of Electron Devices. New York 1953
2 CARLIN, H. J., und GIORDANO, A. B., Network Theory. New York 1964
3 CASSELL, W. L., Linear Electric Circuits. New York 1964
4 FARAGO, P. S., An Introduction to Linear Network Analysis. London 1961
5 FELDTKELLER, R., Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik, 6. Aufl. Stuttgart 1953
6 GUILLEMIN, E. A., Introductory Circuit Theory. New York 1953
7 JACKSON, J. D.., Introduction to Electric Circuits, 3. Aufl. New York 1965
8 KÜPFMÜLLER, K., Einführung in die theoretische Elektrotechnik, 7. Aufl. Berlin — Göttingen—Heidelberg 1962
9 LAURENT, T., Vierpoltheorie und Frequenztransformation (Übers. aus dem Schwed.). Berlin—Göttingen—Heidelberg 1956
10 MITTLEMAN, J., Circuit Theory Analysis. New York 1964
11 PEREKHALIN, M. A., Electrical Circuits. 1950
12 ROGERS, E. F., Topological and Matrices in the Solution of Networks. New York 1965
13 SISKIND, C. S., Electrical Circuits, 2. Aufl. New York 1965
14 SKWIRZYNSKI, J. K., Design Theory and Data for Electrical Filters. London 1965
15 VALKENBURG, M. E. VAN, Network Analysis, 2. Aufl. New York 1964
16 WUNSCH, G., Theorie und Anwendung linearer Netzwerke, Teil 2. Leipzig 1964

§ 4 Verstärker- und Gleichrichterelemente

4.1 ALDOUS, W. H., Proc. IEE (B) *105*, 273 (1958)
2 BAILEY, R., Electron. Engng. *27*, 64 (1955)
3 BECK, A. H. W., Thermionic Valves. Cambridge 1953
4 BENEKING, H., Z. angew. Physik *10*, 216 (1958)
5 BENSON, F. A., Voltage Stabilizers. London 1950
6 BERTHOLD, C., und BERTHOLD, H., Nachrichtentechn. Berlin *5*, 116 und 177 (1955)
7 BLEULER, E., und HAXBY, R. O., Methods of Experimental Physics, Bd. 2. New York 1964
8 BOCK, H., und GERICKE, R., Valvo-Berichte *4*, 104 (1958)
9 BOON, S. D., Germanium Diodes. Eindhoven 1956
10 BOONE, E. M., Circuit Theory of Electron Devices. New York 1953
11 BOROGODISKI, N. P., PASINKOW, W. W., CHOLUJANOW, G. F., und JASKOW, D. A., Isvest. Akad. Nauk SSSR, Ser. fis. (russ.) *20*, 1571 (1956)
12 BREMER, J. W., Superconducting Devices. New York 1962
13 BRENNEMAN, A. E., MCNICHOL, J. J., und SERAPHIM, D. P., Proc. IEEE *51*, 1009 (1963)
14 BUCHHOLD, T., Cryogenics *4*, 212 (1964)
15 BUCK, D. A., Proc. IRE *44*, 482 (1956)
16 BUCKINGHAM, M. J., in: Proceedings of the Madison Conference on Low Temperature. Madison 1957, S. 229
17 BURNS, L. L., LECK, G. W., ALPHONSE, G. A., und KATZ, R. W., Solid-State Electron. *1*, 343 (1960)
18 CHARLES, D., und WARNECKE, R. J., Ann. Radioélectr. *10*, 256 (1955)
19 CHOW, W. F., Principle of Tunnel Diode Circuits. New York 1964
20 COBINE, J. D., Gaseous Conductors, 2. Aufl. New York 1958
21 COOPER, B. F. C., Proc. IRE *43*, 796 (1955)

4.22 CROWE, J. W., IBM J. Res. Development *1*, 295 (1957)
23 DOSSE, J., Der Transistor — Ein neues Verstärkerelement. München 1957
24 DANIELS, E., und COOK, A. D., Electronics *37*, Nr. 4,72 (1964)
25 ENGEL, A. VON, Ionized Gases. Oxford 1955
26 GÄRTNER, W. W., Einführung in die Physik des Transistors. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1963
27 GEIST, D., Z. angew. Physik *3*, 32 (1951)
28 GERLACH, W., AEG-Mitteilungen *51*, 348 (1961)
29 GERLACH, W., Z. angew. Physik *19*, 196 (1965)
30 GEWARTOWSKI, J. W., und WATSON, H. A., Principles of Electron Tubes. London 1965
31 GRAY, P. E., et al., Physical Electronics and Circuit Models of Transistors. New York 1958
32 GREMMELMAIER, R., und HENKEL, H.-J., Z. Naturforsch. *14a*, 1072 (1959)
33 GRIFFIN, A. W. J., und RAMSHAW, R. S., Thyristors and their Application. New York 1965
34 GRUHLE, W., Elektronische Hilfsmittel des Physikers. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1960
35 HOFMEISTER, E., Siemens-Z. *32*, 134 (1958)
36 HOLLMANN, H. E., Elektron. Rdsch. *9*, 277, 325, 328 und 399 (1955)
37 HYDE, F. J., J. sci. Instr. *35*, 115 (1958)
38 JAGER, J., Philips techn. Rdsch. *16*, 213 (1955)
39 JOHNSON, E. O., Electronics *24*, Nr. 5, 107 (1951)
40 KESTENBAUM, A. L., und DITRICK, N. H., RCA Rev. *18*, 12 (1957)
41 KLEIN, E., Nachrichtentechn. Z. *16*, 327 (1963)
42 KNOOP, E., Z. angew. Physik *5*, 105 (1953); *7*, 366 und 575 (1955)
43 KNOOP, E., und KROEBEL, W., Z. angew. Physik *2*, 281 (1950)
44 KUHRT, F., Elektrotechn. Z. (ETZ) (A) *78*, 342 (1957)
45 LEDIG, G., Diss. TU Berlin 1958
46 LINDMAYER, J., und WRIGLEY, C. Y., Fundamentals of Semiconductor Devices. London 1965
47 LLEWELLEN-JONES, F., Ionization Breakdown in Gases. London 1957
48 LOEB, L. B., Basic Processes of Gaseous Electronics. Berkeley 1955
49 LOVERING, W. F., J. IEE (NS) *1*, 710 (1955)
50 LOVERING, W. F., und BRITTEN, D. B., Proc. IEE (B) *104*, 368 (1957)
51 LURCH, J., Fundamentals of Electronics. New York 1964
52 MARCHAND, J. F., Physics Letters *2*, 57 (1963)
53 MEEK, J. M., und CRAGGS, J. J., Electrical Breakdown of Gases. Oxford 1953
54 MEYER-BRÖTZ, G., Telefunken-Z. *33*, 85 (1960)
55 MOERDER, C., Transistortechnik. Stuttgart 1960
56 MOERDER, C., Grundlagen der Transistortechnik. Frankfurt/Main 1964
57 MONTGOMERY, H. C., Bell System techn. J. *31*, 950 (1952)
58 MOULLIN, E. B., Spontaneous Fluctuations of Voltage. Oxford 1938
59 MÜNCH, W. VON, Z. angew. Physik *9*, 621 (1957)
60 NEALE, D. M., Cold Cathode Tube Circuit Design. New York 1965
61 NEETESON, P. A., Flächentransistoren in der Impulstechnik, 3. Aufl. Eindhoven 1965
62 NELSON, J. T., IWERSEN, J. E., und KEYWELL, F., Proc. IRE *46*, 1209 (1958)
63 NEWHOUSE, V. L., Applied Superconductivity. New York 1964
64 NEWHOUSE, V. L., und BREMER, J. W., J. appl. Physics *30*, 1458 (1959)
65 NEWHOUSE, V. L., BREMER, J. W., und EDWARDS, H. H., Proc. IRE *48*, 1395 (1960)
66 OLSEN, J. L., Suppl. Bull. IIF [Delft] S. 91 (1958)

4.67 OTTO, K., und MÜLLER, K., Flächentransistoren, 4. Aufl. Berlin 1965
68 RCA — Tunnel Diode Manual, 1963
69 RIDDLE, R. L., und RISTENBATT, M. P., Transistor Physics and Circuits. New York 1958
70 ROHDE, U. L., Transistoren bei höchsten Frequenzen. Berlin 1965
71 ROMPE, R., und STEENBECK, M., Ergebn. exakt. Naturwiss. *18*, 257 (1938)
72 ROSENBERG, W., Nachrichtentechnik *7*, 105 (1957)
73 ROSS, I. M., und THOMPSON, N. A. C., Nature [London] *175*, 518 (1955)
74 ROTHE, H., Elektronenröhrenphysik. München 1954
75 ROTHE, H., und KLEEN, W., Hochvakuum-Elektronenröhren, Bd. 1. Frankfurt/Main 1955
76 RYDER, J. D., Engineering Electronics with Industrial Applications and Controls. New York 1957
77 SALOW, H., Der Transistor — Physikalische und technische Grundlagen. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1963
78 SALOW, H., und MÜNCH, W. VON, Z. angew. Physik *8*, 114 (1956)
79 SCHLEGEL, H., Der Transistor — Allgemeine Grundlagen. Hannover 1959
80 SCHULTZ, W., Z. angew. Physik *20*, 26 (1965)
81 SEILER, K., Physik und Technik der Halbleiter. Stuttgart 1964
82 SEVIN, L. J., Field-Effect Transistors. New York 1965
83 SLEPIAN, J., und LUDWIG, L. R., Trans. AIEE *52*, 693 (1933)
84 SPENKE, E., Z. angew. Physik *5*, 472 (1953)
85 SPENKE, E., Siemens-Z. *32*, 110 (1958)
86 STRUTT, J. O., Transistoren. Zürich 1954
87 STRUTT, J. O., Lehrbuch der drahtlosen Nachrichtentechnik, Bd. 3. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1957
88 THOMAS, D. E., und DACEY, G. C., Trans. IRE *CT-3*, 22 (1956)
89 VAN DER ZIEL, A., Noise. Englewood Cliffs/N.J. 1954
90 VALDES, L. B., The Physical Theory of Transistors. New York 1961
91 VESSEM, J. C. VAN, Philips techn. Rdsch. *16*, 200 (1955)
92 WAGNER, K., Valvo-Berichte *5*, 86 (1959)
93 WEISS, H., Z. Naturforsch. *11a*, 684 (1956)
94 WEISS, H., Solid-State Electron. *7*, 279 (1964)
95 WEITZSCH, F., Valvo-Berichte *3*, 1 (1957)
96 WEIZEL, W., und ROMPE, R., Theorie elektrischer Lichtbögen und Funken. Leipzig 1949
97 WILSON, B. L. H., J. Brit. IRE *18*, 207 (1958)
98 WILLIAMS, A. D., und GORE, D. C., Proc. IEE *106*, 35 (1959)
99 ZEINES, J., Principles of Applied Electronics. New York 1964

§ 5 Aktive Kreise (Gleichrichter, Verstärker, Oszillator)

5.1 AITCHISON, R. E., Electron. Engng. *27*, 224 (1955)
2 ALTES, J. P. K., und SCHANZ, G., Logische Schaltungen mit Transistoren. Hamburg 1970
3 ANDERSON, A. L., Proc. IRE *40*, 1541 (1952)
4 ANKEL, T., und WINTERMEYER, R., Ann. Physik *18*, 181 (1956)
5 ARTZT, M., Electronics *18*, Nr. 2, 112 (1945)
6 BATTYE, C. K., J. sci. Instr. *34*, 263 (1957)
7 BLACK, H. S., Electr. Engr. *53*, 114 (1934)
8 BLUME, R., Rev. sci. Instr. *29*, 122 (1958)

5.9 Bode, H. W., Network Analysis and Feedback Amplifier Design. New York 1945
10 Boone, E. M., Circuit Theory of Electron Devices. New York 1953
11 Brunetti, C., Proc. IRE *27*, 88 (1939)
12 Carroll, J. M., Microelectronic Circuits and Application. New York 1965
13 Cattermole, R. W., Transistor Circuits, 2. Aufl. London 1964
14 Chance, B., et al., Rev. sci. Instr. *22*, 683 (1951)
15 Chirlian, P., Analysis and Design of Electronic Circuits. New York 1965
16 Close, R. N., und Lebenbaum, M. T., Electronics *21*, Nr. 4, 100 (1948)
17 Dauphine, T. M., Rev. sci. Instr. *26*, 401 (1955)
18 Dreyer, H. J., Nachrichtentechn. Fachber. *14*, 21 (1959)
19 Dubrau, J., Kernenergie *5*, 752 (1962)
20 Edson, W. A., Vacuum-Tube Oscillators. New York 1953
21 Fleming, L., Electronics *30*, Nr. 1, 178 (1957)
22 Frank, E., Pulsed Linear Networks. New York 1943
23 Giacoletto, L. J., RCA Rev. *14*, 28 (1953)
24 Ginzton, E. L., und Hollingsworth, L. M., Proc. IRE *29*, 43 (1941)
25 Glasford, G. M., Linear Analysis of Electronic Circuits. New York 1965
26 Hakim, S. S., und Barrett, R., Transistor Circuits in Electronics. New York 1965
27 Harris, D. J., Analogue and Digital Computer Methods. London 1964
28 Hartley, M. G., An Introduction to Electronic Analogue Computers. London 1962
29 Herold, E. W., Proc. IRE *23*, 1201 (1935)
30 Herzog, W., Nachrichtentechn. Z. *11*, 550 (1958)
31 Hoell, P. C., Rev. sci. Instr. *29*, 1120 (1958)
32 Johnson, C. L., Analogue Computer Techniques, 3. Aufl. New York 1956
33 Kammerloher, J., Transistoren, Bd. 1, 3. Aufl. Prien 1965
34 Llewellyn, F. B., Proc. IRE *19*, 2063 (1931)
35 Lo, A. W., Proc. IRE *40*, 1531 (1952)
36 Loftin, E. H., und White, S. Y., Proc. IRE *18*, 669 (1930)
37 MacDonald, J. R., Rev. sci. Instr. *25*, 144 (1954)
38 Mainstone, J. S., J. sci. Instr. *36*, 478 (1959)
39 Malmstadt, H. V., Enke, C. G., und Toren, E. C., Electronics for Scientists. New York 1963
40 Mansfeld, W., Nachrichtentechnik *5*, 145 (1955)
41 Mason, W. P., Bell System techn. J. *19*, 74 (1940)
42 Mather, N. W., Electronics *19*, Nr. 5, 136 (1946)
43 McFee, R., Rev. sci. Instr. *21*, 770 (1950)
44 Maier-Leibnitz, H., Z. angew. Physik *12*, 97 (1960)
45 Missen, J. I., Proc. IEE *106*, 3 (1959)
46 Nyquist, H., Bell System techn. J. *11*, 126 (1932)
47 Offner, F. F., Rev. sci. Instr. *25*, 579 (1954)
48 Olsson, B. G., Regelungstechnik *4*, 143 (1956)
49 Oser, E. A., Enders, R. O., und Moore, R. P., RCA Rev. *13*, 369 (1952)
50 Puckle, O. S., Time Bases. London 1952
51 Rechenberg, P., Grundzüge digitaler Rechenautomaten. München— Wien 1968
52 Reich, H. J., Theory and Application of Electron Tubes, 2. Aufl. New York 1944
53 Richter, W., Electronics *16*, Nr. 2, 112 (1943)
54 Rogers, H. H., Rev. sci. Instr. *36*, 866 (1965)
55 Rücklin, R., Arch. elektr. Übertr. (AEÜ) *6*, 163 (1952)
56 Rumswinkel, K.-E., Z. angew. Physik *6*, 551 (1954)
57 Ryder, R. M., und Kircher, R. J., Bell System techn. J. *28*, 367 (1949)
58 Sard, E. W., Convention Rec. IRE (2) 119 (1954)

5.59 SCHADE, O. H., Proc. IRE *31*, 341 (1943)
60 SCHULTHEIS, P. M., und REICH, H. J., Proc. IRE *39*, 627 (1951)
61 SEARLE, C. L., et al., Elementary Circuit Properties of Transistors. New York 1965
62 SEELY, S., Electron-Tube Circuits. New York 1950
63 SEELY, S. W., und KIMBALL, C. N., RCA Rev. *3*, 290 (1939)
64 SHEA, R. F., et al., Principles of Transistor Circuits. New York 1952
65 SHENK, E. R., Electronics *17*, Nr. 1, 136; Nr. 2, 140; Nr. 3, 138 (1944)
66 SPANGENBERG, K. R., Fundamentals of Electron Devices. New York 1957
67 STANSEL, F. R., Proc. IRE *41*, 1096 (1953)
68 SULZER, P. G., Electronics *26*, Nr. 9, 171 (1953)
69 SZIKLAI, G. C., Proc. IRE *42*, 717 (1954)
70 TERMAN, F. E., Radio Engineering, 3. Aufl. New York 1947
71 TERMAN, F. E., Electronics *6*, 190 (1933)
72 THOMAS, H. A., Theory and Design of Valve Oscillators. London 1951
73 THOMPSON, B. J., Proc. IRE *21*, 591 (1933)
74 THORNTON, R. D., und ADLER, R. B., Multistage Transistor Circuits. New York 1965
75 THORNTON, R. D., SEARLE, C. L., PEDERSON, D. O., ADLER, R. B., und ANGELO, E. J., Multistage Transistor Circuits. New York 1965
76 UR, H., Proc. IRE *49*, 1092 (1961)
77 TIETZE, U., und SCHENK, C., Halbleiter-Schaltungstechnik. Berlin—Heidelberg—New York 1969
78 VALLEY, G. E., und WALLMANN, H., Vacuum Tube Amplifiers. New York 1948
79 VERHAGEN, C. M., Proc. IRE *41*, 615 (1953)
80 WAIDELICH, D. L., Trans. AIEE *60*, 1161 (1941)
81 WAIDELICH, D. L., Electronics *20*, Nr. 5, 120 (1947)
82 WEIR, W. D., und ENKE, C. G., Rev. sci. Instr. *35*, 833 (1964)
83 ZENNECK, H., Siemens-Z. *32*, 122 (1958)

§ 6 Niederfrequenter Wechselstrom

6.1 AIKEN, W. R., Proc. IRE *45*, 1599 (1957)
2 ALKEMADE, C. T. J., und LAVEN, W. J., Appl. sci. Res. [Hague] (B) *6*, 337 (1957)
3 AMATO, G., CHESI, E., und LAMBERT, J. C., Nucl. Instr. Meth. *20*, 341 (1963)
4 ANACKER, W., in: RINT, C., und KRETZER, K., ed., Handbuch für Hochfrequenz-Elektrotechniker, Bd. 4, Berlin 1957
5 ANDERSON, V. C., und RUDNICK, P., Rev. sci. Instr. *24*, 360 (1953)
6 ARDENNE, M. VON, Tabellen der Elektronenphysik, Ionenphysik und Übermikroskopie, Bd. 1. Berlin 1956
7 ARDENNE, M. VON, Nachrichtentechnik *5*, 481 (1955)
8 ARNOLD, A. H. M., Proc. IEE *101*, 121 (1954)
9 ARNOLD, A. H. M., Proc. IEE (B) *102*, 192 (1955)
10 AUER, H., Nachrichtentechnik *5*, 186 (1955)
11 AUGUST, G., AEG-Mitteilungen *53*, 261 (1963)
12 BAGLEY, A. S., Hewlett-Packard J. *2*, Jan. (1951)
13 BAKER, W. P., Proc. IEE (A) *103*, 519 (1956)
14 BAKER, W. P., J. sci. Instr. *36*, 30 (1959)
15 BALABUKHA, D. K., MIASNIKOV, L. L., und PLOTNIKOVA, E. N., Sov. Physics-Acoustics *2*, 260 (1956)
16 BANNER, E. H. W., Electronic Measuring Instruments. New York 1955
17 BAUER, R., Die Meßwandler. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1953

6.18 Beattie, J. R., und Conn, G. K. T., Electron. Engng. *25*, 299 (1953); *26*, 80 (1954)
19 Beauchamp, K. G., Electron. Engng. *30*, 358 (1958)
20 Bennet, J. A., Electron. Engng. *29*, 266 (1957)
21 Borries, B. von, Optik *3*, 321 (1948)
22 Borucki, L., und Dittmann, J., Digitale Meßtechnik. Berlin—Heidelberg 1966
23 Broding, R. A., Schroeder, J. D., und Westervelt, J. C., Trans. IRE *I-6*, 220 (1957)
24 Brodkorb, J., Z. Instr.-Kde. *66*, 74 (1958)
25 Browder, L. B., Rev. sci. Instr. *27*, 363 (1956)
26 Brüninghaus, F., Arch. Elektrotechn. *42*, 245 (1956)
27 Busch, G., Helv. physica Acta *27*, 204 (1954)
28 Clarebrough, L. M., Hargreaves, M. E., Michell, D., und West, G. W., J. sci. Instr. *30*, 282 (1953)
29 Clothier, W. K., IRE Trans. *CT-2*, 97 (1955)
30 Czech, J., Oszillografen-Meßtechnik. Berlin 1959
31 Daybell, M. D., Rev. sci. Instr. *35*, 1237 (1964)
32 Dietrich, W., Nachrichtentechn. Z. *9*, 504 (1956)
33 Dobrin, J., Instr. Automat. *27*, 288 und 300 (1954)
34 Dundovie, F. J., und Lode, T., Electronics *24*, Nr. 5, 136 und 156 (1951)
35 Dunn, A. I., McIntyre, A. L., und Bennett, A. L., Electronics *23*, Nr. 9, 94 (1950)
36 Eder, F. X., Z. techn. Physik 9, 203 (1940)
37 Edwards, W. D., Canad. J. Technol. *33*, 413 (1955)
38 Estoppey, R. F., Instruments *32*, 80 (1959)
39 Faulkner, E. A., und Harding, D. W., J. sci. Instr. *43*, 97 (1966)
40 Ferris, C. D., und Bartholomew, J., Rev. sci. Instr. *36*, 1652 (1965)
41 Firle, T. E., Rev. sci. Instr. *27*, 140 (1956)
42 Fischer, J., Theorie der thermischen Meßgeräte der Elektrotechnik. Stuttgart 1931
43 Fischer, J., Arch. Elektrotechn. *33*, 242 (1939); Z. techn. Physik *22*, 9 (1941)
44 Fleming, L., und Follin, W. W., Electronics *28*, Nr. 10, 144 (1955)
45 Fricke, H. W., Der Kathodenstrahloszillograph. Leipzig 1960
46 Fricke, H. W., Z. Instr.-Kde. *70*, 302 (1962)
47 Girvan, S. B. und Mellhagger, D. S., J. sci. Instr. *36*, 283 (1959)
48 Härtel, W., Lichtstrahl-Oszillographen. München 1960
49 Hague, J., Alternating Current Bridge Methods. London 1930
50 Hambley, N., Electron. Engng. *31*, 13 (1959)
51 Hawkes, H. D., und Arnold, A. H. M., J. IEE *1*, 676 (1955)
52 Helke, H., Elektrotechn. Z. (ETZ) (A) *77*, 569 (1956)
53 Hetzel, W., Z. Instr.-Kde. *66*, 161 (1958)
54 Hilbourne, R. A., und Jones, J. J., Proc. IEE (B) *102*, 763 und 786 (1955)
55 Howe, R. M., und Leite, R. J., Rev. sci. Instr. *24*, 901 (1953)
56 Hunt, F. V., Rev. sci. Instr. *4*, 672 (1933)
57 Hurter, T., Scientia electr. *3*, 26 (1957)
58 Jahn, H., Diss. TH Karlsruhe 1958
59 Jahn, H., Digitale Meßtechnik, VDE-Buchreihe Bd. 9. Wuppertal-Elberfeld 1962
60 Jeffreys, D. A., und Mackay, D. M., in: Proceedings of the 3rd International Conference on Medical Electronics. London 1960
61 John, S., Die Fernmessung. Karlsruhe 1963
62 Jungmeister, H. G., und König, H. L., Arch. elektr. Übertr. (AEÜ) *14*, 317 (1960)
63 Karolus, A., Jb. Dtsch. Ges. Chronometrie *5*, 29 (1954)

6.64 KEHLER, E., Frequenz *13*, 210 (1959)
65 KELLER, A., Elektrotechn. Z. (ETZ) (A) *71*, 232 (1950); *76*, 826 (1955)
66 KIP, A. F., BOUSQUET, A. G., EVANS, R. D., und TUTTLE, W. N., Rev. sci. Instr. *17*, 323 (1946)
67 KITAI, R., Electron. Radio Engr. *34*, 124 (1957)
68 KOPPELMANN, F., Trans. Instr. Meas. Conf. 227 (1949)
69 KOPPELMANN, F., Wechselstrommeßtechnik unter besonderer Berücksichtigung des mechanischen Präzisionsgleichrichters. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1956
70 KOVALEVSKI, N., und OLIVER, B. M., Hewlett-Packard J. *8*, Nr. 5 (1957)
71 KRÖNERT, J., Meßbrücken und Kompensatoren, Bd. 1. München 1935
72 LAPORTE, H., Z. angew. Physik *4*, 16 (1952)
73 LEIFSON, S. W., Amer. J. Physics *26*, 583 (1958)
74 LÖFFLER, K., Elektronik *4*, 73 (1955)
75 LOOMS, J. S. T., J. sci. Instr. *30*, 290 (1953)
76 MALACHOW, A. N., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 1, 79 (1958)
77 MAYRHAUSER, G. VON, Z. angew. Physik *1*, 68 (1948)
78 MEE, C. D., The Physics of Magnetic Recording. New York 1963/64
79 MEISSNER, W., und ADELSBERGER, V., Z. techn. Physik *11*, 102 und 143 (1930); *13*, 475 (1932); *14*, 111 (1933)
80 MEISSNER, H., Z. angew. Physik *4*, 89 (1952)
81 BIGALKE, A., Meßtechnik der Elektronenstrahl-Oszillographen. Karlsruhe 1959
82 MÖLLER, H. G., Elektrotechn. Z. (ETZ) *74*, 150 (1953)
83 MÜLLER-LÜBECK, K., Der Kathodenverstärker in der elektronischen Meßtechnik. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1956
84 NETTEL, S. J., Rev. sci. Instr. *28*, 37 (1957)
85 OLIVER, B. M., Hewlett-Packard J. *7*, 4 (1956)
86 OWEN, D., Alternating Current Measurements. New York 1953
87 PARK, J. H., und CONES, H. N., J. Res. nat. Bur. Standards *64C*, 229 (1960)
88 PARR, G., und DAVIE, O. H., The Cathode-Ray Tube and its Application, 3. Aufl. London 1959
89 PENTON, W. A., J. sci. Instr. *32*, 282 (1955)
90 PFANNENMÜLLER, H., Arch. techn. Messen (ATM) J 82—3 (1938)
91 PFLIER, P. M., Elektrizitätszähler. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1954
92 PHILIPPOFF, W. VON, Elektrotechn. Z. (ETZ) *53*, 405 (1932)
93 PIERCE, J. R., Proc. IRE *24*, 577 (1936)
94 PIESCH, J., Elektrotechn. und Maschinenbau *73*, 536 und 557 (1956)
95 POTOK, M. H. N., und McF. WALES, R. A., Electron Engng. *27*, 344 (1955)
96 RAYNER, G. H., J. sci. Instr. *30*, 17 (1953)
97 REINERT, W., Elektrotechn. Z. (ETZ) (B) *9*, 493 (1957)
98 RHODE, L., Z. techn. Physik *21*, 30 (1940)
99 RIDER, J. F., und USLAN, S. D., Encyclopedia on Cathode-Ray Oscilloscopes and their Uses, 2. Aufl. New York 1959
100 RUITER jr., J. H., Modern Oscilloscopes and their Uses. London 1957
101 RUMP, P., Physik. Z. *40*, 493 (1939); Elektrotechn. Z. (ETZ) (B) *7*, 163 (1955)
102 SA, A. DE, J. sci. Instr. *42*, 265 (1965)
103 SATTELBERG, K., Anzeigende Frequenzmesser. Karlsruhe 1956
104 SATTELBERG, K., Elektrotechn. Z. (ETZ) (A) *77*, 84 (1956)
105 SCHERING, H., und SCHMIDT, R., Z. Instr.-Kde. *38*, 1 (1918)
106 SCHLAMP, G., Elektrotechn. Z. (ETZ) (A) *81*, 784 (1960)
107 SCHMITZ, W. L., und SCHMITT, F., Die Verwendung des Magnetbandgerätes zur Speicherung des Kurvenverlaufs elektrischer Ströme. Köln—Opladen 1958
108 SCHRADER, H.-J., Z. Instr.-Kde. *65*, 69 (1957)

6.109 SCHULTZ, T. J., Rev. sci. Instr. *27*, 278 (1956)
110 SCHWALGIN, K., Radio Mentor *23*, 139 (1957)
111 SCHWENKHAGEN, H. F., Allgemeine Wechselstromlehre, Bd. 1. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1951
112 SCOTT, H., Bell System techn. J. *13*, 1 (1934); Proc. IRE *26*, 226 (1938)
113 SCROGGIE, S., Wireless Wld. *55*, 402 (1949)
114 SMILEY, G., Proc. IRE *42*, 677 (1954)
115 SMITH, S. T., und BROWN, H. E., Proc. IRE *41*, 1167 (1953)
116 SOMERVILLE, M. J., Electron. Engng. *28*, 308 (1956)
117 STABE, H., Feinwerktechnik *7*, 198 (1953)
118 STANEK, J., Technik elektrischer Meßgeräte, 2. Aufl. Berlin 1961
119 STARITZ, R. F., Elektronik *5*, 317 (1956)
120 SWEET, R. G., Rev. sci. Instr. *36*, 131 (1965)
121 TAYLOR, H., Proc. IRE *24*, 1324 (1936)
122 THWAITES, J. E., Proc. IEE *99*, 83 und 158 (1952)
123 TOBIN, M. W., GRUNDFEST, H., und SCHOENFELD, R. L., Das Elektron Nr. 5, 128 (1948)
124 TODD, C. D., Electronics *30*, Nr. 2, 184 (1957)
125 TOELLER, H., Arch. Elektrotechn. *33*, 593 (1939)
126 TRAUTNER, G., Arch. Elektrotechn. *42*, 94 (1955)
127 TURNER, H. M., und MCNAMARA, F. T., Proc. IRE *18*, 1743 (1930)
128 WALCHER, T., Das Trockengleichrichter-Vielfachmeßgerät. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1950
129 WALLOT, J., Einführung in die Theorie der Schwachstromtechnik, 5. Aufl. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1948
130 WEITZENMILLER, F., Elektronik *6*, 63 (1957)
131 WEY, R. J., Wireless Engng. *14*, 490 (1937)
132 WHITTAKER, J. W., Proc. IEE (II) *101*, 11 (1954)
133 WILKINS, F. J., und HARKNESS, S., Proc. IEE (B) *103*, 83 (1956)
134 WILLIAMSON, C., und NAGY, J., Rev. sci. Instr. *9*, 270 (1938)
135 WIRK, A., und THILO, H.-G., Niederfrequenz- und Mittelfrequenz-Meßtechnik für das Nachrichtengebiet. Stuttgart 1956
136 WOLMANN, W., und KADEN, H., Z. techn. Physik *12*, 470 (1931)
137 ZÖLLICH, H., Arch. techn. Messen (ATM) J 852—1 (1932); 852—2 (1933); 852—3 (1933)

§ 7 Hochfrequenz-Meßverfahren

7.1 BAKER, J. C., Electron. Engng. *26*, 190 (1954)
2 BAUER, H. G., Siemens-Z. *29*, 375 (1955)
3 BECHMANN, R., Arch. elektr. Übertr. (AEÜ) *5*, 89 (1951)
4 BECKER, G., Arch. elektr. Übertr. (AEÜ) *10*, 315 (1956)
5 BECKER, G., Arch. elektr. Übertr. (AEÜ) *11*, 41 (1957)
6 BECKER, G., Frequenz *12*, 82 (1958)
7 BECKER, G., Arch. elektr. Übertr. (AEÜ) *12*, 15 (1958)
8 BECKER, G., Frequenz *14*, 269 (1960)
9 BEERS, Y., Rev. sci. Instr. *36*, 696 (1965)
10 BENZ, F., Meßtechnik für Funkingenieure. Wien 1952
11 BENZ, F., Elektrotechn. und Maschinenbau *73*, 434 (1956)
12 BIRCH, J., FRITH, A. G., FERGUSON, A. C. L., MILES, R. H. A., und WERNER, J. F., Proc. IEE(C) *103*, 420 (1956)

7.13 Birx, D. L., und Fuschillo, N., Trans. IRE *I-7*, 310 (1958)
14 Bladel, J. van, J. sci. Instr. *30*, 299 (1953)
15 Bloch, H., Brown Boveri Mitt. *42*, 326 (1955)
16 Bösnecker, D., Z. angew. Physik *12*, 306 (1960)
17 Bornhardt, J. F., und Buhmann, G., Elektrotechn. Z. (ETZ) (A) *78*, 6 (1957)
18 Boucke, G., Kerntechnik *2*, 10 (1960)
19 Brando, F., Strumentazione *5*, 283 (1957)
20 Bruijning, H. G., Commun. News Nr. 4, 126 (1950)
21 Brunner, G., und Lösche, A., Z. angew. Physik *7*, 67 (1955)
22 Burnett, L. C., und Hawkes, M., Atomics *6*, 283 (1955)
23 Butler, F., Electron. Engng. *27*, 170 (1955)
24 Campbell, A., und Childs, E. C., Measurement of Inductance, Capacitance and Frequency. London 1935
25 Chakraborti, N. B., Indian J. Physics *32*, 537 (1958)
26 Clapp, J. K., Proc. IRE *42*, 1295 (1954)
27 Clothier, W. K., und Smith, W. E., J. sci. Instr. *32*, 67 (1955)
28 Crosby, M. G., Proc. IRE *27*, 126 (1939)
29 Cutler, C. C., Proc. IRE *43*, 140 (1955)
30 Dicke, R. H., Rev. sci. Instr. *17*, 268 (1946)
31 Ebbinge, W., Valvo-Berichte *4*, 81 (1958)
32 Essmann, A., Z. angew. Physik *6*, 115 (1954)
33 Fairley, E. S., Brit. J. appl. Physics *8*, 101 (1957)
34 Faulkner, E. A., J. sci. Instr. *34*, 461 (1957)
35 Feinberg, R., ed., Handbook of Electronic Circuits. London 1966
36 Ferguson, G. J., und Fraser, G. H., Rev. sci. Instr. *22*, 937 (1951)
37 Fischer, J., Arch. Elektrotechn. *33*, 242 (1939)
38 Frühauf, H., Z. Hochfrequenztechn. *37*, 229 (1931)
39 Garvin, R. I., Rev. sci. Instr. *21*, 903 (1950)
40 Gerharz, R., Z. angew. Physik *9*, 282 (1957)
41 Germeshausen, K. J., Goldberg, S., und McDonald, D. F., Trans. IRE *ED-4*, 152 (1957)
42 Giebe, E., und Scheibe, A., Z. Physik *33*, 335 (1925); *46*, 607 (1928); Hochfrequenztechn. und Elektroakust. *35*, 165 (1930); *41*, 83 (1933)
43 Gockel, L., Physik. Z. *18*, 657 (1936)
44 Goodman, D. H., Sloan, D. H., und Trau, E., Rev. sci. Instr. *23*, 766 (1953)
45 Gouriet, G. G., Wireless Engng. *27*, 105 (1950)
46 Graham, M., Higinbotham, W. A., und Rankowitz, S., Rev. sci. Instr. *27*, 1059 (1956)
47 Green, F. E., Electronics *23*, Nr. 4, 110 (1950)
48 Groszkowski, J., Proc. IRE *21*, 958 (1933)
49 Gugelberg, H. von, Helv. physica Acta *26*, 586 (1953)
50 Guggenbühl, W., und Strutt, M. J. O., Scientia electr. *2*, 99 (1956)
51 Hahn, H., und Orgass, R. J., Rev. sci. Instr. *34*, 406 (1963)
52 Haller, H., Frequenz *8*, 325 (1954)
53 Hathaway, J. C., und Babcock, D. F., Proc. IRE *45*, 5 (1957)
54 Heising, R. A., Quartz Crystals for Electrical Circuits. New York 1946
55 Henney, K., ed., Radio Engineering Handbook, 5. Aufl., New York 1959
56 Herborn, L. E., Bell Labor. Rec. *33*, 21 (1955)
57 Herrmann, A., Radio und Fernsehen *1*, 2 (1954)
58 Herzog, W., Arch. elektr. Übertr. (AEÜ) *6*, 159 (1952)
59 Hilberg, W., Telefunken-Ztg. *33*, 98 (1960)

7.60 Hölzler, E., und Holzwarth, H., Theorie und Technik der Pulsmodulation. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1957
61 Ichijo, B., und Arai, T., Rev. sci. Instr. *32*, 122 (1961)
62 Kandiah, K., Nr. 58—4 CERN, Genève 1958, S. 109
63 Karo, D., Proc. IEE (B) *105*, 505 (1958)
64 Klutke, F., Z. Instr.-Kde. *65*, 21 (1957)
65 Koepp, S., Hochfrequenztechn. und Elektroakust. *64*, 124 (1956)
66 Kretzmann, R., Industrielle Elektronik. Berlin 1952
67 Kretzmer, E. R., Proc. IRE *42*, 391 (1954)
68 Kroebel, W., Z. angew. Physik *6*, 293 (1954)
69 Kruegle, H. A., Rev. sci. Instr. *36*, 1672 (1965)
70 Kundu, P., Indian J. Physics *31*, 231 (1957)
71 Lippmann, H., Exp. Techn. Physik *1*, 1 (1953)
72 Lösche, A., Exp. Techn. Physik *3*, 13 (1955)
73 Macek, O., Frequenz *10*, 147 (1956)
74 Mack, H., Elektron. Rdsch. *11*, 102 (1957)
75 Majcher, J., in: II. Internationales Kolloquium Ilmenau. 1957, S. 171
76 Mason, W. P., Proc. IRE *28*, 220 (1940)
77 McDonald, D. F., und Benning, C. J., Rev. sci. Instr. *36*, 504 (1965)
78 Meinke, H. H., Einführung in die Elektrotechnik höherer Frequenzen, Bd. 1, 2. Aufl. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1965
79 Meinke, H., und Gundlach, F. W., Taschenbuch der Hochfrequenztechnik. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1956
80 Messenger, G. C., und McCoy, C. T., Proc. IRE *45*, 1269 (1957)
81 Moeller, H. G., Die physikalischen Grundlagen der Hochfrequenztechnik, 3. Aufl. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955
82 Mostafa, A., und Shaltout, M. H., Trans. IRE *I-6*, 63 (1957)
83 Müller-Lübeck, K., Der Kathodenverstärker in der elektronischen Meßtechnik. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1956
84 Nonnenmacher, W., Elektron. Rdsch. *10*, 125 (1956)
85 Ohl, G., Arch. elektr. Übertr. (AEÜ) *10*, 145 (1956)
86 Okorokow, W. W., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 5, 45 (1958)
87 Palma-Vittorelli, M. B., Palma, M. U., und Palumbo, D., Nuovo Cim. (10) *6*, 1211 (1957)
88 Pfeiffer, H., Nachrichtentechnik *6*, 166 (1956)
89 Philipp, E. O., Z. angew. Physik *8*, 119 (1956)
90 Popovič, V., und Popovič, D., Elektrotechn. Vestn. *22*, a1 (1954)
91 Porat, D. I., Rev. sci. Instr. *27*, 150 (1956)
92 Pyatt, E. C., J. sci. Instr. *32*, 469 (1955)
93 Reddy, K. V., J. sci. ind. Res. *16B*, 179 (1957)
94 Rietz, W., Z. angew. Physik *9*, 489 (1957)
95 Robinson, G., und Allen, R. van, Rev. sci. Instr. *23*, 701 (1953)
96 Rohde, L., und Leonhardt, R., Elektr. Nachrichtentechn. *17*, 117 (1940)
97 Rollin, B. V., J. sci. Instr. *41*, 239 (1964)
98 Ruben, M. J., Rev. sci. Instr. *36*, 1226 (1965)
99 Rühl, H., Nachrichtentechn. Z. *10*, 297 (1957)
100 Russell, R. L., Proc. IEE (A) *102*, 80 (1955)
101 Ryzko, S., in: II. Internationales Kolloquium Ilmenau. 1957, S. 176
102 Scheibe, A., Adelsberger, U., Becker, G., Ohl, G., und Süss, R., Z. angew. Physik *8*, 175 (1956)
103 Schlichting, K., Z. angew. Physik *9*, 458 (1957)
104 Schmidt-Tiedemann, K. J., Z. angew. Physik *9*, 454 (1957)

7.105 Schoenman, H., Prace Inst. Tele i Radiotechn. *1*, 19 (1957)
106 Schrader, H.-J., Z. Instr.-Kde. *71*, 330 (1963)
107 Schultz, Z. J., Rev. sci. Instr. *27*, 278 (1956)
108 Schure, A., Multivibrators. New York 1956
109 Seddon, J. C., Electronics *31*, 155 (1958)
110 Seed, T. J., Rev. sci. Instr. *35*, 473 (1964)
111 Seefeldner, W., Z. angew. Physik *6*, 282 (1954)
112 Shaull, J. M., und Shoaf, J. H., Proc. IRE *42*, 1300 (1954)
113 Sincair, R. B., Proc. IRE *28*, 497 (1940)
114 Speiser, A. P., Impulsschaltungen. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1963
115 Spinrad, R., Rev. sci. Instr. *30*, 647 (1959)
116 Spitzer, Arch. elektr. Übertr. (AEÜ) *5*, 544 (1951)
117 Terman, F. E., Radio Engineers' Handbook. New York 1943
118 Thompson, A. M., und Archer, R. W., Proc. IEE *106*, 61 (1959)
119 Tschiegg, C., und Greenspan, M., Rev. sci. Instr. *24*, 183 (1953)
120 Tuttle, W. N., Proc. IRE *28*, 23 (1940)
121 Vackar, J., Tesla techn. Rep. 1 (1949)
122 Veegens, J. D., und Prado, E., Philips techn. Rdsch. *15*, 249 (1954)
123 Vilbig, F., Lehrbuch der Hochfrequenztechnik. Frankfurt/M. 1960
124 Vogelsberg, D., Frequenz *19*, 200 (1965)
125 Waring, S., und Murphy, B., J. sci. Instr. *30*, 469 (1953)
126 Warner, A. W., Trans. IRE *I-7*, 185 (1958)
127 Wassiljew, A. A., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 2, 106 (1958)
128 White, D. L., J. appl. Physics *29*, 856 (1958)
129 Williams, P., J. sci. Instr. *42*, 474 (1965)
130 Wouk, V., Trans. IRE *I-6*, 3 (1957)
131 Zinke, O., Hochfrequenz-Meßtechnik, 2. Aufl. Leipzig 1947

§ 8 Höchstfrequenzphysik

8.1 Adelsberger, U., Arch. elektr. Übertr. (AEÜ) *10*, 51 (1956)
2 Allanson, J. T., Cooper, R., und Cowling, T. G., J. IEE *93*,177 (1946)
3 Arams, F. R., Proc. IRE *43*, 102 (1955)
4 Arditi, M., und Carver, T. R., J. appl. Physics *36*, 443 (1965)
5 Artman, J. O., Bloembergen, N., und Shapiro, S., Physic. Rev. (2) *109*, 1392 (1958)
6 Aschen, R., Mesures Contrôle ind. *22*, 245 (1957)
7 Autler, S. H., und McAvoy, N., Physic. Rev. *110*, 280 (1958)
8 Barlow, H. M., Proc. IRE *46*, 1411 (1958)
9 Baron, C., Suppl. Proc. IEE (B) *105*, 662 und 672 (1958)
10 Beatty, R. W., und Reggia, F., J. Res. nat. Bur. Standards *54*, 321 (1955)
11 Beaver, W. L., Suppl. Proc. IEE (B) *105*, 821 (1958)
12 Bell, W. E., Bloom, A., und Williams, R., Trans. IRE *MTT-7*, 95 (1959)
13 Bello, L. del, Alta Frequ. *27*, 629 (1958)
14 Birx, D. L., und Fuschillo, N., Trans. IRE *I-7*, 310 (1958)
15 Bleaney, B., Loubser, J. H. N., und Penrose, R. P., Proc. physic. Soc. *59*, 185 (1947)
16 Bloom, S., und Chang, K. K. N., RCA Rev. *18*, 578 (1957)
17 Bolef, D. I., und Chester, P. F., Trans. IRE *MTT-6*, 47 (1958)
18 Bonanomi, J., und Herrmann, J., Helv. physica Acta *29*, 224 (1956)
19 Bonnet, J., Onde électr. *33*, 259 (1953)

8.20 Borgnis, F., und Papas, C. H., Randwertprobleme der Mikrowellenphysik. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955
21 Boulding, R. S. H., The Resonant Cavity Magnetron. New York 1952
22 Brainerd, J. G., Koehler, G., Reich, H. J., und Woodruff, L. F., Ultra-High Frequency Techniques, 21. Aufl. New York 1946
23 Brown, G., Mason, D. R., und Thorp, J. S., J. sci. Instr. *42*, 648 (1965)
24 Bunemann, O., J. Electronics *3*, 1 (1957)
25 Butcher, P. N., Suppl. Proc. IEE (B) *105*, 684 und 705 (1958)
26 Carrara, N., Suppl. Nuovo Cim. (10) *2*, 851 (1955)
27 Carrara, N., Ronchi, L., Schaffner, M., und Francia, G. T. di, Alta Frequ. *26*, 116 (1957)
28 Clarricoats, P. J. B., Hayes, A. G., und Harvey, A. F., Suppl. Proc. IEE (B) *104*, 267 (1957)
29 Cohn, S. B., J. appl. Physics *20*, 257 (1949)
30 Coleman, P. D., und Becker, R. C., Trans. IRE *MTT-7*, 42 (1959)
31 Collin, R. E., Wireless Engng. *32*, 82 (1955)
32 Collins, G. B., Microwave Magnetrons. New York 1948
33 Combrisson, J., Honig, A., und Townes, C. H., C. R. hebd. Séances Acad. Sci. [Paris] *242*, 2451 (1956)
34 Cooper, D. C., Electron. Engng. *26*, 448 (1954)
35 Coutrez, R., Radioastronomie. Uccle (Belg.) 1956
36 Craven, G., und Lewin, L., Proc. IEE (B) *103*, 173 (1956)
37 Cullen, A. L., Proc. IEE *99*, 100, 112 und 183 (1952)
38 Cullen, A. L., und French, H. A., Proc. IEE *104*, 456 (1957)
39 Cutler, C. C., Proc. IRE *35*, 1284 (1947)
40 Dain, J., J. Electronics *1*, 35 (1955)
41 Daly, R. T., und Holloway, J. H., Trans. IRE *CS-5*, 25 (1957)
42 Davis, Q. V., Clarke, J. L., und Morris, R. G. T., Rev. sci. Instr. *35*, 561 (1964)
43 Dix, C. H., und Aldous, W. H., Microwave Valves. New York 1966
44 Eisfeld, D., Z. angew. Physik *19*, 128 (1965)
45 Engen, G. F., Trans. IRE *I-7*, 304 (1958)
46 Engen, G. F., J. Res. nat. Bur. Standards *63 c*, 77 (1959)
47 Essen, L., Wireless Engng. *23*, 126 (1946)
48 Essen, L., und Parry, J. V., Nature [London] *176*, 280 (1955)
49 Essen, L., Parry, J. V. L., Holloway, J. H., Mainberger, W. A., Reder, F. H., und Winkler, G. M. R., Nature [London] *182*, 41 (1958)
50 Fitzky, H.-G., Z. angew. Physik *10*, 297 (1958)
51 Frieser, A., Mikrowellenmeßtechnik. Berlin 1965
52 Fry, D. W., und Howard, F. K., Aerials for Centimeter Wavelength. Cambridge 1950
53 Fujisawa, Y., Electrotechn. J. Japan *3*, 23 (1957)
54 Fulford, J. A., und Blackwell, J. H., Rev. sci. Instr. *27*, 956 (1956)
55 Galloway, D. G., und Tolbert, C. W., Rev. sci. Instr. *35*, 628 (1964)
56 Gardner, A. L., Rev. sci. Instr. *37*, 23 (1966)
57 Gardner, A. L., und Hawke, R. S., Rev. sci. Instr. *37*, 19 (1966)
58 Gebauer, R., Z. angew. Physik *2*, 415 (1950)
59 Gebauer, R., und Kosmahl, H., Z. angew. Physik *4*, 267 (1952)
60 Ginzton, L., Microwave Measurements. New York 1957
61 Godfrey, R. M., Humphreys, B. L., Allin, P. E. V., und Mott, G., Proc. IEE (B) *104*, 355 und 366 (1957)
62 Gordon, J. P., und White, L. D., Proc. IRE *46*, 1588 (1958)

8.63 Gordon, J. P., Zeiger, H. J., und Townes, C. H., Physic. Rev. *99*, 1253 und 1264 (1955)
64 Gordon-Smith, A. C., Proc. IEE (B) *102*, 685 (1955)
65 Goubau, G., Honerjäger, R., und Müller, R., Elektromagnetische Wellenleiter und Hohlräume. Stuttgart 1955
66 Grebenkamper, C. J., und Hagen, J. P., Physic. Rev. *86*, 673 (1952)
67 Groll, H., Mikrowellentechnik. Stuttgart 1966
68 Groll, H., und Pusch, G., Fernmeldetechn. Z. *8*, 462 (1955)
69 Gundlach, F. W., Z. angew. Physik *4*, 147 (1952)
70 Hanckel, W., und Stockhausen, M., Z. angew. Physik *19*, 138 (1965)
71 Hansen, R. C., ed. Microwave Antennas. New York 1964
72 Hardin, R. H., Downey, E. J., und Munushian, J., Proc. IRE *48*, 944 (1960)
73 Harvey, A. F., Proc. IEE (B) Suppl. Nr. 6, *104*, 346 (1957)
74 Heffner, H., Electronics *26*, Nr. 2, 135 (1953); Proc. IRE *42*, 930 (1954)
75 Heffner, H., Trans. IRE *MTT-7*, 83 (1959)
76 Heffner, H., und Wade, G., J. appl. Physics *29*, 1321 (1958)
77 Heinke, H., Z. angew. Physik *1*, 90 (1949)
78 Helmer, J. C., J. appl. Physics *28*, 212 (1957)
79 Henry, R.-P., Vide *11*, 445 (1956)
80 Hogan, C. L., Bell System techn. J. *31*, 1 (1952)
81 Holloway, J., Mainberger, W., Reder, F. H., Winkler, G. M. R., Essen, L., und Parry, J. V. L., Proc. IRE *47*, 1730 (1959)
82 Holmboe, L. W., und Ettenberg, M., Trans. IRE *ED-4*, 78 (1957)
83 Hoskin, W. J., Proc. IRE *45*, 1285 (1957)
84 Hotstone, E., und Seidl, M., J. sci. Instr. *42*, 225 (1965)
85 Hu, M.-K., und Cheng, D. K., Proc. IRE WESCON (1) *2*, 21 (1958)
86 Jaeger, T., und Schneider, M. V., Arch. elektr. Übertr. (AEÜ) *13*, 21 (1959)
87 Jaffe, D., Cacheris, J. C., und Karayianis, N., Proc. IRE *46*, 594 (1958)
88 James, F. H., Proc. IEE (B) *106*, 489 (1959)
89 James, A. V., und Sweet, L. O., Trans. IRE *MTT-6*, 195 (1958)
90 James, B. H. L., und Stockford, M. T., Electron. Engng. *31*, 82 (1959)
91 Jaumann, A., Fernmeldetechn. Z. *7*, 410 (1954)
92 Kallmann, E., Yu, Y. P., und Christaldi, P. S., Electronics *24*, Nr. 7, 106 (1951)
93 Karbowiak, A. E., Proc. IRE *46*, 1706 (1958)
94 Karp, A., Proc. IRE *46*, 41 (1955)
95 Kinch, M. A., und Rollin, B. V., Brit. J. appl. Physics *14*, 672 (1963)
96 King, P. G. R., Suppl. Proc. IEE (B) *105*, 813 (1958)
97 Klages, G., Arch. elektr. Übertr. (AEÜ) *3*, 85 (1949)
98 Klages, G., Einführung in die Mikrowellenphysik. Darmstadt 1956
99 Kleen, W., Einführung in die Mikrowellen-Elektronik, Teil 1. Stuttgart 1952
100 Koch, B., Arch. techn. Messen (ATM) V 3614 (1952)
101 Koch, J., Z. angew. Physik *9*, 1 (1957)
102 Kornienko, L. S., und Prochorow, A. M., J. eksp. teor. Fiziki (russ.) *36*, 919 (1959)
103 Kreuchen, K. H., und Diserens, N. J., Suppl. Proc. IEE (B) *105*, 860 (1958)
104 Lance, A. L., Introduction to Microwave Theory and Measurements. New York 1964
105 Lance, A. L., Considine, J. M., und Rose, D., Microwave Experiments. New York 1966
106 Lane, J. A., Proc. IEE (B) *102*, 819 (1955)
107 Lange, F. H., Nachrichtentechnik *5*, 209 (1955)

8.108 LATHAM, R., DRACOTT, E. D., FLINN, M., GRAY, D. A., NASSIBIAN, G., VOKES, J. C., und WEXLER, G., Suppl. Proc. IEE (B) *105*, 870 (1958)
109 LAWSON, J. D., BARTON, R. S., GUBBINS, T. F., MILLAR, W., und ROGERS, P. S., J. Electronics *1*, 333 (1955)
110 LENGYEL, B. A., Proc. IRE *37*, 1242 (1949)
111 LOVELL, B., und CLEGG, J. A., Radio Astronomy. London 1952
112 LÜDI, K., Helv. physica Acta *13*, 122 und 498 (1940); *16*, 136 (1943)
113 MAGID, M., Trans. IRE *I-7*, 321 (1958)
114 MALLORY, K. B., J. appl. Physics *29*, 790 (1958)
115 MCCOUBREY, A. O., Trans. IRE *I-7*, 203 (1958)
116 MCKAY, K. G., Nachrichtentechn. Z. *12*, 61 (1959)
117 MCWHORTER, A. L., und MEYER, J. W., Physic. Rev. (2) *109*, 312 (1958)
118 MCWHORTER, A. L., MEYER, J. W., und STRUM, P. D., Physic. Rev. (2) *108*, 1642 (1957)
119 MEGLA, G., Dezimeterwellentechnik. Leipzig 1952
120 MEIER, G., Z. angew. Physik *16*, 466 (1963)
121 MEYER, J. W., Electronics *31*, 66 (1958)
122 Mikrowellenröhren, Vorträge der V. Internationalen Tagung, Paris 1964. Braunschweig 1965
123 MOCKLER, R. C., BARNES, J., BEEHLER, R., SALAZAR, H., und FEY, L., Trans. IRE *I-7*, 201 (1958)
124 MORENO, T., Microwave Transmission Design Data. New York 1948
125 MOTZ, H., und MALLORY, K. B., J. appl. Physics *26*, 1384 (1955)
126 MÜLLER, R., und STETTER, W., Elektron. Rdsch. *11*, 367 (1957)
127 MUELLER, G. E., und TYRELL, W. A., Bell System techn. J. *26*, 837 (1947)
128 MULLER, M., Proc. IRE *42*, 1651 (1954)
129 MULLER, M. W., Physic. Rev. *106*, 8 (1957)
130 NAKAMURA, M., Bull. electrotechn. Labor. [Tokyo] *21*, 597 (1957)
131 OHL, R. S., BUDENSTEIN, P., und BURRUS, C. A., Rev. sci. Instr. *30*, 765 (1959)
132 OMORI, S., und SAKURAI, K., Trans. IRE *I-7*, 307 (1958)
133 PAUL, H., Fernmeldepraxis *37*, 201 (1960)
134 PIEFKE, G., Z. angew. Physik *6*, 499 (1954)
135 PIERCE, J. R., Electronics *22*, Nr. 2, 97 (1949)
136 PIERCE, J. R., Travelling-Wave Tubes. New York 1950
137 PIERCE, J. R., Proc. IRE *42*, 1735 (1954)
138 PIRCHER, G., Rev. gén. Électr. *64*, 301 (1955)
139 POHLE, R., Nachrichtentechnik *5*, 407 (1955)
140 POTTEL, R., Z. angew. Physik *10*, 8 (1958)
141 PROKHOROV, A. M., Sov. Physics — J. exp. theor. Physics *7*, 1140 (1958)
142 RAOULT, G., Les ondes centimétriques. Paris 1958
143 REED, E. D., Bell System techn. J. *34*, 563 (1955)
144 REICH, K. H., Z. angew. Physik *6*, 326 (1954)
145 REICH, H. J., ORDUNG, P. F., KRAUSS, H. L., und SKALNIK, J. G., Microwave Theory and Techniques. New York 1953
146 RIECK, H., Wiss. Z. Univ. Rostock *7*, 675 (1957/58)
147 RIECK, H., und PANNIGER, F., Nachrichtentechnik *7*, 101 (1957)
148 RIVERS, W. K., und SHEPPARD, A. P., Rev. sci. Instr. *37*, 195 (1966)
149 SCHMITT, H. J., Z. angew. Physik *8*, 372 (1956)
150 SCHMITT, H. J., und FUTTERMENGER, W., Z. angew. Physik *10*, 1 (1958)
151 SCOVIL, H. E. D., Trans. IRE *MTT-6*, 29 (1958)
152 SEVERIN, H., Z. angew. Physik *6*, 262 (1954)
153 SIEDENTOPF, H., Z. angew. Physik *6*, 376 und 422 (1954)

8.154 SIEGMAN, A. E., Microwave Solid State Masers. New York 1964
155 SILVER, S., Microwave Antenna Theory. New York 1949
156 SINGER, J. R., Masers. New York 1959
157 SLATER, J. C., Microwave Transmission. New York 1959
158 SLOCUM, A., und AUGUSTINE, C. F., Trans. IRE *PGI-4*, 145 (1955)
159 SMITH, M. J., und VAUGHAN, J. R. M., J. sci. Instr. *33*, 353 (1956)
160 STERZER, F., und NELSON, D. E., Proc. IRE *49*, 744 (1961)
161 STICH, M. L., J. appl. Physics *29*, 782 (1958)
162 STRANDBERG, M. W. P., FAUGHNAN, B. W., KYHL, R. L., und WOLGA, G. J., Physic. Rev. *109*, 1988 (1958)
163 STRUM, P. D., Proc. IRE *46*, 43 (1958)
164 SUCHER, M., und CARLIN, H. J., Trans. IRE *MTT-6*, 188 (1958)
165 SUCHER, M., und FOX, J., Handbook of Microwave Measurements, 3. Aufl. New York 1963
166 SUHL, H., Physic. Rev. *106*, 384 (1957); J. appl. Physics *28*, 1225 (1957)
167 THOMAS, H. A., Proc. IRE *45*, 205 (1957)
168 THOMPSON, JR., M. C., und VETTER, M. J., Rev. sci. Instr. *29*, 148 (1958)
169 THOMPSON JR., M. C., FREETHEY, F. E., und WATERS, D. M., Rev. sci. Instr. *29*, 865 (1958)
170 TISCHER, F. J., Mikrowellen-Meßtechnik. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1958
171 TOKER, C., J. sci. Instr. *42*, 118 (1965)
172 TOLBERG, W. E., HENDERSON, W. D., und JACHE, A. W., Rev. sci. Instr. *29*, 660 (1958)
173 TOWNES, C. H., und SCHAWLOW, A. L., Microwave Spectroscopy. New York—London 1955
174 TRAMBARULO, R., und BURRUS, C. A., Proc. IRE *48*, 1776 (1960)
175 TRENTINI, G. VON, Z. angew. Physik *6*, 462 (1954)
176 TRENTINI, G. VON, Z. angew. Physik *8*, 364 (1956)
177 TRICAUD, J. B., Onde électr. *31*, 112 und 188 (1951)
178 TROITSKII, V. S., Sov. Physics — J. exp. theor. Physics *7*, 271 (1958)
179 TROUP, G., Masers and Lasers, 2. Aufl. London 1965
180 UNGER, H. G., Arch. elektr. Übertr. (AEÜ) *8*, 241 (1954)
181 UNTERMANN, G., Z. angew. Physik *2*, 233 (1950)
182 VARTANIAN, P. H., und MELCHOR, J. L., Proc. IRE *44*, 175 (1956)
183 VOGEL, M., Forschungsberichte des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums des Landes Nordrhein-Westfalen Nr. 420. Frankfurt/M. 1957
184 VUYLSTEKE, A. A., Elementary Maser Theory. New York 1960
185 WANG, C. C., Trans. IRE *ED-4*, 92 (1957)
186 WARNECKE, R., Ann. Radioélectr. *3*, 71 (1948)
187 WATSON, R. B., J. appl. Physics *22*, 154 (1951)
188 WEISSFLOCH, A., Schaltungstheorie und Meßtechnik des Dezimeter- und Zentimeterwellengebietes. Basel—Stuttgart 1954
189 WILLWACHER, E., Nachrichtentechn. Fachber. *6*, II/103 (1957)
190 WILSON, I. G., SCHRAMM, C. W., und KINZER, J. P., Bell System techn. J. *25*, 408 (1946)
191 WIND, M., und RAPAPORT, H., Handbook of Microwave Measurements. New York 1955
192 WITTKE, J. P., RCA Rev. *18*, 441 (1957)
193 WITTKE, J. P., Proc. IRE *45*, 291 (1957)
194 WOLF, H. CH., Z. angew. Physik *10*, 480 (1958)
195 WOOTTON, D. J., LUCKEN, J. A., und BANNERMANN, R. C., Suppl. Proc. IEE(B) *105*, 969 (1958)

8.196 Zverev, G. M., Prokhorov, A. M., Kornienko, L. S., und Manenkov, A. A., Sov. Physics — J. exp. theor. Physics *7*, 1141 (1958)

§ 9 Elektrischer Widerstand

9.1 Abaulina-Zavaritskaia, E. I., Sov. Physics — J. exp. theor. Physics *3*, 984 (1957)
2 Allen, C. C., und Runyan, W. R., Rev. sci. Instr. *32*, 824 (1961)
3 Asselmeyer, F., und Treiber, H., Z. angew. Physik *19*, 10 (1965)
4 Balchan, A. S., und Drickamer, H. G., Rev. sci. Instr. *32*, 308 (1961)
5 Barber, C. R., Gridley, A., und Hall, J. A., J. sci. Instr. *32*, 213 (1955)
6 Bauer, W., Ford, J. W.De, Koehler, J. S., und Kauffman, J. W., Physic. Rev. *128*, 1497 (1962)
7 Baumann, J. H., J. sci. Instr. *40*, 46 (1963)
8 Bean, C. P., De Blois, R. W., und Nesbitt, L. B., J. appl. Physics *30*, 1976 (1959)
9 Bogner, G., und Heinzel, W., Solid-State Electron. *7*, 93 (1964)
10 Braun, M., Z. angew. Physik *18*, 9 (1964)
11 Bridgman, P. W., Rev. mod. Physics *18*, 1 (1946)
12 Broom, T., Proc. physic. Soc. *B65*, 871 (1952)
13 Broom, R., Barrie, R., und Ross, I. M., in: Halbleiter und Phosphore. Braunschweig 1958, S. 453
14 Brown, M. A. C. S., und Jakeman, E., Brit. J. appl. Physics *17*, Nr. 9 (1966)
15 Buckel, W., Z. Physik *138*, 136 (1954); *145*, 141 (1956); *154*, 474 (1959)
16 Bueren, H. G. van, Z. Metallkde. *46*, 272 (1955)
17 Burger, G., Wenzl, H., Isebeck, K., Jousset, J. C., und Quéré, Y., Physics Letters *16*, 240 (1965)
18 Busch, G., Kern, R., und Winkler, U., Helv. physica Acta *26*, 390 (1953)
19 Busch, G., und Winkler, U., Ergebn. exakt. Naturwiss. *29*, 145 (1956)
20 Carter, R. H. A., Howarth, D. J., und Putley, D. H., J. sci. Instr. *35*, 115 (1958)
21 Cassidy, E. C., Zimmerman, S. W., und Neumann, K. K., Rev. sci. Instr. *37*, 210 (1966)
22 Champness, C. H., Electronics *4*, Nr. 3, 201 (1958)
23 Chiotti, P., Rev. sci. Instr. *25*, 876 (1954)
24 Ciorrscu, F., Nachman, M., und Oncescu, M., Rev. Physique *3*, 107 (1958)
25 Clark, R. P., und Zaffery, E. D., Rev. sci. Instr. *38*, 492 (1967)
26 Cotti, P., Physik kondens. Materie *3*, 40 (1964)
27 Creamer, R. H., Brit. J. appl. Physics *7*, 149 (1956)
28 Damon, R. W., und Redington, R. W., Physic. Rev. (2) *96*, 1498 (1954)
29 Dauphinee, T. M., und Mooser, E., Rev. sci. Instr. *26*, 660 (1955)
30 Davies, W., Proc. IEE *105*, 203 (1958)
31 Davydov, A. B., und Nomerovannyi, O. M., Instr. Exp. Techn. (USSR) Nr. 4, 890 (1966)
32 Daybell, M. D., Rev. sci. Instr. *38*, 1412 (1967)
33 Debye, P. V. P., und Convell, E. M., Physic. Rev. (2) *93*, 693 (1954)
34 Dekhtar, I. Ja., Madatova, E. G., und Cizek, A., Czechoslov. J. Physics *17*, 79 (1967)
35 Deshotels, W. J., und Weber, A. H., Physic. Rev. (2) *97*, 66 (1955)
36 Diamond, J. M., J. sci. Instr. *43*, 576 (1966)

9.37 DOLL, R., MEISSNER, W., RIEHL, N., SCHILLING, H., und SCHMEISSNER, F., Z. angew. Physik *17*, 121 (1964)
38 DOMENICALL, C. A., J. appl. Physics *28*, 749 (1957)
39 DORCAS, D. S., und SCOTT, R. N., Rev. sci. Instr. *35*, 1175 (1964)
40 ECKART, F., Ann. Physik (6) *17*, 84 (1956)
41 EDWARDS, W. D., J. sci. Instr. *42*, 432 (1965)
42 EICKE, H., Z. Metallkde. *49*, 157 (1948)
43 EPSTEIN, A. S., FRITZSCHE, H., und LARK-HOROVITZ, K., Physic. Rev. (2) *107*, 412 (1957)
44 FERMOR, J. H., und KJEKSHUS, A., Rev. sci. Instr. *36*, 763 (1965)
45 FILE, J., und MILLS, R. G., Physic. Rev. Letters *10*, 93 (1963)
46 FRITZSCHE, H., und LARK-HOROVITZ, K., Physic. Rev. (2) *99*, 400 (1955)
47 FÜNFER, E., KEILHACKER, M., und LEHNER, G., Z. angew. Physik *10*, 157 (1958)
48 GASSON, D. B., J. sci. Instr. *33*, 85 (1956)
49 GELBRICH, W., Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin *7*, 345 (1957/58)
50 GENNES, P. G.DE, Superconductivity of Metals and Alloys. New York 1966
51 GERRITSEN, A. N., Metallic Conductivity, in: S. FLÜGGE ed., Handbuch der Physik, Bd. 19. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1956
52 GERRITSEN, A. N., und AA, J. M. L. C. VON DER, Appl. sci. Res. [Hague] (A) *6*, 191 (1956)
53 GIBBINGS, D. L. H., Proc. IEE (C) *109*, 307 (1962)
54 GORJUNOVA, N. A., und KOLOMIEZ, B. T., Isvest. Akad. Nauk SSSR, Ser. fis. (russ.) *20*, 1496 (1956)
55 GRASSMANN, P., Physik. Z. *37*, 569 (1936)
56 HAASEN, P., und SEEGER, A., in: Halbleiterprobleme, Bd. 4. Braunschweig 1958, S. 68
57 HAHN, H., Thermistoren, ihre Eigenschaften und Anwendungen. Hamburg—Berlin 1965
58 HARIHARAN, P., und BHALLA, M. S., J. sci. Instr. *33*, 158 (1956)
59 HAWKINS, A. E., J. sci. Instr. *33*, 486 (1956)
60 HELDT, K., und HAASE, G., Z. angew. Physik *6*, 157 (1954)
61 HELLINGER, O., und NIBLER, F., Z. angew. Physik *18*, 23 (1964)
62 HETZEL, W., und MELCHERT, F., Z. Instr.-Kde. *68*, 264 (1960)
63 HÖGBERG, L., J. sci. Instr. *42*, 278 (1965)
64 HOGE, H. J., Rev. sci. Instr. *25*, 902 (1954)
65 HUNG, C. S., und GLIESSMAN, J. R., Physic. Rev. (2) *96*, 1226 (1954)
66 JACOBS, P. W. M., J. sci. Instr. *30*, 204 (1953)
67 JANZ, G. J., und LORENZ, M. R., Rev. sci. Instr. *32*, 130 (1961)
68 JOFFÉ, A. F., Physik der Halbleiter. Berlin 1958
69 JUSTI, E., Z. techn. Physik *21*, 315 (1940)
70 JUSTI, E., Leitfähigkeit und Leitungsmechanismus fester Stoffe. Göttingen 1948
71 KANNO, M., Bull. electrotechn. Labor. [Tokyo] *21*, 216, 934 und 950 (1957); *22*, 140 und 154 (1958)
72 KAUFMANN, J. W., und KOEHLER, J. S., Physic. Rev. *88*, 149 (1952)
73 KEINATH, G., Arch. techn. Messen (ATM) Z 115—1 (1939)
74 KHER, V. G., und HIRDE, J. P., J. sci. ind. Res. [New Delhi] *21D*, 348 (1962)
75 KHOTKEWITSCH, V. I., und SABARA, M. J., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 1, 189 (1962)
76 KIM, Y. B., HEMPSTEAD, C. F., und STRNAD, A. R., Physic. Rev. *139A*, 1163 (1965)
77 KOENIG, S. H., und GUNTHER-MOHR, G. R., J. Physics Chem. Solids *2*, 268 (1957)
78 KOHLER, M., Ann. Physik (5) *32*, 211 (1938)

9.79 KONDO, J., Progr. theor. Physics *32*, 38 (1964)
80 KONDORSKI, E. I., GALKINA, O. S., und TSCHERNIKOWA, L. A., Isvest. Akad. Nauk SSSR, Ser. fis. (russ.) *21*, 1123 (1957)
81 LA FLAMME, P. M., Rev. sci. Instr. *35*, 1193 (1964)
82 LAPPE, F., und WESTENDORF, K.-B., Z. angew. Physik *3*, 29 (1951)
83 LAUTZ, G., und TITTES, E., Z. Naturforsch. *13 a*, 866 (1958)
84 LAWSON, A. W., Progr. Metal Physics *6*, 1 (1956)
85 LERNER, E., und DAUNT, J. G., Rev. sci. Instr. *35*, 1069 (1964)
86 LINDE, J. O., Elektrischer Widerstand verdünnter Cu-, Ag- und Au-Legierungen. Thesis Lund 1939
87 LINDSAY, J. D. G., WHITE, R. W., und FOWLER, R. D., Cryogenics *6*, 213 (1966)
88 LINHART, J. G., TEMPLETON, I. M., und DUNSMUIR, R., Brit. J. appl. Physics *7*, 36 (1956)
89 LITTLEWOOD, A., J. sci. Instr. *44*, 878 (1967)
90 LONDON, F., Superfluids, Bd. 1. New York 1950
91 LUBIN, B. T., FÖLDVÁRI, T. L., und JACKSON, W. D., Rev. sci. Instr. *36*, 1663 (1965)
92 LÜTHI, B., Helv. physica Acta *33*, 161 (1960)
93 LURIE, M., Rev. sci. Instr. *33*, 1002 (1962)
94 LYNCH, A. C., RAYNER, G. H., und FORD, L. H., J. sci. Instr. *35*, 36 (1958)
95 LYNCH, F. J., und WESENBERG, C. L., Rev. sci. Instr. *25*, 251 (1954)
96 LYNTON, E. A., Superconductivity. London 1962
97 MAHER, F. J., J. sci. Instr. *44*, 531 (1967)
98 MANINTVELD, J. A., Thesis Excelsior. Den Haag 1954
99 MATEJEC, R., Z. Physic *148*, 454 (1957)
100 MAYEUR, R., Rev. gén. Électr. *67*, 161 (1958)
101 MEADEN, G. T., Electrical Resistance of Metals. London 1966
102 MENDELSSOHN, K., Canad. J. Physics *34*, 1315 und 1331 (1956)
103 METTE, H., Z. angew. Physik *8*, 191 (1956)
104 MEYER-HARTWIG, E., und FEDERSPIEL, H., Bull. Schweiz. elektrotechn. Ver. *42*, 135 (1951)
105 MILLIAN, K., und RIEDER, W., Z. angew. Physik *8*, 28 (1956)
106 MITVALSKY, V., J. sci. Instr. *41*, 454 (1964)
107 MIYAMOTO, N., und NISHIZAWA, J. J., Rev. sci. Instr. *38*, 360 (1967)
108 MOERDER, C., Arch. techn. Messen (ATM) V 3512—1, 2 (1952)
109 MOLL, J. L., Physics of Semiconductors. New York 1964
110 MORIN, F. J., GEBALLE, T. H., und HERRING, C., Physic. Rev. (2) *105*, 525 (1957)
111 MÜLLER, A., und WILHELM, M., J. Physics Chem. Solids *26*, 2021 und 2029 (1965)
112 NIKITIN, E. N., und SAIZEW, W. K., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 4, 203 (1965)
113 OESTERLIN, W., Arch. techn. Messen (ATM) *233*, 141 (1955)
114 OLSEN, J. L., Electron Transport in Metals. New York—London 1962
115 OLSON, R. A., und LARY, E. C., Rev. sci. Instr. *33*, 1350 (1962)
116 OLSON, R., und RODRIGUEZ, S., Physic. Rev. *108*, 1212 (1957)
117 ORAZGULYEV, B., Sov. Physics — Solid State Physics *8*, 2219 (1967)
118 OSTER, A., Z. angew. Physik *20*, 375 (1966)
119 OZELTON, M. W., und WILSON, J. R., J. sci. Instr. *43*, 359 (1966)
120 PASSAGLIA, E., und LOVE, W. F., Physic. Rev. (2) *98*, 1006 (1955)
121 PASSYNKOW, W. W., SAWELJEW, G. A., und TSCHIRKIN, L. K., Nichtlineare Halbleiterwiderstände. Leipzig 1965
122 PAWLEK, F., und REICHEL, K., Metall *12*, 1 (1958)
123 PEARLSTEIN, E., Rev. sci. Instr. *33*, 610 (1962)
124 PEARSON, W. B., Philos. Mag. *4*, 622 (1959)

9.125 POPPER, A., und FIŠER, K., Z. angew. Physik *20*, 218 (1966)
126 POTTER, R. F., Physic. Rev. (2) *108*, 652 (1957)
127 POTTER, R. J., und DEXTER, D. L., Physic. Rev. (2) *108*, 677 (1957)
128 PRIMAK, W., und FUCHS, L. H., Physic. Rev. *103*, 541 (1956)
129 PUTLEY, E. H., Proc. physic. Soc. *73*, 280 (1959)
130 PUTLEY, E. H., und MITCHELL, W. H., Proc. physic. Soc. *72*, 193 (1958)
131 RAMANATHAN, K. G., und DHILLON, J. S., Nature [London] *175*, 948 (1955)
132 RAYNER, G. H ., Metrologia *3*, 12 (1967)
133 RAYNER, G. H., und FORD, L. H., J. sci. Instr. *34*, 190 (1957)
134 RIEBLING, E. F., und LOGEL, P. C., Rev. sci. Instr. *36*, 425 (1965)
135 ROLL, A., und MOTZ, H., Z. Metallkde. *48*, 435 (1957)
136 ROMANOWSKI, M., und OLSON, N., Canad. J. Physics *35*, 1312 (1957)
137 ROSENBERG, H. M., Philos. Mag. (8) *1*, 738 (1956)
138 RUSSAKOFF, R., und SNOWBALL, R. F., Rev. sci. Instr. *38*, 395 (1967)
139 RUSSELL, B., J. sci. Instr. *43*, 100 (1966)
140 SAMSONOW, G. W., J. techn. Fisiki (russ.) *26*, 716 (1956)
141 SAPOGIN, L. G., und IWKO, W. M., Fisika twerd. Tela (russ.) *2*, 1482 (1960)
142 SCHAWLOW, A. L., und DEVLIN, G. F., Physic. Rev. *113*, 120 (1959)
143 SCHMIDT, K., Rev. sci. Instr. *37*, 671 (1966)
144 SCHNABEL, P., Z. angew. Physik *22*, 136 (1967)
145 SCHULZ-DUBOIS, E., Elektrotechn. Z. (ETZ) (A) *75*, 783 (1954)
146 SCHULZE, A., Meßwiderstände. Karlsruhe 1954
147 SCHULZE, A., Elektrotechn. Z. (ETZ) (A) *75*, 547 (1954)
148 SCHULZE, A., und BENDER, D., Z. angew. Physik *6*, 132 (1954)
149 SCHULZE, A., und EICKE, H., Z. angew. Physik *4*, 321 (1952)
150 SCHULZE, A., und ZACHERL, H., Z. angew. Physik *6*, 324 (1954)
151 SCHUMANN JR., P. A., und SHEINER, L. S., Rev. sci. Instr. *35*, 959 (1964)
152 SCOTT, A., J. Res. nat. Bur. Standards *50*, 147 (1953)
153 SEEGER, A., in: S. FLÜGGE ed., Handbuch der Physik, Bd. 7/1. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955, S. 431ff.
154 SERNOW, W. B., und SCHARWIN, J. W., J. eksp. teor. Fisiki (russ.) *36*, 1083 (1959)
155 SHEWCHUN, J., und WAXMAN, A., Rev. sci. Instr. *37*, 1195 (1966)
156 SHOENBERG, D., Superconductivity, 2. Aufl. Cambridge 1952
157 SIDDALL, G., und SMITH, G., Brit. J. appl. Physics *10*, 35 (1959)
158 SIMMONS, R. O., KOEHLER, J. S., und BALLUFFI, R. W., in: Radiation Damage in Solids and Reactor Materials, Symposium of the IAEA. Vienna 1962
159 SLOAN, L. G., Rev. sci. Instr. *27*, 1019 (1956)
160 SOKOLOW, W. I., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 5, 227 (1965)
161 SONDER, E., J. appl. Physics *30*, 1186 (1959)
162 SPENKE, E., Elektronische Halbleiter, 2. Aufl. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1962
163 SPOHR, D. A., und WEBBER, R. T., Physic. Rev. (2) *105*, 1427 (1957)
164 SMALLMAN, R. E., Modern Physical Metallurgy, 3. Aufl. London 1970
165 STARR, C. D., und WANG, T. P., Proc. IEE *104*, 515 (1957)
166 SUDOVTSOV, A. I., und SEMENENKO, E. E., Sov. Physics — J. exp. theor. Physics *4*, 592 (1957)
167 SUN, S. F., und WAGINI, H., Z. angew. Physik *20*, 318 (1966)
168 SWENSON, C. A., Solid State Physics *11*, 41 (1960)
169 THOMPSON, M. W., J. sci. Instr. *34*, 515 (1957)
170 TISCHER, F. J., Z. angew. Physik *5*, 413 (1953)
171 TREGLOAN, P. A., und LAURENCE, G. S., J. sci. Instr. *42*, 869 (1965)
172 TROMBE, F., und FOËX, M., C. R. hebd. Séances Acad. Sci. [Paris] *236*, 1783 (1953)

9.173 TUZZOLINO, A. J., Physic. Rev. (2) *109*, 1980 (1958)
174 UNZ, M., J. sci. Instr. *30*, 179 (1953)
175 VALDER, F. I., Electron. Engng. *25*, 332 (1953)
176 VALDES, L., Proc. IRE *42*, 420 (1954)
177 VANAVERMAETE, A., Helv. physica Acta *28*, 522 (1955)
178 VOIGT, H., Diss. TH München 1967
179 WALTER, P., Elektrotechn. Z. (ETZ) *78*, 500 (1957)
180 WARSHAWSKY, I., Rev. sci. Instr. *26*, 711 (1955)
181 WELKER, H., Z. Naturforsch. *7a*, 744 (1952); *8a*, 248 (1953)
182 WELKER, H., Ergebn. exakt. Naturwiss. *29*, 275 (1956)
183 WENZL, H., SCHILLING, W., und ISEBECK, K., Paper IIB-6 der International Conference on Electron Diffraction and Crystal Defects, Melbourne 1965
184 WHITE, G. K., Canad. J. Physics *34*, 1328 (1956)
185 WHITE, G. K., und WOODS, S. B., Philos. Mag. (8) *1*, 846 (1956)
186 WHITE, G. K., und WOODS, S. B., Canad. J. Physics *35*, 892 (1957)
187 WILLIAMS, R. A., GOLD, E. M., und NAIDITCH, S., Rev. sci. Instr. *36*, 1121 (1965)
188 WINTERHAGER, H., und WERNER, L., Bestimmung des elektrischen Leitvermögens geschmolzener Fluoride. Forschungsberichte des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums des Landes Nordrhein-Westfalen. Köln und Opladen 1957
189 WITT, C. P. DE, Instruments *29*, 486 (1956)
190 YAFFE, I. S., und ARTSDALEN, E. R. VAN, J. physic. Chem. *60*, 1125 (1956)
191 YOKLEY, C. R., und SHUMAKER JR., J. B., Rev. sci. Instr. *32*, 6 (1961)
192 YOSHIZAKI, H., Bull. electrotechn. Labor. [Tokyo] *22*, 65 (1958)
193 YOSIM, S. J., GRANTHAM, L. F., LUCHSINGER, E. B., und WIKE, R., Rev. sci. Instr. *34*, 994 (1963)
194 YOUSEF, Y. L., und KAMEL, R., J. sci. Instr. *31*, 13 (1954)
195 ZAR, J. L., Rev. sci. Instr. *34*, 801 (1963)
196 ZERBST, M., und SCHRENK, H., Z. angew. Physik *18*, 77 (1964)
197 ZIMMERMANN, J. E., Rev. sci. Instr. *32*, 402 (1961)
198 ZINKE, O., Widerstände, Kondensatoren, Spulen und ihre Werkstoffe. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1965
199 ZRUDSKY, D. R., BUSH, H. D., und FASSETT, J. R., Rev. sci. Instr. *37*, 885 (1966)
200 ZÜCKLER, K., in: Halbleiterprobleme, Bd. 3. Braunschweig 1956, S. 207
201 KANNO, M., et al., Paper E 35 der 11e Session du CJPM Comité Consultatif d'Electricité, 1965
202 RAYNER, G. H., Metrologia *3*, 12 (1967)
203 THOMPSON, A. M., und LAMPARD, D. G., Nature [London] *177*, 888 (1956)
204 THOMPSON, A. M., Metrologia *4*, 1 (1968)
205 BENDER, D., und KORN, A., Elektrie *20*, 186 (1966)

§ 10 Kapazität, Dielektrika

10.1 ACKMANN, W., Nachrichtentechn. Z. *13*, 261 (1960)
2 ALTSCHULLER, A. P., J. physic. Chem. *58*, 392 (1954)
3 AMRHEIN, E.-M., RÖDER, H., und MÜLLER, F. H., Z. angew. Physik *24*, 18 (1967)
4 ANDERSON, J. C., Dielectrics. London 1964
5 BADY, I., Trans. IRE *I-6*, 199 (1957)
6 BAIRNSFATHER, H., J. sci. Instr. *44*, 59 (1967)
7 BALACHANDRAN, M., Z. angew. Physik *7*, 588 (1955)
8 BALYGIN, I. E., und OBRAZTSOV, A. I., Sov. Phys. — J. techn. Physics *1*, 1850 (1957)

10.9 Battaglia, A., Bruin, F., und Gozzini, A., Nuovo Cim. (10) *7*, 87 (1958)
10 Baxter, S., und Wilmot, P. D., J. sci. Instr. *33*, 315 (1956)
11 Berry, R. W., und Sloan, D. J., Proc. IRE *47*, 1070 (1959)
12 Biswas, B. N., Datta, G., und Kundu, M., J. sci. Instr. *44*, 557 (1967)
13 Blank, C., und Edwards, M. H., Physic. Rev. *119*, 50 (1960)
14 Blechschmidt, E., Präzisionsmessungen von Kapazitäten, Induktivitäten und Zeitkonstanten. Braunschweig 1956
15 Boggs, J. E., Crain, M., und Whiteford, J. E., J. physic. Chem. *61*, 482 (1957)
16 Boghosian, C., Meyer, H., und Rives, J. E., Physic. Rev. *146*, 110 (1966)
17 Borderie, P., J. Physique Radium *19*, 39 (1958)
18 Bray, P. R., J. sci. Instr. *30*, 49 (1953)
19 Brot, P.-C., Ann. Physique (13) *2*, 714 (1957)
20 Brot, C., und Bruma, M., C. R. hebd. Séances Acad. Sci. [Paris] *234*, 1041 (1952)
21 Brot, C., und Soulard, A., Arch. des Sci. *12*, 9 (1959)
22 Burdick, G. A., und Hickman, T. G., Rev. sci. Instr. *37*, 1077 (1966)
23 Bussey, H. E., und Birnbaum, G., Rev. sci. Instr. *30*, 800 (1959)
24 Cavell, E. A. S., J. sci. Instr. *44*, 401 (1967)
25 Chatterjee, S. K., Indian J. Physics *22*, 157 (1948)
26 Claeys, E. G., DeMoor, J., und Van Der Kelen, G. P., J. sci. Instr. *43*, 176 (1966)
27 Clark, G. L., J. chem. Physics *25*, 125 (1956)
28 Clark, D. E., und Kumar, S. N., Brit. J. appl. Physics *7*, 282 (1956)
29 Clayton, N. S., J. sci. Instr. (2) *1*, 662 (1968)
30 Cole, K. S., und Cole, R. N., J. chem. Physics *9*, 341 (1941)
31 Conger, N. L., und Tung, S. E., Rev. sci. Instr. *38*, 384 (1967)
32 Crawford, G. J. B., und Dixon, G. H., Rev. sci. Instr. *27*, 972 (1956)
33 Cumming, W. A., J. appl. Physics *23*, 768 (1952)
34 Daniel, V. V., Dielectric Relaxation. London 1967
35 Debye, P., Polare Molekeln. Leipzig 1929
36 Diamant, H., Drenck, K., und Pepinsky, R., Rev. sci. Instr. *28*, 30 (1957)
37 Drexler, O., Philips Matronics 235 (1957)
38 Dryden, J. S., J. sci. Instr. *35*, 439 (1958)
39 Dube, D. C., Parshad, R., und Yadav, R. S., Indian J. pure appl. Physics *4*, 428 (1966)
40 Eckart, F., und Rabenhorst, H., Ann. Physik (6) *19*, 381 (1957)
41 Eder, F. X., Ann. Physik *1*, 381 (1947)
42 Eyraud, L., Diélectriques solides anisotropes et ferroélectricité. Paris 1967
43 Falkenhagen, H., und Kelb, G., Ann. Physik *10*, 170 (1952)
44 Fatuzzo, E., und Mason, P. R., J. appl. Physics *36*, 427 (1965); J. sci. Instr. *42*, 37 (1965)
45 Feldman, C., und Hacskaylo, M., Rev. sci. Instr. *33*, 1459 (1962)
46 Fischer, H. E., und Carson, R. S., Rev. sci. Instr. *38*, 689 (1967)
47 Foord, T. R., J. sci. Instr. *34*, 68 (1957)
48 Forger, K., und Clausnitzer, H., Elektrotechn. Z. (ETZ) *80*, 129 (1959)
49 Fraioli, A. V., Trans. IRE *5*, 72 (1958)
50 Franz, W., Z. angew. Physik *3*, 72 (1951)
51 Freise, W., und Früngel, F., Elektrotechn. Z. (ETZ) (A) *80*, 296 (1959)
52 Froome, K. D., Proc. physic. Soc. *B68*, 833 (1955)
53 Gast, T., Z. angew. Physik *2*, 41 (1950)
54 Gast, T., und Alpers, E., Z. angew. Physik *1*, 228 (1949)
55 Gebbie, H. A., und Kiely, D. G., Proc. physic. Soc. *B65*, 553 (1952)
56 Gemant, A., Elektrophysik der Isolierstoffe. Berlin 1930

10.57 GIESEKKE, E. W., J. sci. Instr. *43*, 123 (1966)
58 GILLESPIE, R. J., und COLE, R. H., Trans. Faraday Soc. *53*, 1325 (1956)
59 GOETZ, H., und ZAHN, W., Z. Physik *151*, 202 (1958)
60 GRÄNICHER, H., JACCARD, C., SCHERRER, P., und STEINEMANN, A., Disc. Faraday Soc. *23*, 50 (1957)
61 GRANIER, J., Les diélectriques. Paris 1948
62 GRANT, E. H., Proc. physic. Soc. *B70*, 937 (1957)
63 GRANT, E. H., Brit. J. appl. Physics *18*, 1807 (1967)
64 GRANT, E. H., Brit. J. appl. Physics *10*, 87 (1959)
65 GROSS, F., Nachrichtentechn. Z. *9*, 124 (1956)
66 GULBRANDSEN, T., MEYER, N. I., und SCHJAER-JAKOBSEN, J., Rev. sci. Instr. *36*, 743 (1965)
67 HAGUE, B., Alternating Current Bridge Methods, 2. Aufl. London 1957
68 HARTSHORN, L., PARRY, J. V. L., und ESSEN, L., Proc. physic. Soc. *B68*, 422, (1955)
69 HASTED, D. A., und SHAH, M. A., Brit. J. appl. Physics *15*, 825 (1964)
70 HEINRICH, W., Z. angew. Physik *22*, 115 (1967)
71 HELBERG, H.-W., und WARTENBERG, B., Z. angew. Physik *20*, 505 (1966)
72 HERBERT, J. M., J. Electron. *5*, 168 (1958)
73 HERSPING, A., Z. angew. Physik *20*, 369 (1966)
74 HEYWOOD, G. C. H., und BODIN, H. A. B., J. sci. Instr. (2) *1*, 447 (1968)
75 HIPPEL, A. VON, Dielectrics and Waves. New York 1954
76 HOLLWAY, D. L., und CASSIDY, C. J. A., Proc. IEE *99*, 553 und 364 (1952)
77 HORNER, F., TAYLOR, T. A., DUNSMUIR, R., LAMB, J., und JACKSON, W., J. IEE *93*, III 53 (1946)
78 HOYER, H., Arch. Elektrotechn. *41*, 347 (1954)
79 HOYER, H., und WIESSNER, W., Arch. Elektrotechn. *43*, 169 (1957)
80 HRIZO, J., und SUBBARAO, E. C., Rev. sci. Instr. *34*, 8 (1963)
81 HUBER, O., Z. angew. Physik *6*, 9 (1954)
82 HÜCKEL, E., und GANSAUGE, E., Z. physik. Chem. *12*, 110 (1957)
83 HUFNAGEL, F., und KLAGES, G., Z. angew. Physik *12*, 202 (1960)
84 HUMBEL, F., JONA, F., und SCHERRER, P., Helv. physica Acta *26*, 17 (1953)
85 ICHIJO, B., J. appl. Physics *24*, 307 (1953)
86 IIJIMA, T., Bull. electrotechn. Labor. [Tokyo] *20*, 820, 866, 901, 906 und 946 (1956)
87 JÄCKLE, W., Z. angew. Physik *12*, 148 (1960)
88 JÄKEL, T., Ann. Physik (6) *17*, 42 (1955)
89 JEZEWSKI, M., Acta physica Polon. *14*, 395 (1955)
90 JEZEWSKI, M., und PIECH, T., Acta physica Polon. *14*, 395 (1955)
91 JOHNSON, C. J., Appl. Physics Letters *7*, 221 (1965)
92 KÄNZIG, W., Solid State Physics *4*, 1 (1957)
93 KALISZ, J., und KORBEL, K., Acta physica Polon. *24*, 663 (1963)
94 KHANNA, S. L., Rev. sci. Instr. *38*, 1175 (1967)
95 KOMANDIN, A. W., und BONEZKAJA, A. K., J. fis. Chim. (russ.) *33*, 976 (1959)
96 KONIGSBERG, R. L., Electronics *30*, Nr. 1, 175 (1957)
97 KRISHNA, K. V. G., Trans. Faraday Soc. *52*, 1110 (1956); *53*, 767 (1957)
98 LABORDE, A., J. Physique Radium *17*, 94A (1956)
99 LACERDA, L., und BROT, C., C. R. hebd. Séances Acad. Sci. [Paris] *236*, 916 (1953)
100 LANE, J. A., und SAXTON, J. A., Proc. roy. Soc. [London] *A 213*, 400 (1952)
101 LIEBSCHER, F., und HELD, W., Kondensatoren. Berlin—Heidelberg 1968
102 LITTLE, V. I., Proc. physic. Soc. *72*, 441 (1958)
103 LÖB, E., Z. angew. Physik *10*, 178 (1958)

10.104 LURJE, J. A., und ROSANOW, N. A., Ismer. Techn. (russ.) *11*, 93 (1966)
105 LYNCH, A. C., Proc. IEE (B) *104*, 363 (1957)
106 LYNCH, A. C., Proc. IEE (B) *104*, 359 (1957)
107 MAIER, W., Arch. des Sci. *12*, 20 (1959)
108 MALMBERG, C. G., und MARYOTT, A. A., J. Res. nat. Bur. Standards *56*, 1 (1956)
109 MARKS, G. W., und MONSON, L. A., PWR Apparatus System *35*, 64 (1958)
110 MATSONASHVILI, B. N., Sov. Physics — J. exp. techn. Physics *4*, 951 (1957)
111 MCCALL, D. W., Bell System techn. J. *36*, 485 (1957)
112 MCLEAN, D. A., und POWER, F. S., Proc. IRE *44*, 872 (1956)
113 MECKE, R., und ROSSWOG, K., Z. Elektrochem. *60*, 47 (1956)
114 METCALF, W. S., J. sci. Instr. *42*, 742 (1965)
115 MEYER, E., SCHMITT, H. J., und SEVERIN, H., Z. angew. Physik *8*, 257 (1956)
116 MILTON, G., GARBURY, M., Rev. sci. Instr. *35*, 641 (1964)
117 MÖLTGEN, G, Z. angew. Physik *4*, 216 (1952)
118 MOPSIK, F. I., und COLE, R. H., Rev. sci. Instr. *38*, 708 (1967)
119 MÜSER, H. E., Z. angew. Physik *10*, 249 (1958)
120 MUNGALL, H. E., und MORRIS, D., Rev. sci. Instr. *34*, 839 (1963)
121 NEKRASSOW, M. M., POPLAWKO, J. M., JASZKI, B. J., ZYKALOW, W. G., und SOLOMONOWA, L. P., Isv. Akad. Nauk SSSR, Ser. fis. (russ.) *31*, 1882 (1967)
122 NEWELL, A. C., und BAIRD, R. C., J. appl. Physics *36*, 3751 (1965)
123 OEHME, F., Dielektrische Meßmethoden, 2. Aufl. Weinheim/Bergstraße 1962
124 PARTH, J. R., AEG-Mitteilungen *44*, 270 (1954)
125 PAULEY, J. L., und CHESSIN, H., J. Amer. chem. Soc. *76*, 3888 (1954)
126 PEARSON, J. D., und TREVENA, D. H., J. Electron. (1) *6*, 74 (1959)
127 PEPINSKY, R., VEDAM, K., und OKAYA, Y., Physic. Rev. *110*, 1309 (1958)
128 PERLMAN, M. M., und MEUNIER, J.-L., J. appl. Physics *36*, 420 (1965)
129 POLEY, J. P., Appl. sci. Res. [Hague] *4*, 337 (1954/55)
130 POWLES, J. G., Proc. physic. Soc. *64*, 81 (1951)
131 PREISSINGER, H., Z. angew. Physik *22*, 225 (1967)
132 RABENHORST, H., Ann. Physik *16*, 163 (1955)
133 RABENHORST, H., und MELICHERCIK, J., Ann. Physik *1*, 261 (1958)
134 RAYNER, G. H., und FORD, L. H., J. sci. Instr. *31*, 3 (1954)
135 REITAN, D. K., J. appl. Physics *30*, 172 (1959)
136 REYNOLDS, J. A., Proc. physic. Soc. *67*, 267 (1954)
137 RICHARDS, J. C. S., Electron. Engng. *29*, 118 (1957)
138 RICHARDS, J. C. S., J. sci. Instr. *36*, 22 (1959)
139 ROBINSON, C. F., Rev. sci. Instr. *32*, 1422 (1961)
140 RUPPERSBERG, H. K., Z. angew. Physik *9*, 9 (1957)
141 RUSHMAN, D. F., und STRIVENS, M. A., Proc. physic. Soc. *59*, 1011 (1947)
142 SACHSE, H., Ferroelektrika. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1956
143 SAITO, S., und KUROKAWA, K., Proc. IRE *44*, 35 (1956)
144 SARAFONOW, W. I., Isvest. Wyssch. Utschebn. Sawed., Fisika (russ.) Nr. 12, 143 (1967)
145 SCAIFE, B. K. P., Proc. physic. Soc. *B68*, 790 (1955)
146 SCHLICKMAN, J. J., Rev. sci. Instr. *37*, 803 (1966)
147 SCHMIDT, G., Z. Physik *145*, 534 (1956)
148 SCHMIDT, J., und GOLBIG, W., Elektrie *18*, 42 (1964)
149 SCHMITT, H. J., Z. angew. Physik *9*, 107 (1957)
150 SCHRÖDER, M., Z. angew. Physik *7*, 169 (1955)
151 SCHUBRING, N. W., NOLTA, J. P., und DORK, R. A., Rev. sci. Instr. *35*, 1517 (1964)
152 SCHWAN, H. P., und FERRIS, C. D., Rev. sci. Instr. *39*, 481 (1968)
153 SLEVOGT, K., und WIRTH, H., Z. Instr.-Kde. *71*, 40 (1963)

10.154 SMITH, R. S., J. appl. Physics *27*, 824 (1956)
155 SPENCER, E. G., LENZO, P. V., und BALLMAN, A. A., Proc. IEEE *55*, 2074 (1967)
156 TAMM, K., und SCHNEIDER, M., Z. angew. Physik *20*, 544 (1966)
157 TAUB, J. J., und HINDIN, H. J., Rev. sci. Instr. *34*, 1056 (1963)
158 TAYLOR, H. E., Trans. Faraday Soc. *52*, 873 (1956)
159 THOMPSON, A. M., Proc. IEE *106*, 307 (1959)
160 THOMPSON, A. M., Proc. IEE *103*, 704 (1956)
161 VIDULICH, G. A., und KAY, R. L., Rev. sci. Instr. *37*, 1662 (1966)
162 VOLGER, J., Disc. Faraday Soc. *23*, 63 (1957)
163 WEBB, J. K., und WOOD, H. B., Proc. IEE (C) *102*, 3 (1955)
164 WHITEHEAD, S., Dielectric Breakdown of Solids. Oxford 1951
165 WIEDER, H. H., Physic. Rev. (2) *99*, 1161 (1955)
166 WIESSNER, W., Z. angew. Physik *9*, 120 (1957)
167 WIESSNER, W., Ann. Physik *2*, 329 (1959)
168 WILLIAMS, G., J. physic. Chem. *63*, 534 (1959)
169 WILLIAMS, E. M., und FOSTER, J. H., Trans. IRE *I-6*, 210 (1957)
170 WITTMANN, H., Z. angew. Physik *19*, 78 (1965)
171 WÜRSTLIN, F., Z. angew. Physik *2*, 131 (1950)
172 YOUNG, S. E., und GRANT, E. H., J. sci. Instr. (2) *1*, 429 (1968)
173 YOUNGBLOOD, J. P., Physic. Rev. (2) *98*, 1201 (1955)
174 ZERBST, M., und LONGO, H.-E., Z. angew. Physik *19*, 85 (1965)
175 ZICKNER, G., Arch. Elektrotechn. *42*, 71 (1955)
176 ZICKNER, G., Z. angew. Physik *8*, 187 (1956)
177 ZICKNER, G., und HOYER, H., Arch. Elektrotechn. *43*, 217 (1957)
178 ZICKNER, G., und WIESSNER, W., Ann. Physik (7) *1*, 70 (1958)
179 ZIEMANN, C. M., J. appl. Physics *23*, 154 (1952)

§ 11 Messung magnetischer Feldgrößen

11.1 ADAMS, C. Q., Rev. sci. Instr. *31*, 1119 (1960)
2 AITKEN, M. J., und TITE, M. S., J. sci. Instr. *39*, 625 (1962)
3 ALEKSANDRU, G., und WASSILEWSKAJA, D. P., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 2, 107 (1960)
4 ANDRÄ, W., Ann. Physik *3*, 334 (1959)
5 BERNDT, H., KARTASCHEFF, N., und WENZL, H., Z. angew. Physik *24*, 305 (1968)
6 BIREBENT, R., C. R. hebd. Séances Acad. Sci. [Paris] *234*, 1135 (1952)
7 BIRSS, R. R., GIBBS, J. I., und WALLIS, P. M., J. sci. Instr. (2) *1*, 15 (1968)
8 BIRSS, R. R., und WALLIS, R. M., J. sci. Instr. *42*, 322 (1965)
9 BOKCKE, U. VON, MARTENS, H., und WEISS, H., Solid-State Electron. *8*, 365 (1965)
10 BOUCKE, H., Arch. techn. Messen (ATM) V 391—1 (1937)
11 BRANDSTAETTER, F., Elektrotechn. und Maschinenbau *72*, 12 (1955)
12 BRANDT, N. B., SWISTOWA, E. A., und TABIEWA, G. K., J. eksp. teor. Fiziki, Pisma (russ.) *4*, 27 (1966)
13 BRČIĆ, I., GALOGAŽA, V., und PETRINOVIČ, M., J. sci. Instr. (2) *1*, 765 (1968)
14 BRUCE, C. R., Geophysics *32*, 893 (1967)
15 BUBLITZ, G., Arch. techn. Messen (ATM) V 391—2 (1938)
16 BURSON, S. B., MARTIN, D. W., und SCHMID, L. C., Rev. sci. Instr. *30*, 513 (1959)
17 BUTTREY, J. W., Rev. sci. Instr. *30*, 815 (1959)
18 BYRNES, W. S., und CRAWFORD, R. G., J. appl. Physics *29*, 493 (1958)
19 CHIRKOW, A. K., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 2, 36 (1959)

11.20 CIOFFI, P. P., Rev. sci. Instr. *21*, 624 (1950)
21 CONN, G. K., und DONOVAN, B., J. sci. Instr. *28*, 7 (1951)
22 COTTON, A., Eclair. électr. *24*, 257 (1900)
23 CRAGG, B. G., J. sci. Instr. *32*, 385 (1955)
24 CRAIK, D. J., und GRIFFITHS, P. M., Proc. physic. Soc. *B70*, 1000 (1957)
25 CREER, K. M., et al., J. sci. Instr. *44*, 133 (1967)
26 DAUTREPPE, D., und BAULEVÉ, J., J. Physique Radium *15*, 78 S. (1954)
27 DAYTON, I. E., SHOEMAKER, F. C., und MOZLEY, R. F., Rev. sci. Instr. *25*, 485 (1954)
28 DEAVER, B. S., und GOREE, W. S., Rev. sci. Instr. *38*, 311 (1967)
29 DOLEGA, U., PFEIFER, H., und LÖSCHE, A., Z. angew. Physik *7*, 12 (1955)
30 DOLL, R., und GRAF, P., Z. angew. Physik *20*, 97 (1965)
31 DOWLEY, M. W., Rev. sci. Instr. *33*, 1290 (1962)
32 DROSCHKINA, W. I., SCHABALINA, E. F., und JANUS, R. J., J. techn. Fisiki (russ.) *20*, 698 (1950)
33 DWIGHT, K., MENYUK, N., und SMITH, D., J. appl. Physics *29*, 491 (1958)
34 EDGAR, R. F., Trans. AIEE *56*, 805 (1937)
35 ELMORE, W. C., und GARRETT, M. W., Rev. sci. Instr. *25*, 480 (1954)
36 ELPATEVSKAIA, O. D., und REGEL, A. I., Sov. Physics — J. techn. Physics *1*, 2350 (1957)
37 FARTHING, W. H., und FOLZ, W. C., Rev. sci. Instr. *38*, 1023 (1967)
38 FIETZ, W. A., Rev. sci. Instr. *36*, 1621 (1965)
39 FISCHBACH, D. B., Rev. sci. Instr. *36*, 241 (1965)
40 FÖRSTER, F., Z. Metallkde. *46*, 358 (1955)
41 FONER, S., Rev. sci. Instr. *30*, 548 (1959)
42 FONER, S., und MCNIFF jr., E. J., Rev. sci. Instr. *38*, 931 (1967)
43 FONER, S., und MCNIFF jr., E. J., Rev. sci. Instr. *39*, 171 (1968)
44 FORGACS, R. L., und WARNICK, A., IEEE Trans. Instr. Meas. *IM-15*, 113 (1966)
45 FORGACS, R. L., und WARNICK, A., Rev. sci. Instr. *38*, 214 (1967)
46 FRAIT, Z., Czechoslov. J. Physics *7*, Nr.2, 218 (1957)
47 FRANK, C. E., Rev. sci. Instr. *37*, 875 (1966)
48 FULOP, W., J. sci. Instr. *35*, 52 (1958)
49 GARWIN, R. L., und PATLACH, A. M., Rev. sci. Instr. *36*, 741 (1965)
50 GRAY, D. A., Atomic Energy Res. Establishment (A. E. R. E.) — GP/R-1937, 1—5 (1957)
51 GRAY, D. A., Atomic Energy Res. Establishment (A. E. R. E.) — GP/R-1967, 1 (1956)
52 GREEN, G. K., KASSNER, R. R., MOORE, W. H., und SMITH, L. W., Rev. sci. Instr. *24*, 743 (1953)
53 GRUNDLACH, F. W., Arch. techn. Messen (ATM) V 391—3 (1938)
54 HEMPSTEAD, C. F., SIBILIA, J. T., und KOSTELNICK, J. J., Rev. sci. Instr. *35*, 785 (1964)
55 HENTSCHEL, E., MEYER, A. F., und WICHMANN, D., Ann. Physik (7) *10*, 207 (1962)
56 HERZOG, R. F. K., und TISCHLER, O., Rev. sci. Instr. *24*, 1000 (1953)
57 HIERONYMUS, H., und WEISS, H., Siemens-Z. *31*, 404 (1957)
58 HILL, D. A., und HWANG, C., J. sci. Instr. *43*, 581 (1966)
59 HLASNIK, I., CHOVANC, F., und POAK, M., Cryogenics *6*, 89 (1966)
60 HOCK, F., Z. angew. Physik *6*, 151 (1954)
61 HOPKINS, N. J., Rev. sci. Instr. *20*, 401 (1949)
62 HOUCK, J. R., und BOWERS, R., Rev. sci. Instr. *35*, 1170 (1964)

11.63 Jaklevic, R. C., Lambe, J., Silver, A. H., und Mercereau, J. E., Physic. Rev. Letters *12*, 159 und 274 (1964)
64 Jürgens, B. F., Philips techn. Rdsch. *19*, 349 (1953)
65 Kaczér, J., Czechoslov. J. Physics *13*, 386 (1963)
66 Kaczér, J., und Málek, Z., Czechoslov. J. Physics *7*, 481 (1957)
67 Kaeser, R. S., Ambler, E., und Schooley, J. F., in: Proceedings of the 11th National Cryogenic Engineers Conference, Bd. II, Houston 1965, S. 694
68 Kaeser, R. S., Ambler, E., und Schooley, J. F., Rev. sci. Instr. *37*, 173 (1966)
69 Kharitonow, J. N., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 6, 206 (1966)
70 Kirchner, H., Physics Letters *26A*, 651 (1968)
71 Klose, G., Z. angew. Physik *10*, 495 (1958)
72 Knizak, J., Acta physica Austr. *10*, 186 (1956)
73 Kubarew, A. W., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 3, 57 (1957)
74 Kuhrt, F., und Lippmann, H. J., Hallgeneratoren. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1968
75 Langner, G., und Lenz, F., Optik *11*, 171 (1954)
76 Leontjew, N. J., Nachrichtentechnik *6*, 351 (1956)
77 Lerner, L. S., Rev. sci. Instr. *37*, 680 (1966)
78 Lippmann, H. J., und Kuhrt, F., Z. Naturforsch. *13a*, 462 (1958)
79 Lösche, A., Kerninduktion. Berlin 1957
80 Lowe, G. C., Electron. Engng. *31*, 138 (1959)
81 Lubell, M. S., und Chandrasekhar, B. S., Rev. sci. Instr. *35*, 906 (1964)
82 Mager, A., Exp. Techn. Physik *1*, 109 (1953)
83 Malecki, J., Surma, M., und Gibalewicz, J., Acta physica Polon. *16*, 151 (1957)
84 Marton, L., Simpson, J. A., und Lachenbruch, S. H., J. Res. nat. Bur. Standards *52*, 97 (1954)
85 McCartan, J., und Barrault, M. R., J. sci. Instr. *44*, 265 (1967)
86 Mendelsohn, L. F., Rev. sci. Instr. *35*, 198 (1964)
87 Moerder, C., Arch. Elektrotechn. *40*, 230 (1952)
88 Myrgren, B., Z. angew. Physik *17*, 255 (1964)
89 Neckenbürger, E., Z. angew. Physik *18*, 440 (1965)
90 Neumann, H., Arch. techn. Messen (ATM) V 391—5 (1939)
91 Noltimier, H. C., J. sci. Instr. *41*, 55 (1964)
92 Odenov, S. V., Udzulashvili, G. A., Khvedelidze, Č. E., Chigminadze, D. G., und Shukhman, V. A., Cryogenics *6*, 46 (1966)
93 Ohtsubo, A., und Kanda, E., Cryogenics *2*, 339 (1962)
94 Oppliger, H. R., Schmid, P., und Günthard, H., J. sci. Instr. *42*, 865 (1965)
95 Owston, C. N., J. sci. Instr. *44*, 798 (1967)
96 Packard, M., und Varian, R., Physic. Rev. *93*, 941 (1954)
97 Parton, J. E., und Stairmand, G. D., J. sci. Instr. *32*, 464 (1955)
98 Penn, T. C., und West, F. G., Rev. sci. Instr. *35*, 1361 (1964)
99 Piekara, A., Malecki, J., Surma, M., und Gibalewicz, J., Proc. physic. Soc. *B70*, 432 (1957)
100 Pierce, J. M., in: Proceedings of the Symposium on the Physics of Superconducting Devices. Charlottesville 1967, S. B1—B10
101 Pierce, W. L., und Hicks, J. C., Rev. sci. Instr. *36*, 202 (1965)
102 Pikus, G. E., und Sorokin, O. V., Sov. Physics — J. techn. Physics *2*, 2457 (1957)
103 Ploch, W., Z. angew. Physik *1*, 525 (1949)
104 Pohm, A. V., und Rubens, S. M., Rev. sci. Instr. *27*, 306 (1956)
105 Poregud, B. P., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 3, 64 (1957)
106 Radhakrishna, P., und Nielsen, M., Cryogenics *8*, 106 (1968)

11.107 Rado, G. T., und Suhl, H., ed., Magnetism, Bd. 1. New York—London 1963
108 Rogers, R. M., und Kantor, R. H., Rev. sci. Instr. *32,* 1230 (1961)
109 Roshon jr., D. D., Rev. sci. Instr. *33,* 201 (1962)
110 Rupp jr., L. W., Rev. sci. Instr. *37,* 1039 (1966)
111 Saker, E. W., Cunnell, F. A., und Edmond, J. T., Brit. J. appl. Physics *6,* 217 (1955)
112 Schwee, L. J., und Irons, H. R., Rev. sci. Instr. *39,* 220 (1967)
113 Seldowitsch, M. P., und Rubtschinski, S. M., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 1 56 (1958)
114 Shearer, L. D., Colegrove, F. D., und Walters, G. K., Rev. sci. Instr. *34,* 1363 (1963)
115 Shernowoj, A. I., Jegorow, J. S., und Latyschew, G. D., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 5, 71 (1958)
116 Shernowoj, A. I., Latyschew, G. L., und Sergejew, A. G., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 2, 60 (1957)
117 Shiffman, C. A., Rev. sci. Instr. *33,* 206 (1962)
118 Simpkins, J. E., Rev. sci. Instr. *39,* 570 (1968)
119 Smith, D. O., Rev. sci. Instr. *27,* 261 (1956)
120 Spighel, M., Suppl. J. Physique Radium *18,* 105A (1957)
121 Stuart, W. F., Usher, M. J., und Hall, S. H., Nature [London] *202,* 76 (1964)
122 Suchow, L., J. appl. Physics *29,* 223 (1958)
123 Symonds, J. L., Rep. Progr. Physics *18,* 83 (1955)
124 Taylor, M. T., Merrill, J. R., und Bowers, R., Physic. Rev. *129,* 2525 (1963)
125 Tebble, R. S., J. sci. Instr. *30,* 369 (1953)
126 Thomas, H. A., Driscoll, R. K., und Hipple, J. A., Physic. Rev. *75,* 902 (1949)
127 Usher, M. J., Stuart, W. F., und Hall, S. H., J. sci. Instr. *41,* 544 (1964)
128 Voigt, H., Diss. TH München 1967
129 Ward, D., Cryogenics *7,* 41 (1967)
130 Waters, G. S., und Francis, P. D., J. sci. Instr. *35,* 88 (1958)
131 Weiss, H., Solid-State Electron. *1,* 225 (1960)
132 Weiss, H., Solid-State Electron. *9,* 1 (1966)
133 Weiss, H., Messung von Magnetfeldern, in: Flügge, S., ed., Handbuch der Physik, Bd. 23. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1967, S. 198
134 Weiss, H., und Wilhelm, M., Z. Physik *176,* 399 (1963)
135 Welker, H., Elektrotechn. Z. (ETZ) (A) *76,* 513 (1955)
136 Winterhoff, H., AEG-Mitteilungen *50,* 382 (1960); *53,* 277 (1963)
137 Wohlgemuth, H., Siemens-Z. *32,* 214 (1958)
138 Wright, E. S., und Jahn, R. G., Rev. sci. Instr. *36,* 1891 (1965)
139 Wunderer, E., Rev. sci. Instr. *36,* 1054 (1965)
140 Wurm, M., Z. angew. Physik *2,* 210 (1950)
141 Yousef, Y. L., und Mikhail, H., J. sci. Instr. *35,* 375 (1958)

§ 12 Eigenschaften magnetischer Stoffe

12.1 Abbott, D. A., und Kilgour, R., J. sci. Instr. *31,* 155 (1954)
2 Adams, J. Q., Rev. sci. Instr. *37,* 1099 (1966)
3 Albach, J., Diss. TU Berlin 1958
4 Alberts, L., und Shepstone, B. J., Philos. Mag. *3,* 700 (1958)
5 Arrott, A., und Goldmann, J. E., Rev. sci. Instr. *28,* 99 (1957)
6 Artman, J. O., und Tannenwald, P. E., J. appl. Physics *26,* 1124 (1955)
7 Asti, G., und Conti, F., Rev. sci. Instr. *39,* 974 (1968)

12.8 AUWÄRTER, M., und KUSSMANN, A., Ann. Physik (6) *7*, 169 (1950)
9 BADY, I., J. appl. Physics *29*, 393 (1958)
10 BANEWICZ, J. J., und LINDSAY, R., Physic. Rev. (2) *104*, 318 (1956)
11 BARDELL, P. R., Magnetic Materials in the Electrical Industry. New York 1955
12 BATES, J., Modern Magnetism, 4. Aufl. Cambridge 1963
13 BATES, L. F., und HUGHES, D., Proc. physic. Soc. *67*, 28 (1954)
14 BATES, L. F., und LOASBY, R. G., Proc. physic. Soc. *72*, 757 (1958)
15 BECK, J. W., Rev. sci. Instr. *38*, 1031 (1967)
16 BECKER, R., und DÖRING, W., Ferromagnetismus. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1939
17 BEHRENDT, D. R., LEGVOLD, S., und SPEDDING, F. H., Physic. Rev. (2) *109*, 1544 (1958)
18 BELOV, K. P., LEVITIN, R. Z., und PONOMARJOV, B. K., J. appl. Physics *39*, 3285 (1968)
19 BHAGAT, S. M., und LUCAS, C. W., Rev. sci. Instr. *39*, 255 (1968)
20 BIZETTE, H., TERRIER, C., und TSAI, B., J. Physique Radium *20*, 421 (1959)
21 BLOMBERG, H., und KARTTUNEN, P. J., Proc. IEE (A) *105*, 375 (1958)
22 BOCKRIS, J. O. M., und PARSONS, D. F., J. sci. Instr. *30*, 362 (1953)
23 BOWERS, R., Physic. Rev. (2) *102*, 1486 (1956)
24 BOWERS, R., Physic. Rev. (2) *108*, 683 (1957)
25 BOZORTH, R. M., Ferromagnetism. New York 1951
26 BRAILSFORD, F., J. IEE (NS) *3*, 569 (1957)
27 BRAILSFORD, F., Physical Principles of Magnetism. London 1966
28 BRAILSFORD, F., und BRADSHAW, J., Proc. IEE *102*, 463 (1955)
29 BREITENHUBER, L., Acta physica Austr. *11*, 88 (1957)
30 BROCKMAN, F. G., und STENECK, W. G., Philips techn. Rdsch. *16*, 189 (1955)
31 BROERSMA, S., Rev. sci. Instr. *34*, 277 (1963)
32 BURGT, C. M. VON DER, GEVERS, M., und WIJN, H. P. J., Philips techn. Rdsch. *14*, 243 (1953)
33 BUSCH, G. A., Suszeptibilität von Halbleitern, in: Halbleiter und Phosphore. Braunschweig 1958
34 BUTERA, R. A., CRAIG, R. S., und CHERRY, L. V., Rev. sci. Instr. *32*, 708 (1961)
35 CANDELA, G. A., und MUNDY, R. E., Rev. sci. Instr. *32*, 28 (1961)
36 CASIMIR, H. B. G., Magnetism and Very Low Temperatures. Cambridge 1940
37 CHEN, W. K., KOCH, F. B., und SILVERSTEN, J. M., Rev. sci. Instr. *31*, 1157 (1960)
38 CHIKAZUMI, S., und CHARAP, S. H., Physics of Magnetism. New York 1964
39 CHILDS, B. G., und PENFOLD, J., Philos. Mag. (8) *2*, 389 (1957)
40 CHOUDHURY, J. K., und SEN, P. C., J. sci. Instr. *35*, 145 (1958)
41 COCHARDT, A. W., J. appl. Physics *25*, 91 (1954)
42 COCHARDT, A., J. appl. Physics *37*, 1112 (1966)
43 COHEN, J., J. Physique Radium *19*, 57S (1958)
44 COOTER, I. L., und HARRIS, W. P., J. Res. nat. Bur. Standards *57*, 103 (1956)
45 COPELAND, J. A., KUO, C. K., und SCHEIBNER, E. J., Rev. sci. Instr. *36*, 291 (1965)
46 CRAIK, D. J., und TEBBLE, R. S., Ferromagnetism and Ferromagnetic Domains. Amsterdam 1965
47 CRANGLE, J., und MARTIN, M. J. C., J. sci. Instr. *36*, 100 (1959)
48 CRONK, E. R., J. appl. Physics *37*, 1097 (1966)
49 DANAN, H., HERR, A., und MEYER, A. J. P., J. appl. Physics *39*, 669 (1968)
50 DEGENNES, P. G., Superconductivity of Metals and Alloys. New York 1966
51 DILLINGER, W. L., JASTRAM, P. S., und DAUNT, J. G., Rev. sci. Instr. *29*, 159 (1958)

12.52 EDER, F. X., Exp. Techn. Phys. *6*, 74 (1957)
53 EFFEMEY, H. G., PARSONS, D. F., und BOCKRIS, J. O. M., J. sci. Instr. *32*, 99 (1955)
54 EINSELE, T., Z. angew. Physik *6*, 70 (1954)
55 EISLER, J. D., NEWTON, G. R., und ADCOCK, W. A., Rev. sci. Instr. *23*, 17 (1952)
56 ELDER, T., und BARTE, W., Rev. sci. Instr. *33*, 1360 (1962)
57 ELLENKAMP, L. A., Rev. sci. Instr. *33*, 383 (1962)
58 ELLENKAMP, L. A., Rev. sci. Instr. *37*, 948 (1966)
59 ELLENKAMP, L. A., und ZIJLSTRA, H., Z. angew. Physik *16*, 400 (1964)
60 ELLIOT, J. F., LEGVOLD, S., und SPEDDING, F. H., Physic. Rev. (2) *100*, 1595 (1955)
61 ELMORE, W. C., Physic. Rev. *53*, 757 (1938); *62*, 486 (1942)
62 ERICKSON, R. A., ROBERTS, L. D., und DABBS, J. W. T., Rev. sci. Instr. *25*, 1178 (1954)
63 ESLING, R. H., Rev. sci. Instr. *23*, 247 (1952)
64 EVANS, D. F., J. chem. Soc. [London] *10*, 1670 (1967)
65 FAHLENBRACH, H., Z. angew. Physik *21*, 108 (1966)
66 FELDTKELLER, R., und KOLB, O., Z. angew. Physik *4*, 448 (1952)
67 FEREDAY, R. A., Proc. physic. Soc. *43*, 383 (1931)
68 FISCHER, J., Abriß der Dauermagnetkunde. Berlin 1949
69 FLEGER, E., Arch. Elektrotechn. *40*, 4 (1950)
70 FLEISCHMANN, C. W., und TURNER, A. G., Rev. sci. Instr. *37*, 73 (1966)
71 FÖEX, G., und FORRER, R., J. Physique Radium *7*, 180 (1936)
72 FÖRSTER, F., Z. Metallkde. *46*, 297 (1955)
73 FOILES, C. L., und TOMIZUKA, C. T., J. appl. Physics *36*, 3839 (1965)
74 GALL, D. C., und WATSON, J. D., J. sci. Instr. *33*, 265 (1956)
75 GANZHORN, K., Z. angew. Physik *10*, 169 (1958)
76 GEISSLER, K. K., und ROCKER, W., Z. angew. Physik *17*, 258 (1964)
77 GERBER, R., und VILÍM, F., J. sci. Instr. (2) *1*, 389 (1968)
78 GERLACH, W., Z. VDI *91*, 127 (1949)
79 GERSONDE, K., J. sci. Instr. *43*, 591 (1966)
80 GNIEWEK, J. J., und PLOGE, E., J. Res. nat. Bur. Standards *69 C*, 225 (1965)
81 GOLD, H. S., und GRAY, H. J., Rev. sci. Instr. *36*, 854 (1965)
82 GORDON, R. G., Rev. sci. Instr. *33*, 729 (1962)
83 GORTER, C. J., Paramagnetic Relaxation. Amsterdam 1947
84 GORTER, C. J., in: Progr. Low Temp. Physics *2*, 266 (1957)
85 GRADMANN, U., und MÜLLER, J., J. appl. Physics *39*, 1379 (1968)
86 GRAF, P., Z. angew. Physik *13*, 534 (1961)
87 GRAHAM jr., C. D., J. appl. Physics *29*, 68 (1958)
88 GREEN, A., und THOMAS, B. W. J., J. sci. Instr. *43*, 399 (1966)
89 GROVER, D. J., J. sci. Instr. *43*, 718 (1966)
90 GUGAN, D., Proc. physic. Soc. *72*, 1013 (1958)
91 HAAS, P. H., und KEISALL, G. A., Trans. nat. Bur. Standards, J. Franklin Inst. Nr. 6, 254 und 354 (1952)
92 HARTSHORN, L., J. sci. Instr. *2*, 10 (1925)
93 HECK, C., Magnetische Werkstoffe und ihre technische Anwendung. Heidelberg 1967
94 HEDGCOCK, F. T., Canad. J. Physics *34*, 43 (1956)
95 HEDGCOCK, F. T., J. Electron. *2*, 513 (1957)
96 HEISTER, W., Techn. Mitt. Krupp *15*, 130 (1957)
97 HENRY, W. G., und ROGERS, J. L., Philos. Mag. (8) *1*, 223 (1956)
98 HERRMANN, P. K., und WINTERHOFF, H., Z. Metallkde. *46*, 303 (1955)

12.99 HEYDING, R. D., TAYLOR, J. B., und HAIR, M. L., Rev. sci. Instr. *32*, 161 (1961)
100 HIRONE, T., MAEDA, S., und TSUYA, N., Rev. sci. Instr. *25*, 516 (1954)
101 HOARE, F. E., und WALLING, J. C., Proc. physic. Soc. *64*, 337 (1951)
102 HOFER, L. J. E., und TOOR, E. W., Rev. sci. Instr. *33*, 417 (1962)
103 HOWLING, D. H., Rev. sci. Instr. *27*, 952 (1956)
104 HUMPHREY, F. B., und JOHNSTON, A. R., Rev. sci. Instr. *34*, 348 (1963)
105 HURD, C. M., Rev. sci. Instr. *37*, 515 (1966)
106 ITTERBEEK, A. VAN, und DUCHATEAU, W., Physica *22*, 649 (1956)
107 ITTERBEEK, A. VAN, und DUCHATEAU, W., Physica *23*, 169 (1957)
108 JACKSON, W., Suppl. Proc. IEE (B) Nr. 5, 129 (1957)
109 JEWDOKIMOW, W. B., und LI FEN-U, J. fis. Chim. (russ.) *37*, 1910 und 2791 (1963)
110 JOOS, G., Z. angew. Physik *6*, 43 (1954)
111 JOSEPH, R. I., und SCHLÖMANN, E., J. appl. Physics *36*, 1579 (1965)
112 JOST, K., Z. Physik *147*, 520 (1957)
113 JOUSSOT-DUBIEN, J., LEMANCEAU, B., und PACAULT, A., J. Chim. physique *53*, 198 (1956)
114 KAPITZA, P., Proc. roy. Soc. [London] *A131*, 224 (1931); *A133*, 556 (1932)
115 KAPOSI, J. F., Electron. Engng. *31*, 278 (1959)
116 KERSTEN, M., Arbeitsgemeinschaft der Forschung in Nordrhein-Westfalen Nr. 74, 7 (1957)
117 KESSLER, J. O., und MOORE, A. R., Rev. sci. Instr. *33*, 478 (1962)
118 KIENLIN, A. VON, Z. angew. Physik *9*, 520 (1957)
119 KIENLIN, A. VON, Z. angew. Physik *10*, 562 (1958)
120 KLITZING, H. VON, Z. Instr.-Kde. *65*, 4 (1957)
121 KNELLER, E., Ferromagnetismus. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1962
122 KOCH, K. M., und JELLINGHAUS, W., Einführung in die Physik der magnetischen Werkstoffe. Wien 1957
123 KÖSTER, W., ed., Beiträge zur Theorie des Ferromagnetismus. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1956
124 KORNETZKI, M., Z. angew. Physik *3*, 5 (1951)
125 KREINES, N. M., J. eksp. teor. Fisiki (russ.) *35*, 1391 (1958)
126 KÜHNE, R., Z. angew. Physik *6*, 131 (1954)
127 KUPER, C. G., An Introduction to the Theory of Superconductivity. Oxford 1968
128 LANGE, H., und JAENSCH, P., Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen Nr. 1293. Köln—Opladen 1964
129 LEE, E. W., Proc. IEE *105*, 337 (1958)
130 LEE, E. W., und LYNCH, A. C., Adv. Physics *8*, 292 (1959)
131 LEIPFINGER, H., Z. Physik *150*, 415 (1958)
132 LEVER, R. C., YAMARTINO, E. J., und FALK, R. B., J. appl. Physics *29*, 304 (1958)
133 LIKHITE, S. D., RAHAKRISHNAMURTY, C., und SAHASRABUDHE, P. W., Rev. sci. Instr. *36*, 1558 (1965)
134 LOCKHORST, D. A., ITTERBEEK, A. VAN, und BERG, G. J. VAN DEN, Appl. sci. Res. [Hague] *B3*, 451 (1956)
135 LOMBARDINI, P. P., SCHWARTZ, R. F., und DOVIAK, J., J. appl. Physics *29*, 395 (1958)
136 LOTGERING, F. K., Philips Res. Rep. *11*, 190 (1956)
137 LOWRIE, W., und FULLER, M., Philos. Mag. *18*, 589 (1968)
138 LUBORSKY, F. E., J. appl. Physics *37*, 1091 (1966)
139 MALEK, Z., Czechoslov. J. Physics *7*, 152 (1957)
140 MATTHIAS, B. T., SUHL, H., und CORENZWIT, E., Physic. Rev. Letters *1*, 449 (1958)
141 MAXWELL, E., Rev. sci. Instr. *36*, 553 (1965)

12.142 MAZETTI, P., und SOARDO, P., Rev. sci. Instr. *37*, 548 (1966)
143 McCAIG, M., Nature [London] *169*, 889 (1952)
144 McCAIG, M., J. appl. Physics *35*, 958 (1964)
145 McKIM, F. R., und WOLF, W. P., J. sci. Instr. *34*, 64 (1957)
146 MEYER, A. J. P., und TAGLANG, P., J. Physique Radium *17*, 457 (1956)
147 MICKELSEN, J. K., Gen. Electr. Rev. *51*, 24 (1948)
148 MORRIS, D. P., PRESTON, R. R., und WILLIAMS, I., Proc. physic. Soc. *73*, 520 (1959)
149 MOTT, E. G. DE, J. appl. Physics *37*, 1118 (1966)
150 MYERS, W. R., J. sci. Instr. *35*, 173 (1958)
151 NAGAGOME, R., und WHITMORE, D. H., Rev. sci. Instr. *37*, 852 (1966)
152 NECKENBÜRGER, E., SEVERIN, H., VOGEL, J. K., und WINKLER, G., Z. angew. Physik *18*, 65 (1964)
153 NEETESON, P. A., Rechteck-Ferritkerne. Eindhoven 1964
154 NESBITT, E. A., und CHIN, G. Y., Rev. sci. Instr. *39*, 1268 (1968)
155 NONNENMACHER, W., und SCHWEIZER, L., Z. angew. Physik *9*, 239 (1957)
156 OCHSENFELD, R., Z. angew. Physik *4*, 350 (1952)
157 OCHSENFELD, R., und CAPPTULLER, H., Z. angew. Physik *20*, 407 (1966)
158 OKOSHI, T., J. appl. Physics *36*, 2382 (1965)
159 OLSON, R. D., J. appl. Physics *37*, 1197 (1966)
160 OLSON, C. D., und POHM, A. V., J. appl. Physics *29*, 274 (1958)
161 OOSTERHOUT, G. W. VAN, Appl. sci. Res. [Hague] *B 6*, 101 (1956)
162 PACAULT, A., VANKERCKOOVEN, A., HOARAU, J., und JOUSSOT-DUBIEN, J., J. Chim. physique *49*, 470 (1952)
163 PASSON, B., Z. angew. Physik *16*, 81 (1963)
164 PASSON, B., Z. angew. Physik *25*, 56 (1968)
165 PENN, T. C., Rev. sci. Instr. *37*, 1134 (1966)
166 PENN, T. C., und WEST, F. G., Rev. sci. Instr. *37*, 1137 (1966)
167 PENOYER, R. F., Rev. sci. Instr. *30*, 711 (1959)
168 PEPPER, A. R., und SMITH, J. H., J. sci. Instr. *42*, 328 (1965)
169 POLYDOROF, W. J., High-Frequency Magnetic Materials. New York 1960
170 POULIS, J. A., POLDERVAART, L. J., und TEUNISSEN, P., Appl. sci. Res. [Hague] *6*, 124 (1956)
171 RADO, G., und SUHL, H., ed. Magnetism. New York 1963
172 RÁKOŠ, M., Czechoslov. J. Physics *7*, 495 (1957)
173 RANKINE, A. O., Proc. physic. Soc. *46*, 1 (1934)
174 RASMUSSEN, A. L., ENFIELD, A. W., und HESS, A., J. Res. nat. Bur. Standards *56*, 261 (1956)
175 RASSMANN, G., und HOFMANN, U., J. appl. Physics *39*, 603 (1968)
176 REIMER, L., Z. Naturforsch. *11a*, 611 (1956)
177 RHODES, B. L., LEGVOLD, S., und SPEDDING, F. H., Physic Rev. (2) *109*, 1547 (1958)
178 RHYNE, J. J., FONER, S., McNIFF jr., E. J., und DOCLO, R., J. appl. Physics *39*, 892 (1968)
179 RICHARDSON, J. T., und BEAUXIS, J. O., Rev. sci. Instr. *34*, 877 (1963)
180 RICHARDSON, J. T., und SAPP, R. C., J. chem. Physics *29*, 337 (1958)
181 ROBINS, D. A., Philos. Mag. *8*, 313 (1958)
182 ROCKER, W., und KOHLHAAS, R., Z. angew. Physik *21*, 361 (1966)
183 RÖSS, E., HANKE, I., und MOSER, E., Z. angew. Physik *17*, 504 (1964)
184 RUSKE, W., Ann. Physik *2*, 274 (1958)
185 SAMARA, G. A., und GIARINI, A. A., Rev. sci. Instr. *36*, 108 (1965)
186 SCHWABE, E., Z. angew. Physik *9*, 183 (1957)

12.187 SCOTT, K. L., Bell System techn. J. *11*, 383 (1932)
188 SHOENBERG, D., Superconductivity, 2. Aufl. Cambridge 1952
189 SIXTUS, K. J., KRONENBERG, K. J., und TENZER, R. K., J. appl. Physics *27*, 1051 (1956)
190 SMIT, J., und WIJN, H. P. J., Adv. Electron. *6*, 69 (1954)
191 SMIT, J., und WIJN, H. P. J., Ferrites. New York 1959
192 SMITH, D. O., Physic. Rev. *102*, 959 (1956)
193 SMITH, D. O., J. appl. Physics *29*, 264 (1958)
194 SOKOLOV, V. K., Cryogenics *8*, 149 (1968)
195 SOULE, D. E., NEZBEDA, C. W., und CZANDERNA, A. W., Rev. sci. Instr. *35*, 1504 (1964)
196 STAUSS, H. E., J. appl. Physics *29*, 182 (1958)
197 STEVENS, D. K., CLELAND, J. W., CRAWFORD, J. H., und SCHWEINLER, H. C., Physic. Rev. (2) *100*, 1084 (1955)
198 STEVENSON, R., J. sci. Instr. *32*, 28 (1961)
199 STOLL, J. P., Z. angew. Physik *22*, 214 (1967)
200 SUCKSMITH, W., Philos. Mag. *8*, 158 (1929)
201 SWAN, M. J., J. sci. Instr. *35*, 344 (1958)
202 URK, A. T., Philips techn. Rdsch. *6*, 29 (1940)
203 VAUTIER, R., Ann. Physique Radium (12) *9*, 322 (1954)
204 VENKATESWARLU, K., und SRIRAMAN, S., Z. Naturforsch. *13a*, 453 und 457 (1958)
205 VÍLIM, F., Czechoslov. J. Physics *6*, 84 (1956)
206 VLECK, J. H. VAN, The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities. Oxford 1932
207 WAGNER, D., Einführung in die Theorie des Magnetismus. Braunschweig 1966
208 WALDRON, R. A., Brit. J. appl. Physics *29*, 439 (1958)
209 WEIL, L., Progr. Low Temp. Physics Bd. 1 (1955) S. 344
210 WEISS, P., und FORRER, R., Ann. Physique *12*, 297 (1929)
211 WEITZENMILLER, F., Elektronik *4*, 105 (1955)
212 WENT, J. J., RATHENAU, G. W., GORTER, E. W., und OOSTERHOUT, G. W. VAN, Philips techn. Rdsch. *13*, 361 (1952)
213 WIJN, H. P., ed., Magnetismus, in: FLÜGGE, S., ed., Handbuch der Physik, Bd. 18. Berlin—Heidelberg 1968
214 WILDE, H., Z. angew. Physik *7*, 509 (1955)
215 WLASSOW, K. B., Physik. Abh. Sowjet. *9*, 116 (1957)
216 WONSOWSKI, S. W., Moderne Lehre vom Magnetismus. Berlin 1956
217 WOTRUBA, K., Czechoslov. J. Physics *5*, 102 (1955)
218 YAMADA, O., Z. Physik *142*, 225 (1955)
219 YOUSEF, Y. L., J. appl. Physics *4*, 46 (1953)
220 YU, S. P., und MORRISH, A. H., Rev. sci. Instr. *27*, 9 (1956)
221 ZAHN, C. T., Rev. sci. Instr. *34*, 285 (1963)
222 ZIJLSTRA, H., Z. angew. Physik *21*, 6 (1966)

§ 13 Erzeugung von Magnetfeldern

13.1 ABRAHAM, R. J., OVENALL, D. W., und WHIFFEN, D. H., J. sci. Instr. *34*, 269 (1957)
2 ADAIR, T. W., SQUIRE, C. F., und UTLEY, H. B., Rev. sci. Instr. *31*, 416 (1960)
3 AFANAJEW, W. P., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 1, 59 (1958)
4 AHERN, S. A., Rev. sci. Instr. *32*, 814 (1961)
5 ALBACH, W., und VOSS, G. A., Z. angew. Physik *9*, 111 (1957)

13.6 ALIKHANOV, S. G., BELAN, V. G., IVANCHENKO, A. I., KARASJUK, V. N., und KICHIGIN, G. N., J. sci. Instr. (2) *1*, 543 (1968)
7 ALLAIN, Y., GUNZBOURG, J. DE, KREBS, J. P., und MIEDAN-GROS, A., Rev. sci. Instr. *39*, 1360 (1968)
8 ALLDRED, J. C., und SCOLLAR, I., J. sci. Instr. *44*, 755 (1967)
9 AMEEN, D. L., und WIEDERHOLD, P. R., Rev. sci. Instr. *35*, 733 (1964)
10 ANDERSON, W. A., Rev. sci. Instr. *32*, 241 (1961)
11 ANDERSON, A. C., ROACH, W. R., und SARWINSKI, R. E., Rev. sci. Instr. *37*, 1024 (1966)
12 ANDRESEN, H., Z. angew. Physik *9*, 326 (1957)
13 ARNOLD, J. T., Physic. Rev. *102*, 139 (1956)
14 ARP, V., in: Proceedings of the First International Symposium on Magnetic Technology, Stanford 1965, S. 625
15 AŠNER, A., und MOSIG, R., Nucl. Instr. Meth. *20*, 35 (1963)
16 ATHERTON, D. L., IEEE Spectrum *1*, 67 (1964)
17 ATHERTON, D. L., Cryogenics *8*, 248 (1968)
18 AUTLER, S. H., Rev. sci. Instr. *31*, 369 (1960)
19 BARKER, J. R., J. sci. Instr. *26*, 273 (1949)
20 BARKOV, L. M., KHAKIMOV, S. K., und OGURTZOV, V. V., in: Les champs magnétiques intenses. Paris 1967, S. 409
21 BARTON jr., G. W., TOLMAN, L. F., und ROULETTE, R. E., Rev. sci. Instr. *31*, 995 (1960)
22 BEELEN, H. VAN, ARNOLD, A. J. P. T., SYPKENS, H. A., BRAAM HOUCKGEEST, J. P. VAN, OUPOTER, R. DE, BEENAKKER, J. J. M., und TACONIS, K. W., Physica *31*, 413 (1965)
23 BEIER, H.-J., Z. angew. Physik *23*, 344 (1967)
24 BELLAU, R. V., J. sci. Instr. *44*, 793 (1967)
25 BENAROYA, R., und MORGENSEN, H. P., J. appl. Physics *37*, 2162 (1966)
26 BERGER, W., und BUTTERWECK, H.-J., Arch. Elektrotechn. *42*, 216 (1956)
27 BERKES, B., Nucl. Instr. *3*, 260 (1958)
28 BERLINCOURT, T. G., Brit. J. appl. Physics *14*, 749 (1963)
29 BERLINCOURT, T. G., und HAKE, R. R., Physic. Rev. *131*, 140 (1963)
30 BERNDT, M. M., Rev. sci. Instr. *35*, 1409 (1964)
31 BITTER, F., Rev. sci. Instr. *33*, 342 (1962)
32 BITTER, F., Brit. J. appl. Physics *14*, 759 (1963)
33 BJORKEN, J. D., und BITTER, F., Rev. sci. Instr. *27*, 1005 (1956)
34 BLOOM, A. L., INNES, D. J., REMPEL, R. C., und RUDDOCK, K. A., J. appl. Physics *36*, 2560 (1965)
35 BODE, H. J., MAIER, R. G., und WILHELM, G., Z. Naturforsch. *19a*, 804 (1964)
36 BODE, H. J., und WOHLLEBEN, K., Physics Letters *24A*, 25 (1967)
37 BOLTEZAR, E., PETRINOVIČ, M., und SEDLAČEK, M., J. sci. Instr. (2) *1*, 323 (1968)
38 BRECHNA, H., HILL, D. A., und BAILEY, B. M., Rev. sci. Instr. *36*, 1529 (1965)
39 BRINK, G. O., und BRASLAU, N., Rev. sci. Instr. *30*, 670 (1959)
40 BROWN, R. E., Rev. sci. Instr. *39*, 547 (1968)
41 BROWN, H. H., und BITTER, F., Rev. sci. Instr. *27*, 1009 (1956)
42 BUCHHOLZ, H., Elektrische und magnetische Potentialfelder. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1957
43 BÜHL, A., und COETERIER, F., Physik. Z. *33*, 773 (1932)
44 BUNDKE, W., Z. angew. Physik *18*, 157 (1964)
45 CARDEN, P. O., J. sci. Instr. (2) *1*, 437 (1968)
46 CARMAN, E. H., Brit. J. appl. Physics *6*, 426 (1955)
47 CHESTER, P. F., Report on Progr. in Physics *30*, Teil 2 (1967)

13.48 CLARK, J. W., Rev. sci. Instr. *9*, 320 (1938)
49 CLEGG, A. G., und McCAIG, M., Brit. J. appl. Physics *9*, 194 (1958)
50 COCKCROFT, J. D., J. sci. Instr. *10*, 71 (1933)
51 COLE, P. H., und VAUGHAN, R., J. sci. Instr. *40*, 411 (1963)
52 COTTI, P., Z. angew. Math. Physik (ZAMP) *11*, 17 (1960)
53 DANIELS, J. M., Brit. J. appl. Physics *4*, 50 (1953)
54 DAY, J. D. A., J. sci. Instr. *40*, 583 (1963)
55 DEINESS, S., Cryogenics *5*, 269 (1965)
56 DESLANDRES, H., und PEROT, A., C. R. hebd. Séances Acad. Sci. [Paris] *159*, 438 (1915)
57 DOI, T., KIMURA, H., SATO, S., KURODA, K., OGATA, H., KUDO, M., und KAWABE, U., Cryogenics *8*, 290 (1968)
58 DOWLEY, M. W., Cryogenics *4*, 153 (1964)
59 DREYFUS, L., Arch. Elektrotechn. *25*, 392 (1931)
60 DURANT, J., KLÜBER, O., und WULFF, H., Z. angew. Physik *12*, 393 (1960)
61 ENDIG, N., und LANGE, F., Cryogenics *8*, 215 (1968)
62 ERNST, R. R., Rev. sci. Instr. *39*, 998 (1968)
63 EVERETT, J. E., und OSMEIKHIAN, J. E., J. sci. Instr. *43*, 470 (1966)
64 EWALD, H., Z. angew. Physik *5*, 387 (1953)
65 FAHLENBRACH, H., Elektrotechnik *11*, 518 (1957)
66 FAST, R. W., CASTILLO, G. DEL, und WINTER, W. R., Rev. sci. Instr. *38*, 1789 (1967)
67 FIRESTER, A. H., Rev. sci. Instr. *37*, 1264 (1966)
68 FONER, S., und FISHER, W. G., Rev. sci. Instr. *38*, 440 (1967)
69 FONER, S., und KOLM, H. H., Rev. sci. Instr. *27*, 547 (1956)
70 FOWLER, C. M., GARN, W. B., und CAIRD, R. S., J. appl. Physics *31*, 588 (1960)
71 FRADKOV, A. B., Cryogenics *6*, 355 (1966)
72 FRANZEN, W., Rev. sci. Instr. *33*, 933 (1962)
73 FURTH, H. P., High Magnetic Fields. New York 1962
74 FURTH, H. P., LEVINE, M. A., und WANIEK, R. W., Rev. sci. Instr. *28*, 949 (1957)
75 FURTH, H. P., und WANIEK, R. W., Nuovo Cim. (10) *2*, 1350 (1955)
76 FURTH, H. P., und WANIEK, R. W., Rev. sci. Instr. *27*, 195 (1956)
77 GARRETT, M. W., J. appl. Physics *22*, 1091 (1951); *34*, 2567 (1963)
78 GARRETT, M. W., J. appl. Physics *38*, 2563 (1967)
79 GAUME, F., J. Rech. *9*, 93, 247, 259, 262 und 287 (1958)
80 GAVALER, J. R., PATTERSON, A., und AUTLER, S. H., J. appl. Physics *39*, 91 (1968)
81 GERSDORF, R., MULLER, F. A., und ROELAND, L. W., Rev. sci. Instr. *36*, 1100 (1965)
82 GLASS, M. S., J. appl. Physics *29*, 403 (1958)
83 GONTSCHAROW, I. N., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 2, 464 (1967)
84 GOODSEY, M., Electr. Engng. *54*, 1032 (1935)
85 GRANT, W. J. C., und STRANDBERG, M. W. P., Rev. sci. Instr. *36*, 343 (1965)
86 GUGAN, D., Cryogenics *3*, 220 (1963)
87 HAND, L. N., und PANOFSKY, W. K. H., Rev. sci. Instr. *30*, 927 (1959)
88 HANSON, R. J., und PIPKIN, F. M., Rev. sci. Instr. *36*, 179 (1965)
89 HARA, K., Bull. electrotechn. Labor. [Tokyo] *21*, 97 und 152 (1957)
90 HART, P. J., Universal Tables for Magnetic Fields of Filamentary and Distributed Circular Circuits. Palo Alto/Calif. 1967
91 HEINZEL, W., Physics Letters *20*, 260 (1966)
92 HELLER, C., Dtsch. hydrograph. Z. *8*, 157 (1955)
93 HERLACH, F., Rep. Progr. Physics *31*, 341 (1968)

13.94 Herlach, F., und Knoepel, H., Rev. sci. Instr. *36*, 1088 (1965)
95 Hildebrandt, H.-J., und Riecke, W. D., Z. angew. Physik *20*, 336 (1966)
96 Houwelingen, D. van, und Volger, J., Philips Res. Rep. *23*, 249 (1968)
97 Hug, A., Bull. SEV *41*, 661 (1950)
98 Hulbert, J. A., und Wilson, G. R., J. sci. Instr. *42*, 293 (1965)
99 Ignatchenko, V. A., und Karpenko, M. M., Sov. Physics — J. techn. Physics *13*, 143 (1968)
100 Ihara, S., und Kaiho, K., Japan. J. appl. Physics *7*, 959 (1968)
101 Jasse, E., Die Elektromagnete. Berlin 1930
102 Joksch, C., Z. angew. Physik *17*, 183 (1964)
103 Kantrowitz, A. R., und Stekly, Z. J. J., Appl. Physics Letters *6*, 56 (1965)
104 Kapitza, P. L., Proc. roy. Soc. [London] *A115*, 658 (1927)
105 Karasik, W. R., Physics and Technology of Strong Magnetic Fields. Moskau 1964 (russ.)
106 Karasik, W. R., Aktschurin, R. Sch., und Achmedow, S. Sch., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 2, 179 (1962)
107 Karasik, V. R., Achurin, R. Sch., und Akhmedov, S. Sch., Cryogenics *4*, 44 (1964)
108 Kawabe, U., und Doi, T., Cryogen. Engng. [Tokyo] *3*, 163 (1968)
109 Keilin, V. E., Klimenko, E. Y., Kremlev, M. G., und Samoilov, B. N., in: Les champs magnétiques intenses. Paris 1967, S. 231
110 Kelly, M. J., und Wallace, J. E., Commun. Electron., Nr. 28, 675 (1957)
111 Kim, Y. B., und Platner, E. D., Rev. sci. Instr. *30*, 524 (1959)
112 Klerk, D. de, The Construction of High-Field Electromagnets. Newport 1965
113 Klerk, D. de, und Gorter, C. J., High Magnetic Fields. New York 1962, S. 194
114 Klose, W., Naturwiss. *51*, 180 (1964)
115 Koch, D., Otto, G., und Saur, E., Physics Letters *4*, 292 (1963)
116 Kohlhaas, R., und Lange, H., Z. angew. Physik *17*, 253 (1964)
117 Kohout, F., Feingerätetechnik *1*, 30 (1952)
118 Kolm, H., Lax, B., Bitter, F., und Mills, R., High Magnetic Fields. New York 1962
119 Konstantinow, A. W., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 3, 61 (1957)
120 Kremlew, M. G., Usp. fis. Nauk (russ.) *93*, 675 (1967)
121 Krisjuk, E. M., und Latyschew, G. D., Isvest. Akad. Nauk SSSR, Ser. fis. (russ.) *22*, 976 (1958)
122 Kronenberg, K. J., Z. angew. Physik *5*, 321 (1953)
123 Kroon, D. J., Laboratory Magnets. Eindhoven 1968
124 Krzycki, L. J., Rev. sci. Instr. *36*, 393 (1965)
125 Kummer, J., Z. angew. Physik *18*, 139 (1964)
126 Kurti, N., Physica *24*, 123 (1958)
127 Lambert, R. H., und Wright, J. J., Rev. sci. Instr. *38*, 1385 (1967)
128 Lancaster, G., und Smallman, A. G., J. sci. Instr. *42*, 341 (1965)
129 Lange, F., Cryogenics *6*, 51 (1966)
130 Lange, H., und Kohlhaas, R., Z. angew. Physik *10*, 461 (1958)
131 Lange, H., und Symietz, D., Cryogenics *8*, 203 (1968)
132 Laquer, H. L., und Hammel, E. F., Rev. sci. Instr. *28*, 875 (1957)
133 Laverick, C., und Lobell, G., Rev. sci. Instr. *36*, 825 (1965)
134 Lax, B., Physica *24*, 125 (1958)
135 Leinhardt, T. E., und Reynolds, J. M., Physic. Rev. (2) *99*, 1626 (1955)
136 Lewin, J. D., und Smith, P. F., Rev. sci. Instr. *35*, 541 (1964)
137 Lewis, B., Brit. J. appl. Physics *1*, 238 (1950)
138 Likhite, S. D., Radhakrishnamurty, C., und Sahasrabudhe, P. W., Rev. sci. Instr. *36*, 1558 (1965)

13.139 Lucas, E. J., Stekly, Z. J. J., Foldes, A., und Milton, R. D., IEEE Trans. Magnetics *MAG-3*, 280 (1967)
140 Luteijn, A. I., und Vos, K. J. de, Philips Res. Rep. *11*, 489 (1956)
141 Mäntysalo, E., und Laiho, R., J. sci. Instr. *42*, 766 (1965)
142 Maier, R. G., Z. Metallkde. *57*, 874 (1966)
143 Matthews, P. W., Khoo, T. L., und Neufeld, P. D., Cryogenics *5*, 213 (1965)
144 McKeehan, L. W., Magnets. New York 1967
145 McKeehan, L. W., Rev. sci. Instr. *10*, 371 (1939)
146 Mendelsohn, L. I., J. appl. Physics *29*, 407 (1958)
147 Mercouroff, W., Cryogenics *3*, 171 (1963)
148 Montgomery, D. B., Solenoid Magnet Design. New York 1969
149 Montgomery, D. B., Rep. Progr. Physics *26*, 69 (1963)
150 Montgomery, D. B., IEEE Spectrum, Febr., 103 (1964)
151 Montgomery, D. B., und Iwasa, Y., Cryogenics *8*, 247 (1968)
152 Montgomery, D. B., und Rinderer, L., Cryogenics *8*, 221 (1968)
153 Müller, C., Otto, G., und Saur, E., Z. Naturforsch. *19a*, 539 (1964)
154 Müller, C. B., und Saur, E., Adv. Cryogen. Engng. *8*, 574 (1963)
155 Müller-Warmuth, G., und Servoz-Gavin, P., Z. Naturforsch. *13a*, 194 (1958)
156 Murrmann, H., und Schwink, C., Z. angew. Physik *12*, 155 (1960)
157 Myers, W. R., J. sci. Instr. *30*, 237 (1953)
158 Naumann, H., Z. angew. Physik *1*, 260 (1949)
159 Ollendorff, F., Berechnung magnetischer Felder. Technische Elektrodynamik, Bd. 1. Berlin 1952
160 Olsen, J. L., Helv. physica Acta *26*, 798 (1953)
161 Olsen, J. L., Contempor. Physics *5*, 161 (1964)
162 Paine, T. O., und Mendelsohn, L. I., Electr. Engng. *73*, 891 (1954)
163 Parker, R. J., und Studders, R. J., Permanent Magnets and their Application. New York 1962
164 Parkinson, D. H., The Generation of High Magnetic Fields. London 1967
165 Pawlek, F., Magnetische Werkstoffe. Berlin 1952
166 Peters, C. J., Rev. sci. Instr. *36*, 174 (1965)
167 Pippard, A. B., Cryogenics *5*, 81 (1965)
168 Prior, A. C., Cryogenics *7*, 131 (1967)
169 Purcell, J. R., und Payne, E. G., Rev. sci. Instr. *34*, 893 (1963)
170 Raetz, K., und Saur, E., Z. Physik *169*, 315 (1962)
171 Retter, G., Magnetische Felder und Kreise. Berlin 1961
172 Riecke, W. D., Z. Instr.-Kde. *75*, 343 (1967)
173 Rinderer, L., und Saur, E., Z. Physik *176*, 464 (1963)
174 Rinderer, L., und Saur, E., Z. Naturforsch. *18a*, 771 (1963)
175 Rinderer, L., Saur, E., und Wurm, J., Z. Physik *174*, 405 (1963)
176 Roberts, W. H., J. appl. Physics *29*, 405 (1958)
177 Roters, H. C., Electromagnetic Devices. New York 1941
178 Roth, J. R., Freeman jr., D. C., und Haid, D. A., Rev. sci. Instr. *36*, 1481 (1965)
179 Rothwarf, F., Bateman, C. O., Ford, D., und Milke, P., Rev. sci. Instr. *38*, 1241 (1967)
180 Rudd, M. E., und Craig, J. R., Rev. sci. Instr. *39*, 1372 (1968)
181 Sampson, W. B., Rev. sci. Instr. *36*, 565 (1965)
182 Samspon, W. B., und Kruger, P. G., Rev. sci. Instr. *36*, 1081 (1965)
183 Schearer, L. D., Rev. sci. Instr. *32*, 1190 (1962)
184 Schlosser, E.-G., Z. angew. Physik *7*, 59 (1955)

13.185 SCHRADER, E. R., und THOMPSON, P. A., IEEE Trans. Magnetics *MAG-2*, 311 (1966)
186 SCHÜLER, K., Z. angew. Physik *21*, 119 (1966)
187 SCHWEIZER, F., J. appl. Physics *33*, 1001 (1962)
188 SCHWINK, C., Z. angew. Physik *17*, 131 (1964)
189 SHEARER, J. W., ABRAHAM, F. F., APLIN, C. M., BENHAM, B. P., FAULKNER, J. E., FORD, F. C., HILL, M. M., MCDONALD, C. A., STEPHENS, W. H., STEINBERG, D. J., und WILSON, J. R., J. appl. Physics *39*, 2102 (1968)
190 SHUKOW, W. W., und SEMASCHKO, N. N., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 2, 41 (1958)
191 SIXTUS, K., und ZEHLER, V., AEG-Mitteilungen *52*, 205 (1962)
192 SOBOL, H., und MCNICHOL, J. J., Rev. sci. Instr. *33*, 473 (1962)
193 SOMMERS jr., H. S., WEISS, P. R., und HALPERN, W., Rev. sci. Instr. *22*, 612 (1951)
194 STACEY, F. D., J. sci. Instr. *36*, 328 (1959)
195 STRAUSS, B. P., und ROSE, R. M., J. appl. Physics *39*, 1638 (1968)
196 SUCKSMITH, W., und ANDERSON, S. P., J. sci. Instr. *33*, 234 (1956)
197 TSEITLIN, L. A., Sov. Physics — Z. techn. Physics *2*, 2592 (1957)
198 VOIGT, H., Physics Letters *20*, 262 (1966)
199 VOIGT, H., Z. Naturforsch. *21a*, 510 (1966)
200 WADEY, W. G., Rev. sci. Instr. *27*, 910 (1956)
201 WATKINS, J., J. sci. Instr. *42*, 98 (1965)
202 WEBER, R., Z. angew. Physik *22*, 449 (1967)
203 WEIL, L., Physica *24*, 118 (1958)
204 WILLIAMS, J. E. C., Cryogenics *3*, 234 (1963)
205 WILLIAMS, J. E, C., Rev. sci. Instr. *37*, 1030 (1966)
206 WILSON, M. N., J. sci. Instr. (2) *1*, 575 (1968)
207 WILSON, M. N., und SRIVASTAVA, K. D., Rev. sci. Instr. *36*, 1096 (1965)
208 WIPF, S. L., Adv. cryogen. Engng. *9*, 342 (1964)
209 WOOD, M., Cryogenics *2*, 297 (1962)
210 YNTEMA, G. B., Physic. Rev. (2) *98*, 1197 (1955)
211 ZAWEMBA, J. A., und JANTOWSKI, J. I., Magn. Gidrodinam. (russ.) Nr. 4, 124 (1967)
212 ZUMBUSCH, W., Feinwerktechnik *60*, 311 (1956)

§ 14 Induktivitätsmessung

14.1 ANDERSON, J. C., Electron. Radio Engr. *36*, 56 (1959)
2 ARNOLD, A. H. M., Proc. IEE *99*, 94 (1951)
3 BLECHSCHMIDT, E., Präzisionsmessungen von Kapazitäten, Induktivitäten und Zeitkonstanten, Bd. 2, 2. Aufl. Braunschweig 1957
4 BRAND, H., und SCHUON, E., Elektron. Rdsch. *11*, 65 (1957)
5 DICKEY, F. E., Instruments *28*, 620 (1955)
6 ERCKSON, R. A., ROBERTS, L. D., und DABBS, J. W. T., Rev. sci. Instr. *25*, 1178 (1954)
7 FELDTKELLER, R., Theorie der Spulen und Übertrager, 3. Aufl. Stuttgart 1958
8 FELDTKELLER, R., Tabellen und Kurven zur Berechnung von Spulen und Übertragern. Stuttgart 1958
9 GROVER, F. W., Inductance Calculations. New York 1948
10 GUGAN, D., J. sci. Instr. *35*, 31 (1958)
11 HAK, J., Eisenlose Drosselspulen. Leipzig 1937
12 HAMMOND, P., Proc. IEE *103*, 249 (1956)

14.13 Harris, W. P., und Cooter, I. L., J. Res. nat. Bur. Standards *60*, 509 (1958)
14 Hartshorn, L., und Penton, J. J., Proc. IEE (B) *103*, 429 (1956)
15 Hasebe, K., Rev. sci. Instr. *31*, 352 (1960)
16 Henderson, J. T., und Romanowski, M., Canad. J. Physics *33*, 856 (1955)
17 Lamont, K., Electron. Engng. *27*, 357 (1955)
18 Lynch, A. C., und Gugan, D., J. sci. Instr. *35*, 351 (1958)
19 Malmberg, J. H., und Rosenbluth, M. N., Rev. sci. Instr. *36*, 1886 (1965)
20 Rayner, G. H., und Ford, L. H., J. sci. Instr. *33*, 75 (1956)
21 Simon, A. W., Proc. IRE Nr. 1 (1945)
22 Simonyi, K., Theoretische Elektrotechnik, 4. Auflage Berlin 1971
23 Sparbier, W., Valvo-Berichte *3*, 71 (1957)
24 Weis, A., Frequenz *8*, 204 (1954)
25 Wolff, H. H., J. Franklin Inst. *269*, 299 (1960)
26 Zickner, G., Arch. techn. Messen (ATM) Z 121—1, 2; 123—1 (1935)
27 Zinke, O., Widerstände, Kondensatoren, Spulen und ihre Werkstoffe. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1965

§ 15 Elektrische Maschinen

15.1 Alston, L. L., Barnes, G., Mosson, G. A. G., und White, R., in: 3rd Symposium on Engineering Problems in Thermonuclear Research. München 1964
2 Ameen, D. L., und Wiederhold, P. R., Rev. sci. Instr. *35*, 733 (1964)
3 Baehr, H., Regeln und Steuern durch magnetische Verstärker. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1960
4 Baker, W. R., Rev. sci. Instr. *30*, 700 (1959)
5 Barker, R. C., Commun. Electron. Nr. 28, 819 (1957)
6 Baronetzki, E., J. sci. Instr. *35*, 427 (1958)
7 Bedford, B. D., und Hoff, R. G., Principles of Inverter Circuits. New York 1964
8 Beetz, W., Meßwandler. Braunschweig 1958
9 Bödefeld, Th., und Sequenz, H., Elektrische Maschinen, 7. Aufl. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1965
10 Breitenbruch, H., Transformatoren kleiner Leistung. Prien 1960
11 Buchhold, T. A., Cryogenics *1*, 203 (1961)
12 Clothier, W. K., und Medina, L., Proc. IEE (A) *104*, 204 (1957)
13 Erhart, L., Bull. Schweiz. elektrotechn. Ver. *47*, 1150 (1956)
14 Ettinger, G. M., Proc. IEE *105*, 237 (1958)
15 Farr, R. F., Brit. J. appl. Physics *8*, 366 (1957)
16 Feinberg, R., Bull. Schweiz. elektrotechn. Ver. *42*, 148 (1951)
17 Ginsbach, K.-H., AEG-Mitteilungen *51*, 343 (1961)
18 Goldstein, J., Die Meßwandler, ihre Theorie und Praxis, 2. Aufl. Basel—Stuttgart 1952
19 Hertwig, H., und Richter, G., Valvo-Berichte *3*, 57 (1957)
20 Huber, H. J., Rev. sci. Instr. *35*, 1067 (1964)
21 Jentsch, W., AEG-Mitteilungen *49*, 353 (1959)
22 Jones, J. D., und Matthews, P. W., Rev. sci. Instr. *35*, 630 (1964)
23 Kargl, O., Die Berechnung von Kleintransformatoren mit Diagrammen. Stuttgart 1959
24 Klaudy, P., in: High Magnetic Fields. New York 1962, S. 218
25 Küchler, R., Die Transformatoren, 2. Aufl. Berlin—Heidelberg 1966
26 Lang, A., AEG-Mitteilungen *49*, 329 (1959)
27 Langlois-Berthelot, R., Electro-Magnetic Machines. New York 1955

15.28 Light, L. H., und Hooker, P. M., Proc. IEE (B) *102,* 775 (1955)
29 Linckh, H. E., Z. Instr.-Kde. *67,* 1 (1959)
30 Lufcy, C. W., Proc. IRE *43,* 404 (1955)
31 Mierdel, G., und Kroczek, J., Selengleichrichter. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1959
32 Moeller, F., Leitfaden der Elektrotechnik, Bd. 2, 10. Aufl. Stuttgart 1966
33 Mohr, O., AEG-Mitteilungen *49,* 339 (1959)
34 Morgan, R. E., und McFerran, J. B., Electr. Engng. *73,* 909 (1954)
35 Noordanus, J., Philips Telecommun. Rev. *18,* 125 (1957)
36 Pelczewski, W., Elektrische Maschinenverstärker. Braunschweig 1961
37 Penney, G. W., Horsch, J. R., und Sack, E. A., Trans. AIEE Nr. 5, 68 (1953)
38 Pfaffenberger, J., Siemens-Z. *32,* 115 (1958)
39 Poganski, S., AEG-Mitteilungen *45,* 257 (1955)
40 Rawcliffe, G. H., und Jayawant, B. V., Proc. IEE (A) *103,* 599 (1956)
41 Ireland, I. R., Ceramic Permanent-Magnet Motors. New York 1968
42 Richter, R., Elektrische Maschinen, Bd. 1: Gleichstrommaschinen. Basel—Stuttgart 1967
43 Richter, R., Elektrische Maschinen, Bd. 2: Synchronmaschinen und Einankerumformer, 3. Aufl. Basel—Stuttgart 1963
44 Richter, R., Elektrische Maschinen, Bd. 3: Transformatoren, 3. Aufl. Basel—Stuttgart 1963
45 Roddam, T., Transistor Inverters and Converters. New York 1963
46 Rogers, P. J., in: 3rd Symposium on Engineering Problems in Thermonuclear Research. München 1964
47 Rolf, E., Der Kontaktumformer. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1957
48 Schilling, W., Regelungstechnik *4,* 255, 284 und 308 (1956)
49 Schilling, W., Z. Instr.-Kde. *65,* 183 (1957)
50 Schock, F. K., Adv. cryogen. Engng. *6,* 65 (1961)
51 Schrader, H.-J., Z. Instr.-Kde. *67,* 38 (1959)
52 Schuisky, W., Elektromotoren. Berlin 1951
53 Seifert, G., Stelltransformatoren. Heidelberg 1971
54 Shou-Hsien Chow, J. appl. Physics *25,* 1297 (1954)
55 Smart, D. L., und Weaver, J. J. L., Proc. IEE (A) *105,* 461 (1958)
56 Stenzel, R., Z. angew. Physik *5,* 148 (1953)
57 Stöhr, H., Elektrotechn. und Maschinenbau *61,* 208 (1944)
58 Storm, H. F., Magnetic Amplifiers. New York 1955
59 Unger, F., Elektromaschinen-Praktikum. Braunschweig 1958
60 Van Eldik, P. F., und Cornelius, P., Transformatoren, Drosseln, Transduktoren und Streufeldtransformatoren, 2. Aufl. Eindhoven 1964
61 Vidmar, M., Die Transformatoren, 3. Aufl. Basel 1956
62 Williams, F. C., Laithwaite, A. R., und Pigott, L. S., Proc. IEE (A) *104,* 102 (1957)

§ 16 Spezielle Stromquellen

16.1 Ables, J. G., und Riley, G. H., J. sci. Instr. (2) *1,* 329 (1968)
2 Altenkirch, E., Physik. Z. *12,* 920 (1911)
3 Arp, F., Atomkernenergie *9,* 219 (1964)
4 Attree, V. H., Electron. Engng. *27,* 174 (1955)
5 Bagotskii, V. S., et al. Fuel Cells (Transl. from the Russian). New York 1966
6 Bailitis, E., Z. angew. Physik *17,* 557 (1964)

16.7 Baldus, W., Z. angew. Physik *6*, 481 (1954)
8 Barron, J., Electron. Engng. *26*, 393 (1954)
9 Baum, W. A., Aparisi, R. R., und Garf, B. A., Teploenergetika (russ.) *3*, 31 (1956)
10 Benson, F. A., Electron. Radio Engr. *34*, 16 (1957)
11 Birkholz, U., et al., Energie-Direktumwandlung. München 1967
12 Bloss, W., Elektronische Energiewandler. Stuttgart 1968
13 Bömmel, H., Staub, H., und Winkler, H., Helv. physica Acta *24*, 632 (1951)
14 Bouwers, A., Elektrische Höchstspannungen. Berlin 1939
15 Broadbent, T. E., J. sci. Instr. *44*, 570 (1967)
16 Brookshier, W. K., Rev. sci. Instr. *32*, 359 (1961)
17 Brookshier, W. K., Rev. sci. Instr. *38*, 1245 (1967)
18 Bumiller, F., Meyer, V., Staub, H. H., und Winkler, H., Z. Naturforsch. *10a*, 551 (1955)
19 Calker, J. von, und Fröhlich, W., Ann. Physik *4*, 216 (1959)
20 Chapin, D. M., Fuller, C. S., und Pearson, G. L., Bell Labor. Res. *33*, 241 (1955)
21 Chick, D. R., und Petrie, D. P. R., Proc. IEE(B) *103*, 132 und 152 (1956)
22 Clark, R. E. D., und Farmer, F. T., Nature [London] *174*, 1065 (1954)
23 Collins, D. H., ed., Batteries. Oxford 1963
24 Cones, H. N., I. Res. nat. Bur. Standards 57, 143 (1956)
25 Crawford, K. D. E., J. sci. Instr. *32*, 128 (1955)
26 Devan, J. T., Rev. sci. Instr. *21*, 771 (1950)
27 Dobrinski, P., Knabe, H., und Müller, H., Nachrichtentechn. Z. *10*, 195 (1957)
28 Eckart, F., Exp. Techn. Physik *3*, 49 (1955)
29 Ehrenberg, H. F., Geiss, J., und Taubert, R., Z. angew. Physik *7*, 416 (1955)
30 Euler, J., Neue Wege zur Stromerzeugung. Frankfurt/Main 1963
31 Euler, K. J., Z. angew. Physik *25*, 130 (1968)
32 Felici, N. J., Elektrostatische Hochspannungs-Generatoren und ihre industrielle Anwendung. Karlsruhe 1957
33 Finkelstein, D., Goldberg, P., und Schuchatowitz, J., Rev. sci. Instr. *37*, 159 (1966)
34 Fischer, H.-J., Wiss. Z. Univ. Halle *4*, 265 (1954/55)
35 Foord, T. R., J. sci. Instr. *31*, 440 (1954)
36 Geyger, W. A., Nonlinear-Magnetic Control Devices. New York 1964
37 Geyger, W., Arch. techn. Messen (ATM) J 062-7 (1934)
38 Geyger, W., Magnetic Amplifier Circuits. New York 1954
39 Goldsmid, H. J., et al., Adv. Energy Conversion *7*, 33 (1967)
40 Graaf, R. J. van de, Physic. Rev. *38*, 1919 (1931)
41 Gubkin, A. N., Sov. Physics — J. techn. Physics *2*, 1813 (1957)
42 Gubkin, A. N., und Skanavi, G. I., Sov. Physics — J. techn. Physics *2*, 1825 (1957)
43 Gubkin, A. N., und Skanawi, G. I., Isvest. Akad. Nauk SSSR, Ser. fis. (russ.) *22*, 330 (1958)
44 Hamon, B. V., J. sci. Instr. *30*, 301 (1953)
45 Hedgcock, F. T., und Hunt, F., Rev. sci. Instr. *27*, 970 (1956)
46 Heise, W., AEG-Mitteilungen *52*, 354 (1962)
47 Helke, H., Elektrotechn. Z. (ETZ) *75*, 11 (1954)
48 Helke, H., Regelungstechnik *1*, 134 (1953)
49 Helke, H., und Stenzel, R., Z. angew. Physik *6*, 521 (1954)
50 Hemardinquer, P., Elektron Nr. 11, 360 (1950)

16.51 HERB, R. G., PARKINSON, D. P., und KERST, D. W., Physic. Rev. *51*, 75 (1937)
52 HERCHENBACH, W., Z. angew. Physik *7*, 32 (1955)
53 HERCHENBACH, W., und SIGEL, H., Z. angew. Physik *8*, 355 (1956)
54 HIBBARD, L. U., und CARO, D. E., J. sci. Instr. *30*, 378 (1953)
55 HIGINBOTHAM, W. A., Rev. sci. Instr. *22*, 429 (1951)
56 HUBER, R., Elektrotechn. Z. (ETZ) (B) *18*, 864 (1966)
57 HUETER, K., und ZEIBIG, A., AEG-Mitteilungen *52*, 373 (1962)
58 HUFF, F., und MOCH, W., AEG-Mitteilungen *49*, 434 (1959)
59 JANNER, K., MAGUN, S., und SCHOPPER, E., Z. angew. Physik *7*, 446 (1955)
60 JENKINS, R. O., Brit. J. appl. Physics *9*, 391 (1958)
61 JERVIS, M. W., Proc. IEE(B) *102*, 274 (1955)
62 JIGGINS, A. H., und BEVAN, J. S., J. sci. Instr. *43*, 478 (1966)
63 JOFFE, A. F., Isvest. Akad. Nauk SSSR, Ser. fis. (russ.) *20*, 76 (1956)
64 JOLAS, F., Elektrotechn. Z. (ETZ) (B) *18*, 869 (1966)
65 JUSTI, E., Leitungsmechanismus und Energieumwandlung, 2. Aufl. Göttingen 1965
66 JUSTI, E., und WINSEL, A., Kalte Verbrennung — Fuel Cells. Wiesbaden 1962
67 KARPOV, I., Transistoren in Speisegeräten (Übers. aus dem Russ.). Stuttgart 1966
68 KELLER, L. P., und WALSCHON, E. G., Rev. sci. Instr. *37*, 1258 (1966)
69 KESSLER, J., Ann. Physik (6) *15*, 406 (1955)
70 KINDER, E., und SCHLEICH, F., Z. angew. Physik *2*, 332 (1950)
71 KLUGE, W., Z. angew. Physik *22*, 353 (1967)
72 KNAUER, W., Z. angew. Physik *7*, 118 (1955)
73 KNIGHT, L., Electron. Engng. *27*, 16 (1955)
74 KNIGHT, R. B. D., POOLE, K. M., und SANDERS, J. H., J. sci. Instr. *32*, 134 (1955)
75 KOLLATH, R., Teilchenbeschleuniger. Braunschweig 1955
76 KOSSEL, W., und HERCHENBACH, W., Z. Naturforsch. *6 a*, 166 (1951)
77 KRÖNER, K., Elektronik *6*, 43 (1957)
78 LEIBRECHT, K., Z. angew. Physik *18*, 53 (1964)
79 LESLIE, J. D., SMITH, H. J. T., und BEEK, B. VAN, Rev. sci. Instr. *39*, 1425 (1968)
80 LEVINSON, J., Rev. sci. Instr. *27*, 536 (1956)
81 LEWIS, R. N., JUNG, E. A., WELTER, L. M., VAN LOON, L. S., und CHAPMAN, G. L., Rev. sci. Instr. *39*, 1522 (1968)
82 LOWE, A. E., Electron. Engng. *27*, 85 (1955)
83 MALEJEW, I. A., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 6, 141 (1966)
84 MARKER, R. C., VOELKER, F., FINK, R. W., BRONNER, W. L., EHLERS, K. W., EUKEL, W. W., und GORDON, H. S., Nucleonics *17*, Nr. 2, 94 (1959)
85 MAURER, K., SPRINGER, T., und MAIER-LEIBNITZ, H., Z. angew. Physik *9*, 597 (1957)
86 MEVEL, J., J. Physique Radium *15*, 109 A (1954)
87 MILLAR, B., BAILEY, R., und CHURCHILL, J. L. W., J. sci. Instr. *34*, 383 (1957)
88 MÜLLER-WARMUTH, W., Z. angew. Physik *10*, 122 (1958)
89 MÜLLER-WARMUTH, W., Z. angew. Physik *10*, 497 (1958)
90 MURACA, R. F., SERFASS, E. J., und SCHMITT JR., S. W., Rev. sci. Instr. *24*, 1152 (1953)
91 NEHER, L. K., Nucl. Instr. *5*, 95 (1959)
92 NEUBERT, U., Naturwiss. *44*, 390 (1957)
93 NEUBERT, U., Z. angew. Physik *10*, 100 (1958)
94 NIEGEL, W., AEG-Mitteilungen *50*, 345 (1960)
95 NITSCHE, E., Raumfahrtforsch. *12*, 88 (1968)
96 PAIE, M., PRELEC, K., TOMAS,P., VARICAK, M., und VOSICKI, B., Periodica Math. Physics Astr. *12*, 269 (1957)

16.97 Panzer, S., Optik [Stuttgart] *10*, 107 (1953)
98 Pauthenier, M., und Moreau-Hanot, M., J. Physique Radium 8, 193 (1937)
99 Pearce, T. W., Rev. sci. Instr. *39*, 423 (1968)
100 Penn, T. C., Rev. sci. Instr. *35*, 919 (1964)
101 Popper, P., J. IEE (NS) *2*, 450 (1956)
102 Reilley, E. M., Bender, R. S., und Hausman, J. H., Rev. sci. Instr. *23*, 572 (1952)
103 Reinhold, G., und Truempy, K., IEEE Trans. nucl. Sci. *NS-14*, 139 (1967)
104 Remeikes, A., und Beaudet, R. A., Rev. sci. Instr. *39*, 1223 (1968)
105 Rosenzweig, R. E., Proc. IEE *114*, 405 (1967)
106 Ruben, S., Trans. electrochem. Soc. *92*, 183 (1947)
107 Ryley, J. E., und Gambling, W. A., J. sci. Instr. *39*, 600 (1962)
108 Santoro, R. T., Gillespie, F. E., und Aebersold, P. M., Rev. sci. Instr. *37*, 919 (1966)
109 Schrader, H.-J., Elektrotechn. Z. (ETZ) (A) *76*, 357 (1955)
110 Simonyi, K., Suppl. Nuovo Cim. *3*, 345 (1956)
111 Smith, B. H., Atwood, J. R., und Lyon, D. N., Rev. sci. Instr. *35*, 340 (1964)
112 Sommers, A. S., Weiss, P. R., und Halpern, W., Rev. sci. Instr. *22*, 612 (1951)
113 Soo, S. L., Direct Energy Conversion. Englewood Cliffs, N. Y., 1968
114 Spiers, V. M., und Symons, J., J. sci. Instr. *43*, 342 (1966)
115 Staicopoulos, D. N., Rev. sci. Instr. *32*, 176 (1961)
116 Stamm, H., Wiss. Z. TH Ilmenau *2*, 33 (1956)
117 Steimel, K., Elektrotechn. Z. (ETZ) (A) *83*, 844 (1962)
118 Stuetzer, O. M., Rev. sci. Instr. *32*, 16 (1961)
119 Summerfield, M., ed., Power Systems for Space Flight. New York 1962
120 Sutton, G. W., ed., Direct Energy Conversion. New York 1966
121 Telkes, M., J. appl. Physics *25*, 765 und 1058 (1954)
122 Unger, E., Diss. TH Braunschweig 1957
123 Wawilow, W. S., Atomn. Energ. (russ.) *1*, 399 (1956)
124 Verster, N. F., Appl. sci. Res. [Hague] *1*, 358 (1950)
125 Vielstich, W., Brennstoffelemente. Weinheim/Bergstraße 1965
126 Witte, E., Blei- und Stahlakkumulatoren, 3. Aufl. Mainz 1967

§ 17 Spezielle Meßmethoden der Elektrochemie

17.1 Audran, R., und Dighton, D. T. R., J. sci. Instr. *33*, 92 (1956)
2 Bates, R. G., Determination of pH, Theory and Practice. New York 1964
3 Ben-Yaakov, S., und Kaplan, I. R., Rev. sci. Instr. *39*, 1133 (1968)
4 Billiter, J., Technische Elektrochemie, Bd. 1, 3. Aufl. Halle 1952
5 Bryant, T. H. E., und Grant, E. H., Proc. physic. Soc. *71*, 134 (1958)
6 Campbell, A. N., und Bock, E., Canad. J. Chem. *36*, 1277 (1958)
7 Campbell, A. N., und Paterson, W. G., Canad. J. Chem. *36*, 1004 (1958)
8 Collins, J. R., Electrochemical Measuring Instruments. New York 1962
9 Conley la Force, R., Rev. sci. Instr. *38*, 1225 (1967)
10 Convay, B. E., Electrochemical Data. Amsterdam 1952
11 Distèche, A., und Dubuisson, M., Rev. sci. Instr. *25*, 869 (1954)
12 Euler, J., Z. Instr.-Kde. *67*, 214 (1959)
13 Euler, J., und Lüttichau, H. von, Z. Elektrochem. *61*, 1196 (1957)
14 Feates, F. S., Ives, D. J. G., und Pryor, J. H., J. electrochem. Soc. *103*, 580 (1956)
15 Fischer, L., Winkler, G., und Jander, G., Z. Elektrochem. *62*, 1 (1958)

17.16 Fucks, W., und Tesch, K., Z. Physik *148*, 53 (1957)
17 Gerischer, H., Z. Elektrochem. *58*, 9 (1954)
18 Gerischer, H., Z. Elektrochem. *59*, 604 (1955)
19 Gerischer, H., und Staubach, K.-E., Z. Elektrochem. *61*, 789 (1957)
20 Gerischer, H., und Tischer, R. P., Z. Elektrochem. *61*, 1159 (1957)
21 Gupta, S. R., und Hills, G. J., J. sci. Instr. *33*, 313 (1956)
22 Hampel, C. A., ed., The Encyclopedia of Electrochemistry. New York 1964
23 Harned, H. S., und Owen, B. B., The Physical Chemistry of Electrolytic Solutions, 3. Aufl. New York 1958
24 Hartley, G. S., und Donaldson, G. W., Trans. Faraday Soc. *33*, 457 (1937)
25 Hinkelmann, H., Z. angew. Physik *10*, 500 (1958)
26 Hopkins, D. T., und Covington, A. K., J. sci. Instr. *34*, 20 (1957)
27 Hulley, L. N., und Robson, D., J. sci. Instr. *43*, 728 (1966)
28 Kabanov, B. N., und Leikis, D. I., Z. Elektrochem. *62*, 660 (1958)
29 Kajmakow, J. A., und Fiks, B. F., Prib. Techn. Eksp. (russ.) Nr. 6, 95 (1957)
30 Kolthoff, I. M., und Lingane, J. J., Polarography, 2. Aufl. New York 1952
31 Kordatzki, W., Taschenbuch der praktischen pH-Messung, 4. Aufl. München 1949
32 Kortüm, G., Elektrolytlösungen. Leipzig 1941
33 Kortüm, G., Lehrbuch der Elektrochemie. Weinheim/Bergstraße 1962
34 Kortüm, G., und Weller, A., Z. Naturforsch. *5a*, 451 (1950)
35 Kortüm, G., und Weller, A., Z. Naturforsch. *5a*, 590 (1950)
36 Kupka, F., und Slabaugh, W. H., Analyt. Chem. *29*, 845 (1957)
37 Landsberg, H., und Escher, E. E., Ind. Engng. Chem. *46*, 1422 (1954)
38 Lange, E., und Rysselberghe, P. von, J. electrochem. Soc. *105*, 420 (1958)
39 Little, V. I., J. sci. Instr. *36*, 129 (1959)
40 Mac Fadyen, K. A., und Holbeche, T. A., J. sci. Instr. *34*, 101 (1957)
41 Möhring, K., Z. Elektrochem. *59*, 102 (1955)
42 Neudert, W., und Röpke, H., Chem.-Ing.-Techn. *27*, 205 (1955)
43 Pfau, E., Elektronik *6*, 263 (1957)
44 Prokopalo, O. I., Sov. Physics — Solid State Physics *2*, 280 (1960)
45 Robinson, R. A., und Stokes, R. H., Electrolytic Solutions, 2. Aufl. London 1959
46 Schaaffs, W., Z. angew. Physik *10*, 424 (1958)
47 Schaaffs, W., Z. angew. Physik *10*, 455 (1958)
48 Schaaffs, W., Z. angew. Physik *10*, 503 (1958)
49 Schindler, R., Will, H., und Holleck, L., Z. Elektrochem. *63*, 596 (1959)
50 Schmitt, O. H., und Macpherson, C. H., Rev. sci. Instr. *25*, 910 (1954)
51 Schön, J., Mehl, W., und Gerischer, H., Z. Elektrochem. *59*, 144 (1955)
52 Schouten, G., und Doornekamp, J. G. F., Appl. sci. Res. [Hague] (B) *3*, 265 (1954)
53 Shaw, D. J., Electrophoresis. London—New York 1969
54 Stackelberg, M. von, Polarografische Arbeitsmethoden. Berlin 1950
55 Steel, B. J., und Stokes, R. H., J. physic. Chem. *62*, 450 (1958)
56 Süss, R., Askania-Warte *14*, 25 (1956)
57 Tegart, W. J., McG., The Electrolytic and Chemical Polishing of Metals in Research and Industry. Oxford 1959
58 Watters, J. I., Rev. sci. Instr. *22*, 851 (1951)
59 Will, G. F., Z. Elektrochem. *63*, 484 (1959)
60 Zisman, W. A., Rev. sci. Instr. *3*, 367 (1932)

SACHVERZEICHNIS